第 19 届 CGMO 试题解答

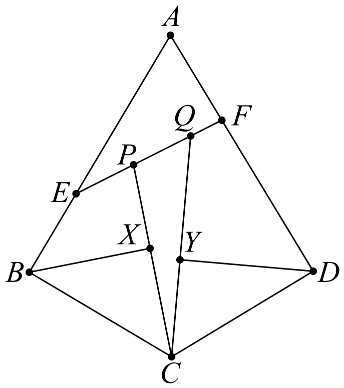
瞿振华

(华东师范大学, 200241)

第 19 届中国女子数学奥林匹克 (CGMO) 于 2020 年 8 月 8 日至 11 日在江西省鹰潭一中举行. 下面介绍本次考试试题及解答.

I. 试题

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD, CB = CD, \angle ABC = 90°$, 点 E, F 分别在线段 AB, AD 上, 点 P, Q 在线段 EF 上(P 在 E, Q 之间), 满足 $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FQ}$. 点 X, Y 分别在线段 CP, CQ 上, 满足 $BX \perp CP, DY \perp CQ$. 证明: X, P, Q, Y 四点共圆. (华东师范大学 何忆捷 供题)



2. 给定整数 $n \geq 2$, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任意实数, 求

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n}[x_ix_j] - (n-1)\sum_{i=1}^{n}[x_i^2]$$

的最大值, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

(南方科技大学 付云皓 供题)

3. 设有三个班级, 每班恰有 n 名同学, 这 $3n$ 名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成 n 组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高

的同学称为“高个子”．已知无论如何分组, 每班都至少有 10 名同学是“高个子”．证明：n 的最小可能值是 40. (南方科技大学 付云皓 供题)

4．设 p, q 是两个不同的素数, $p > q$．证明：$p! - 1$ 与 $q! - 1$ 的最大公约数不超过 $p^{\frac{p}{3}}$. (复旦大学 赖力 供题)

5．求满足下面两个条件的所有实数序列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{c_n\}_{n\geq 1}$：

(i) 对任意正整数 $n, b_n \leq c_n$；

(ii) 对任意正整数 n, b_{n+1} 与 c_{n+1} 是一元二次方程 $x^2 + b_n x + c_n = 0$ 的两根.

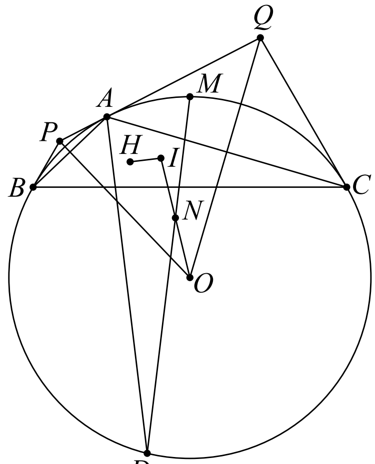
(华东师范大学 瞿振华 供题)

6．设 p, q 均是大于1的整数, 且 p 与 $6q$ 互素．证明：

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q}\right]^2 \equiv 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q}\right] \pmod{q-1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. (南京师范大学 纪春岗 供题)

7．如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, $\angle BAC = 120°$, 外接圆 $\odot O$ 在点 A, B 处的切线相交于点 P, 在点 A, C 处的切线相交于点 Q. 设 H 和 I 分别是 $\triangle POQ$ 的垂心和内心, M 是弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点, N 是线段 OI 的中点, D 是直线 MN 与 $\odot O$ 的另一个交点．证明：$IH \perp AD$. (华东师范大学 林天齐 供题)



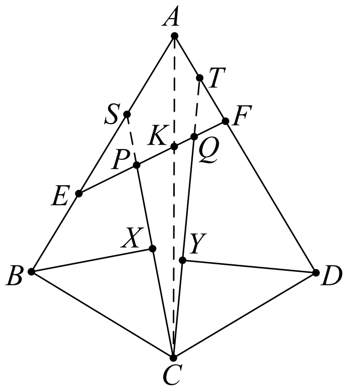
8．给定正整数 n．一个有限项正整数数列 $(a_1, \cdots, a_m)$ 称为“n-偶数列”：若 $n = a_1 + \cdots + a_m$, 且共有偶数个整数对 (i, j) 满足 $1 \leq i < j \leq m$ 而 $a_i > a_j$. 求 n-偶数列的个数.

例如, 共有六个 4-偶数列：(4)、(1,3)、(2,2)、(1,1,2)、(2,1,1)、(1,1,1,1).

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

II. 解答

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD, CB=CD, \angle ABC=90^\circ$, 点 E,F 分别在线段 AB,AD 上, 点 P,Q 在线段 EF 上(P 在 E,Q 之间), 满足 $\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{AF}{FQ}$. 点 X,Y 分别在线段 CP,CQ 上, 满足 $BX\perp CP, DY\perp CQ$. 证明: X,P,Q,Y 四点共圆.



证明. 由条件知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 关于 AC 对称, 且

$$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ.$$

设 AC 与 EF 交于点 K, 由 AK 平分 $\angle EAF$ 得 $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{KE}{KF}$, 又 $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{EP}{FQ}$, 所以 $\dfrac{KE}{KF}=\dfrac{EP}{FQ}$, 即 $\dfrac{KE}{EP}=\dfrac{KF}{FQ}$.

延长 CP 交 AE 于点 S, 延长 CQ 交 AF 于点 T. 对 $\triangle KPC$ 与截线 ESA 运用梅涅劳斯定理, 得

$$\frac{KE}{EP}\cdot\frac{PS}{SC}\cdot\frac{CA}{AK}=1.$$

同理得

$$\frac{KF}{FQ}\cdot\frac{QT}{TC}\cdot\frac{CA}{AK}=1.$$

于是

$$\frac{CS}{PS}=\frac{KE}{EP}\cdot\frac{CA}{AK}=\frac{KF}{FQ}\cdot\frac{CA}{AK}=\frac{CT}{QT},$$

故 $\dfrac{CS}{CP}=\dfrac{CT}{CQ}$, 即 $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{CS}{CT}$.

注意到 $BX\perp CP, DY\perp CQ$ 及 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$, 得

$$\frac{CX\cdot CP}{CY\cdot CQ}=\frac{CX\cdot CS}{CY\cdot CT}=\frac{CB^2}{CD^2}=1,$$

所以 X,P,Q,Y 四点共圆. $\square$

2. 给定整数 $n \geq 2$, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任意实数, 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^{n} [x_i^2]$$

的最大值, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

解. 注意到 $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^{n} [x_i^2] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]\right)$. 因为

$$2[x_i x_j] \leq 2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2 < [x_i^2] + [x_j^2] + 2,$$

且上式最左边和最右边都是整数, 故

$$2[x_i x_j] \leq [x_i^2] + [x_j^2] + 1.$$

等号必须在 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性不同时才可能成立（因为左边是偶数）. 因此, 当 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性不同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 1;$$

当 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性相同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 0.$$

设 $[x_1^2], [x_2^2], \cdots, [x_n^2]$ 中有 k 个奇数, $n-k$ 个偶数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]\right) \leq k(n-k) \leq \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

另一方面, 设 $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. 如果

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1.4,\ x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 1.5,$$

那么当 $1 \leq i < j \leq m$ 或 $m+1 \leq i < j \leq n$ 时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 0;$$

而当 $1 \leq i \leq m$ 且 $m+1 \leq j \leq n$ 时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 1.$$

此时

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]\right) = m(n-m) = \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

综上所述, 所求的最大值为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$. □

3. 设有三个班级, 每班恰有 n 名同学, 这 $3n$ 名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成 n 组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高的同学称为“高个子”. 已知无论如何分组, 每班都至少有 10 名同学是“高个子”. 证明: n 的最小可能值是 40.

证法一. 首先对 $n=40$ 给出一种构造. 设三个班分别为 A 班, B 班和 C 班. 所有学生由高到低分别为 $1,2,\cdots,120$ 号, 其中 $1,2,\cdots,10$ 号和 $71,72,\cdots,100$ 号在 A 班; $11,12,\cdots,30$ 号和 $101,102,\cdots,120$ 号在 B 班; $31,32,\cdots,70$ 号在 C 班.

从而 A 班的 $1,2,\cdots,10$ 号必然是“高个子”; B 班的 $11,12,\cdots,30$ 号中最多有 10 名同学与 $1,2,\cdots,10$ 号之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”; C 班的 $31,32,\cdots,70$ 号中最多有 30 名同学与 $1,2,\cdots,30$ 号至少之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”. 因此这个构造满足题目要求.

下面证明 40 是最小的. 将 $3n$ 名同学按身高由高到低顺次编号为 $1,2,\cdots,3n$, 我们先证明一个引理.

引理. 设三个班的学生满足题目中的条件, 则对于每个班, 都存在一个 k, 使得编号为 $1,2,\cdots,k$ 的学生中, 该班所占的人数比其它两个班所占的人数之和至少多 10 人.

引理的证明. 考虑一个班 (不妨设为 A 班), 设该班的所有同学的编号由小到大排列为 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, 其余两个班的所有同学编号由小到大排列为 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n}$.

对 $1\le i\le n-9$, 将编号为 a_{i+9} 的 A 班同学和编号为 x_i 的 B 或 C 班同学分为一组, 然后将有 A 班和 C 班同学的组中添入一个未被分组的 B 班同学, 将有 A 班和 B 班同学的组中添入一个未被分组的 C 班同学, 剩下同学按照每组 A,B,C 班各一人分组, 此时除编号为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 的同学外, A 班还至少有一名同学是“高个子”, 设其编号为 a_m, 那么 $a_m<x_{m-9}$, 这说明在编号为 $1,2,\cdots,a_m$ 的同学中, A 班有 m 人, B,C 两班加在一起最多 $m-10$ 人, 因此引理得证.

回到原问题, 设 A,B,C 班对应的引理中的 k 分别为 k_1,k_2,k_3, 且不妨设 $k_1\le k_2\le k_3$, 那么在 $1,2,\cdots,k_1$ 号中, A 班至少有 10 人; 在 $1,2,\cdots,k_2$ 号中, B 班至少有 $10+10=20$ 人; 在 $1,2,\cdots,k_3$ 号中, C 班至少有 $10+20+10=40$ 人. 因此 40 是最小可能值. □

证法二. 对学生的编号和构造同证法一, 下面仅证明 40 是最小的, 即证明 $n<40$ 时不可能满足题目中的条件.

假设可以满足条件, 由于每个班都至少有 10 名高个子, 故 $n\geq 30$. 考虑 $a_{n-19},b_{n-19},c_{n-19}$, 不妨设 a_{n-19} 是三个数中最小的, 故编号为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-19}$ 的学生都高于编号为 $b_{20},b_{21},\cdots,b_n,c_{20},c_{21},\cdots,c_n$ 的学生.

现在对 $1\leq i\leq n-19$, 将 a_i,b_{i+1},c_{i+19} 分为一组, 这些组中的高个子都是 A 班的, 剩下的学生按照每班一人分组, 则 B,C 班一共不超过 19 名高个子, 矛盾！因此 40 是最小可能值. □

4. 设 p,q 是两个不同的素数, $p>q$. 证明：$p!-1$ 与 $q!-1$ 的最大公约数不超过 $p^{\frac{p}{3}}$.

证明. 记 $D=\gcd(p!-1,q!-1)$. 易验证 $2!-1$, $3!-1$, $5!-1$, $7!-1$ 两两互素, 故 $p\leq 7$ 时命题成立.

以下设 $p\geq 11$. 注意到 $p!-q!$ 被 D 整除, 而 $q!$ 与 D 互素, 故 D 整除 $\dfrac{p!}{q!}-1$. 于是 $D\leq\dfrac{p!}{q!}\leq p^{p-q}$. 如果 $q\geq\dfrac{2}{3}p$, 则前式推出 $D\leq p^{\frac{p}{3}}$, 已得证. 故以下设 $p>\dfrac{3}{2}q$.

注意到 $D\mid(p!-q!^2)$, 并且 $p!-q!^2\neq 0$（因为 $p!-q!^2$ 不被素数 p 整除）.

如果 $p>2q$, 则 $p!$ 与 $q!^2$ 有公因子 $q!^2$, 它与 D 互素, 从而 D 整除 $\dfrac{p!-q!^2}{q!^2}=\dfrac{p!}{q!^2}-1$, 这推出 $D\leq\dfrac{p!}{q!^2}$. 又 $D\mid(q!-1)$ 推出 $D\leq q!$, 于是

$$D\cdot D^2\leq\frac{p!}{q!^2}\cdot q!^2=p!\leq p^p,$$

故 $D\leq p^{\frac{p}{3}}$, 命题得证.

剩下的情况是 $\dfrac{3}{2}q<p\leq 2q$, 此时 $p!$ 与 $q!^2$ 有公因子 $q!(p-q)!$, 它与 D 互素, 故 D 整除 $\dfrac{p!-q!^2}{q!(p-q)!}\neq 0$, 这推出

$$D\leq\left|\frac{p!}{q!(p-q)!}-\frac{q!}{(p-q)!}\right|\leq\max\left\{\frac{p!}{q!(p-q)!},\frac{q!}{(p-q)!}\right\}.$$

由于

$$\frac{p!}{q!(p-q)!}\leq 2^p\leq 11^{\frac{p}{3}}\leq p^{\frac{p}{3}},$$

而 $\dfrac{q!}{(p-q)!}$ 可以写成 $2q-p$ 个不超过 p 的连续正整数的乘积, 故

$$\frac{q!}{(p-q)!}\leq p^{2q-p}\leq p^{\frac{p}{3}},$$

其中最后一个不等式是因为 $\frac{3}{2}q < p$. 于是 $D \le p^{\frac{p}{3}}$, 得证. $\square$

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列 $\{b_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{c_n\}_{n\ge1}$：

(i) 对任意正整数 $n, b_n \le c_n$；

(ii) 对任意正整数 n, b_{n+1} 与 c_{n+1} 是一元二次方程 $x^2+b_nx+c_n=0$ 的两根.

解. 由条件(i),(ii)可知, b_{n+1} 与 c_{n+1} 由 b_n, c_n 唯一确定, 且由韦达定理, 有

$$b_n = -(b_{n+1}+c_{n+1}), \tag{1}$$

$$c_n = b_{n+1}c_{n+1}. \tag{2}$$

若 $b_1=c_1=0$, 易知对所有 $n\ge1$, 均有 $b_n=c_n=0$, 我们得到满足题目条件的序列 $\{b_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{c_n\}_{n\ge1}$, 对任意正整数 $n, b_n=c_n=0$.

下面证明其他序列均不满足条件.

假设 b_1, c_1 中恰有一个为零. 若 $b_1=0$, 则 $c_1>0$, 方程 $x^2+b_1x+c_1=0$ 无实根, 不满足条件. 若 $c_1=0$, 则 $b_1<0$, 方程 $x^2+b_1x+c_1=0$ 的两根为 $b_2=0$, $c_2=-b_1>0$, 方程 $x^2+b_2x+c_2=0$ 无实根, 不满足条件.

假设 b_1, c_1 均不为零. 若 $b_n>0,\ c_n>0$, 则由等式 (1),(2) 可知 $b_{n+1}<0,\ c_{n+1}<0$. 若 $b_n<0,\ c_n<0$, 则由等式 (1),(2) 可知 $b_{n+1}<0,\ c_{n+1}>0$. 若 $b_n<0,\ c_n>0$, 则由等式 (1),(2) 可知 $b_{n+1}>0,\ c_{n+1}>0$. 从而 (b_n, c_n) 的符号以 3 为周期：$\cdots$、正正、负负、负正、$\cdots$.

若 $b_n>0,\ c_n>0$, 一元二次方程 $x^2+b_nx+c_n=0$ 有实根, 判别式 $b_n^2-4c_n\ge0$, 即 $b_n^2\ge4c_n\ge4b_n$, 故 $c_n\ge b_n\ge4$.

若 $b_n>0,\ c_n>0$, 且 $n>3$. 由等式(1)(2), 并结合 $c_n\ge b_n\ge4$, 我们有

$$b_{n-1}=-(b_n+c_n)<0, \qquad c_{n-1}=b_nc_n>0,$$

$$b_{n-2}=-(b_{n-1}+c_{n-1})=b_n+c_n-b_nc_n<0,$$

$$c_{n-2}=b_{n-1}c_{n-1}=-(b_n+c_n)b_nc_n<0,$$

$$b_{n-3}=-(b_{n-2}+c_{n-2})\ge-c_{n-2}=(b_n+c_n)b_nc_n\ge4b_n,$$

设 $i\in\{1,2,3\}$, 使得 $b_i>0,\ c_i>0$. 于是对任意正整数 $k, b_{i+3k}>0,\ c_{i+3k}>0$. 反复利用上述不等式可得

$$b_i\ge4^kb_{i+3k}\ge4^{k+1}.$$

而 k 是任意的, 这不可能.

综上所述, 所有满足条件的序列 $\{b_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{c_n\}_{n\ge0}$ 只有恒为零的常数列. $\square$

6． 设 p,q 均是大于1的整数, 且 p 与 $6q$ 互素．证明：

$$\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2\equiv 2p\sum_{k=1}^{q-1}k\left[\frac{pk}{q}\right]\pmod{q-1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．

证明. 对 $\alpha\in\mathbb{R}$, 记 $\{\alpha\}=\alpha-[\alpha]$.

$$\begin{aligned}2p\sum_{k=1}^{q-1}k\left[\frac{pk}{q}\right]&=2q\sum_{k=1}^{q-1}\frac{pk}{q}\left[\frac{pk}{q}\right]=q\sum_{k=1}^{q-1}\left(\left(\frac{pk}{q}\right)^2+\left[\frac{pk}{q}\right]^2-\left(\frac{pk}{q}-\left[\frac{pk}{q}\right]\right)^2\right)\\&=q\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{pk}{q}\right)^2+q\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2-q\sum_{k=1}^{q-1}\left\{\frac{pk}{q}\right\}^2.\end{aligned}\tag{1}$$

由于 $(p,q)=1$, $p\cdot1$, $p\cdot2,\cdots,p\cdot(q-1)$ 除以 q 的余数取遍 $1,2,\cdots,q-1$．从而,

$$\sum_{k=1}^{q-1}\left\{\frac{pk}{q}\right\}^2=\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)^2.$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned}2p\sum_{k=1}^{q-1}k\left[\frac{pk}{q}\right]&=\frac{p^2-1}{q}\sum_{k=1}^{q-1}k^2+q\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2\\&=\frac{(p^2-1)(q-1)(2q-1)}{6}+q\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2.\end{aligned}\tag{2}$$

由于 $(p,6)=1$, 故 $6\mid p^2-1$．因此, 由 (2) 得

$$2p\sum_{k=1}^{q-1}k\left[\frac{pk}{q}\right]\equiv\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2\pmod{q-1}.$$

□

7． 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $AB<AC$, $\angle BAC=120^\circ$．设 M 是弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点, 点 P,Q 使得 PA,PB,QA,QC 均与 $\odot O$ 相切, H,I 分别是 $\triangle POQ$ 的垂心和内心, N 是线段 OI 的中点, D 是直线 MN 与 $\odot O$ 的另一个交点．证明：$IH\perp AD$.

证明. 延长 BP,CQ 相交于点 L.

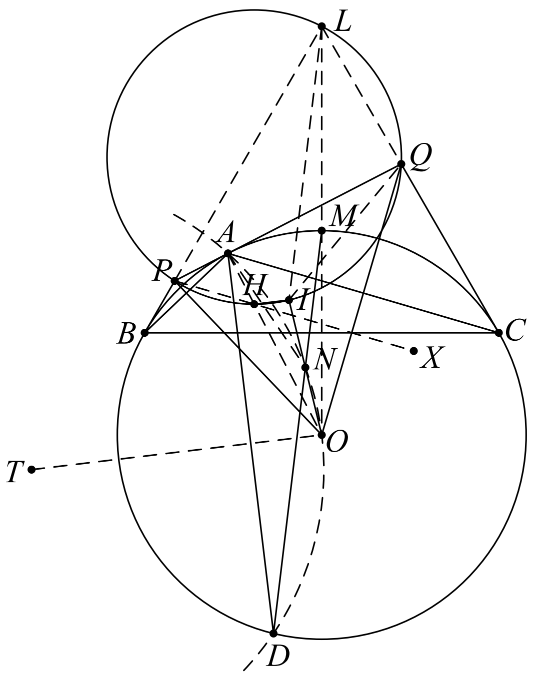
由已知条件可设 $\angle ABC=30^\circ+\theta$, $\angle ACB=30^\circ-\theta$．不难得到

$$\angle OPA=90^\circ-\angle POA=90^\circ-\angle ACB=60^\circ+\theta,$$

同理 $\angle OQA=60^\circ-\theta$, 因此 $\angle POQ=60^\circ$, 进而

$$\angle PIQ=\angle PHQ=120^\circ.$$

又 O 是 $\triangle LPQ$ 的旁心, 所以 $\angle PLQ=2(90^\circ-\angle POQ)=60^\circ$, 故 L,P,H,I,Q 五点共圆.



由于 OI 平分 $\angle POQ$, 并且

$$\angle AOI=\angle POI-\angle POA=30^\circ-(30^\circ-\theta)=\theta,$$

$$\angle AOM=\angle BOM-\angle BOA=60^\circ-2(30^\circ-\theta)=2\theta,$$

所以 OI 平分 $\angle AOM$, 于是

$$\angle AON=\angle AOI=\frac{1}{2}\angle AOM=\angle ADM=\angle ADN,$$

进而 A,N,O,D 四点共圆. 设外接圆圆心是 T.

延长 PH 到点 X. 由内心与垂心的性质可知

$$\angle OHI=\angle IHX+\angle OHX=\angle PQI+\angle OQP=\frac{3}{2}\angle OQP=\frac{3}{2}(60^\circ-\theta)=90^\circ-\frac{3}{2}\theta.$$

注意到在直角 $\triangle LOB$ 中, $\angle BLO=30^\circ$, 故 $LO=2OB=2OM$, 故 $MN\parallel LI$. 由于

$$\begin{aligned}\angle LIO&=\angle LIQ+\angle QIO=\angle LPQ+90^\circ+\frac{1}{2}\angle OPQ=270^\circ-\frac{3}{2}\angle OPQ\\&=270^\circ-\frac{3}{2}(60^\circ+\theta)=180^\circ-\frac{3}{2}\theta.\end{aligned}$$

因此 $\angle MNI=\angle ANI=\dfrac{3}{2}\theta, \angle AOD=\angle AND=180^\circ-3\theta$. 注意到 $OA=OD$, 故 OT 平分 $\angle AOD$ 且 $AD\perp OT$, 故

$$\angle AOT=\frac{1}{2}\angle AOD=90^\circ-\frac{3}{2}\theta,$$

于是 $\angle OHI=\angle AOT$. 而 A,O,H 共线, 故 $IH\parallel OT$. 又 $AD\perp OT$, 所以 $IH\perp AD$. $\square$

8．给定正整数 n．一个有限项正整数列 $(a_1,\cdots,a_m)$ 称为“n-偶数列”：若 $n=a_1+\cdots+a_m$, 且共有偶数个整数对 (i,j) 满足 $1\le i<j\le m$ 而 $a_i>a_j$．求 n-偶数列的个数．

例如, 共有六个4-偶数列：(4)、(1,3)、(2,2)、(1,1,2)、(2,1,1)、(1,1,1,1)．

解. 一个有限项正整数列 $(a_1,\cdots,a_m)$ 称为“n-数列”, 若 $n=a_1+\cdots+a_m$. 若 n-数列不是 n-偶数列, 则称为“n-奇数列”．记 $S(n)$ 为 n-偶数列与 n-奇数列的个数之差, 并定义 $S(0)=1$．下面证明：对 $n\ge1$,

$$S(n)=1+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}S(n-2k). \qquad (*)$$

事实上, 我们可以将 n-数列分为下面几类（当 $n=1$ 时, 仅有第(i)类；当 $n=2$ 时, 仅有第(i)(iii)两类）：

(i) $(a_1)=(n)$．此类 n-偶数列与 n-奇数列个数之差为1；

(ii) 满足 $a_1\ne a_2$ 的 n-数列．注意到 n-数列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 与 $(a_2,a_1,\cdots,a_m)$ 的奇偶性不同, 从而在满足 $a_1\ne a_2$ 的 n-数列中, n-奇数列与 n-偶数列的个数相同．

(iii) 满足 $a_1=a_2$ 的 n-数列．在满足 $a_1=a_2=k$ $(1\le k\le\left[\frac{n}{2}\right])$ 的 n-数列中, 由于 $(a_1,\cdots,a_m)$ 与 $(a_3,\cdots,a_m)$ 的奇偶性相同, 故 n-偶数列与 n-奇数列的个数之差恰好是 $S(n-2k)$（注意, $n=2k$ 时, $S(0)=1$ 对应 (k,k)).

综合(i),(ii),(iii)便知 $(*)$ 式成立．

由 $(*)$ 知, 当 $n\ge3$ 时,

$$S(n)-S(n-2)=\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}S(n-2k)-\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}-1]}S(n-2k)=S(n-2).$$

即 $S(n)=2S(n-2)$．当 $n=2$ 时, 亦有 $S(2)=2=2S(0)$．因此, 当 n 为奇数时,

$$S(n)=1+S(1)+S(3)+\cdots+S(n-2)=2^{\frac{n-1}{2}}.$$

当 n 为偶数时,

$$S(n)=1+S(0)+S(2)+\cdots+S(n-2)=2^{\frac{n}{2}}.$$

注意到 n-数列 $(a_1,\cdots,a_m)$ 与有序数组 $(a_1,a_1+a_2,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_m)$ 一一对应, 而后者的个数等于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 含 n 的子集个数, 故 n-数列的总数为 2^{n-1}．从而 n-偶数列个数为 $\dfrac{2^{n-1}+S(n)}{2}=2^{n-2}+2^{[\frac{n}{2}]-1}$. $\square$