●竞赛之窗●

首届青少年数学周(宗沪杯)数学竞赛

个人赛

一、填空题

1. 如果

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\times\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=2^n,$$

那么，$n=$______.

2. 城市数学邀请赛共设金、银、铜三种奖牌，组委会把这些奖牌分别装在五个盒中，每个盒中只装一种奖牌，每个盒中装奖牌枚数依次是3、6、9、14、18．现在知道其中银牌只有一盒，而且铜牌枚数是金牌枚数的2倍．则有金牌______枚，银牌______枚，铜牌______枚．

3. 已知 p 是质数，且方程

$$x^2+px-444p=0$$

的两个根都是整数．则 $p=$______.

4. 已知实数 a、b、c 同时满足

$$a-7b+8c=4 \text{ 及 } 8a+4b-c=7.$$

那么，$a^2-b^2+c^2=$______.

5. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,CD$，其底角 $\angle DAB=36°$，$\angle CBA=54°$，M、N 分别是边 AB、CD 的中点．若这个梯形的下底 AB 恰好比其上底 CD 长2 008，则线段 $MN=$______.

二、解答题

6. 设 a、b、c 均是不为0的实数，且满足

$$a^2-b^2=bc \text{ 及 } b^2-c^2=ca.$$

证明：$a^2-c^2=ab$.

7. 在锐角$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于点D，$BE\perp AC$于点E，且AD与BE交于点H，M、N分别是边AB、CH的中点．证明：$MN\perp DE$.

8. 设整数 x 使得 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 恰好是完全平方数．试求出所有满足条件的 x 的值．

9. 墙面的花色壁纸中间有一个"三角形的洞"(如图1)，现有一块与三角形洞全等且花色相同的三角形壁纸(如图2)，但由于正反面原因不能直接补上．现需通过裁剪将洞补上．请用笔画出裁剪图和贴补方案(裁剪损耗忽略不计)．

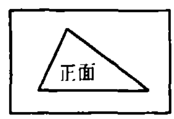

图1

图2

队际赛

1. 计算：$1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\cdots+\frac{1}{20}(1+2+\cdots+20)$的值．

2. 设实数 x、y 满足

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1.$$

求 $x+y$ 的值．

3. 如图3，在凹四边形 $ABCD$ 中，它的三个内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$均为45°，E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA的中点．证明：四边形$EFGH$是正方形．

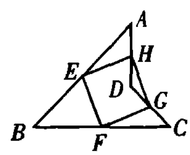

图3

4. 设实数 x、y、z 同时满足

$$x^3+y=3x+4,$$
$$2y^3+z=6y+6,$$
$$3z^3+x=9z+8.$$

试求 $2\,008(x-1)^2+2\,009(y-1)^2+2\,010(z-1)^2$ 的值．

5. 对顺序排列的数，定义下列操作规则：

规则 A：相邻三数 a、b、c 顺序变为 c、b、a，称为一次"变换"；

规则 B:相邻四数 $a、b、c、d$ 顺序变为 $d、c、b、a$,称为一次“变换”.

欲将顺序排列的 1,2,…,2 009,经过若干次变换变为 2 009,1,2,…,2 008. 问:

(1)若只用规则 A 操作,目的能否实现?

(2)若只用规则 B 操作,目的能否实现?

若不能,请说明理由;若能,给出操作过程.

6. 若一个整数能够表示成 $x^2+2xy+2y^2$($x、y$ 是整数)的形式,则称该数为“好数”.

(1)判断 29 是否为好数;

(2)写出 80,81,…,100 中的好数;

(3)如果 $m、n$ 都是好数,证明:mn 也是好数.

7. 在边长为 $2\sqrt{7}$ 的等边△ ABC 中,M 是边 BC 的中点,P 是 AC 上的点.

(1)当 PC 为何值时,$BP+PM$ 有最小值?

(2)求出 $BP+PM$ 的最小值.

8. 试求满足条件 $x^4+x^3+x^2+x=y^2+y$ 的整数对 (x,y).

参考答案

个人赛

一、1. 12.

原等式的左边可化成

$$\frac{4\times4^5}{3\times3^5}\times\frac{6\times6^5}{2\times2^5}=\frac{4^6}{3^6}\times\frac{6^6}{2^6}=4^6=2^{12}.$$

于是,$2^{12}=2^n$.则 $n=12$.

2. 12,14,24.

依据“铜牌枚数是金牌枚数的 2 倍”得铜牌数与金牌数的和应为 3 的倍数.

又铜牌数与金牌数的和应为已知 3、6、9、14、18 中的四个数的和,这是因为“银牌只有一盒”的缘故.

因此,银牌数为 14 枚,金牌数为 $(3+6+9+18)\div3=12$ 枚,铜牌数为 24 枚.

3. 37.

依据

$$x^2=p(444-x) \quad ①$$

可知,$p(444-x)$ 是完全平方数.

又 p 是质数,因此,$p\mid x^2\Rightarrow p\mid x$.

令 $x=np(n\in\mathbf{Z})$ 代入式①得

$(np)^2=p(444-np)$.

由 $p\neq0$ 可得 $n^2p=444-np$,即

$n(n+1)p=2^2\times3\times37$.

因此,$p=37$.

4. 1.

依据条件 $a+8c=4+7b$,$8a-c=7-4b$.

将两式左右分别平方再相加得

$(a+8c)^2+(8a-c)^2$

$=(7+4b)^2+(7-4b)^2$.

化简整理得 $65(a^2+c^2)=65(1+b^2)$.

因此,$a^2-b^2+c^2=1$.

5. 1 004.

如图 4,过点 N 分别作 $NS\parallel AD$ 及 $NT\parallel CB$.

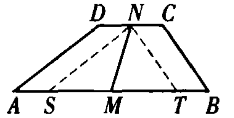

图 4

则由▱$ASND$ 及▱$BTNC$ 可得

$DN=AS$,$NC=TB$,

且 $\angle NST=\angle DAB=36°$,

$\angle NTS=\angle CBA=54°$.

依 $\angle SNT=180°-(\angle NST+\angle NTS)$

$=180°-(36°+54°)=90°$

可以判定△ NST 是直角三角形.

注意到 $AS=DN=NC=TB$,可得

$ST=AB-(AS+TB)$

$=AB-(DN+NC)$

$=AB-DC=2\ 008$.

故 $MN=\frac{1}{2}ST=1\ 004$.

二、6. 将已知等式相加得

$$a^2-c^2=c(a+b). \quad ①$$

依条件 $a^2-b^2=bc$ 得 $a^2=b(b+c)$,即

$$b+c=\frac{a^2}{b}. \quad ②$$

依条件 $b^2-c^2=ca$ 得

$(b+c)(b-c)=ca$.

利用式②得 $\frac{a^2}{b}(b-c)=ac$,即

$bc+ac=ab$.

故 $c(a+b)=ab$.

代入式①即有 $a^2-c^2=ab$ 成立.

7. 如图5,联结 MD、ME.

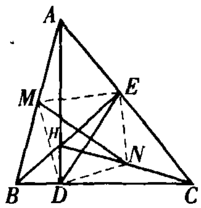

图5

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,DM 是斜边 AB 的中线,因此,

$$MD=\frac{1}{2}AB.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,同理可得

$$ME=\frac{1}{2}AB.$$

故 $MD=ME$. ①

依同样的方法,联结 ND、NE.

同理,$ND=\frac{1}{2}CH=NE$. ②

由式①、②知 MN 是线段 DE 的垂直平分线,当然有 $MN\perp DE$.

注:本题实质上是发现了 A、B、D、E 及 C、D、H、E 分别四点共圆,而 DE 恰好是这两圆的公共弦.

8. 依观察法可以发现,当 $x=0$ 和 $x=-1$ 时原式的值恰为1,满足条件.因此,$x=0$ 或 $x=-1$ 是满足条件的两个解.

又依条件可设

$x^4+x^3+x^2+x+1=p^2(p\in\mathbf{N}_+)$.

于是,$x^4+x^3+x^2+x=p^2-1$,即

$(x^2+1)(x^2+x)=(p-1)(p+1)$.

(1)当 $x>1$ 时,

$x^4+x^3+x^2+x+1>x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$,

且 $x^4+x^3+x^2+x+1<x^4+2x^3+x^2=(x^2+x)^2$.

故 $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+k)^2$,其中,$k\in(1,x)\cap\mathbf{N}$.

从而,$(x+1-2k)x^2=k^2-(x+1)$.

由上式知 $x^2\mid[k^2-(x+1)]$.

又 $|k^2-(x+1)|<x^2$,故

$k^2=x+1,2k=x+1$.

解得 $k=2,x=3$.

(2)当 $x<-1$ 时,设 $y=-x$.则 $y>1$,且

$x^4+x^3+x^2+x+1=y^4-y^3+y^2-y+1<y^4$.

又 $y^4-y^3+y^2-y+1$

$>y^4-2y^3+y^2=(y^2-y)^2$,

故 $y^4-y^3+y^2-y+1=(y^2-k)^2$,其中,$k\in[1,y)\cap\mathbf{N}$.

从而,$(2k+1-y)y^2=k^2+y-1$.

由上式知 $y^2\mid(k^2+y-1)$.

又 $0<k^2+y-1<y^2+y-1<2y^2$,故 $k^2+y-1=y^2$,且 $2k+1-y=1$.

从而,$k^2=y^2-y+1$,且 $k=\frac{y}{2}$.

将后者代入前者得

$y^2=4y^2-4y+4$,

即 $2y^2+(y-2)^2=0$.

此方程无解.

综上,满足条件的 x 值为 $0,-1,3$.

9. 操作如下:

如图6进行分割,分别可以得到四组全等的等腰三角形,经过分割、旋转、平移、重拼,就可以将三角形壁纸补到三角形洞上去了.

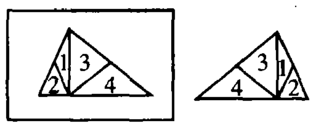

图6

队际赛

1. 原式 $=1+\frac{1}{2}\times\frac{2\times3}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3\times4}{2}+\cdots+\frac{1}{20}\times\frac{20\times21}{2}$

$=\frac{1}{2}(2+3+4+\cdots+21)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{23\times20}{2}=115$.

2. 首先得 $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}$.

两边平方并整理得

$\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}=1-xy$.

两边再平方得

$x^2y^2+x^2+y^2+1=x^2y^2-2xy+1$,

即 $(x+y)^2=0$.

所以,$x+y=0$.

3. 欲证四边形 $EFGH$ 是正方形,只须证:

(1)四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2)$EH=HG$;

(3) $EH \perp HG$.

(1)如图7,联结 AC、BD,延长 BD 交 AC 于点 K,延长 CD 交 AB 于点 L.则由

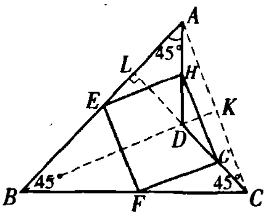

图7

$EF \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$,

$GH \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow EF \parallel HG, EF = HG$.

因此,四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2)只须证 $BD = AC$.

由已知条件得

$\angle BLC = 90°, \angle ADL = 45°$

$\Rightarrow LA = LD, BL = CL$.

所以,$\triangle LBD \cong \triangle LCA \Rightarrow BD = AC$.

再证(3)成立.

由(2)的结果得 $\angle LBD = \angle LCA$,立得 $\angle DKC = 90°$,即 $BK \perp AC$.从而,$EH \perp HG$.

由此知四边形 $EFGH$ 是正方形.

4. 变形得

$y-2=-x^3+3x+2=-(x-2)(x+1)^2$,

$z-2=-2y^3+6y+4=-2(y-2)(y+1)^2$,

$x-2=-3z^3+9z+6=-3(z-2)(z+1)^2$.

以上三式相乘得

$$\begin{aligned}&(x-2)(y-2)(z-2)\\&=-6(x-2)(y-2)(z-2)\cdot\\&\quad(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2.\end{aligned}$$

只能有 $(x-2)(y-2)(z-2)=0$.

不失一般性,令 $x=2$.得 $x=y=z=2$.

故 $2\,008(x-1)^2+2\,009(y-1)^2+2\,010(z-1)^2$
$=6\,027$.

5. (1)规则 A 不能实现目标.

任何一个数在规则 A 之下,其位置的奇偶性不改变.若目标可以实现的话,则"1"由奇数位变到偶数位,这不可能.

(2)规则 B 可以实现目标.

对任意相邻五个元12345操作如下:

12345→15432→34512→32154→51234

可见,经过4次操作后,元素"5"向前进4位.以此类推,2 008是4的倍数,经有限次 B 变换,可使元素2 009排在第一位置,其他元素保持原来的先后顺序.

6. (1)因 $x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$,所以,一个好数可表示成两个完全平方数的和.由 $29=5^2+2^2$,知29是好数.

(2)100以内的完全平方数如下:

0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100.

所求范围内的好数可由它们的和求出(共九个):80,81,82,85,89,90,97,98,100.

(3)设 $m=a^2+b^2, n=c^2+d^2$, a、b、c、d 都是整数.则

$$\begin{aligned}mn&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.\end{aligned}$$

可见,mn 是两个完全平方数的和.

故 mn 为好数.

7. 如图8,联结 AM,把 $\triangle ABC$ 沿 AC 轴翻转180°得到 $\triangle ADC$,N 是 M 的对称点(关于 AC).

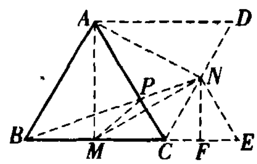

图8

此时,总有 $PM = PN$.

由于 B、N 是定点,故 $BP+PN \geqslant BN$,等号成立条件是,当且仅当点 P 在边 BN 上.

以下求 PC 的值.

延长 BC 到 E,使 $CE = CN$,得等边 $\triangle CEN$.由作法可知

$$PC \parallel NE, \frac{PC}{NE}=\frac{BC}{BE}, 即 \frac{PC}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}.$$

故当 $PC=\frac{2\sqrt{7}}{3}$ 时,$BP+PM$ 有最小值.

过点 N 作 $NF \perp CE$,F 为垂足.则

$NF=\frac{\sqrt{21}}{2}, BF=\frac{5\sqrt{7}}{2}$,

2008年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

一、填空题(每小题8分,共40分)

1. 在 $P(1,1)$、$Q(1,2)$、$M(2,3)$、$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$四个点中,能成为函数 $y=a^x$ 的图像与其反函数的图像的公共点的只可能是______.

2. 如图1所示,四边形 $ABCD$ 是一张长方形纸片,将 AD、BC 折起,使 A、B 两点重合于边 CD 上的点 P,然后压平得折痕 EF、GH. 若 $PE=2$,$PG=1$,$EG=\sqrt{7}$,则长方形纸片 $ABCD$ 的面积为______.

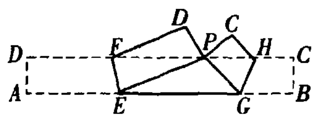
图1

3. 二次函数 $f(x)$ 满足

$f(-10)=9$,$f(-6)=7$,$f(2)=-9$.

则 $f(2\,008)=$______.

4. 如图2,线段 $OA=OB=OC=1$,$\angle AOB=60°$,$\angle BOC=30°$,以 OA、OB、OC 为直径画三个圆,两两的交点为 M、N、P.则阴影部分的曲边三角形的面积是______.

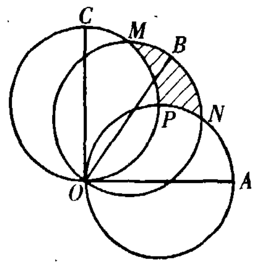
图2

5. 对任意正实数 x,用 $F(x)$ 表示 $\log_2 x$ 的整数部分.则 $F(1)+F(2)+\cdots+F(1\,023)=$______.

二、(15分)证明:

$$BN=\sqrt{BF^2+FN^2}=\sqrt{\frac{175}{4}+\frac{21}{4}}=7$$

故 $BP+PM$ 的最小值为7.

8. 在条件等式两边都乘以4,有

$4x^4+4x^3+4x^2+4x=4y^2+4y$.

配方变形得

$4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=(2y+1)^2$.

注意到

$(2x^2+x)^2=4x^4+4x^3+x^2$

和 $(2x^2+x+1)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

是两个相邻的平方数,并且

$$2x^2+x=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

作为实值函数其最小整数值等于0.

从而,在 x 取整数值条件下

$|2x^2+x|\leqslant|2x^2+x+1|$.

故只有两种情况.

(1) $(2y+1)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1\leqslant4x^4+4x^3+x^2$.

(2) $(2y+1)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1\geqslant4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$.

若(1)成立,则

$3x^2+4x+1\leqslant0$,$-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{3}$,$x=-1$.

于是,$(2y+1)^2=1$,有 $y=0$ 或 $y=-1$,得解 $(-1,0)$,$(-1,-1)$.

若(2)成立,则

$x^2-2x\leqslant0$,$0\leqslant x\leqslant2$.

故 $x=0,1,2$.

当 $x=0$ 时,$y=-1$ 或0,从而有解 $(0,0)$,$(0,-1)$.

当 $x=1$ 时,$y^2+y-4=0$,y 无整数解.

当 $x=2$ 时,$y^2+y-30=0$,$y=-6$ 或5.有解 $(2,-6)$,$(2,5)$.

综上,满足条件的解是

$(-1,0)$,$(-1,-1)$,$(0,0)$,$(0,-1)$,$(2,-6)$,$(2,5)$.

(张同君 提供)