



奥赛经典

解题金钥匙系列

高中物理

主编/黄生训 刘旭华 周石伦 彭圣儒

◆ 湖南师范大学出版社

目 录

第一章	运动学	(1)
第二章	牛顿运动定律	(12)
第三章	机械能 动量和角动量	(29)
第四章	万有引力和天体运动	(60)
第五章	振动和波	(75)
第六章	气体 液体 固体	(92)
第七章	热力学第一定律	(112)
第八章	物态变化 热膨胀	(133)
第九章	静电场	(149)
第十章	稳恒电流	(167)
第十一章	磁场	(183)
第十二章	电磁感应 电磁波	(203)
第十三章	狭义相对论基础	(223)
第十四章	光学	(235)
第十五章	近代物理	(271)

第一章 运动学

【学习目标】

一、质点的位置和位移

质点 是一个能代替物体的有质量的点. 一切只做平动的物体均可视为质点; 当物体的大小和形状在所研究的问题中可以忽略时可视为质点.

位置 当参考系确定后, 质点的位置在直角坐标系中可以用坐标 (x, y, z) 来表示, 如果质点是在运动中, 那么, x, y, z 均可表示为时间 t 的函数. 从坐标原点 O 指向质点所在位置的有向线段 \vec{r} 就是它的位置矢量(位矢).

位移 从初始位置指向终止位置的有向线段(位矢的改变量), 它是一个矢量, 一般用 \vec{S} 表示.

二、直线运动的速度和加速度

速度 速度是描述物体运动快慢的物理量, 物体发生的位移与发生这段位移所用时间的比值, 就是这段时间内物体的平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 这一极限值就是物体在某一位置或某一时刻的

瞬时速度(简称速度): $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

加速度 是表示速度改变快慢的物理量, 是速度对时间的变化率.

$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (平均加速度, 对匀变速直线运动, 它就是物体的瞬时加速度)

$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 是物体的瞬时加速度, 简称加速度.

匀变速直线运动 $v = v_0 + at$ $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2as$

三、曲线运动的速度和加速度

曲线运动的速度定义与直线运动的定义差不多: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$, 而它的加速度既反映物体速度大小的变化, 又反映速度方向的变化. 对于圆周运动, 它的加速度 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, 其中 a_n 是指法向加速度(向心加速度), a_τ 指切向加速度, 对于匀速圆周运动, $a_\tau = 0, a_n = v^2/R$.

四、运动的分解与合成

运动的独立性 一个物体可以同时参与两种或两种以上的运动, 而每一种运动都不因为有其他运动的存在而受到影响, 运动是完全独立的.

运动的合成法则 描述运动的位移、速度、加速度都是矢量, 其合成法则都是平行四边形定则或

三角形法. 已知分运动求合运动, 叫做运动的合成; 已知合运动求分运动, 叫做运动的分解.

1. 平抛运动: 可以分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动, 即

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

2. 斜抛运动: 斜上抛运动可以分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的竖直上抛运动, 有

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta \cdot t \\ y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

五、刚体的平动和转动

刚体 刚体是指在任何条件下, 形状和大小不发生变化的物体. 这样的物体实质上是不存在的, 但固体在一般情形下可视为刚体.

平动 刚体在运动过程中, 其上任一直线段在各个时刻的位置始终保持平行, 这种运动称为平动. 做平动的物体可视为质点.

转动 刚体所有质元都绕同一直线作圆周运动, 这种运动称为转动, 这一直线称为转轴. 如果转轴固定不动, 就称为定轴转动.

1. 角速度 $\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$, 即单位时间内转过的角度(角位移), 对于非匀速转动, 上式只是求出刚体

在 Δt 时间内的平均角速度, 对于瞬时角速度, $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$.

2. 角加速度 单位时间内角速度的变化量, $\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$.

3. 对于匀变速转动, 可以类比匀变速直线运动的规律, 有

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\phi - \phi_0)$$

4. 定轴转动中 ω 、 β 与线速度 v , 切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 的关系为

$$v = \omega R \quad a_\tau = \beta R \quad a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

【解题钥匙】

例1 具有圆锥形状的回转器(螺陀), 绕它的轴在光滑的桌面上快速旋转, 如图1-1所示. 回转器用怎样的速度 v 向前运动, 才能在它从桌子边缘落下时不与桌子边缘发生碰撞.

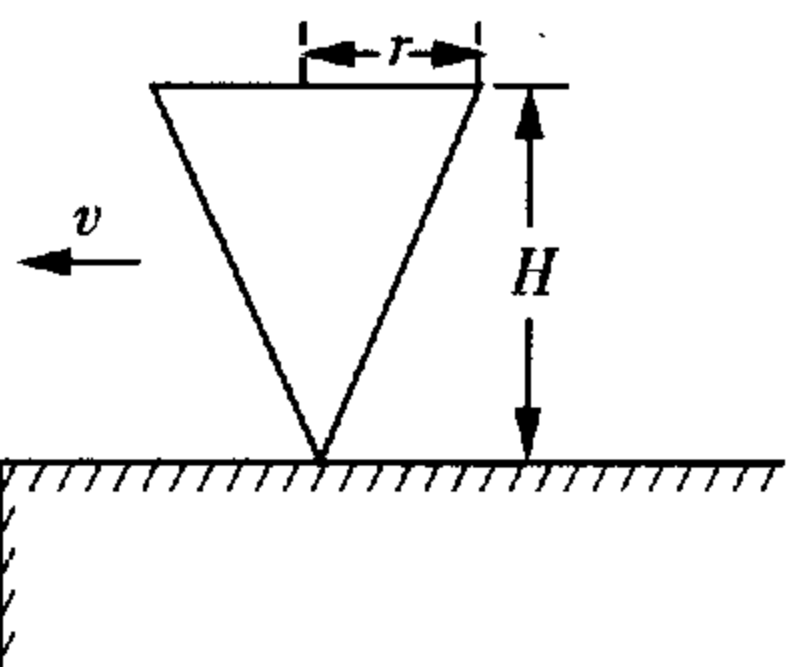


图 1-1

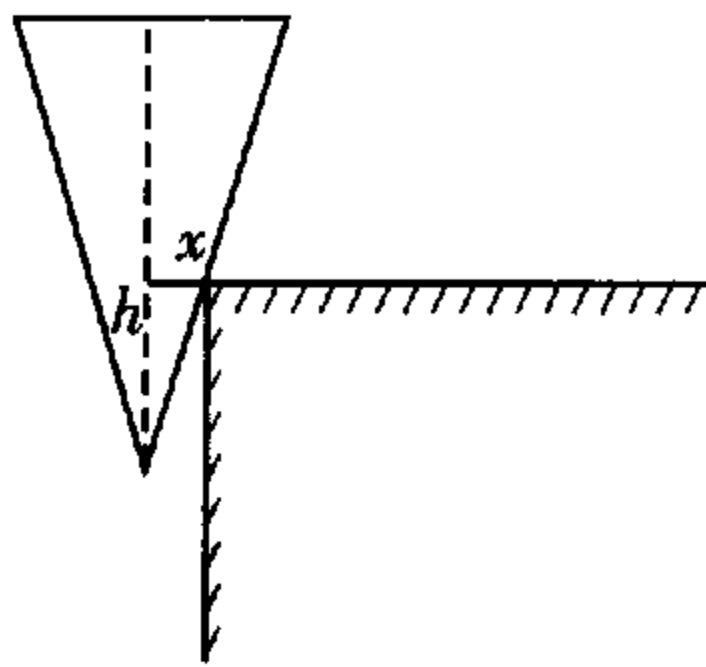


图 1-2

解析 如图 1-2 所示,设桌子边缘碰到半径为 x 处,回转器的顶角为 2θ ,此时对应的下落高度为 h .

$$h = x \cot \theta = x \frac{H}{r}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{2}gt^2 \\ vt &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{2v^2 H}{gr}$$

显然, v 越大, x 越大,当 $x \geq r$ 时满足条件,即有: $v \geq \sqrt{\frac{gr^2}{2H}}$.

方法与技巧 回转器向前运动离开桌面后的运动是平抛运动,要想它不与桌边缘碰撞,当下落的高度为 H 时,水平位移必大于半径 r .

例 2 由于汽车在冰面上行驶时摩擦因数很小,所以其最大加速度不能超过 $a = 0.5 \text{ m/s}^2$. 根据要求,驾驶员必须在最短时间内从 A 点到达 B 点,直线 AB 垂直于汽车的初始速度 v ,如图 1-3 所示. 如果 A 、 B 之间的距离 $AB = 375 \text{ m}$,而初速度 $v = 10 \text{ m/s}$,那么这个最短时间为多少? 其运动轨迹是什么?



图 1-3

解析 坐标系转换:汽车在 A 点不动,而让 B 点以恒速 v 向汽车运动的相反方向运动. 在此坐标系内汽车为了尽快与 B 点相遇,必须沿直线以恒加速度 a 向 B 点驶去. 假设它们在 D 点相遇,如图 1-4 所示. 设 $AB = b$,我们可以列出:

$$b^2 + (vt)^2 = \left(\frac{1}{2}at^2\right)^2$$

①

由①式可得:

$$t = \sqrt{\frac{2v^2}{a^2} + \sqrt{\left(\frac{2v^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{a^2}}}$$

②

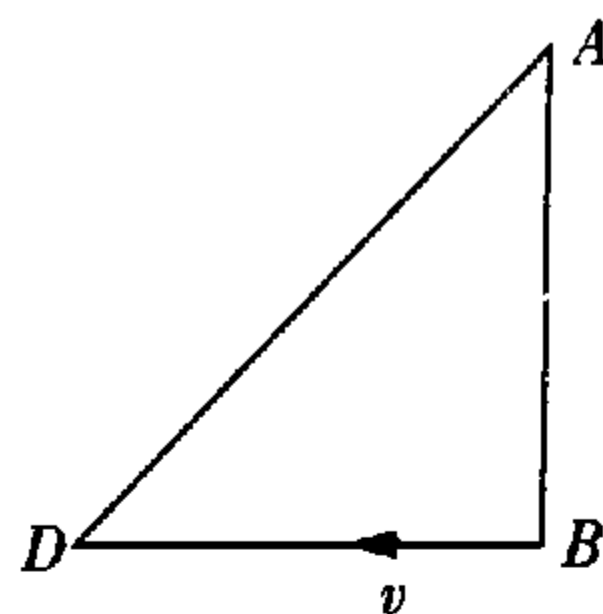


图 1-4

在地球坐标系内,它的运动是两个不同方向上的匀速直线运动和匀加速直线运动的合运动,因而它的运动轨迹是一条抛物线.

方法与技巧 汽车的运动是曲线运动,采用坐标系转换法,将其转换成直线运动,坐标转换法及化曲为直是物理学中常用的方法.

例 3 当赛车在公路的直线段上以最大加速度超车时,在 $\Delta t_1 = 0.1 \text{ s}$ 时间内速度由 $v_1 = 10.0 \text{ m/s}$ 增加到 $v_2 = 10.5 \text{ m/s}$. 当弯道路段半径 $R = 30 \text{ m}$ 时,需要多长时间才能得到同样的效果?

解析 赛车的最大加速度为

$$a = \frac{v_0 - v_1}{\Delta t_1} = 5 \text{ m/s}^2$$

这个加速度取决于发动机的功率和车相对公路的摩擦力,而与道路的弯曲与否无关.在弯道上行驶时,切向加速度 $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$,向心加速度 $a_n = \frac{v^2}{R}$,车辆的加速度: $a^2 = a_t^2 + a_n^2$,由此可得

$$a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2}$$

在本题中,由于速度大小变化很小,而且切向加速度可视为常数,所以所求的时间为

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta v}{a_t} = \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{a^2 - (\frac{v_1^2}{R})^2}} \approx 0.14 \text{ s}$$

方法与技巧 在直线道上,加速度只有直线加速度,而在弯道上,整个加速度 a 是切向加速度 a_t 和向心加速度 a_n 的矢量和.

例 4 一根直径 20 cm 的树干平放在水平地面上.一只懒惰的蚱蜢想跳过树干,求蚱蜢满足条件的最小离地速度(空气阻力不计).

解析 蚱蜢的运动轨迹是抛物线,并与树干相切于两个对称分布的点 B 和 B^* ,在树干的两端.(目前我们对于这些点的情况还不了解——它们可能是也可能不是汇合于树干的顶点 E .)蚱蜢从 A 点以速度 v_1 起跳,起跳方向与平面成 θ 角,如图 1-5 所示.在切点 B 和 B^* ,蚱蜢的速度为 v_2 ,与水平面间的角度为 β .

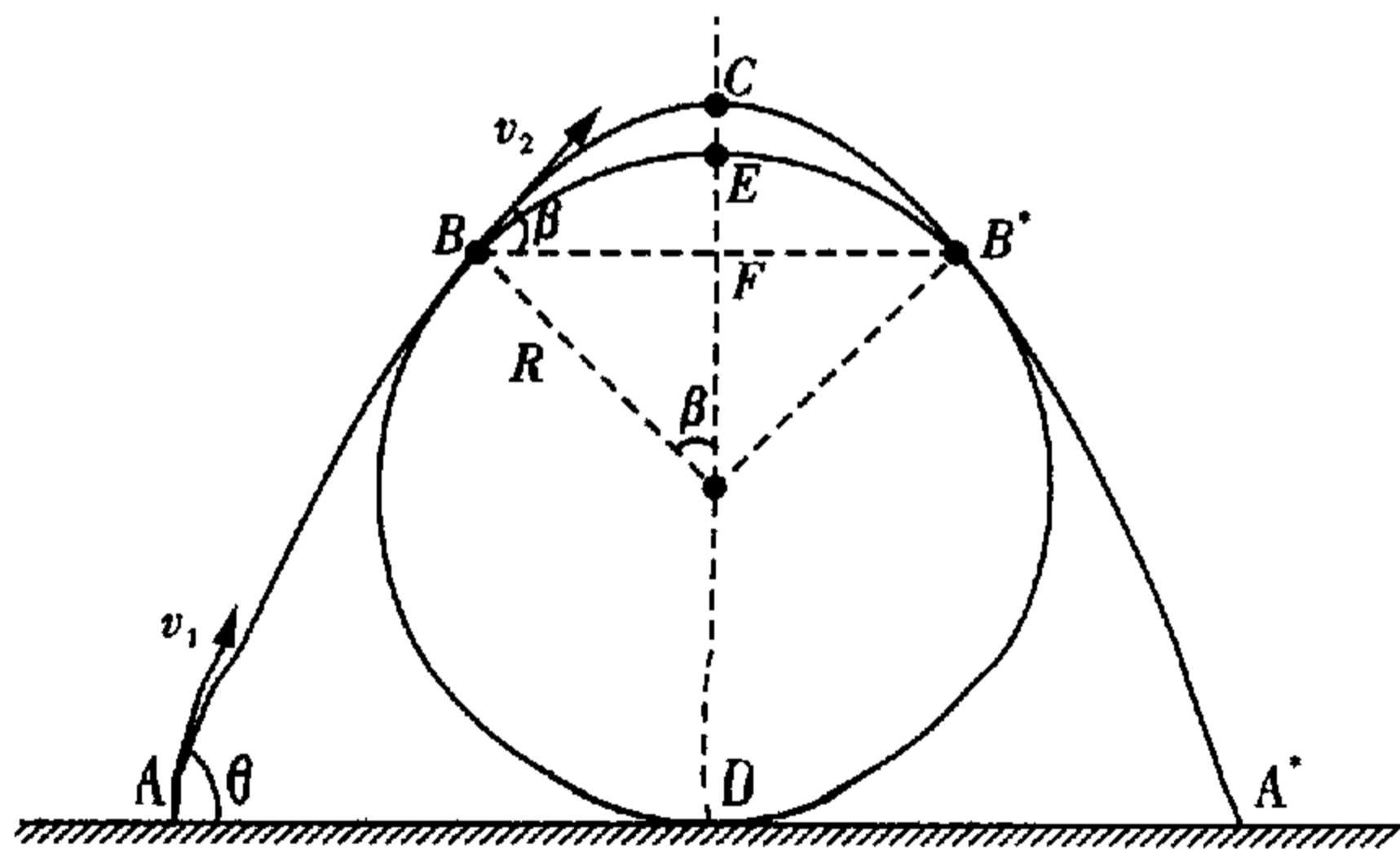


图 1-5

为了简化,选择 β 为独立变量,在点 B ,速度的竖直分量为

$$v_2 \sin \beta = gt_2$$

其中 t_2 为轨迹 BC 段的飞行时间(C 是抛物线的顶点). 相对的水平位移 BF 为

$$v_2 t_2 \cos \beta = R \sin \beta$$

将等式两端相乘,有

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos \beta}$$

在轨迹的 A 点和 B 点间使用能量守恒定律得到

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(R + R \cos \beta)$$

因此有

$$v_1^2 = v_2^2 + 2gR(1 + \cos\beta) = \frac{gR}{\cos\beta} + 2gR(1 + \cos\beta) = 2gR\left(1 + \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right)$$

使用微分的方法可以得出 v_1 的最小值. 然后使用算术表示和几何表示的不等式, 可以用不那么复杂的办法来求解:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right) \geq \sqrt{\cos\beta \frac{1}{2\cos\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此 $\cos\beta + 1/(2\cos\beta)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$, 并由此得出 $\beta = 45^\circ$. 因为 $1.5 > \sqrt{2}$, 故 $\beta = 0$ 的情况需要更大的初速度; 这意味着最小初速度对应的轨迹并不到达树干的顶点. 在抛物线的顶点蚱蜢的重力势能大于在树干顶点处的重力势能, 但是其动能和总能量要小于过树干顶点轨迹对应的动能和总能量.

计算最小初速度的数值得到

$$v_{i\min} = \sqrt{2gR(R + \sqrt{2})} \approx 2.2 \text{ m/s}$$

方法与技巧 此题最易出错之处在于认为蚱蜢在最小的离地速度下其轨迹的最高点与树干的最高点重合. 实际上轨迹的最高点高于树干的最高点.

例 5 在水平地面某一固定点用枪射击, 射出的子弹在水平地面上落点所能够覆盖的最大面积是 S . 若在这一固定点正上方高度为 h 的位置用同一支枪射击, 射出的子弹在水平地面上落点所能覆盖的最大面积是多大?

解析 将固定点作为坐标原点 O , 建立竖直平面内 xOy 坐标. 设子弹初速度为 v_0 , 与水平面夹角为 θ , 则子弹的运动轨迹为

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \quad \text{①}$$

对于大小相同的初速度 v_0 , 在夹角 θ 不同时, 子弹运动轨迹构成一簇抛物线, 该簇抛物线的包络线如图 1-6 中曲线 C 所示, 包络线与 x 轴的交点到原点 O 的距离即是地面上射击时子弹最大水平位移. 包络线方程为

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \text{②}$$

地面上射击, 子弹最大水平位移和最大高度分别为

$$ON = \frac{v_0^2}{g}, \quad OP = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{③}$$

由题设可知: $S = \pi\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \quad \text{④}$

根据包络线方程可以知道, 在 $y = -h$ 时, x 的值(图中 $O'M$) 为在固定点正上方 h 的位置时, 子弹运动的最大水平距离, 有

$$O'M^2 = \frac{2v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{2g} + h \right) \quad \text{⑤}$$

对应的最大面积为

$$S' = \pi O'M^2 = A + 2h \sqrt{\pi A} \quad \text{⑥}$$

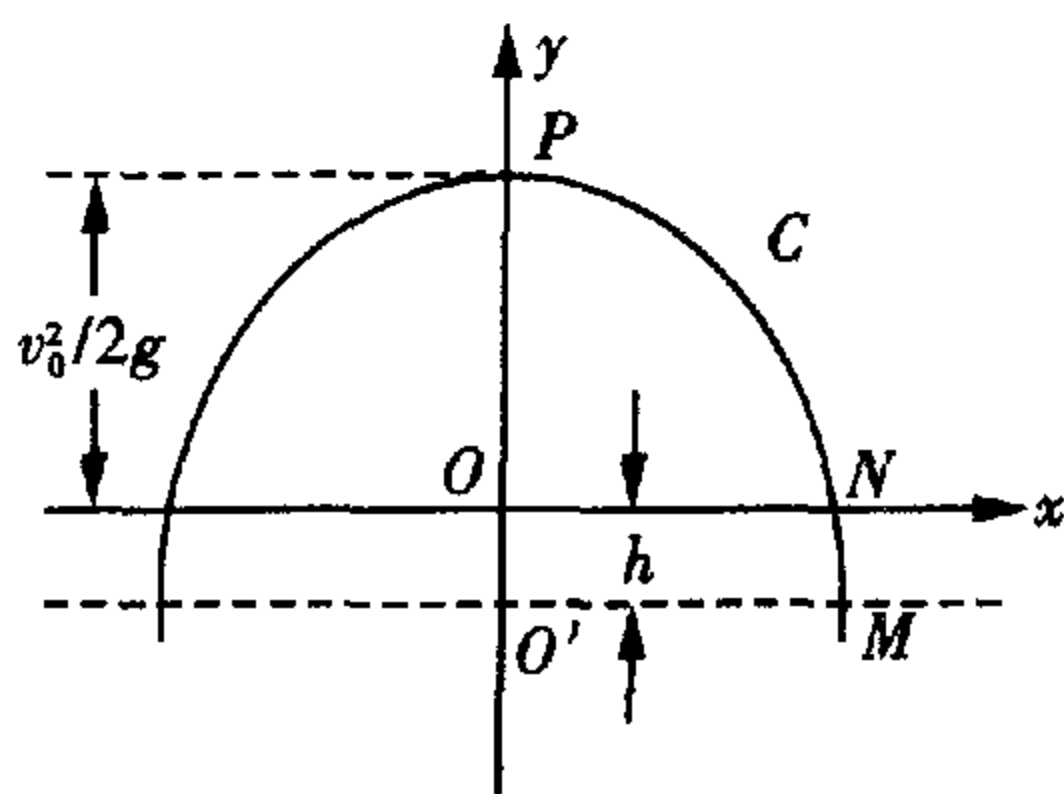


图 1-6

方法与技巧 利用抛物体运动的包络线可以快速而简便地解决此类问题.

例6 线轴置于斜面上,斜面与水平面的夹角为 α . 线的自由端固定住(如图 1-7). 线绳为垂直线时的瞬间线轴的旋转角速度等于 ω . 求在这瞬间的:①线轴轴心的速度;②线轴与斜面相切点的速度. 线轴的半径为 R .

解析 在题中情况下, A 点的速度(图 1-8a)等于

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

不难看出, $v' = \omega R$, 且 $v_A \perp v'$, 由此可得

$$v_0 = \frac{\omega R}{\sin\alpha}$$

同理可以求出线轴与斜面相切 C 点的速度(图 1-8b)

$$\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}''$$

其速度在斜面方向的投影为

$$v_C = v_0 - \omega R$$

将①代入②得

$$v_C = \omega R \frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha}$$

方法与技巧 由于线绳不能伸长,所以垂直线最下面的点和与其相接触的线轴上的 A 点的速度 v_A 相同, v_A 的方向是水平方向. 线轴的运动由两个运动合成:平行于斜面的直线运动,其速度为 v_0 ;绕轴心的顺时针转动,其角速度等于 ω_0 .

例7 三只小蜗牛所在的位置形成一个等边三角形,三角形的边长为 60 cm. 第一只蜗牛出发向第二只蜗牛爬去,同时,第二只向第三只爬去,第三只向第一只爬去,每只蜗牛爬行的速度都是 5 cm/min. 在爬行的过程中,每只蜗牛都始终保持对准自己的目标. 经过多长时间蜗牛们会相遇? 相遇的时候,它们各自爬过了多长的路程? 它们经过的路线可以用怎样的方程来描述? 若将蜗牛视为质点,那么在它们相遇前,绕着它们的最终相遇点转了多少圈?

解析 将蜗牛 2 的速度矢量在指向蜗牛 1 的方向和与之垂直的方向上分解(见图 1-9a). 则两只蜗牛彼此靠近的相对速度为 $v + \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v = 7.5$ cm/min, 因此它们将在 $60 \text{ cm} / (7.5 \text{ cm/min}) = 8 \text{ min}$ 后相遇. 事实上, 8 min 后三只蜗牛将相遇在一起, 由于它们的实际速度为 5 cm/min, 因此在相遇前, 它们爬过的路程为 40 cm.

将速度矢量在其他坐标系中分解可以得到相同的结果, 比如以蜗牛为原点, 指向三角形的中心为一个坐标轴, 其垂直方向为另一个坐标轴, 如图 1-9(b) 所示. 很明显, 最终蜗牛们将在中心点相遇, 而在此坐标系中的速度矢量的分解可以得到蜗牛将以恒定的速度 $(\sqrt{3}/2)v = 5\sqrt{3}/2$ cm/min 爬向中心点. 同时, 围绕中心爬行的速度为 $v/2$.

可以很容易计算出蜗牛在初始状态距离中心点 $60(\sqrt{3}/3)$ cm, 因此它们将在

$$\frac{60(\sqrt{3}/3) \text{ cm}}{5(\sqrt{3}/2) \text{ cm/min}} = 8 \text{ min}$$

后相遇.

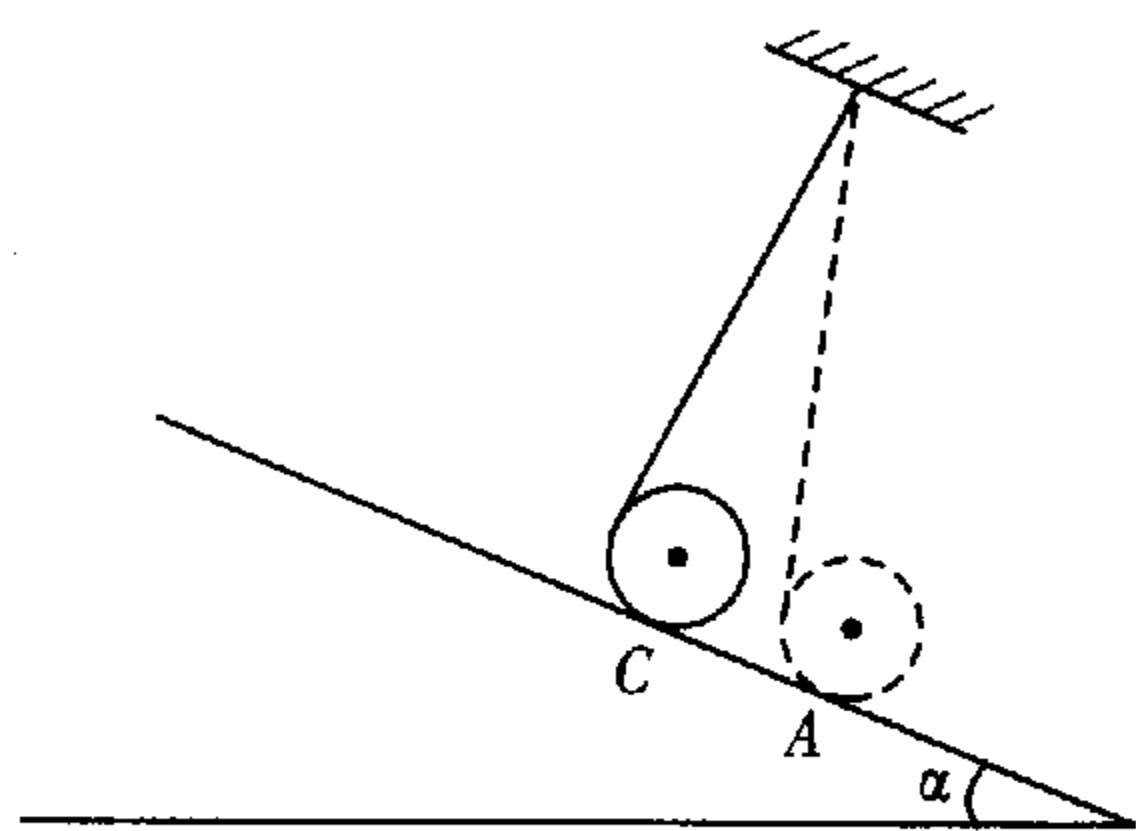


图 1-7

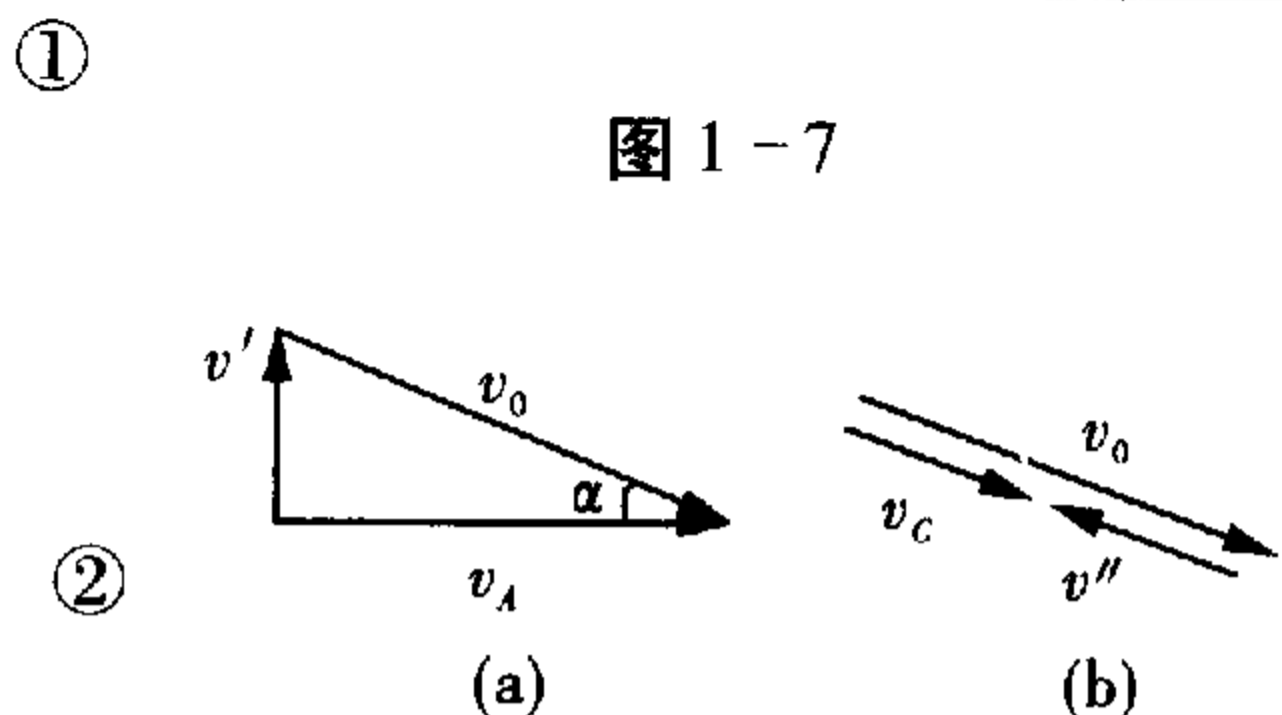


图 1-8

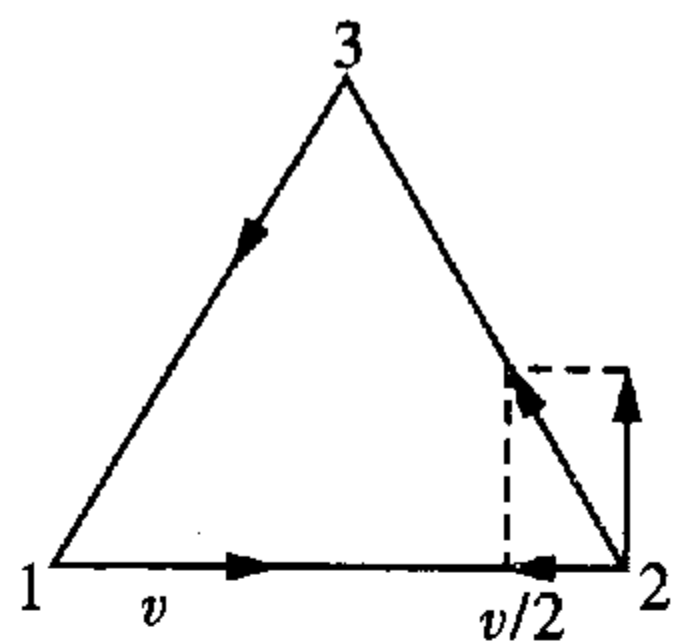


图 1-9(a)

因为图形呈几何对称,每一只蜗牛都在运动,而它运动的方向与其位置和中心点之间的连线总保持 $\pi/6$ 的角度. 因此可以将运行轨迹的运算归纳如下:考虑当一个物体以恒定的速度 v 围绕固定点运动,其速度和位置矢量之间的夹角为一个定值 α ($0 < \alpha < 90^\circ$). 假设位置矢量的初始值为 r_0 ,当其转过一个小角度 $\Delta\phi$ 后,其长度变化为 $-\Delta r$ (图 1-10 所示),则由于 α 为定值,得

$$\frac{\Delta r(\phi)}{\Delta\phi} = -r(\phi) \cot\alpha$$

这个公式很像辐射衰减方程 $dm(t)/dt = -m(t)\lambda$,已经知道此方程的解为 $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$,与此类似,在极坐标中蜗牛移动路径的方程为

$$r(\phi) = r_0 e^{-\phi \cot\alpha}$$

这个方程就是所谓的对数螺旋方程,表明半径 r 会在转过无限的角度后趋向于零. 也就是说,一个类似点的物体经过有限长的时间,走过有限的距离后会到达中心,但是却要转无穷多圈.

方法与技巧 将蜗牛的速度矢量在适当的坐标系内分解,有多种分解的途径,从而会导致不同的解法,各种解法最终都得到相同的答案.

例 8 在听磁带录音机的录音磁带时发觉,带轴于带卷的半径经过时间 $t_1 = 20 \text{ min}$ 减小一半. 问此后半径又减小一半需要多少时间?

解析 设带半径的初半径为 $4r$,于是当半径减少一半,成为 $2r$ 时,带卷的面积减少了

$$S = \pi(16r^2 - 4r^2) = 12\pi r^2$$

这等于所绕带的长度 l_1 与带的厚度 d 之乘积. 在听录音时带运行的速度 v 恒定,所以 $l_1 = vt_1$,于是有

$$12\pi r^2 = vt_1 d \tag{1}$$

当带轴上半径又减少一半(从 $2r$ 到 r)时,带卷的面积减少了 $\pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$,即

$$3\pi r^2 = vt_2 d \tag{2}$$

由①②得

$$t_2 = \frac{t_1}{4} = 5 \text{ min}$$

方法与技巧 抓住录音机在运行时磁带运行的速度 v 恒定.

例 9 木排停泊在河上,到岸的距离 $L = 60 \text{ m}$,流水速度同到岸的距离成比例增大,在岸边 $u_0 = 0$,而在木排边 $u_L = 2 \text{ m/s}$,小汽船离开岸驶向木排. 船相对水的速度 $v = 7.2 \text{ km/h}$,问驾驶员在起航前应该使船指向何方,使以后无需校正船的航向就能靠上与起航处正对面的木排? 这时航行的时间为多长?

解析 离岸 x 处(图 1-11)河水速度 $u = \frac{x}{L}u_L$. 船相对岸沿 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta - u$ (v 是船对水的速度). 因为 $x = vt\cos\theta$,所以有

$$v_y = v\sin\theta - \frac{u_L}{L}vt\cos\theta$$

由此可见,船沿 x 轴作匀速运动,而沿 y 轴作匀减速运动.

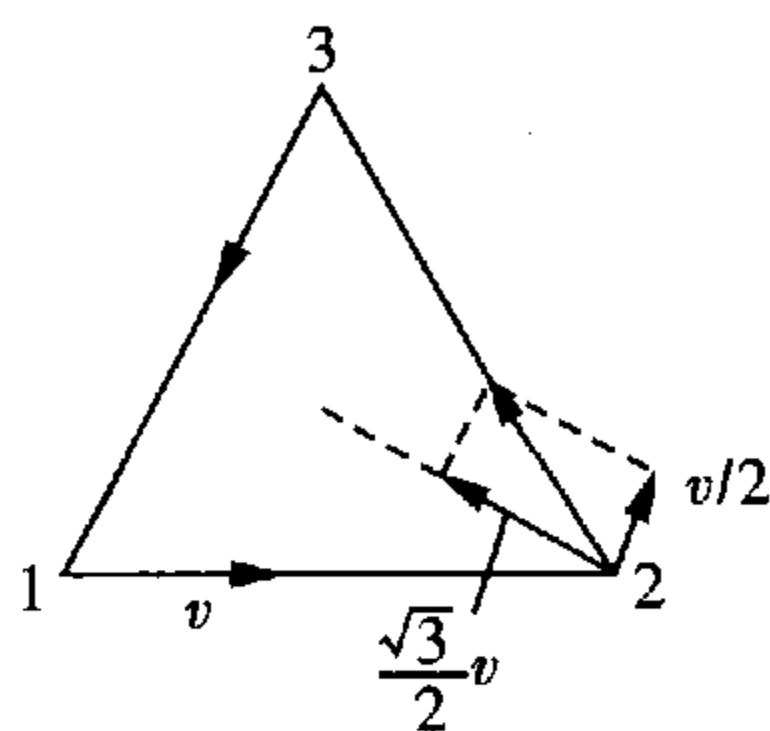


图 1-9(b)

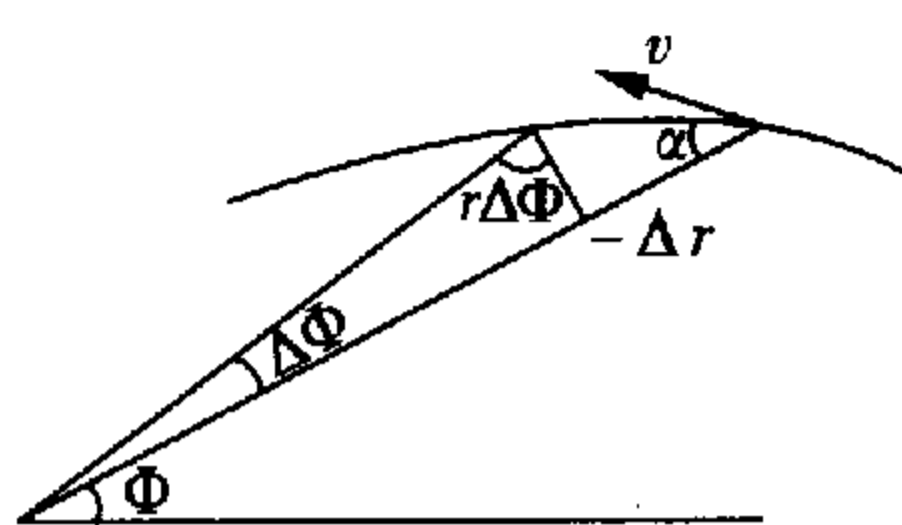


图 1-10

起航后经过时间 t 船的坐标为 x 和 y , 并且有

$$\begin{cases} x = vt \cos \theta \\ y = vt \sin \theta - \frac{u_L}{L} \frac{vt^2 \cos \theta}{2} \end{cases}$$

当船与木排相遇时 $t = T$, 坐标 $y = 0, x = L$, 因此

$$L = vT \cos \theta, 0 = vT \sin \theta - \frac{u_L}{L} \frac{vT^2 \cos \theta}{2}$$

由此得

$$\sin \theta = \frac{u_L}{2v}, T = \frac{L}{v \cos \theta}$$

代入数据得

$$\theta = 30^\circ, T \approx 35 \text{ s.}$$

注: 如果 $u_L \geq 2v$, 那么船不可能同木排相遇.

方法与技巧 本题是一个速度的合成问题, 我们可以考虑各个分运动的独立性, 同时注意水流速度的变化.

例 10 如图 1-12 所示, 有两条位于同一竖直平面内的水平轨道, 相距为 h . 轨道上有两个物体 A 和 B , 它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接. 物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动. 在轨道间的绳子与轨道成 30° 角的瞬间, 绳子 BO 段的中点处有一与绳子相对静止的小水滴与绳子分离, 设绳长 BO 远大于滑轮直径, 求:

- (1) 小水滴 P 脱离绳子时的速度的大小和方向;
- (2) 小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需的时间.

解析 (1) 物体在上轨道的运动可看成沿绳子的运动和垂直于绳子的运动 (即绕 O 点的运动), 如图 1-13 所示.

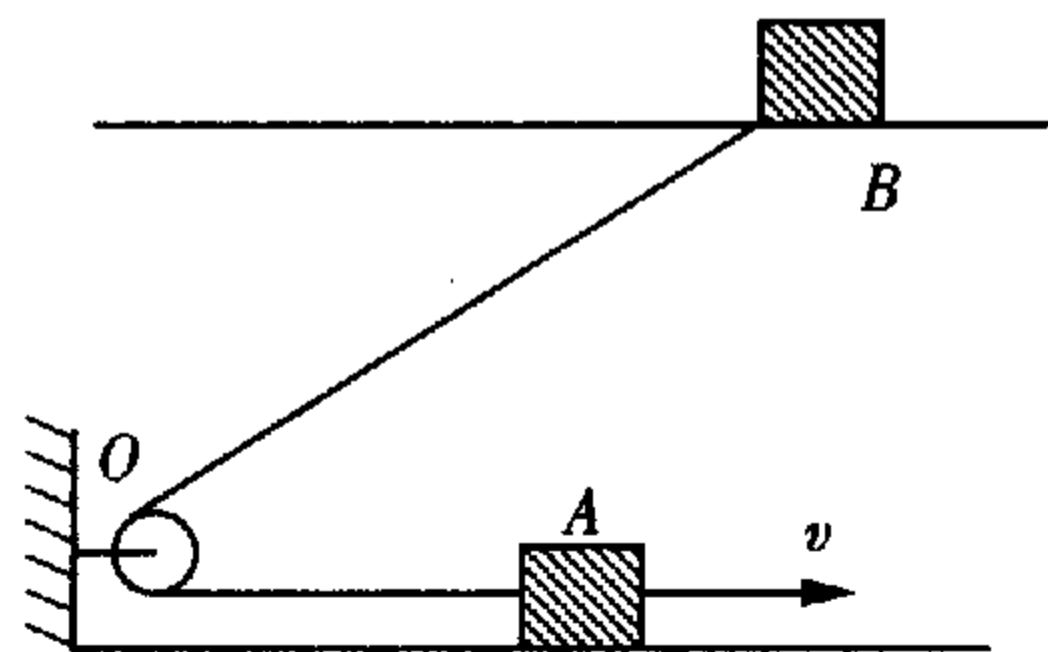


图 1-12

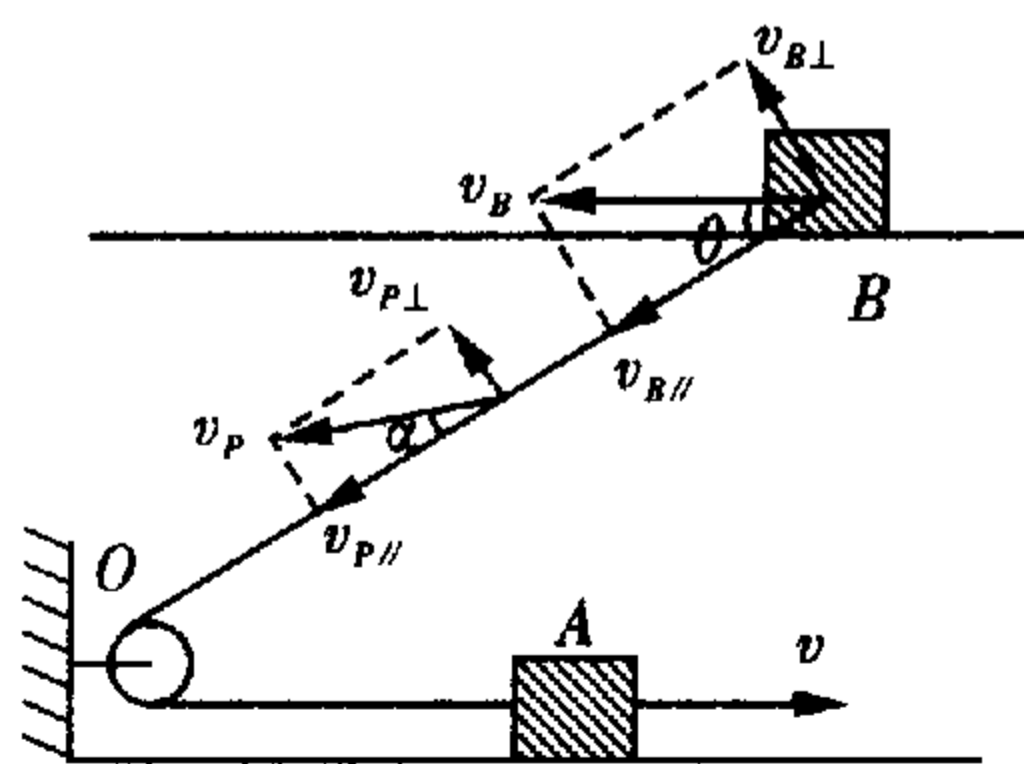


图 1-13

B 沿绳子的分速度: $v_{B//} = v$

B 垂直于绳子的速度: $v_{B\perp} = v \tan \theta, \theta = 30^\circ$

绳子中点 P 的速度也可分解为沿绳子的分速度和垂直于绳子的分速度

$$v_{P//} = v, v_{P\perp} = v \tan \alpha$$

$$\text{又 } \frac{v_{P\perp}}{BO/2} = \frac{v_{B\perp}}{BO}, v_{P\perp} = \frac{1}{2} v_{B\perp} = \frac{1}{2} v \tan \theta$$

则 $\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$, v_p 与水平方向之间的夹角为 $(30^\circ - \alpha)$

$$v_p = \sqrt{v_{p//}^2 + v_{p\perp}^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{1}{2}v\tan\theta\right)^2} = v\sqrt{1 + \frac{\tan^2\theta}{4}} = v\sqrt{\frac{13}{12}}$$

(2) 因 $\alpha < 30^\circ$, 水滴离开绳子后作斜下抛运动, 竖直方向的分运动是初速度为 v_{py0} 、加速度为 g 的匀加速直线运动, 则有

$$v_{py0} = v\sin\theta - v_{p\perp}\cos\theta = v\sin\theta - \frac{1}{2}v\tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{v}{4} \quad (\text{将}\theta =$$

30° 代入解之)

$$\text{则在竖直方向有: } \frac{h}{2} = \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{解得: } t = \frac{1}{4g}(\sqrt{v^2 + 16gh} - v)$$

对于第(1)问, 也可用“瞬心法”求解.

对绳子刚体, 分别过 O 、 B 点作两质点的瞬时速度的垂线交于 C 点, C 点则为刚体的瞬时转动中心, 即瞬心.

由几何关系可知: $\angle BCO = 30^\circ$, 又因 $OB = 2h$

$$\text{则 } CO = \sqrt{3}OB = 2\sqrt{3}h$$

$$\text{则绳子绕瞬心转动的角速度 } \omega = \frac{v}{OC} = \frac{v}{2\sqrt{3}h}$$

$$CP = \sqrt{OP^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + 12h^2} = \sqrt{13}h$$

$$v_p = \omega \cdot CP = \sqrt{\frac{13}{12}}h$$

$$\tan\alpha = \frac{OP}{OC} = \frac{h}{2\sqrt{3}h} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

方法与技巧 物体 B 在上轨道的运动可看成沿绳子的运动和垂直于绳子的运动(绕 O 点的运动). 而“瞬心法”是解题时常用的方法.

例 11 AC 、 BD 两杆均以角速度 ω 绕 A 、 B 两固定点在同一竖直平面内转动, $AB = l$, 转动方向如图 1-15 所示, 当 $t=0$ 时, $\alpha = \beta = 60^\circ$, 试求 t 时刻交点 M 的速度和加速度.

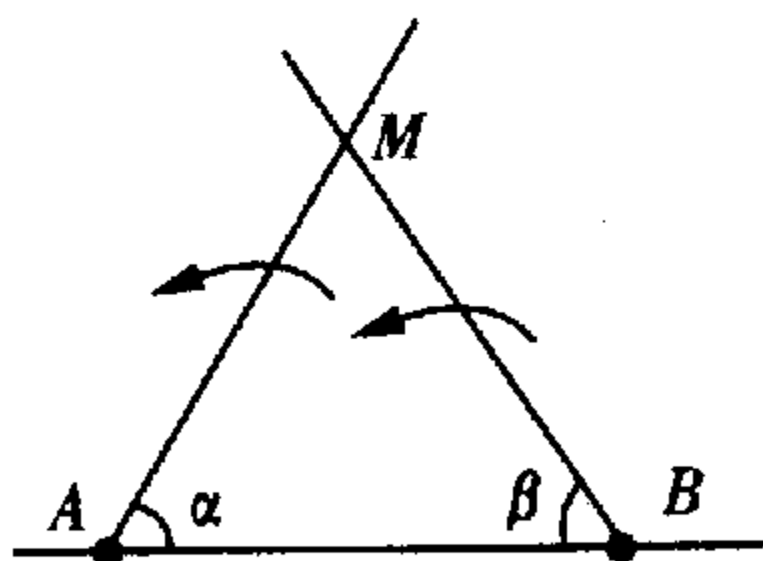


图 1-15

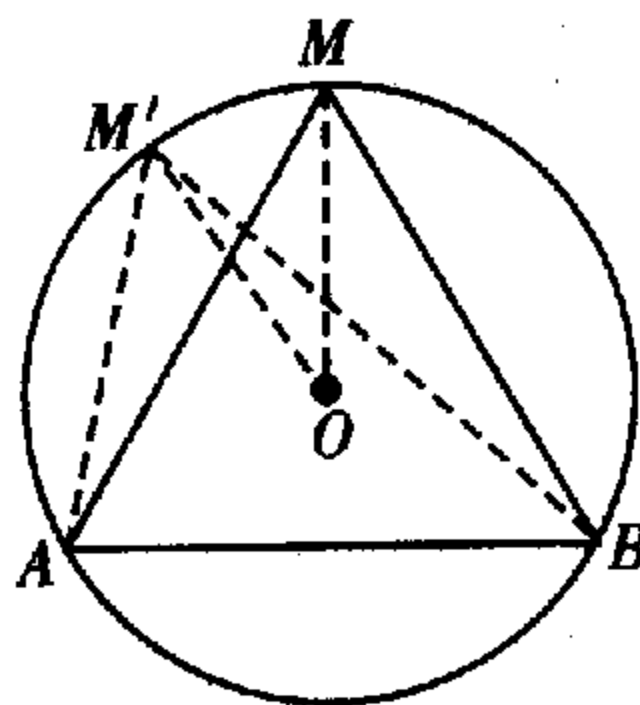


图 1-16

解析 在 $t=0$ 时刻, $\triangle ABM$ 为正三角形, 则 $AM = BM = l$, 两杆旋转过程中, 因转动的角速度相

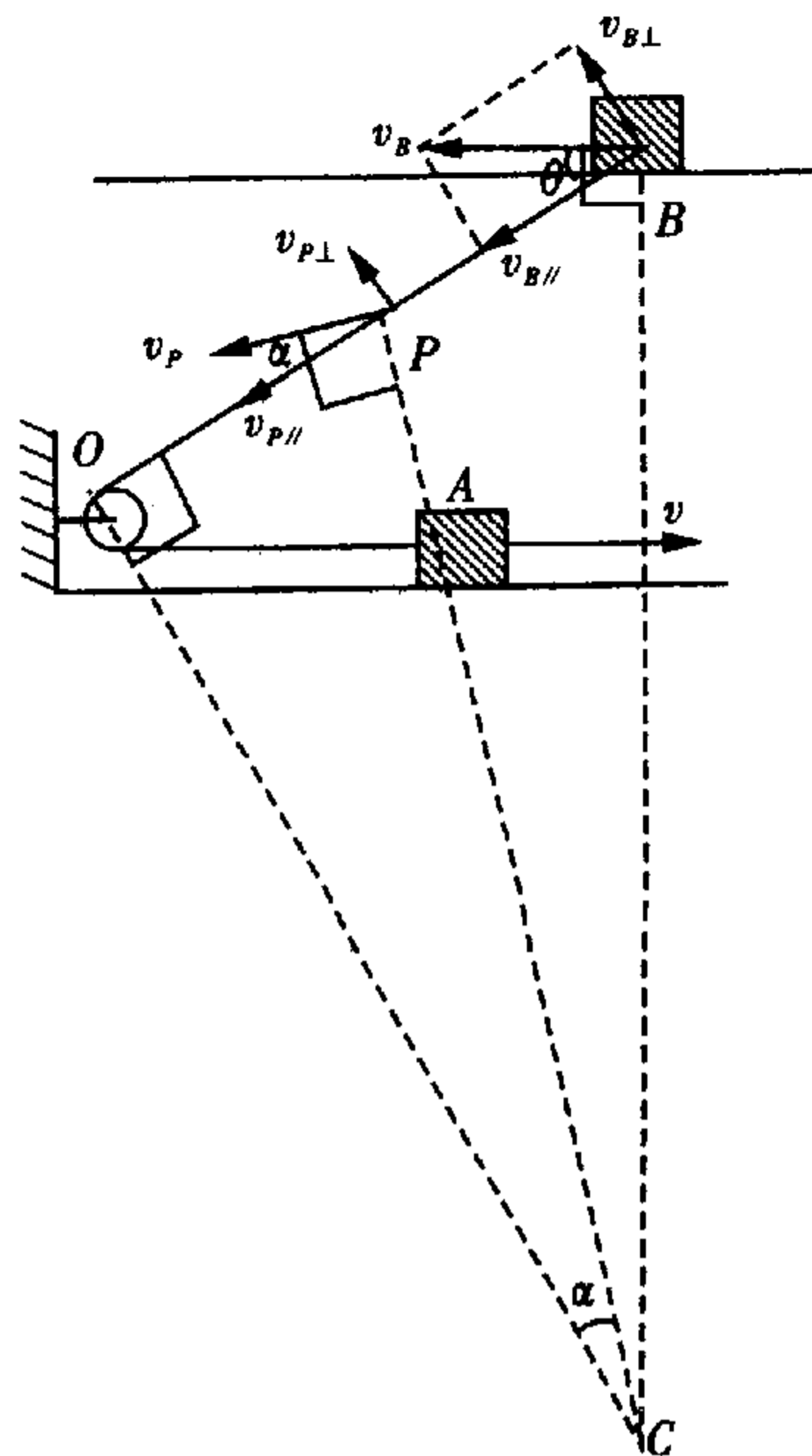


图 1-14

同,则 α 角增加量等于 β 角的减小量, $\alpha + \beta = 120^\circ$ 不变,则顶角 M 大小始终不变,即 $\angle M = 60^\circ$,则 M 点的轨迹在正三角形 ABM 外接圆上运动.

则 $\angle MOM' = 2\angle MBM'$, 则 $\omega_M = 2\omega$

M 点作以半径为 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}l$ 的匀速圆周运动

在任意 t 时刻速度为: $v = 2\omega R = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega l$

向心加速度为: $a_n = (2\omega)^2 R = \frac{4\sqrt{3}}{3}\omega^2 l$

方法与技巧 由 $\alpha + \beta = 120^\circ$ 不变,推知 M 点的轨迹在正三角形 M 外接圆上运动.

【解题尝试】

1. 一个半径为 R 的重圆盘,在缠绕其上的两条不能拉伸的线绳上滚动. 线绳两自由端被固定住(如图 1-17). 当圆盘运动时,线绳始终是拉紧的. 在某一瞬间圆盘的角速度等于 ω ,而两线绳之间的夹角为 θ . 问:这一瞬间盘中心的速度是多少?

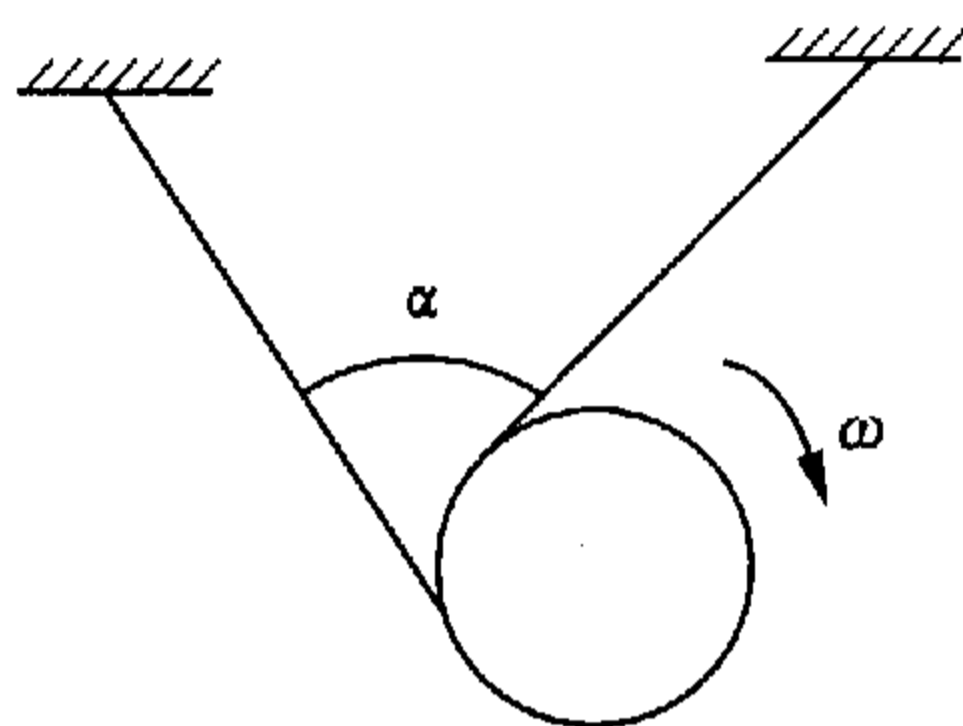


图 1-17

2. 一架飞机沿直线从 A 飞到 B , 然后返回. AB 间距离是 L , 飞机相对空气的速度为 V 并保持不变. 风速稳定.

(1) 如果风沿直线 AB 方向刮, 计算飞机往返行程的总时间. 忽略飞机转弯所需的时间.

(2) 如果风垂直直线 AB 方向刮, 那么往返行程又需多少时间?

(3) 试求出风沿任意方向刮时往返行程所需要的总时间的公式.

3. 线轴沿水平面作没有滑动的滚动, 并且线端 (A 点) 的速度为 v , 方向水平. 以铰链固定于 B 点的木板靠在线轴上(图 1-18), 线轴的内、外半径分别为 r 和 R . 试确定木板的角速度和角 α 的关系.

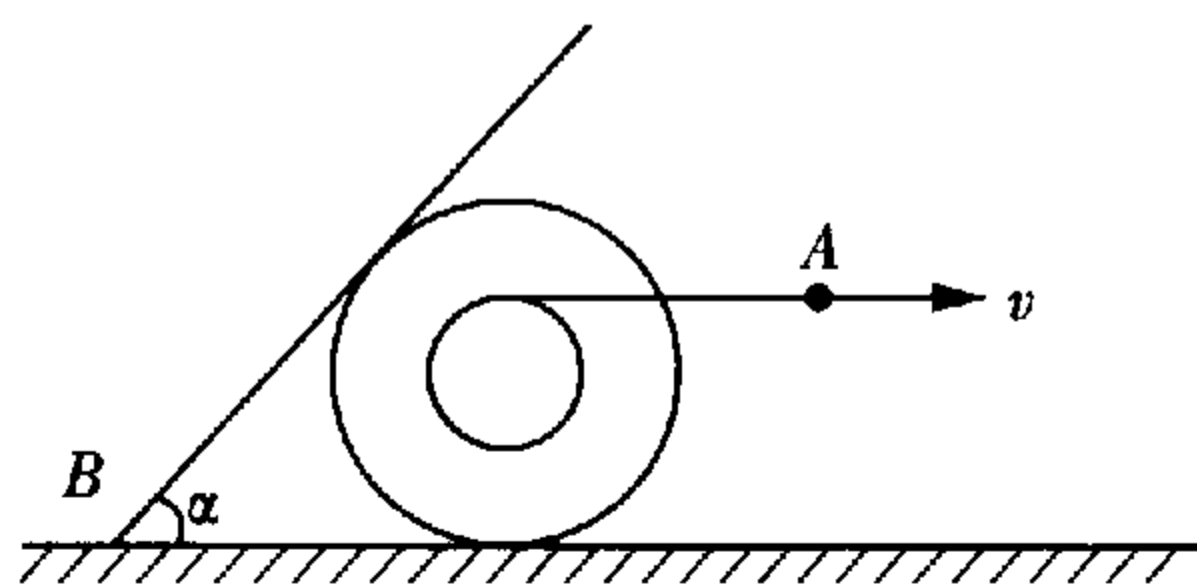


图 1-18

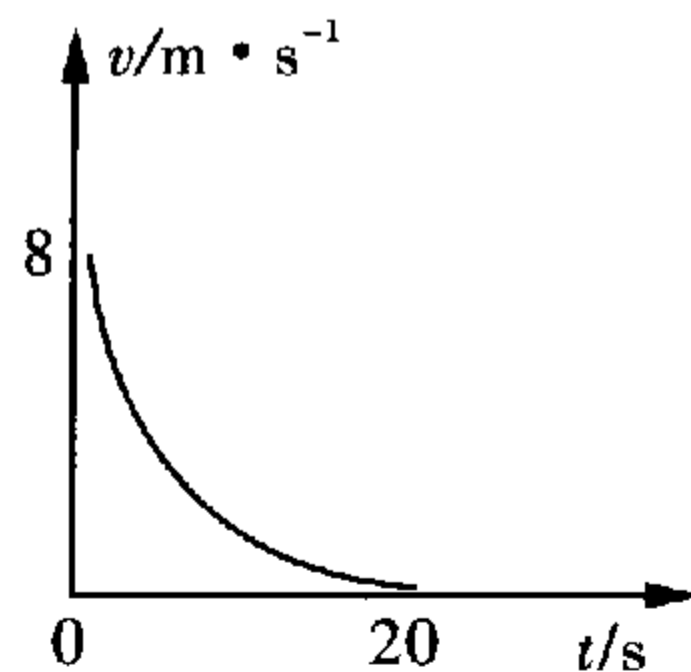


图 1-19

4. 一质点沿直线运动, 其速度随时间变化的关系图像恰好是与坐标轴相切的 $1/4$ 圆弧, 如图 1-19 所示, 则质点在这 20 s 内的位移多大? 质点在 10 s 的角速度 α 多大?

5. 在倾角为 α 的足够宽广的斜坡上修有一高为 h 的塔台, 在塔台上有一门炮, 炮弹出口的初速度为 v_0 , 试求该炮能控制的山坡的面积.

6. 河岸 MN 为一直线, 有一小船自岸边的 A 点沿与岸成 $\alpha = 15^\circ$ 角的方向匀速向河中驶去. 有一人自 A 点同时出发, 他先沿岸走一段再入水中游泳追船. 已知人在岸上走的速度为 $V_1 = 4 \text{ m/s}$, 在水中游泳的速度为 $V_2 = 2 \text{ m/s}$. 试求船的速度最多为多大, 此人才能追上船.

7. 合页构件由三个菱形组成,其边长之比 3:2:1,如图 1-20 所示,顶点 A_3 以速度 v 水平向右移动,求当构件的所有角都为直角时,顶点 A_1 、 A_2 、 A_3 的速度值.

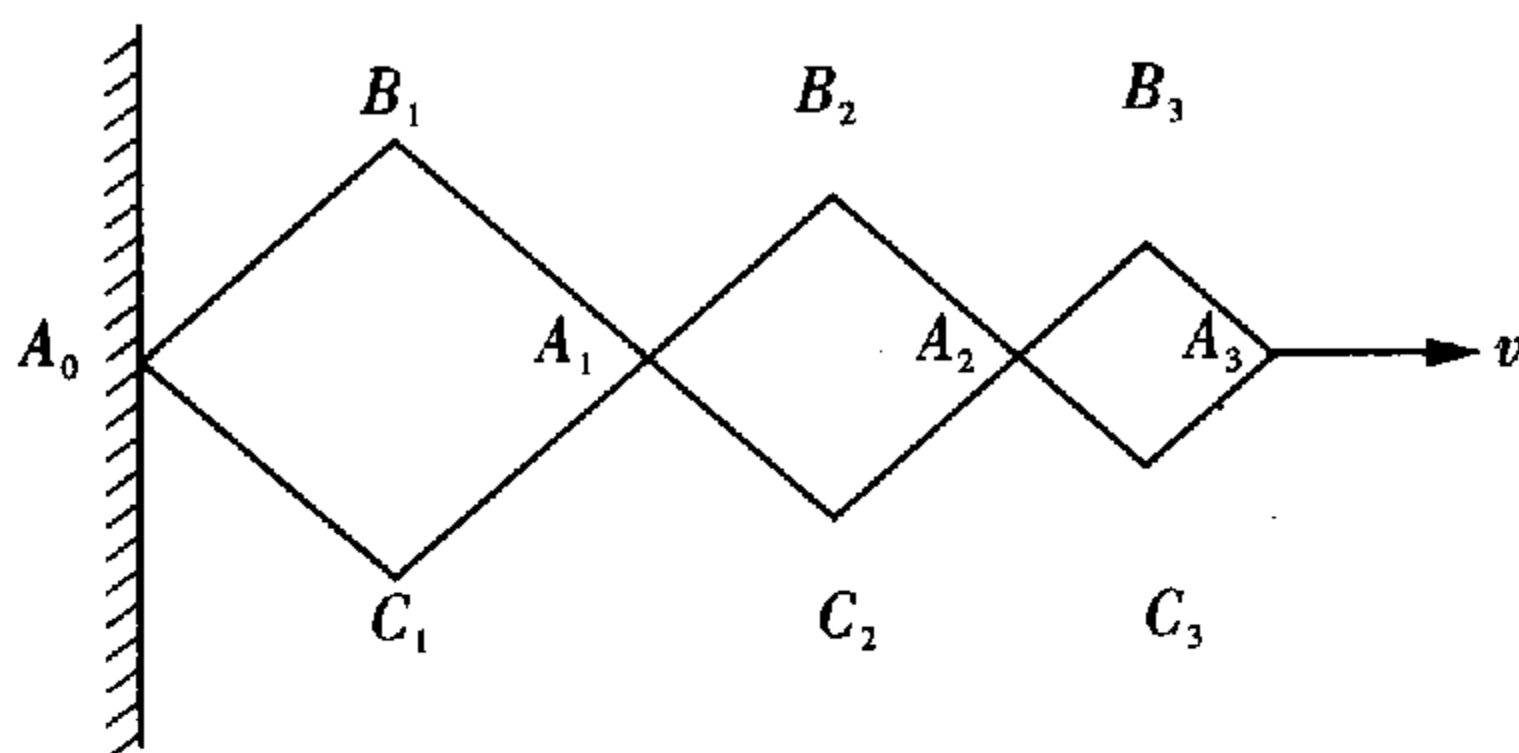


图 1-20

8. 蚂蚁离开巢沿直线爬行,它的速度与到蚁巢中心的距离成反比.当蚂蚁爬到距巢中心 $l_1 = 1$ m 的 A 点处时,速度 $v_1 = 2$ m/s,试求蚂蚁继续由 A 点爬到距巢中心 $l_2 = 2$ m 的 B 点需要的时间.

9. 在距墙靶 d 的地面上用枪射击,子弹初速度为 v_0 ,墙靶上标有一根离地面高 h 的水平线 \overline{MN} . 为使每次枪弹都击中墙靶上水平线 \overline{MN} ,则应要求枪在墙上的瞄准点满足什么条件?

10. 炮从掩蔽所下向外射击,掩蔽所与水平面倾斜成角 α (如图 1-21),炮位于离掩蔽所的地基(B 点)相距 L 的 A 点处. 炮弹的初速度为 v_0 ,炮弹飞行的轨道位于图面上. 求炮弹的最远射程.

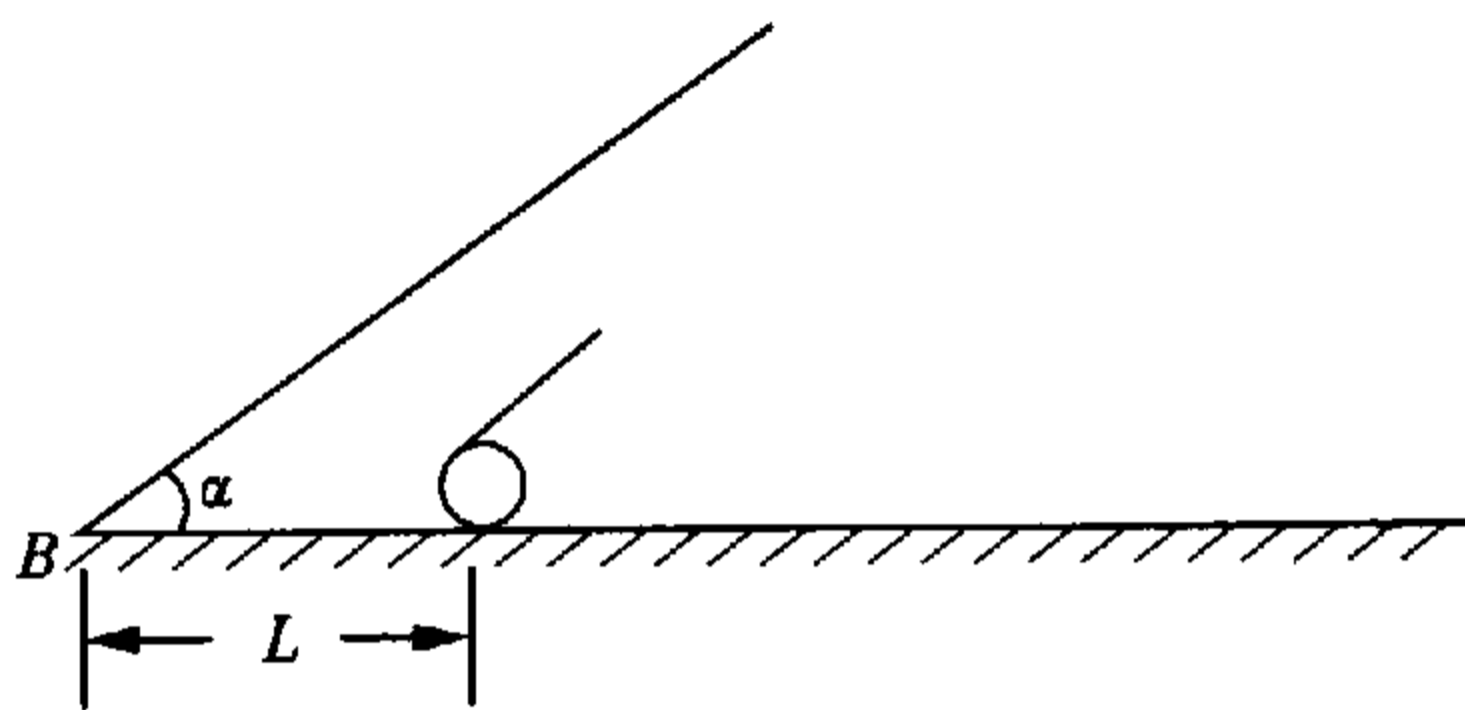


图 1-21

11. 如图 1-22 所示,直线 FM 在给定的椭圆平面内以匀角速度 ω 绕焦点 F 转动. 求此直线与椭圆的交点 M 的速度. 已知椭圆半长轴为 a ,焦点到 M 点的距离为 r ,偏心率为 e .

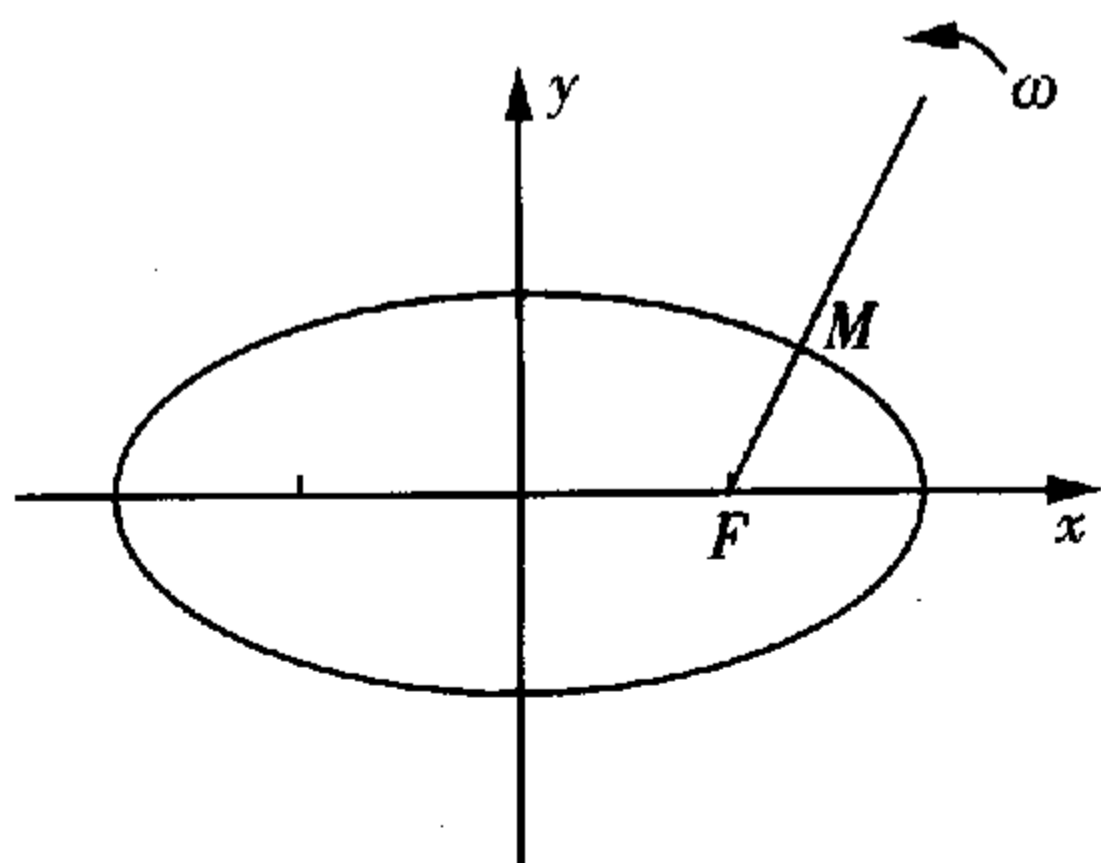


图 1-22

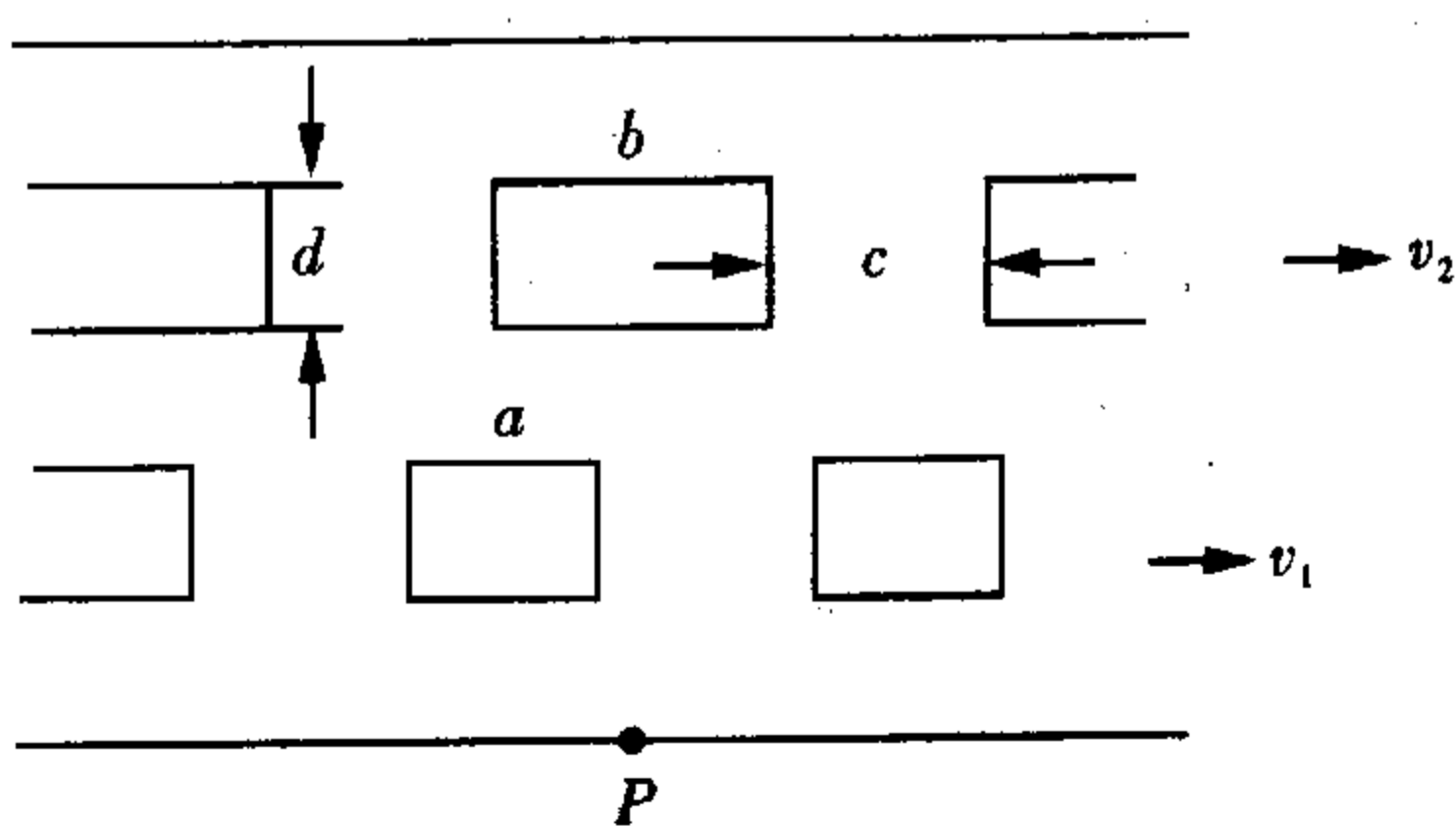


图 1-23

12. 如图 1-23 所示,青蛙从 P 点出发过河,各排间距及障碍物厚度均为 d ,同排间距为 c ,且障碍物长度和移动速度如图所示 ($v_1 \neq v_2$),青蛙只能以一恒定速度运动,求青蛙能顺利过河的最小速度. ($d > c$)

第二章 牛顿运动定律

【学习目标】

一、物体的平衡状态及平衡条件

物体相对于惯性参考系如地面处于静止、匀速直线运动状态,称为物体的平衡状态,简称物体的平衡. 物体的平衡包括共点力作用下物体的平衡、具有固定转动轴的物体的平衡和一般物体的平衡.

对于在共点力作用下的物体,其平衡条件: $\Sigma \vec{F} = 0$ ($\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$); 对于具有固定转动轴的刚体的平衡条件是 $\Sigma M = 0$; 而对于一般物体(刚体)的平衡条件是
$$\begin{cases} \Sigma \vec{F} = 0 \\ \Sigma \vec{M} = 0. \end{cases}$$

求解平衡问题,一般应按以下步骤进行:①恰当地选取研究对象;②正确画出受力分析图;③列出力的平衡方程和力矩平衡方程并求解.

物体的平衡种类:

1. 稳定平衡:如果在物体离开平衡位置时发生的合力或合力矩使物体返回平衡位置,这样的平衡称为稳定平衡. 从能量的角度看,物体偏离平衡位置时势能增加.
2. 不稳定平衡:物体离开平衡位置时发生的合力或合力矩能使这种偏离继续增大,这种平衡称为不稳定平衡. 从能量的角度看,物体偏离平衡位置时势能减小.
3. 随遇平衡:如果物体在离开平衡位置时,它所受的力或力矩不发生变化,在新的位置仍处于平衡状态. 从能量角度看,物体在新的位置势能不变.

二、惯性系与牛顿运动定律

1. 惯性系:牛顿运动定律成立的参考系称为惯性参考系. 地球参考系可以很好地近似视为惯性参考系. 一切相对地面静止或匀速直线运动的参考系均可视为惯性参考系.

2. 牛顿运动定律

牛顿第一定律:一切物体总保持匀速直线运动状态或静止状态,直到有外力迫使它改变这种状态为止. 牛顿第一定律也称为惯性定律.

牛顿第二定律:物体的加速度与其所受外力的合力成正比,与物体的质量成反比,其方向与合外力的方向相同. 即 $\vec{F} = m \vec{a}$. 常作正交分解成

$$F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z$$

牛顿第三定律:两个物体之间的作用力与反作用力总是大小相等,方向相反,作用在同一直线上.

一切相对于惯性系作加速运动的参照系都是非惯性系. 在非惯性系中,只有牛顿第三定律是成立的. 但是引入惯性力以后,就可以利用牛顿第二定律的形式来处理动力学问题.

三、力学中常见的几种力

1. 重力 地面附近的物体受到的地球吸引而引起的力, $G = mg$, 重力加速度 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$.

2. 弹力 直接接触的物体,在发生弹性形变时,由于要恢复原状而跟它接触的物体产生的力.方向沿接触面的法线方向.

在弹性限度内,普通弹簧的弹力

$$F = -kx$$

式中 k 为弹簧的劲度系数, x 表示弹簧的伸长量或压缩量. 负号表示弹力方向与形变 x 的方向相反.

若几个弹簧串联使用,其等效劲度系数为

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

若几个弹簧并联使用,其等效劲度系数为

$$k = k_1 + k_2 + \dots$$

3. 摩擦力

(1) 静摩擦力: 静摩擦力的大小是可变的, 范围在 $0 < f_s \leq f_m$ 之间, 式中 $f_m = \mu_s N$ 为最大静摩擦力. f_s 沿接触面切向、与相对运动趋势方向相反, μ_s 为最大静摩擦因数.

(2) 滑动摩擦力: $f = \mu N$, μ 为摩擦因数, N 为接触面间法向压力, 一般由法向平衡方程确定. f 的方向与物体接触面处相对运动方向相反. 没有指明时一般可认为 $\mu = \mu_s$.

注意: 确定摩擦力的方向要以与之相互作用的物体为参照系.

【解题钥匙】

例 1 如图 2-1 所示, 一个半径为 R 的半球, 大气压强为 P , 试求空气对它的压力.

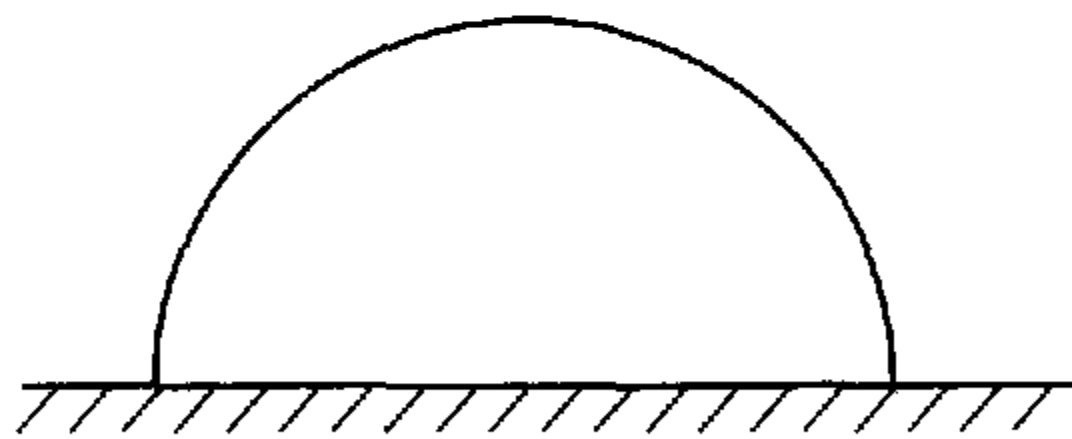


图 2-1

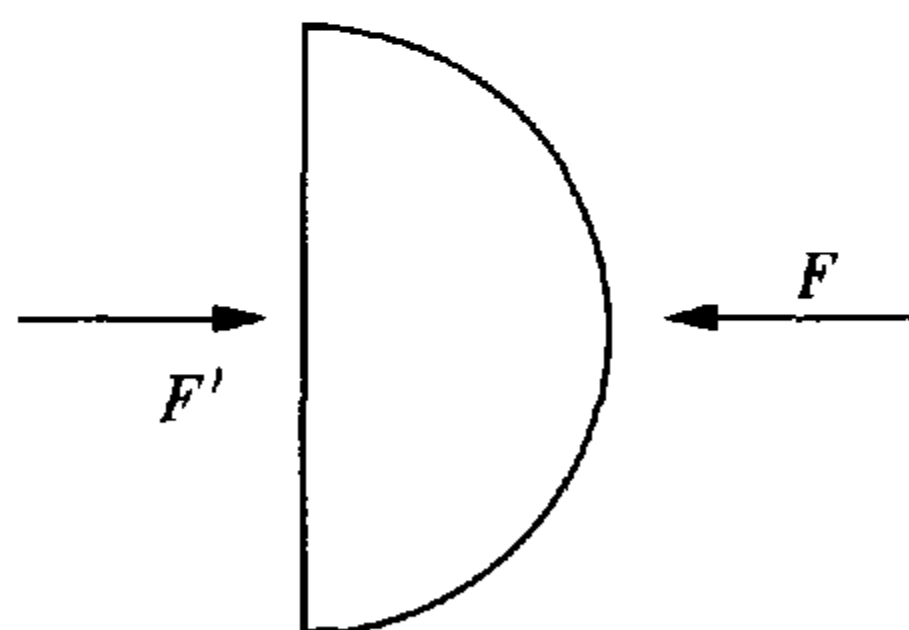


图 2-2

解析 将半球如图 2-2 所示放置, 两边所受的力 F 与 f' 大小相等, 方向相反, 即 $f' = F$.

因为 $F = f'$

$$\therefore F = P \cdot \pi R^2 = \pi R^2 P.$$

方法与技巧 本题使用了“等效法”, 也可使用投影法求解.

例 2 三个完全相同的圆柱体, 如图 2-3 叠放在水平桌面上, 将 C 柱放上去之前, A 、 B 两柱体之间接触而无任何挤压, 假设桌面和柱体之间的摩擦因数为 μ_0 , 柱体与柱体之间的摩擦因数为 μ , 若系统处于平衡, μ_0 与 μ 必须满足什么条件?

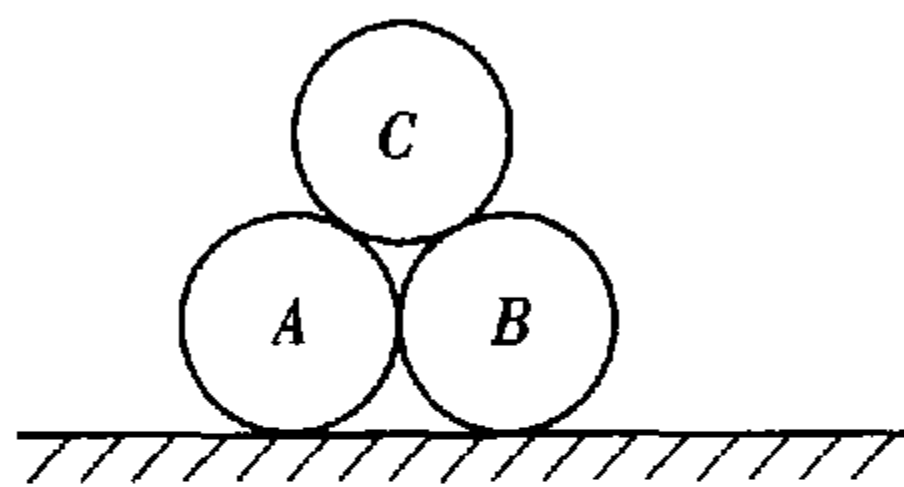


图 2-3

解析 设每个圆柱的重力均为 G , 首先隔离 C 球, 受力分析如图 2-4 所示, 由 $\sum F_{Cy} = 0$ 可得

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{1}{2}f_1\right) = G \quad \text{①}$$

再隔离 A 球, 受力分析如图 2-5 所示, 由 $\Sigma F_{Ay} = 0$ 得

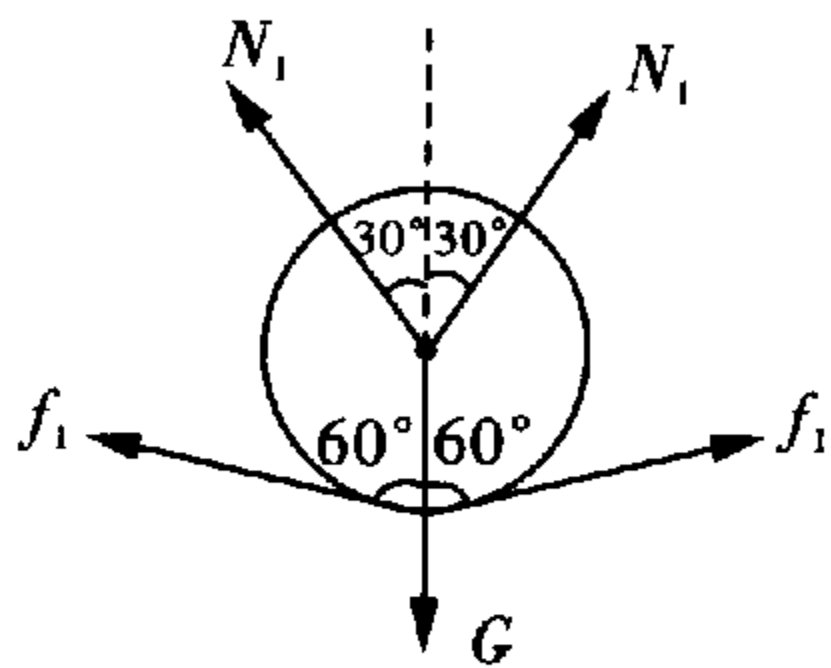


图 2-4

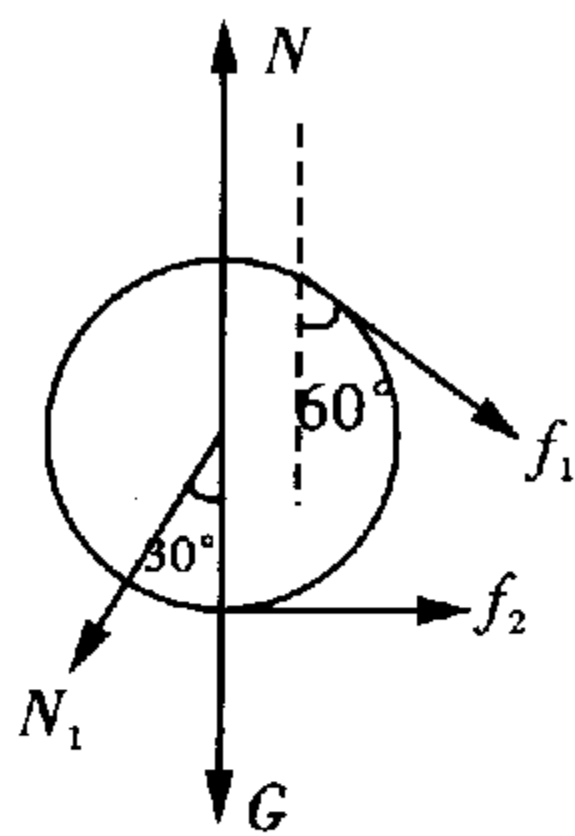


图 2-5

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{1}{2}f_1 - N_2 + G = 0 \quad \text{②}$$

由 $\Sigma F_{Ax} = 0$ 得

$$f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_1 - \frac{1}{2}N_1 = 0 \quad \text{③}$$

由 $\Sigma M_A = 0$ 得

$$f_1 R = f_2 R \quad \text{④}$$

由以上四式可得

$$f_1 = f_2 = \frac{N_1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}G$$

$$N_1 = \frac{1}{2}G, N_2 = \frac{3}{2}G$$

而 $f_2 \leq \mu_0 N_2, f_1 \leq \mu N_1$

$$\therefore \mu_0 \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \quad \mu \geq 2 - \sqrt{3}$$

方法与技巧 这是一个物体系的平衡问题, 用隔离法可以比较容易地处理此类问题.

例 3 如图 2-6 所示, 用力 F 推一放在水平地面上的木箱, 质量为 M , 木箱与地面间摩擦因数为 μ , 问: 当 F 与竖直方向所成夹角 φ 多大时, 力 F 再大也无法推动木箱?

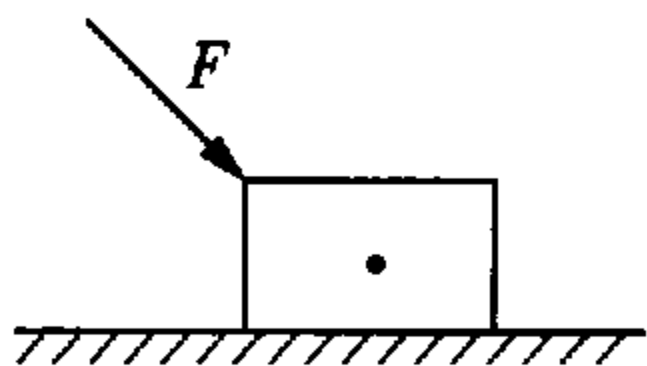


图 2-6

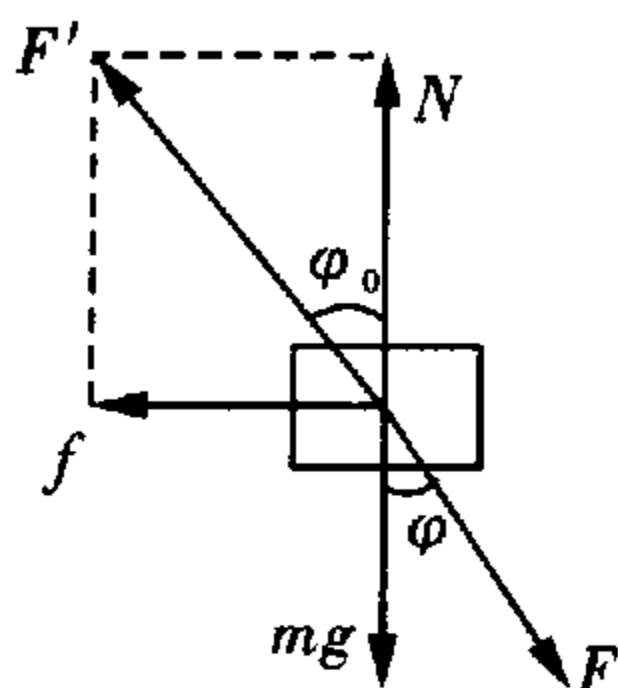


图 2-7

解析 选物体为研究对象, 受力分析如图 2-7 所示, 物体受 4 个力作用而静止, 将弹力 N 和摩擦力 f 合成作出全反力 f' , 当物体将发生滑动时, 静摩擦 φ_0 满足 $\tan \varphi_0 = \mu$, 当 $0 < \varphi < \varphi_0$ 时物体发生

自锁现象,也就是无论用多大的力都不会推动物体,故 φ 角的范围在 $(0, \varphi_0)$.

方法与技巧 解本题的一般方法是用平衡条件列方程求解,但利用摩擦角的概念分析,问题会更加简单.

例 4 如图 2-8 所示,重为 G 的物体 P 静止在倾角为 30° 的斜面上,物体与斜面间摩擦因数为 0.8 ,用平行于斜面底边的力 F 推动物块开始沿斜面匀速运动,求物块 P 的运动方向及力 F 的大小.

解析 选物体 P 为研究对象,将其所受力在斜面内投影,如图 2-9 所示,由物体处于平衡状态得

$$\begin{cases} f_x = F \\ f_y = G \sin 30^\circ = \frac{1}{2}G \end{cases}$$

又因为 $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \Rightarrow f^2 = F^2 + \frac{1}{4}G^2$

物体受滑动摩擦力作用,故 $f = \mu N = \mu G \cos 30^\circ$

联立①②得: $F = \frac{\sqrt{23}}{10}G$.

设 f 与 f_x 夹角为 φ ,根据物体所受滑动摩擦力方向总与相对运动方向相反,所以物体运动方向一定与摩擦力 f 在同一直线上.

$$\sin \varphi = \frac{f_y}{f} = \frac{5}{12}\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{5}{12}\sqrt{3}\right)$$

即物体的运动方向与力 F 夹角为 $\arcsin\left(\frac{5}{12}\sqrt{3}\right)$.

方法与技巧 物块受三维空间力系作用,应先转化为平面力系(投影法),再由平衡条件和摩擦力知识求解.并注意滑动摩擦力的方向始终与相对运动方向相反.

例 5 有一玩具跷板,如图 2-10 所示,试讨论它的稳定性(不考虑杆的质量).

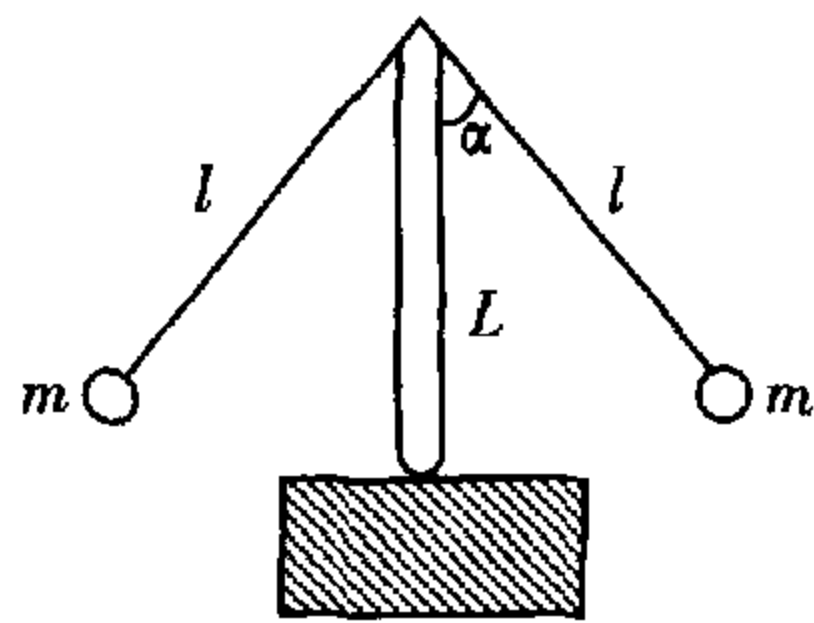


图 2-10

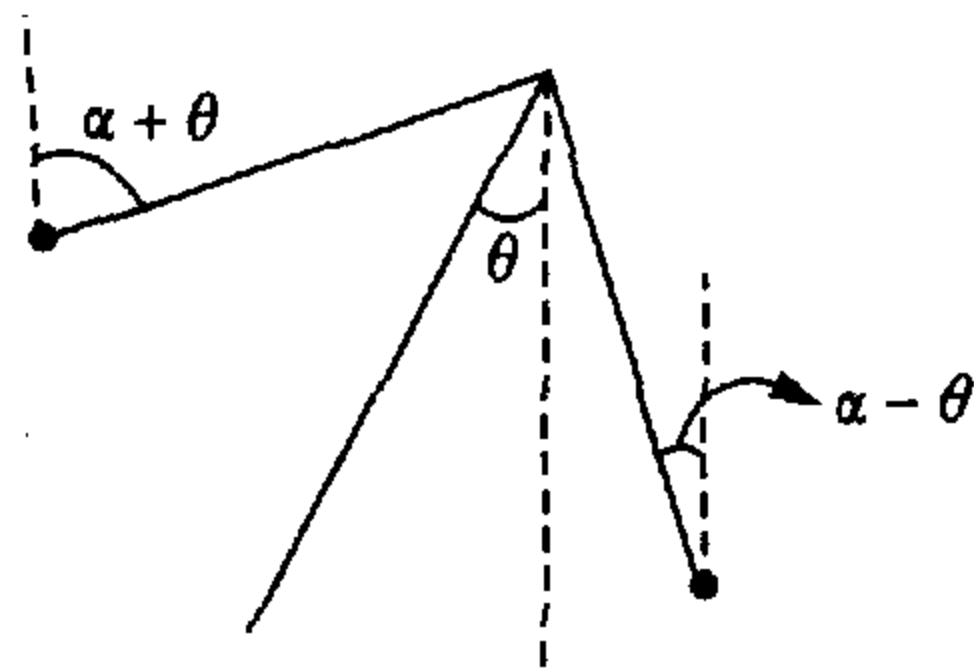


图 2-11

解析 在平衡位置,系统的重力势能为

$$E(0) = 2(L - l \cos \alpha)mg$$

当系统偏离平衡位置 θ 角时,如图 2-11 所示,此时系统的重力势能为

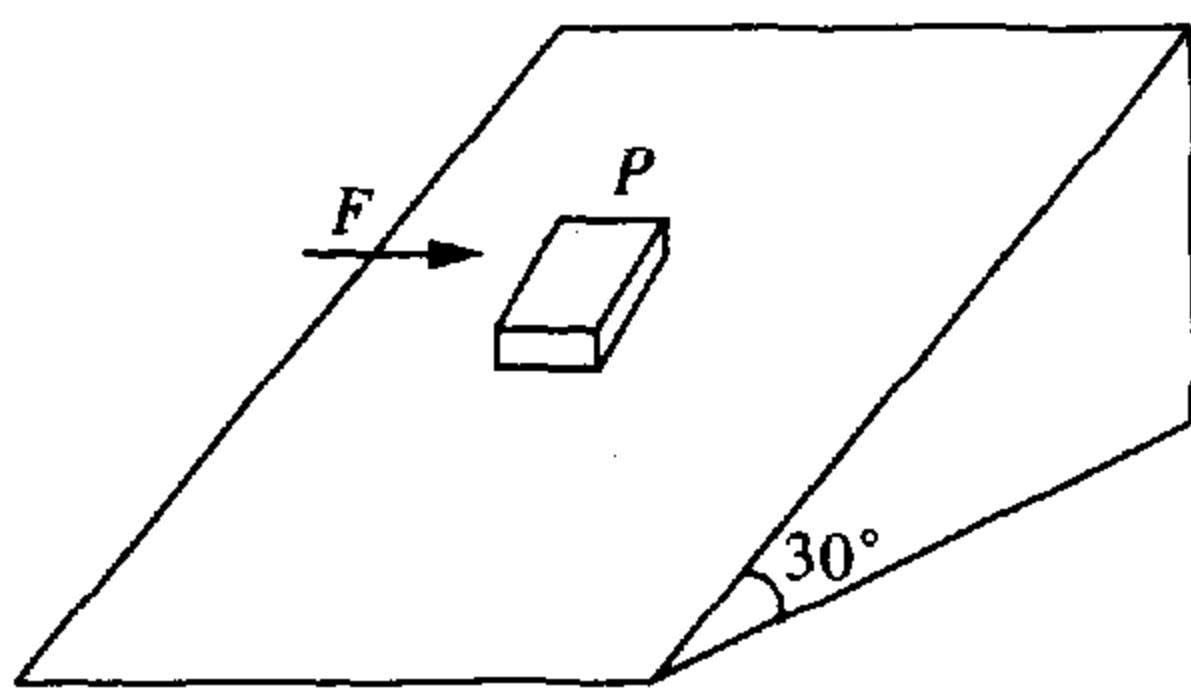


图 2-8

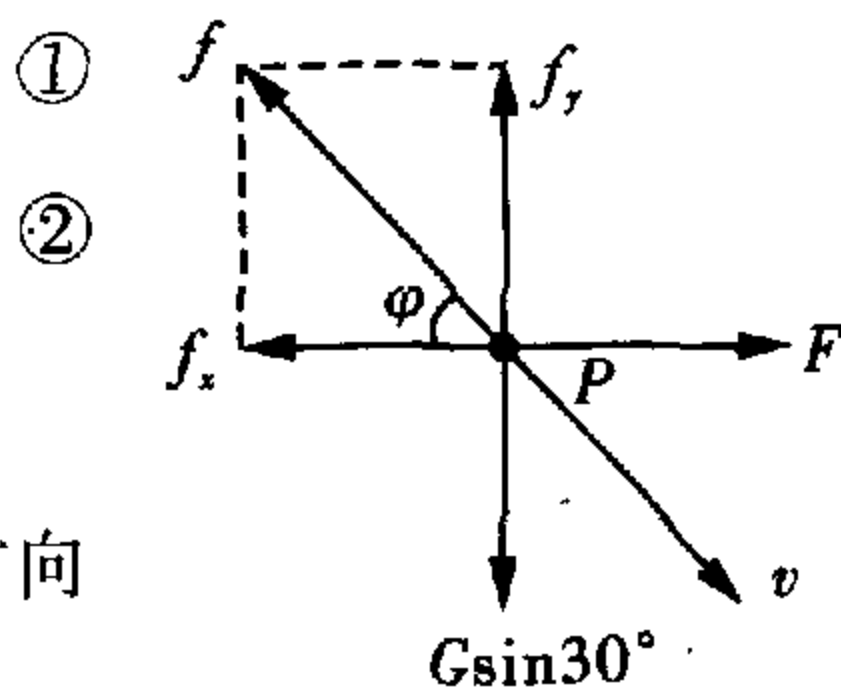


图 2-9

$$E(\theta) = mg[L\cos\theta - l\cos(\alpha + \theta)] + mg[L\cos\theta - l\cos(\alpha - \theta)]$$

$$= 2mg\cos\theta(L - l\cos\theta)$$

$$\therefore \Delta E_p = E(\theta) - E(0) = 2mg(\cos\theta - 1)(L - l\cos\theta)$$

故只有当 $L < l\cos\theta$ 时,才是稳定平衡.

方法与技巧 假定物体偏离平衡位置少许,看其势能变化是处理此类问题的主要手段之一.

例 6 如图 2-12 所示,均匀杆长为 a ,一端靠在光滑竖直墙上,另一端靠在光滑的固定曲面上,且均处于 Oxy 平面内. 如果要使杆子在该平面内为随遇平衡,试求该曲面在 Oxy 平面内的曲线方程.

解析 由于 $y_c = \frac{1}{2}a$,那么 B 点的坐标为

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\cos\theta = \frac{1}{2}a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

消去参数得

$$x^2 + (2y - a)^2 = a^2$$

方法与技巧 利用随遇平衡的条件即 AB 的质心 C 点的坐标 y_c 为常量且 $y_c = \frac{1}{2}a$.

例 7 如图 2-13 所示,质量为 m 的均匀绳圈套在表面光滑、半顶角为 α 的圆锥上,当绳圈平衡时,绳中张力多大?

解析 圆锥表面是光滑的,当平衡时,绳圈一定成一个水平的圆环,选取一小段 Δl 进行分析,其对应的圆心角为 $\Delta\theta$,此微小段除受绳圈其余部分对它两端的拉力 T 和 T' 外,还受重力 Δmg 及弹力 N 的作用.

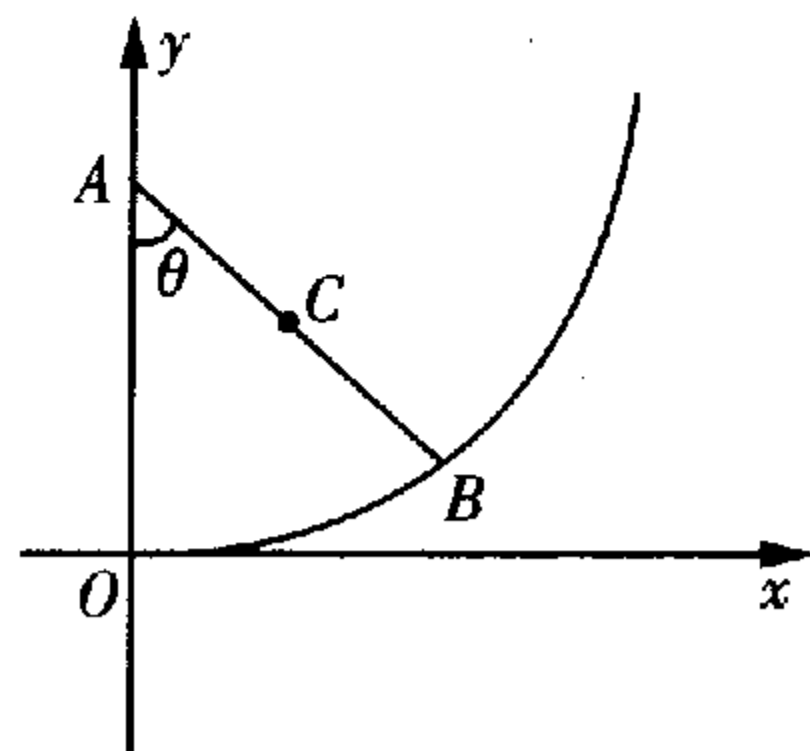


图 2-12

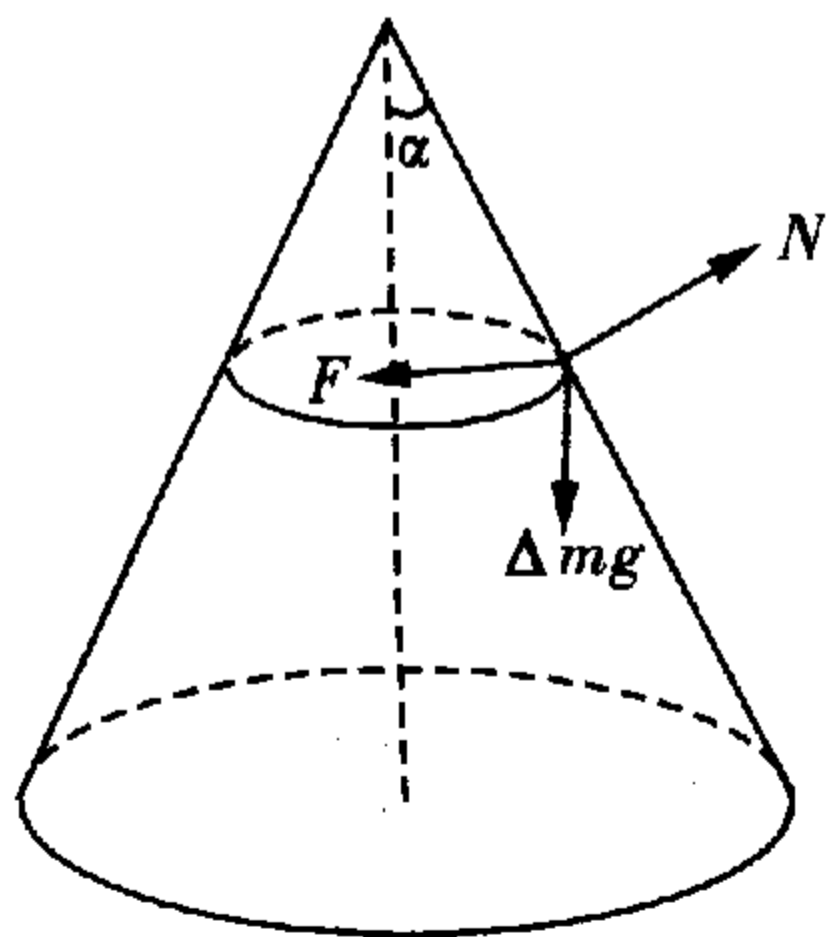


图 2-13

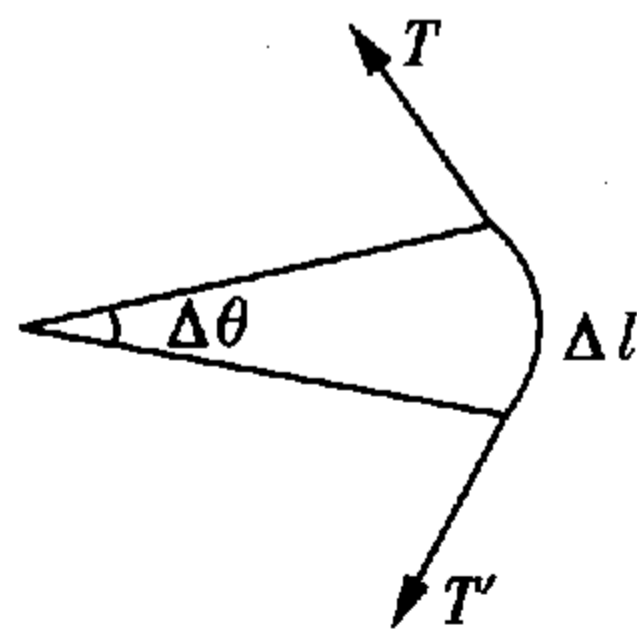


图 2-14

对 Δl 段分析如图 2-14 所示, T 与 T' 在水平方向的合力为

$$F = 2T\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = T \cdot \Delta\theta \tag{①}$$

由平衡条件: $F = N\cos\theta$ ②

$$\Delta mg = N\sin\theta \tag{③}$$

$$\therefore F = \Delta mg \cdot \cot\alpha$$

$$\text{由于 } \Delta m = \frac{\Delta l}{2\pi r} m = \frac{\Delta \theta}{2\pi} m \quad \textcircled{4}$$

由以上几式可得

$$T = \frac{mg}{2\pi} \cot \alpha$$

方法与技巧 本题是采用微元法,分析一小段的受力情况,在求解中注意小量计算.

例 8 质量分别为 m 和 M 的两个小球用长度为 l 的轻质硬杆连接,并按图 2-15 所示位置那样处于平衡状态. 杆与棱边之间的摩擦因数为 μ , 小球 m 与竖直墙壁之间的摩擦力可以不计. 为使图示的平衡状态不被破坏, 参数 m, M, μ, l, a 和 α 应满足什么条件?

解析 受力分析如图, 根据力的平衡条件可列出:

$$N \cos \alpha + F_m \sin \alpha = (M + m)g \quad \textcircled{1}$$

$$N \sin \alpha + N_1 = F_m \cos \alpha \quad \textcircled{2}$$

根据力矩平衡条件可写出:

$$Mgl \cos \alpha = \frac{Na}{\cos \alpha} \quad \textcircled{3}$$

杆不滑动的条件为 $F_m < \mu N$. 由①得

$$F_m = \frac{(M + m)g - N \cos \alpha}{\sin \alpha} < \mu N, \text{ 即}$$

$$(M + m)g < N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \quad \textcircled{4}$$

用③除④得

$$\left(\frac{m}{M} + 1\right) < \frac{l}{a} \cos^2 \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \quad \textcircled{5}$$

杆不向右翻倒的条件为 $N_1 > 0$. 由①和②可得出

$$\begin{aligned} N_1 &= F_m \cos \alpha - N \sin \alpha \\ &= \frac{(M + m)g - N \cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha - N \sin \alpha > 0 \end{aligned}$$

由此可得 $(M + m)g \cos \alpha > N$ ⑥

将③中的 N 代入⑥得

$$1 + \frac{m}{M} > \frac{l}{a} \cos \alpha \quad \textcircled{7}$$

由于 $l \cos \alpha > a$, 再考虑不等式⑦, 可得

$$1 < \frac{l}{a} \cos \alpha < 1 + \frac{m}{M} < \frac{l}{a} \cos^2 \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \quad \textcircled{8}$$

为了在不等式⑧中能同时满足最后两个不等号, 就必须满足条件:

$$\cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) > 1$$

由此可得平衡条件为: $\mu > \tan \alpha$, 如果 $\mu < \tan \alpha$, 就不可能出现平衡.

方法与技巧 本题是有转轴的刚体的平衡, 利用一般物体的平衡条件可以求解.

例 9 在维克多·雨果的小说《悲惨世界》中, 主人公冉阿让是一个逃犯, 他有能力利用两面直

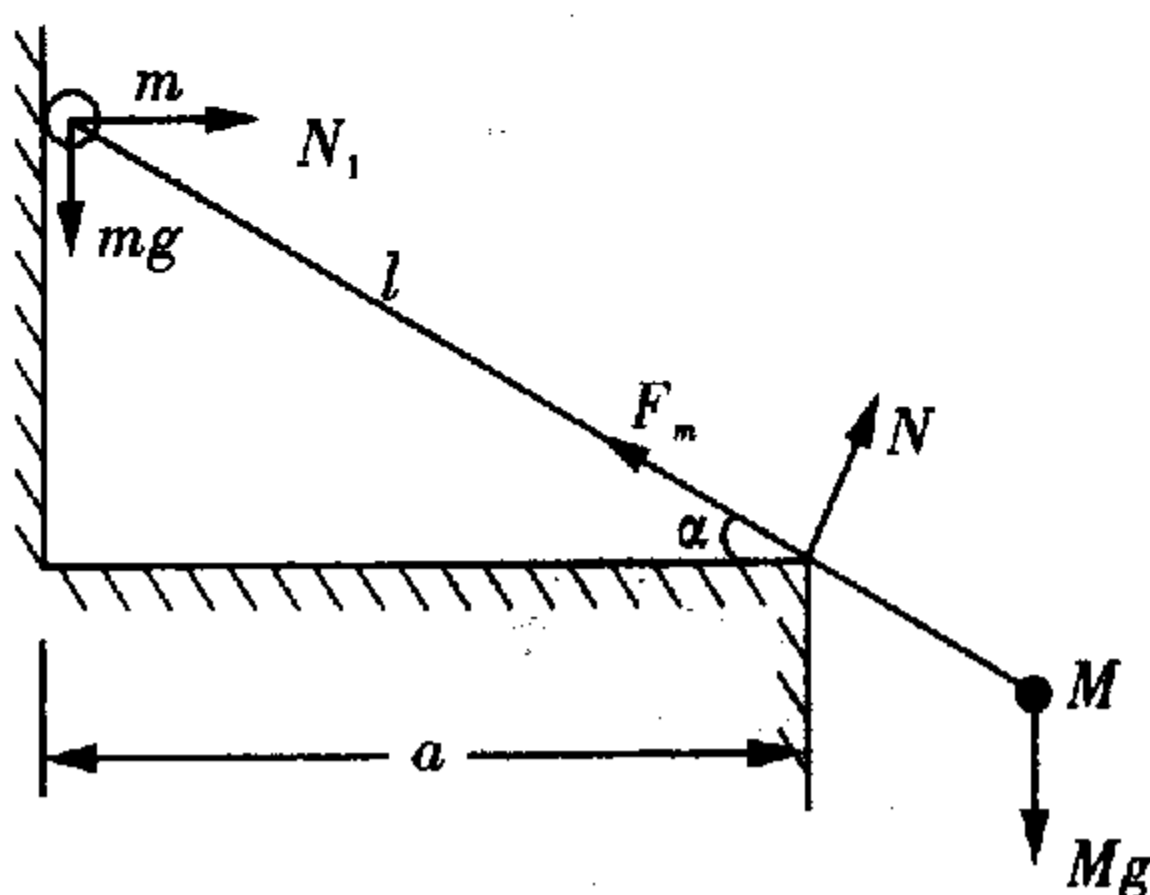


图 2-15

角相交的墙的墙角爬上墙头. 求他在爬墙时最小需要用多大的力来推墙. 同时, 求他要完成这项技艺, 他和墙面之间可能的最小摩擦因数.

解析 图 2-16 显示了主人公在墙角的位置. 图 2-17 是一张简图, 显示了他受到的重力 mg 、墙的支持力 N 以及作用在他四肢上的静摩擦力 F_f .

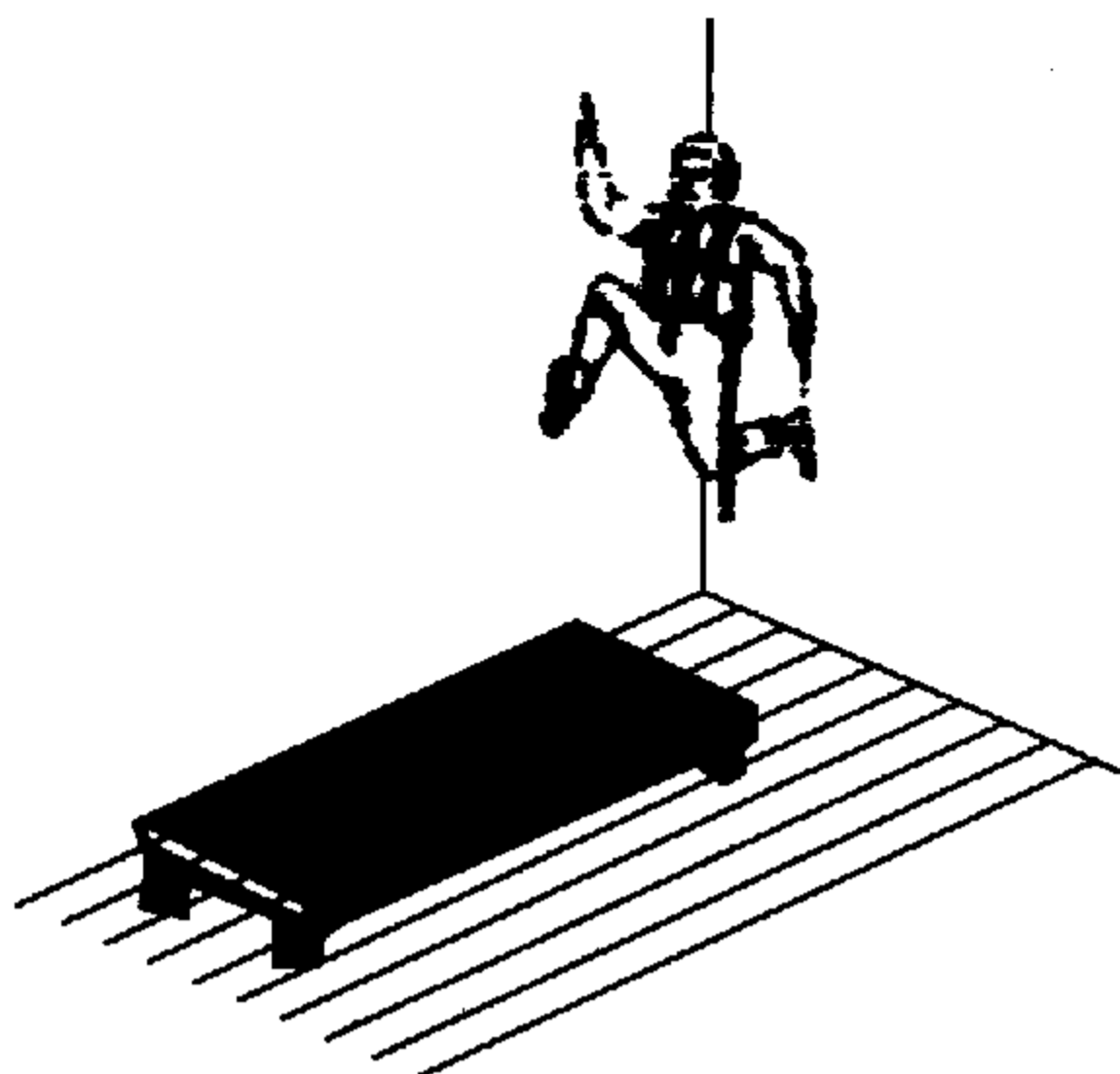


图 2-16

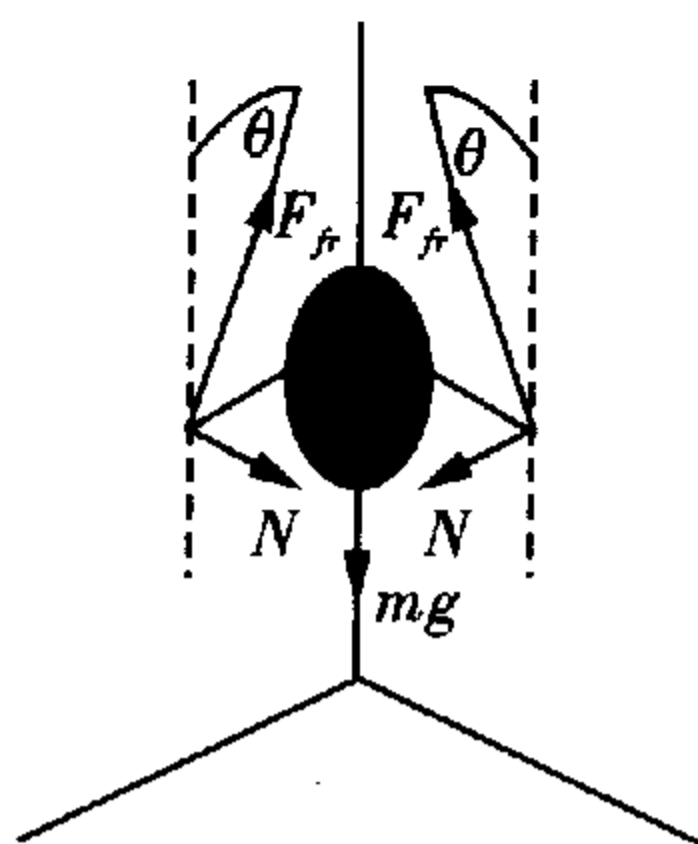
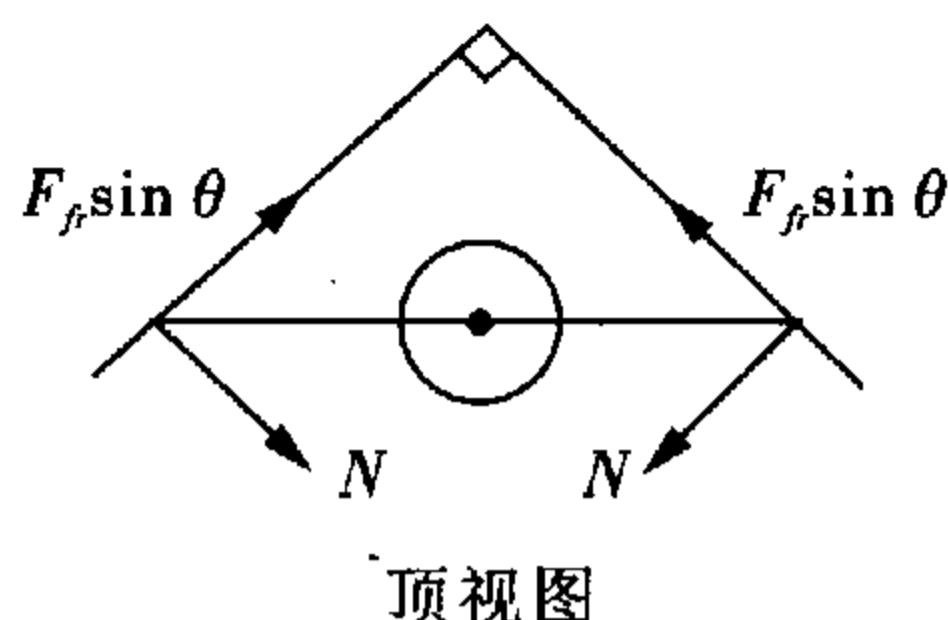


图 2-17



顶视图

图 2-18

设静摩擦力和竖直方向的夹角为 θ , 则如图 2-18 所示, 静态平衡条件为

$$mg = 2F_f \cos\theta \text{ 和 } N = F_f \sin\theta$$

从这些方程中可以表示出法线分量 N , 也就是逃犯在爬墙时作用在墙上的力为

$$N = \frac{1}{2} mg \tan\theta$$

因此需要的总力 F 可以由下式求得

$$F^2 = N^2 + F_f^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2 \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

可以利用下面的不等式得到最小的力

$$F_f \leq \mu_0 N$$

由此可得

$$\sin\theta \geq \frac{1}{\mu_0} \text{ 或者 } \tan\theta \geq \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2 - 1}}$$

这里的 μ_0 是静摩擦因数. 利用上两式中的任一式, 可以得到最小的力为

$$F_{\min} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{\mu_0^2 + 1}{\mu_0^2 - 1}}$$

此方程表明若要使主人公不从墙上掉下来, 则静摩擦因数一定要大于 1. 如果静摩擦因数趋于无穷大, 则作用在他两只手上的力等于他身体重量的一半, 这种情况相当于他被粘在墙上.

方法与技巧 题解的关键在于摩擦力怎样同时平衡再阿让的重力和墙的反作用力.

例 10 一个球, 由两个不一样的匀质半球粘在一起, 放在一个与水平面成 30° 角的斜面上. 这个球在斜面上能保持平衡么?

解析 如果静摩擦力足够大, 则球不会从斜面上滑下. 但仅是这一点不能完全满足平衡条件, 还

需要使球不能“滚”下斜面. 此球由两个半球组成, 这意味着不均匀的质量分布. 如果质心和几何中心的距离小于 $\frac{1}{2}r$ (r 是球的半径), 则无论球的取向如何, 它受到的重力都会相对于球和斜面的接触点 P 产生一个使球滚动的力矩. 如图 2-19 所示.

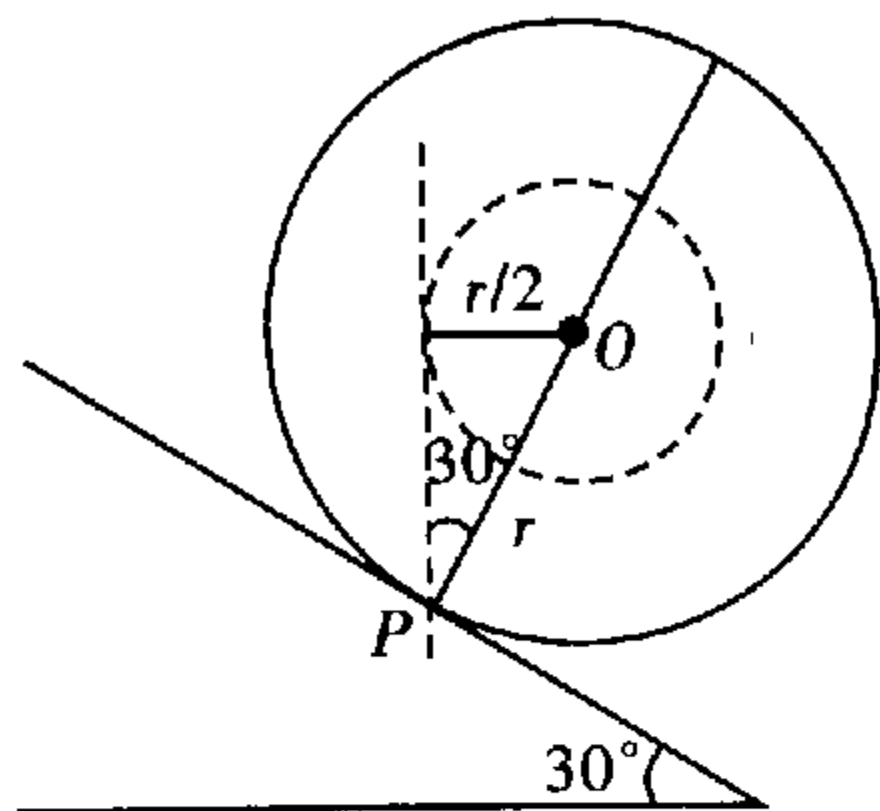


图 2-19

现在将要说明的是此情形适用于任何由两个匀质半球形成的球体, 不论两半球的密度各是多大.

考虑图 2-20 中的阴影区域. 由于对称性的原因, 此部分的质心显然在点 A , 也就是距离中心 O 为 $\frac{1}{2}r$ 的地方. 球剩下的部分将使整

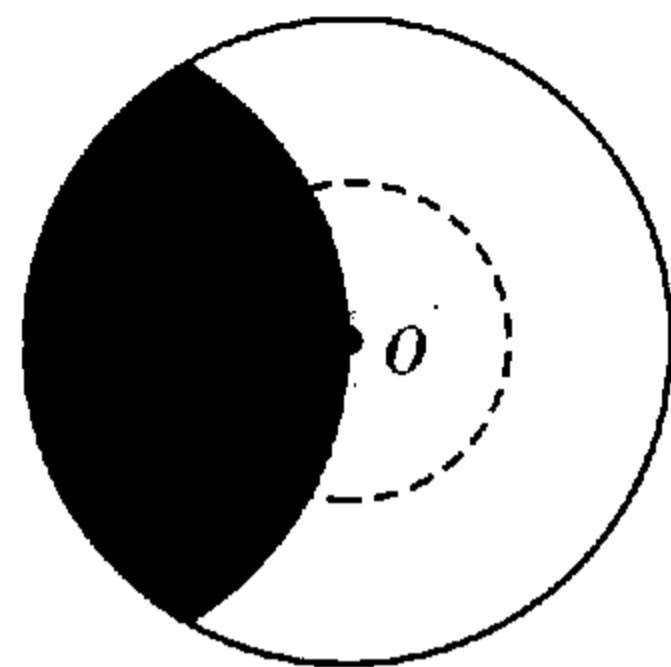


图 2-20

个球的质心 S 更靠近点 O , 即 $OS < \frac{1}{2}r$. 从前面的分析可以得出, 球不能平衡在 30° 的斜面上. 在获得上面结论的过程中, 我们假设阻止球滚动的力很小, 即没有作用在点 P 的力矩. 当斜面的表面覆盖着“维可牢”(一种尼龙搭扣) 的时候, 上面的结论就明显不再成立, 甚至球可以粘在竖直的表面上.

方法与技巧 从粘合球的几何中心到质心的距离不能超过一个固定长度, 找出这个长度.

例 11 一个小物体在水平桌面的边沿, 因受到一个力的作用, 而从桌子的另一边掉落. 已知桌子的宽度为 1 m , 掉落前物体的运动时间为 2 s . 问这个小物体有轮子吗?

解析 物体的平均速度为 $\frac{1}{2}\text{ m/s}$, 因为是匀减速运动, $v_{\text{平均}} = \frac{1}{2}(v_{\text{初}} + v_{\text{末}})$, 而 $v_{\text{末}} \geq 0$. 因此物体运动的初速度不大于 1 m/s . 也就是说在两秒内速度减少不超过 1 m/s , 即加速度的绝对值 $[a]$ 最大为 0.5 m/s^2 , 这个加速度是重力加速度的 $\frac{1}{20}$. 所以桌面与物体之间的摩擦因数不大于 $1/20$. 这个数字比通常情况下物体之间的滑动摩擦因数要小得多. 由此可以判断物体不是滑过桌面, 而是“滚”过或者是部分“滚”过桌面的.

方法与技巧 本题是一个容易解的题, 但许多人却无从下手, 其实只要算出物体与桌面的摩擦因数就可以了.

例 12 如图 2-21 所示, 车厢 B 底面放一个物体 A , 已知它们的质量 $m_A = 20\text{ kg}$, $m_B = 30\text{ kg}$, 在水平力 $F = 120\text{ N}$ 作用下, B 由静止开始运动, 2 s 内移动 5 m , 不计地面摩擦, 求 A 在 B 内移动的距离.

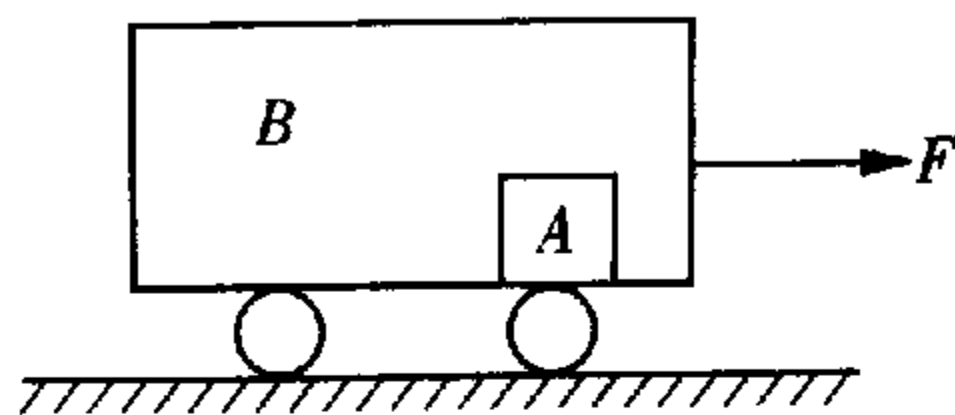


图 2-21

解析 对整体(质点系)利用牛顿第二定律有

$$F = m_A a_A + m_B a_B \Rightarrow 120 = 20a_A + 30a_B$$

$$\text{又} \because S = \frac{1}{2} a_B t^2 \Rightarrow a_B = \frac{5}{2} \text{ m/s}^2$$

$$\therefore a_A = \frac{9}{4} \text{ m/s}^2$$

$$\therefore S_A = \frac{1}{2}a_A t^2 = 4.5 \text{ m}$$

$$\text{即 } S_{AB} = 5 \text{ m} - 4.5 \text{ m} = 0.5 \text{ m}$$

方法与技巧 本题利用了质点系的牛顿第二定律.

例 13 一绳跨过装在天花板上的滑轮,绳的一端吊一质量为 M 的物体,另一端挂一载人梯子,人的质量为 m ,系统处于平衡状态,不计摩擦及滑轮与绳的质量,如图 2-22 所示,要使天花板受力为零,试求人应该如何运动.

解析 由题意知, M 向下的加速度为 g ,而梯子与人的质心向下的加速度也应为 g ,才能使天花板受力为零.利用质点系的牛顿第二定律有:

$$Ma_c = \sum_{i=1} m_i a_i$$

$$Mg = -(M-m)g + ma \text{ (取向下为正)}$$

$$\therefore a = (2\frac{M}{m} - 1)g \text{ (方向向下)}$$

方法与技巧 天花板受力为零,意味着质点系(整体)质心的加速度为 g ,竖直向下,处于完全失重状态.

例 14 如图 2-23 所示,质点 A 沿 $\frac{1}{4}$ 圆弧槽 B 由静止开始下滑,已知 B 的质量为 M ,质点的质量为 m ,槽的半径为 R 且光滑,而槽与地面的接触面也是光滑的,试求质点 A 下滑到任意位置 θ 角时 B 对 A 的作用力.

解析 设 M 的加速度向左,大小为 a ,有

$$F \cos \theta = Ma \tag{1}$$

对 m 以 B 为参考系,其相对 B 的速度为 u ,且必定与圆弧相切.

$$F + ma \cos \theta - mg \sin \theta = m \frac{u^2}{R} \tag{2}$$

根据动量与能量守恒,并设 M 的速度为 V ,同时注意 m 的速度 u 应转换为对地速度.

$$MV = m(u \sin \theta - V) \tag{3}$$

③(水平方向动量守恒)

$$mgR \sin \theta = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(u^2 + V^2 - 2uV \sin \theta)^2 \tag{4}$$

由以上①②③④式可解得

$$F = \frac{Mmg \sin \theta (3M + 2m + m \cos^2 \theta)}{(M + m \cos^2 \theta)^2}$$

方法与技巧 本题解法利用了参考系的变换,在以 B 为参考系时注意惯性力.

例 15 质量为 $M = 600 \text{ kg}$ 的汽车从原地起动.汽车发动机以恒定功率 $P = 50 \text{ kW}$ 工作,车轮与路面的摩擦因数 $\mu = 0.6$.请估算一下,最快要多少时间汽车才能加速到 100 km/h 的速度,空气阻力和机械摩擦都忽略不计.

解析 最初使汽车运动起来的最大加速度取决于车轮与路面的最大摩擦力.

$$a = \frac{F_m}{M} = \mu g$$

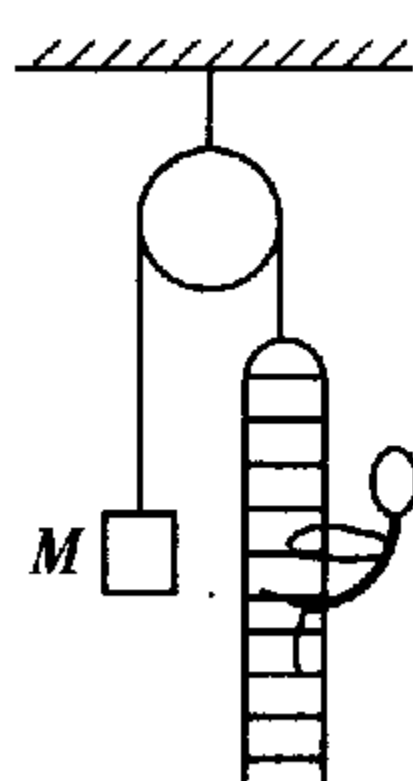


图 2-22

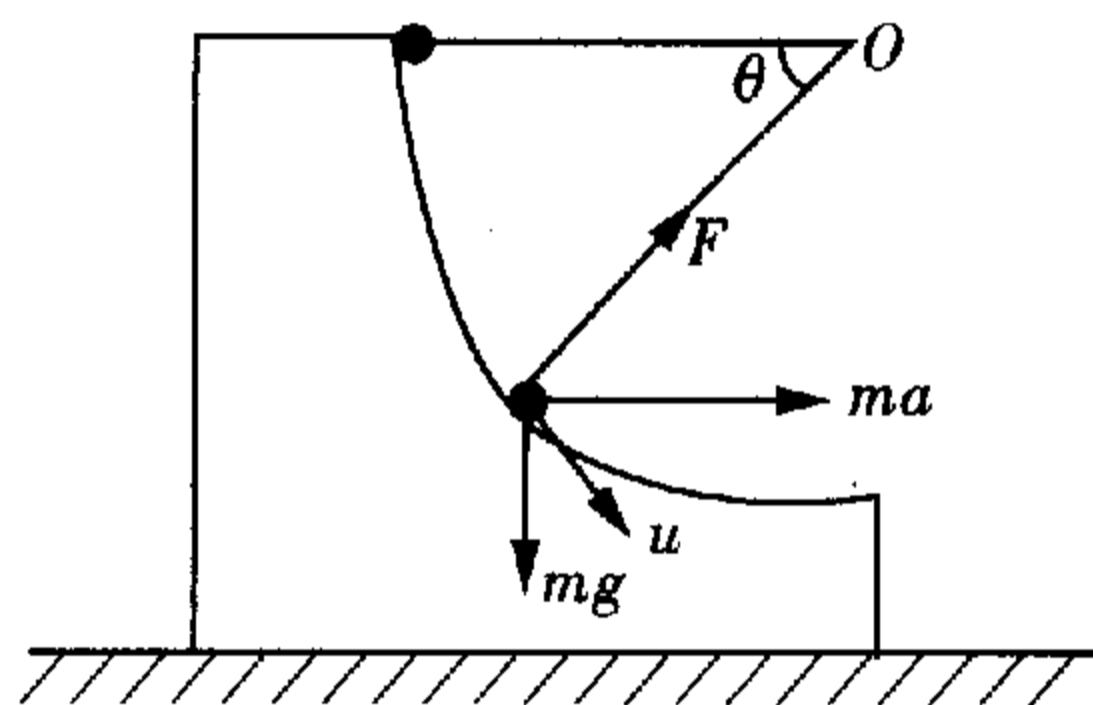


图 2-23

这时汽车以比最大功率稍小的功率起动(不使其产生滑动),而其速度与时间成正比.

$$v = at = \mu gt$$

在 $t = t_1$ 的瞬间速度等于 $v_1 = \mu gt_1$, 而发动机的功率达到 P 值, 且等于

$$P = F_m v_1 = \mu^2 g^2 M t_1$$

$$t_1 = \frac{P}{\mu^2 g^2 M} \approx 2.4 \text{ s}$$

而 $v_1 = \mu gt_1 = 14.1 \text{ m/s}$

从此时开始摩擦力小于最大值, 汽车的动能变化为

$$P(t - t_1) = \frac{1}{2} M (v^2 - v_1^2)$$

由此可得

$$t = t_1 + \frac{M(v^2 - v_1^2)}{2P} = 5.8 \text{ s}$$

方法与技巧 牛顿运动定律与 $P = Fv$ 及动量定理的配合使用.

例 16 在一个平放在光滑桌面上的方木块上, 用两个支架牢固地支持着一个半径 $R = 2.5 \text{ cm}$ 的能自由旋转的水平小轴. 用线缠绕在轴上, 再绕过一个不计重量的滑轮悬挂一个重物, 如图 2-24 所示. 重物从静止状态开始放下后作匀加速运动, 在 $t = 3 \text{ s}$ 的时间内落下 $s = 63 \text{ cm}$. 假设方木块连同轴支架的总质量是重物质量的 $k = 92$ 倍, 求在这段时间内小轴转过的转数. 不计摩擦.

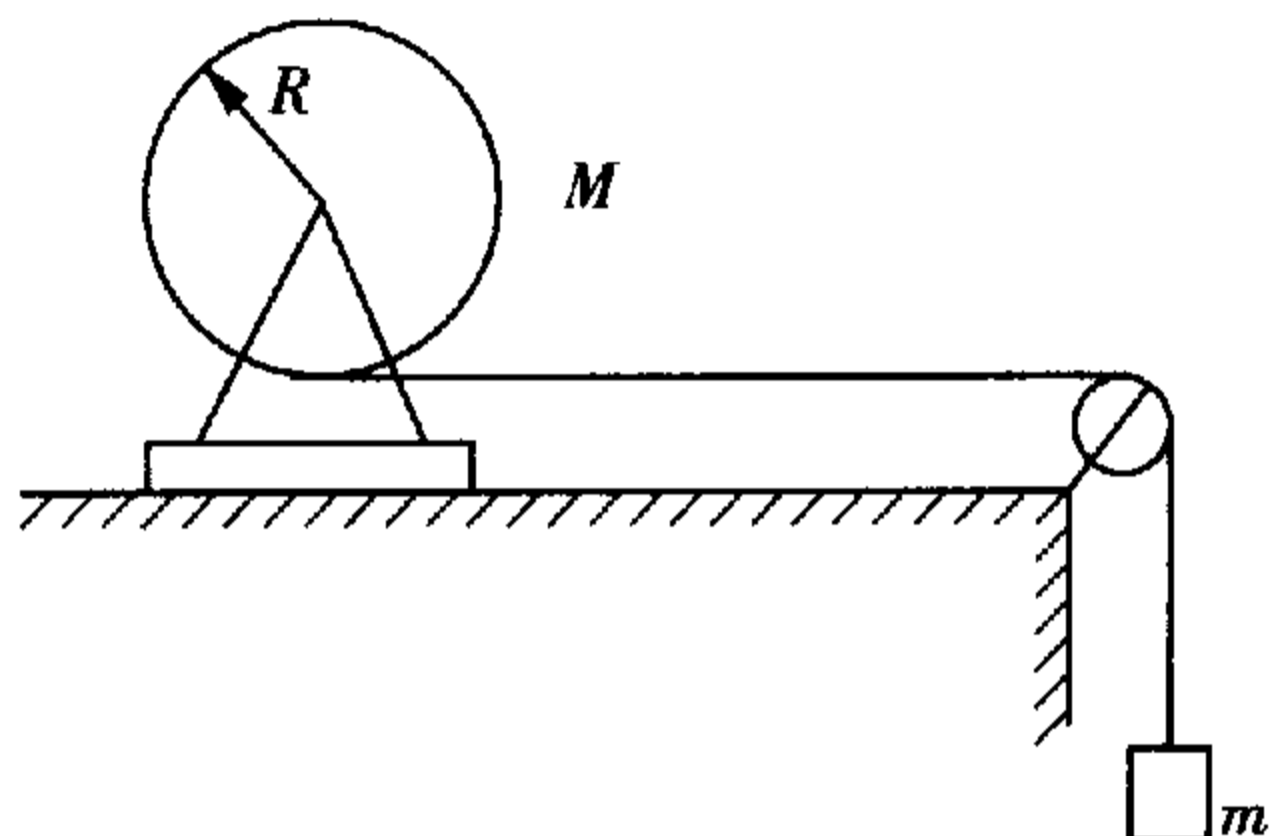


图 2-24

解析 $a_0 = a_c + \alpha R$, 且 $\frac{1}{2} a_0 t^2 = s$

$$\therefore a_0 = \frac{2s}{t^2} = 0.14 \text{ m/s}^2$$

设绳中张力为 T , 则有

$$ma_0 = mg - T \quad Ma_c = T$$

$$\text{又 } \frac{M}{m} = 92$$

$$\therefore a_c = \frac{m}{M} (g - a_0) = 0.105 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{a_0 - a_c}{R} = 1.4 \text{ rad/s}^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2 = 6.30 \text{ rad} \quad \therefore n = \frac{4}{2\pi} \approx 1.$$

方法与技巧 注意支架质心加速度 a_c , 盘的转动角加速度 α 和重物下降的加速度 a_0 的关系.

例 17 绳 EF 一端系于轻杆 AB 中间, 如图 2-25 所示, 一端固定在天花板上, 轻杆两端各有一质量为 m 的小球, 并通过 AC 、 BC 两绳系住一质量为 M 的小球 C , 不计绳的质量及绳的体积且 $AC = BC = AB$, 求剪断 BC 绳的瞬间, EF 绳的张力 T .

解析 设正三角形 ABC 边长为 l , 剪断 BC 绳瞬间 AC 绳张力为 T . 如图 2-26.

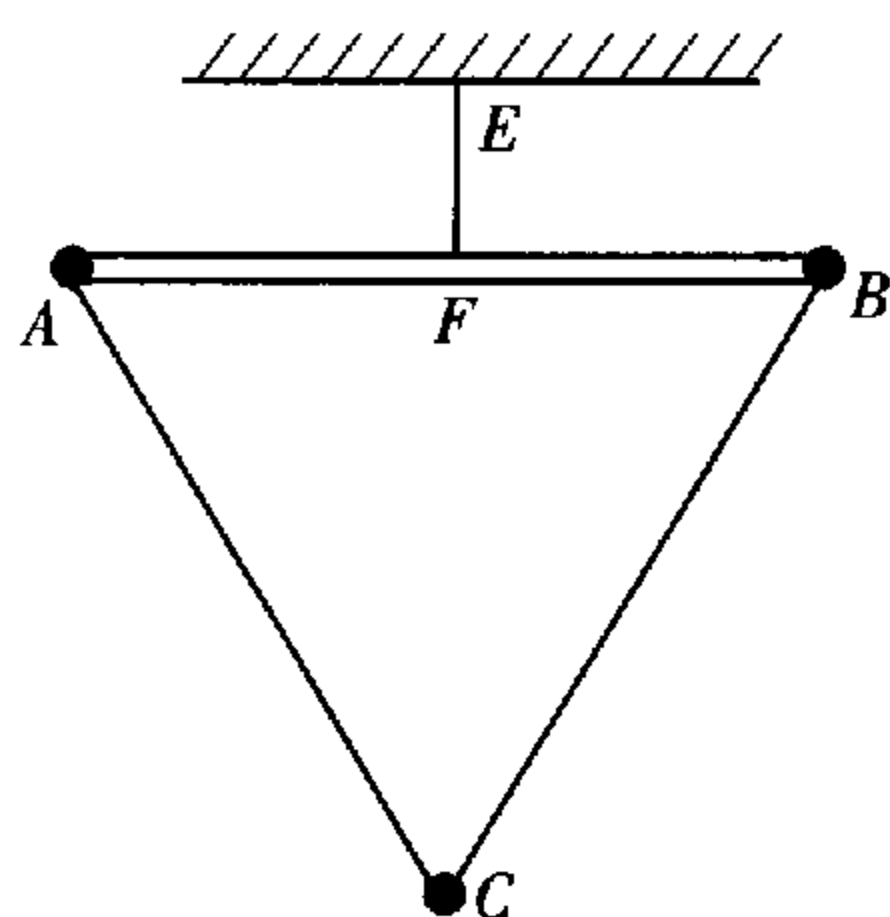


图 2-25

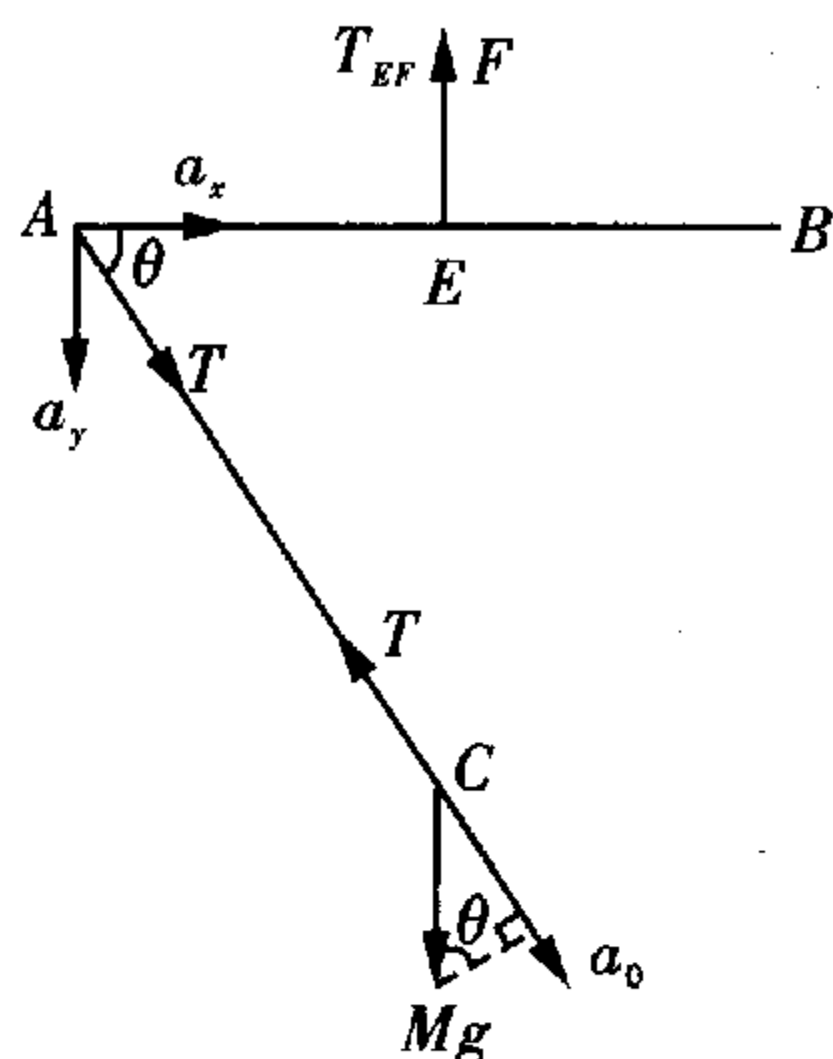


图 2-26

A 球的加速度可分解为水平方向 a_x 及竖直方向 a_y . 注意到剪断瞬间 T_{EF} 竖直向上.

$$2ma_x = T \cdot \cos\theta$$

$$2 \cdot m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \alpha = T \cdot \sin\theta \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow a_x = \frac{T \cdot \cos\theta}{2m} \quad a_y = \frac{T \cdot \sin\theta}{2m}$$

$$a_y = \alpha \cdot \frac{l}{2}$$

对于 C, 设其沿绳方向加速度为 a_0 , 则有

$$Ma_0 = Mg \cdot \sin\theta - T \Rightarrow a_0 = g \cdot \sin\theta - \frac{T}{M}$$

又 剪断 BC 后, AC 绳仍绷紧, 且 A、C 无相对转动, 所以 A、C 在沿绳方向加速度相等, 即

$$a_0 = a_x \cdot \cos\theta + a_y \cdot \sin\theta$$

将 a_0, a_x, a_y 值代入上式, 解得 $T = \frac{2mM}{2m+M}g \cdot \sin\theta$.

对于 T_{EF} , 考虑 AB 杆, 注意到其在 EF 绳限制下质心无竖直方向加速度.

$$\therefore T_{EF} = 2mg + T \cdot \sin\theta = \frac{m(8m+7M)}{2(2m+M)}g$$

方法与技巧 注意杆系、绳系速度、加速度的关联.

例 18 有一张桌子高 1 m, 在其表面中间有一个洞. 有一根长 1 m 的细的金项链自然地盘绕着放在洞口, 如图 2-27 所示:

链条的一端被放进洞口一点点, 然后松开. 忽略摩擦, 则其结果是, 链条以不断增加的速度顺利地通过那个洞. 经过多长时间链条的两端都到达地面?

解析 柔软的细绳堆放在光滑桌面上, 其线密度为 ρ , 在水平力 F 的作用下使之从静止开始做匀加速运动, 加速度为 a , 则 t 秒末, $L = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$, $m = \rho L = \frac{1}{2}\rho at^2$, 而

$F \cdot \Delta t = \rho(L + \Delta L)(v + \Delta v) - \rho Lv$, 所以有 $F = \rho La + \rho v^2$, 而 $v^2 = 2aL$, 所以有: $F = 3\rho aL = 3ma$. 本题的解答就利用上述结论, 由于堆放在桌面的受到的作用力是变力 $F = \rho gx$ (x 为从桌面上滑下的部分), 所

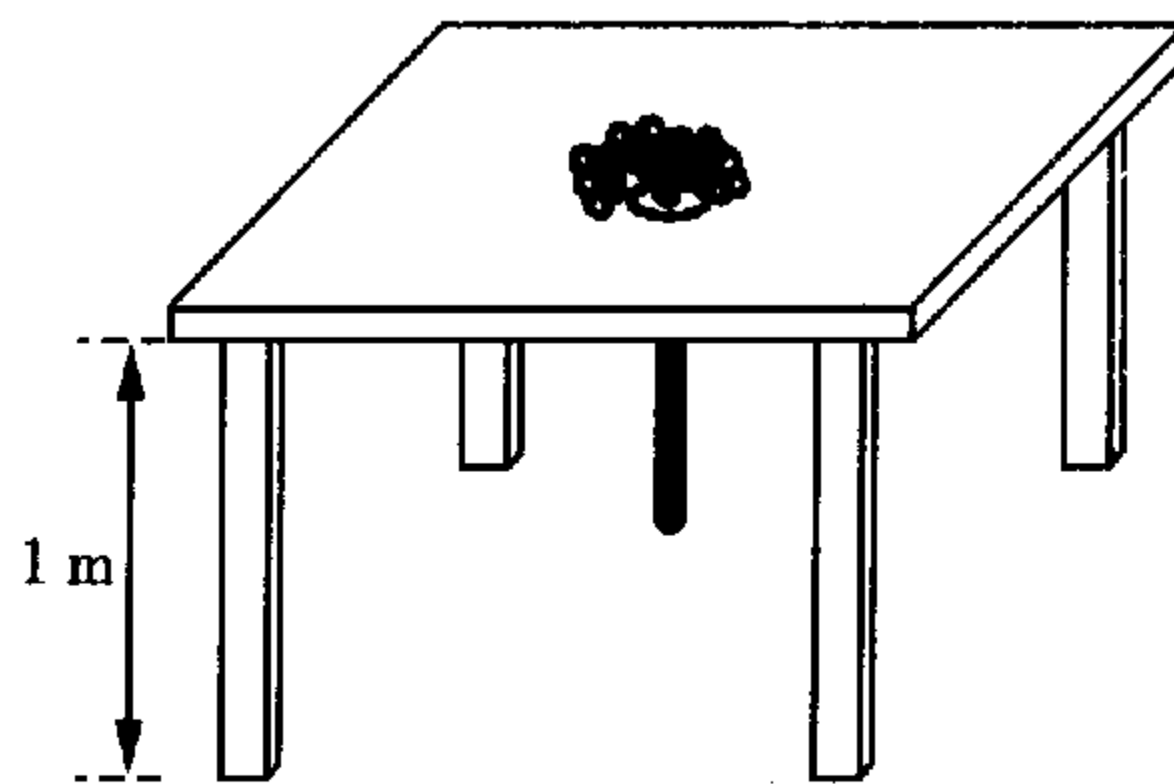


图 2-27

以有

$$\rho g x = 3xap \Rightarrow a = \frac{1}{3}g$$

即链条下端的加速度为恒量.

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 0.78 \text{ s}$$

当链条较低一端到达地面时,整个链条是垂直的,其速度为

$$v_1 = at_1 = 2.56 \text{ m/s}$$

从这一刻起,链条下落的加速度为 g .

$$L = v_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\therefore t_2 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \frac{1}{3}t_1 = 0.26 \text{ s}$$

$$\therefore t = t_1 + t_2 = 1.04 \text{ s}$$

方法与技巧 重力加速运动部分和紧密相连的静止部分,这意味着移动链的质量变化必须要被考虑在内.

【解题尝试】

1. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小物块用轻绳连接,绳跨过位于倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的光滑斜面顶端的轻滑轮,滑轮与转轴之间的摩擦不计,斜面固定在水平桌面上,如图 2-28 所示. 第一次, m_1 悬空, m_2 放在斜面上,用 t 表示 m_2 自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间. 第二次,将 m_1 和 m_2 位置互换,使 m_2 悬空, m_1 放在斜面上,发现 m_1 自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间为 $t/3$. 求 m_1 与 m_2 之比.
2. 如图 2-29 所示,一条不可伸长的轻绳长为 L ,一端用手握住,另一端系一质量为 m 的小球,今使手握的一端在水平桌面上做半径为 R 、角速度为 ω 的匀速圆周运动,且使绳始终与半径为 R 的圆相切,小球也将在同一水平面内做匀速圆周运动,小球和水平面之间有摩擦,求:
 - (1) 小球做匀速圆周运动的线速大小;
 - (2) 手对细绳做功的功率;
 - (3) 小球在运动过程中所受的摩擦阻力的大小.

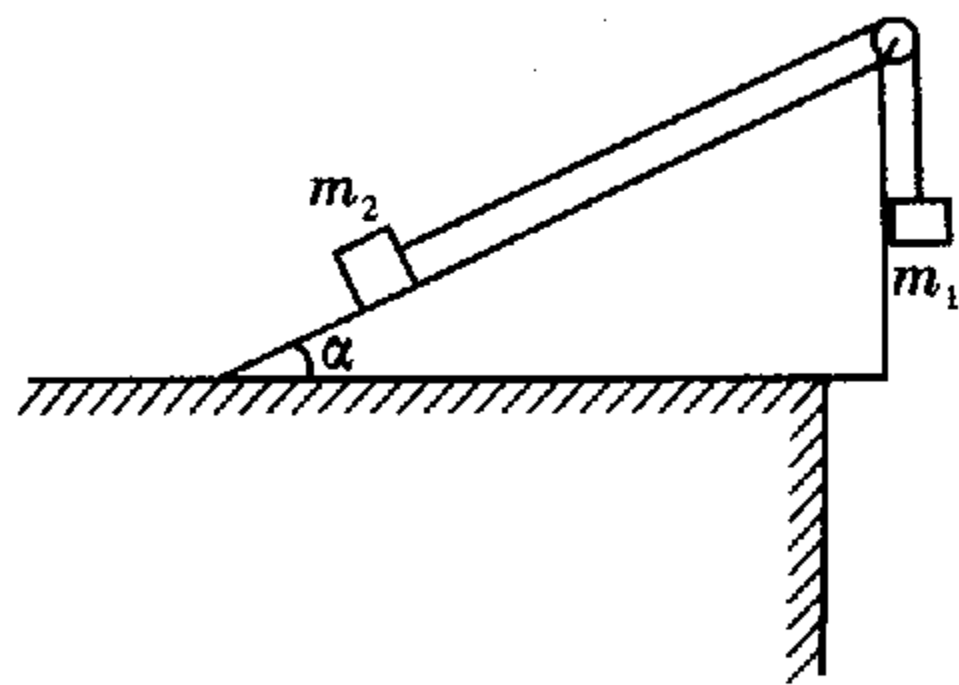


图 2-28

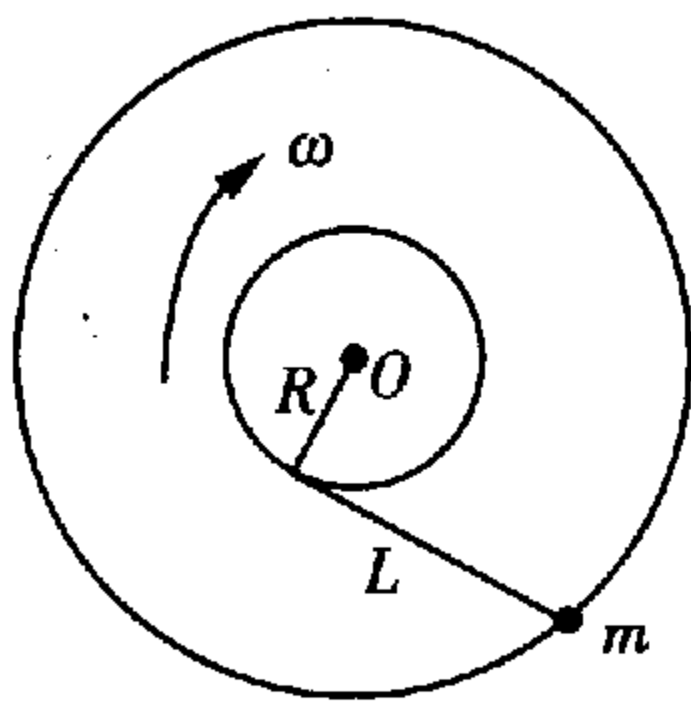


图 2-29

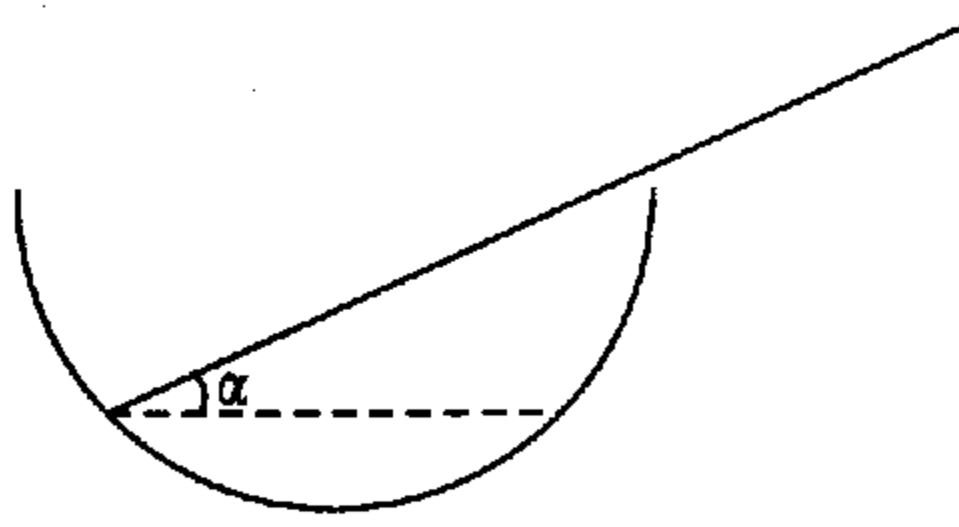


图 2-30

3. 有一个半球形的光滑碗,在上搁一长为 $2L$ 的均质杆,碗的半径为 R ,且有 $2R > L > \frac{\sqrt{6}}{3}R$,求杆平衡

时与水平方向的夹角 α 为多少? (如图 2-30) 并求出杆与碗之间的作用力.

- 一架均匀的梯子, 一端放置在水平地面上, 另一端靠在竖直墙上, 梯子与地面及梯子与墙之间的静摩擦系数分别为 μ_1 和 μ_2 , 求梯子能平衡时与地面所成的最小夹角. 若梯子与墙光滑, 梯子与地面的静摩擦因数为 μ , 梯子质量为 m , 现有质量为 m 的人沿梯子上爬, 为了保证人的安全, 对梯子放置有什么要求?
- 如图 2-31 所示, 一半径为 R 的刚性光滑球体静止放置, 质量为 M 的圆环状均匀弹性绳水平套在球体上, 已知绳环原长的半径为 $a = R/2$, 套在球体上的绳环的半径为 $b = \sqrt{2}a$. 试求弹性绳的劲度系数 k .
- 已知原长为 l_0 , 劲度系数为 k 的弹簧, 其线密度为 ρ , 竖直悬挂, 求其自身重引起的伸长.

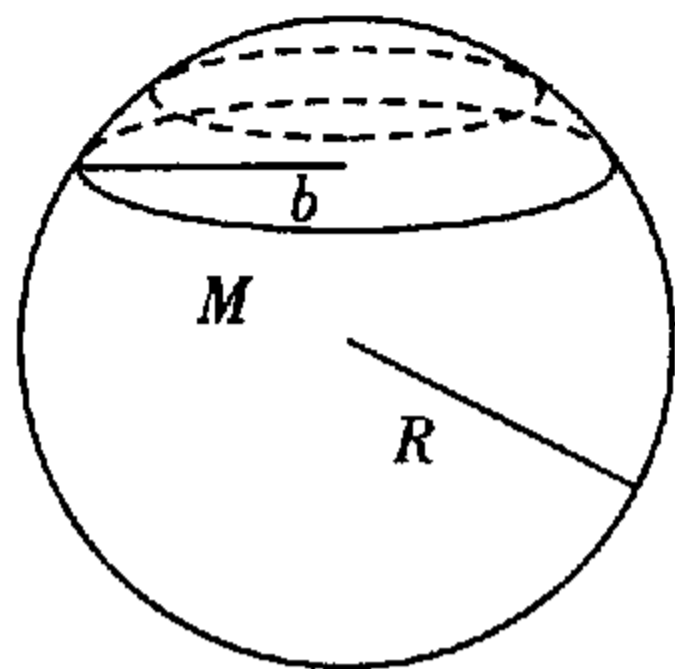


图 2-31

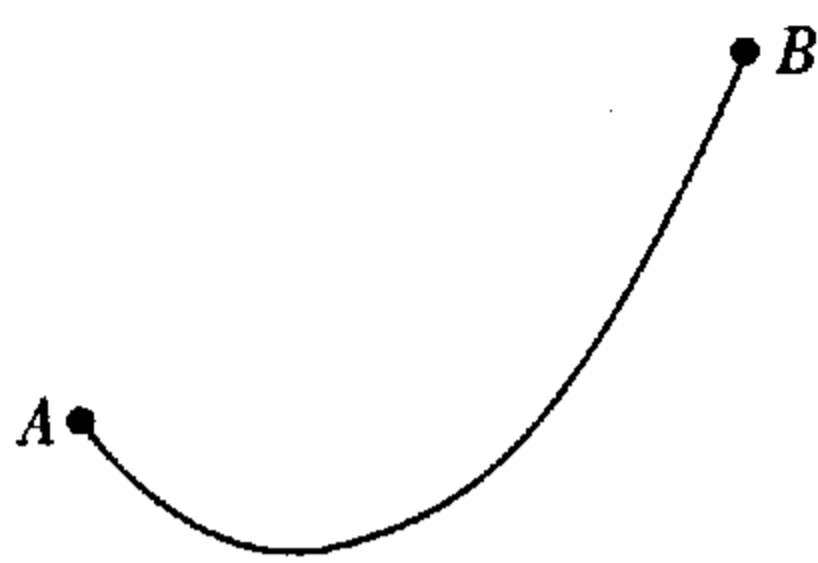


图 2-32

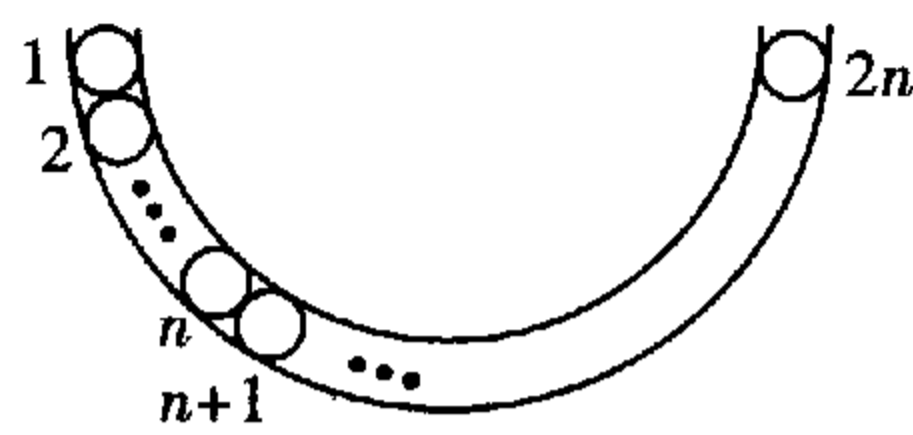


图 2-33

- 一条均匀的未拉伸的绳子两端挂在 A 和 B 两点上, 如图 2-32 所示, A 、 B 两点的高度差为 h , 绳子在 A 点的张力为 T_A , 在 B 点的张力为 T_B , 绳子的质量为 m , 长为 l , 求 A 、 B 两点张力之差.
- 一个空心的环形圆管沿一条直径截成两部分, 一半竖立在铅垂平面内, 如图 2-33 所示, 管口连线在一水平线上, 今向管内装入与管壁相切的 $2n$ 个滚珠, 左、右侧顶部的滚珠都与圆管截面相切. 已知单个滚珠重 G , 并设系统中处处无摩擦. 求从左边起第 n 个和第 $(n+1)$ 滚珠之间的相互压力.
- 如图 2-34 所示, 绕线轮 C 重 $G_C = 1000$ N, 用水平细绳与重 $G_A = 500$ N 的物体 A 相连, 用与水平成 37° 角的绳经定滑轮与重物 P 相连. 已知 A 和轮 C 与接触面的动摩擦因数分别为 $\mu_A = 0.5$, $\mu_B = 0.2$, 且 $r = 5$ cm, $R = 10$ cm, 不计滑轮摩擦与绳重, 求维持平衡的最大重量 P .

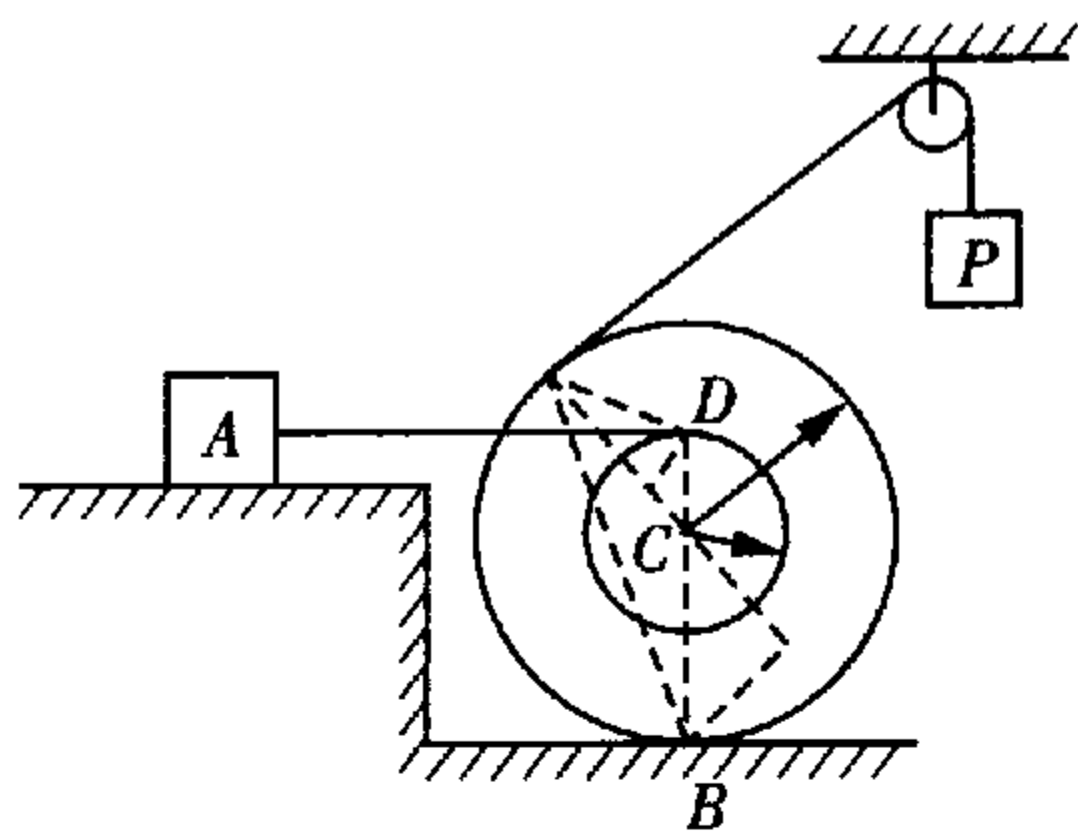


图 2-34

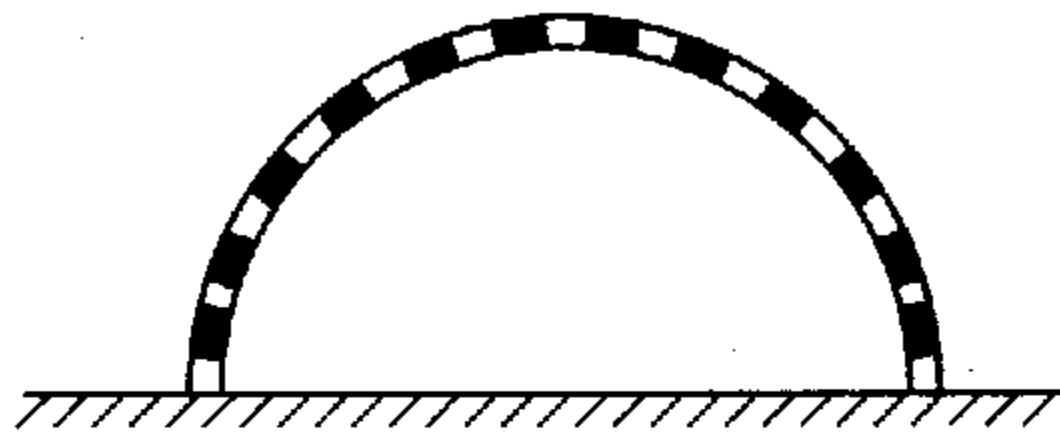


图 2-35

- 如图 2-35 所示, 在一个置于水平地面上的表面光滑的半径为 R 的半圆柱面上, 置有一条长为 πR 的均匀链条, 链条的质量为 m , 其两端刚好分别与两侧的水平面相接触, 求此链条中张力的最大值为多少?
- 半径为 r 、质量为 m 的三个相同的刚性球放在光滑的桌面上, 两两之间互相接触, 用一高为 $1.5r$ 的圆柱形刚性圆筒(上下均无底)将此三球套在筒内. 圆筒的半径选取适当, 使得各球间及球与

圆筒间均保持接触,但相互间无作用力.现取一质量为 m 、半径为 R 的第四个球放在座球的上方的正中,设所有接触面的静摩擦因数均为 $\mu = 3/\sqrt{15}$.问 R 取何值时,用手轻轻竖直向上提起圆筒,即能将四球提起来?

12. 如图 2-36 所示,滑轮左右两边原挂有质量均为 M 的物块,在右物块上又放有质量为 m 的小物块,忽略滑轮和绳的质量及滑轮轴上的摩擦,求左物块上升的加速度, m 、 M 之间的作用力及支点 A 所受的力.

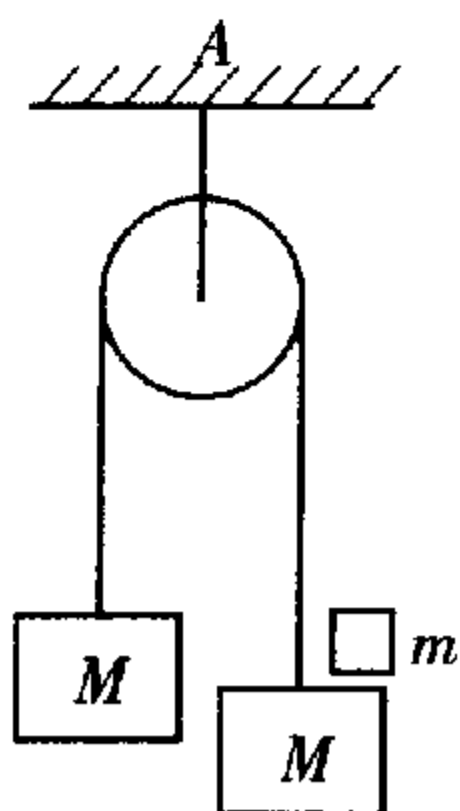


图 2-36

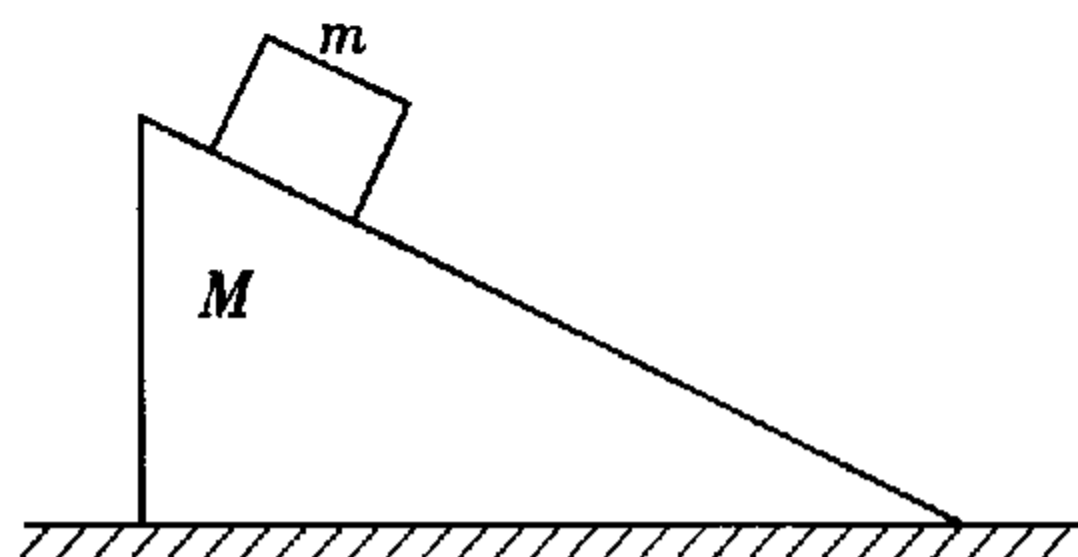


图 2-37

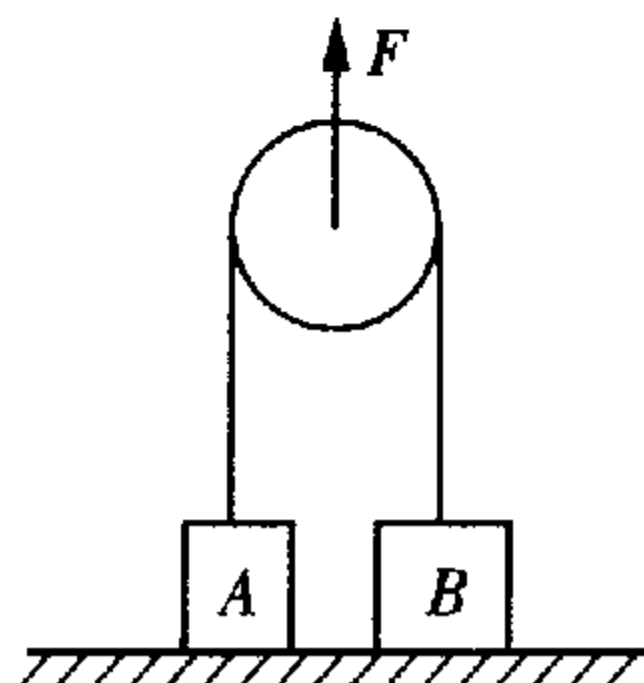


图 2-38

13. 一质量为 m 的木块静置于质量为 M 、倾角为 θ 、高为 h 的直角劈的顶部,劈置于水平面上,如图 2-37 所示.所有的接触面都是光滑的,求木块 m 相对于斜面的加速度.
14. 如图 2-38 所示的轻滑轮跨有一轻绳,绳的两端连接着质量分别为 1 kg 和 2 kg 的物体 A 和 B ,现以 50 N 的恒力 F 向上提起滑轮的轴, A 和 B 的加速度各为多少? 不计滑轮质量及滑轮与绳间摩擦.
15. 长为 L 的杆绕 O 点在光滑水平面上以 ω 的角速度匀速转动,杆的质量分布不均匀,设线密度 $\lambda = cx$, x 为离 O 点的距离, c 为常量,求 O 点所受力. (如图 2-39 所示)
16. 长为 L 、总质量为 m 的柔软绳盘放在水平台面上,用手将绳索的一端以恒定的速率 v_0 向上提起,求当提起高度为 x 时手的提力. (如图 2-40)

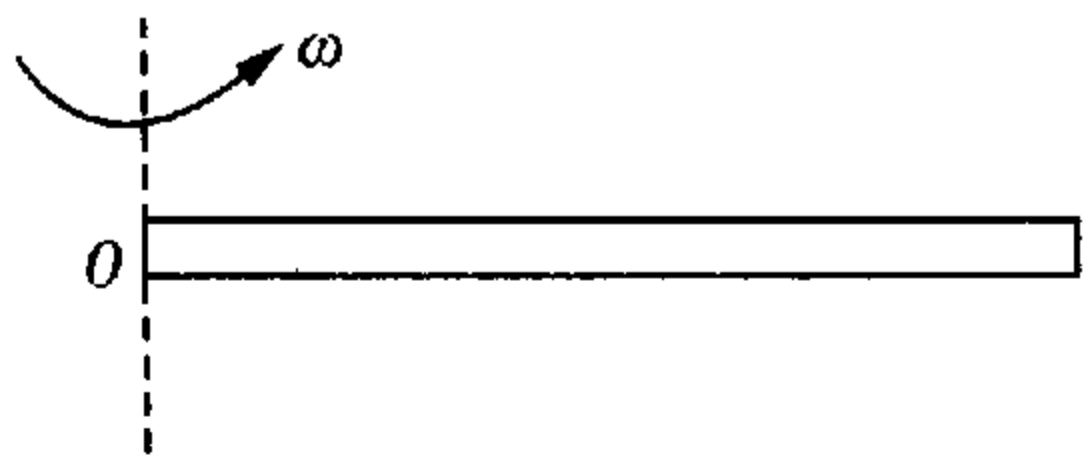


图 2-39

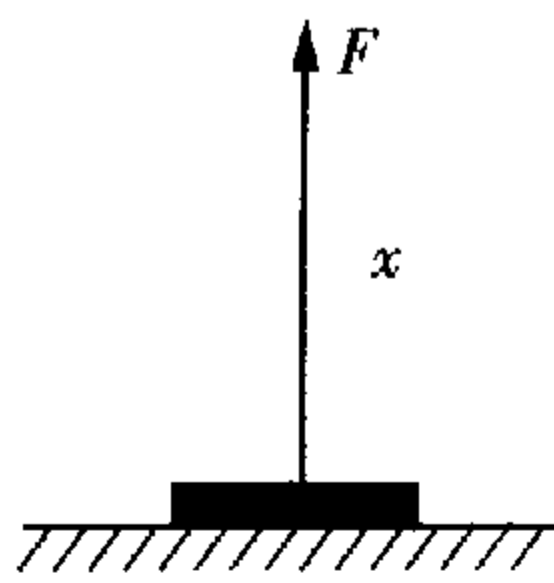


图 2-40

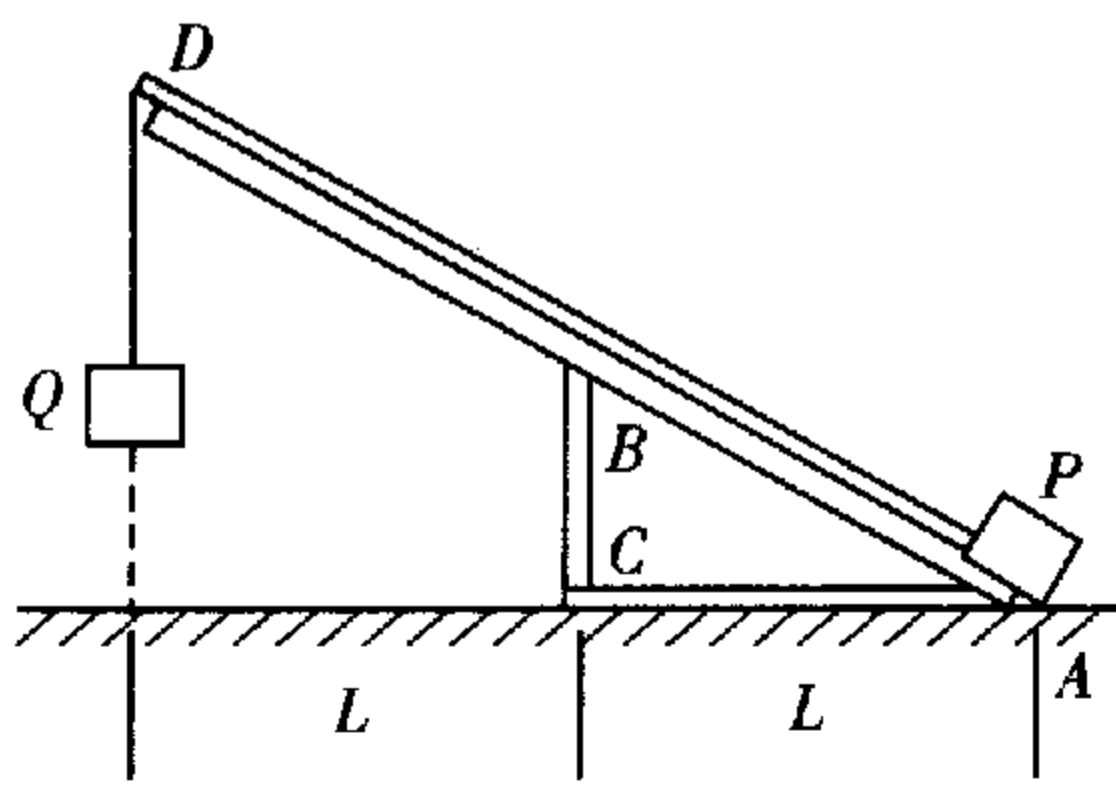


图 2-41

17. 木板 AD 固定在三角形框架 ABC 上,框架的 AC 边放在水平桌面上,质量相等的 P 、 Q 两物体通过不计质量的细绳连接如图 2-41 所示, P 与木板的滑动摩擦因数 $\mu = 0.25$, AC 的长度以及 C 到 Q 的水平距离都为 $L = 0.9\text{ m}$,若把 P 置于斜面底端 A 处由静止释放,让 Q 带动 P 运动,试问经多少时间后,框架将绕 C 点转动.
(木板与框架质量不计,框架不会发生滑动, $\angle CAB = 37^\circ$, $\sin 37^\circ = 0.6$, $\cos 37^\circ = 0.8$,滑轮的大小和摩擦均不计. $g = 10\text{ m/s}^2$)
18. 质量为 M 的长平板以速度 v_0 在水平面上作直线运动,长板与地面间的动摩擦因数为 μ_2 ,现将速

度为零、质量为 m 的木块放在长平板上,如图 2-42 所示. 设木块与板之间的滑动摩擦因数为 μ_1 , 试问木块在长平板上滑行多长的距离才能与板取得相同的速度?

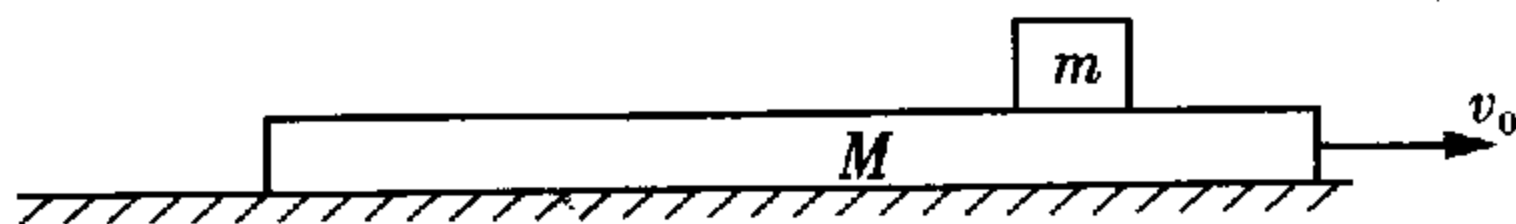


图 2-42

19. 如图 2-43, 在 xOy 竖直平面内, 支在原点 O 的一根弯杆, 其形状可用函数 $y = x^2/k$ 来描写, k 为有量纲的非零正常数. 在杆上穿有一滑块, 杆与滑块的动摩擦因数为 μ .

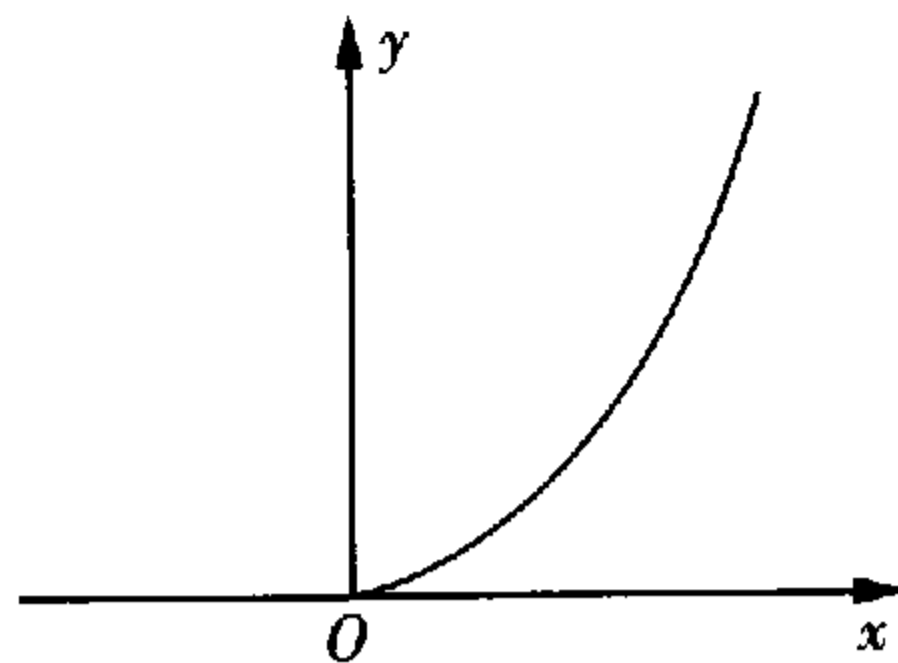


图 2-43

(1) 不考虑摩擦, 求滑块的高度为 y 时, 它在沿杆方向上加速度的大小.

(2) 考虑摩擦, 但杆不动, 在什么情况下, 滑块可以在杆上静止? (用 y, μ, g, k 等表达)

(3) 现在设杆以角速度 ω 绕 y 轴匀速转动, 且有关系 $\omega = \sqrt{2g/k}$, 这时滑块可以在何处相对于杆静止?

(4) 若 $\mu = 0.5, \omega = \sqrt{6g/k}$, 则滑块不滑动的条件又如何?

20. 两块与水平方向成 α 角的光滑斜面构成的轻架, 架上有如图 2-44 所示的球 A, B , 轻架可以沿水平做无摩擦滑动, 从静止释放质量为 m_1 的 A 球, 试问在何种条件下, 质量为 m_2 的 B 球将沿轻架“上滚”(两球未相撞)?

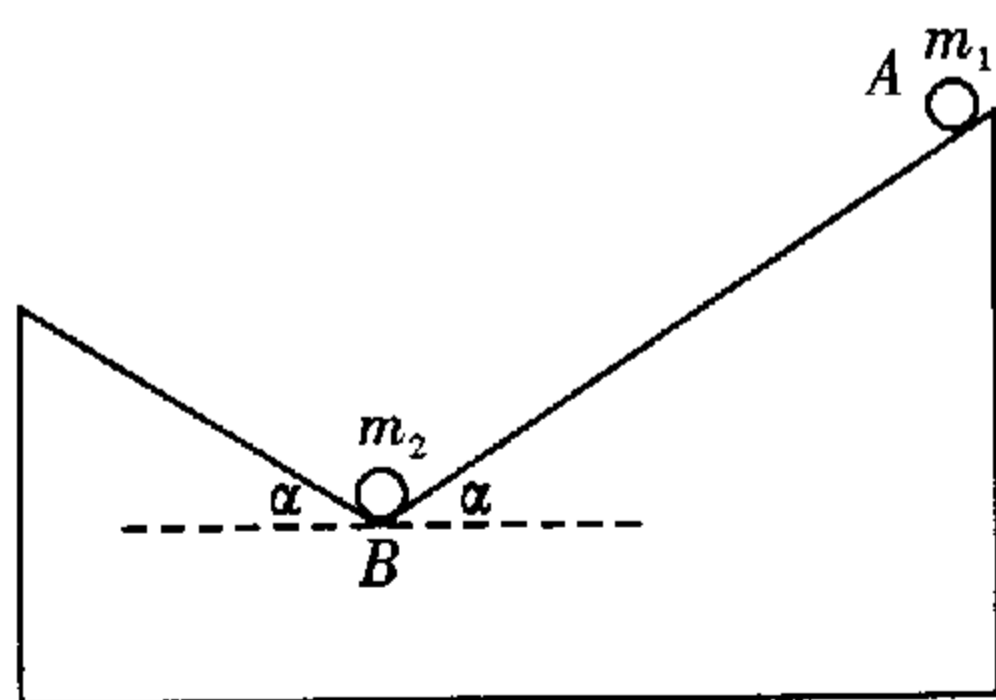


图 2-44

21. 如图 2-45 所示, 物体 A, B 及滑轮 C 质量均为 m , 滚轮 C 由固定在一起的两个中心圆盘组成, 半径分别为 $2r$ 和 r , 各接触处静摩擦因数均为 μ , 求维持系统平衡时, μ 最小值是多少?

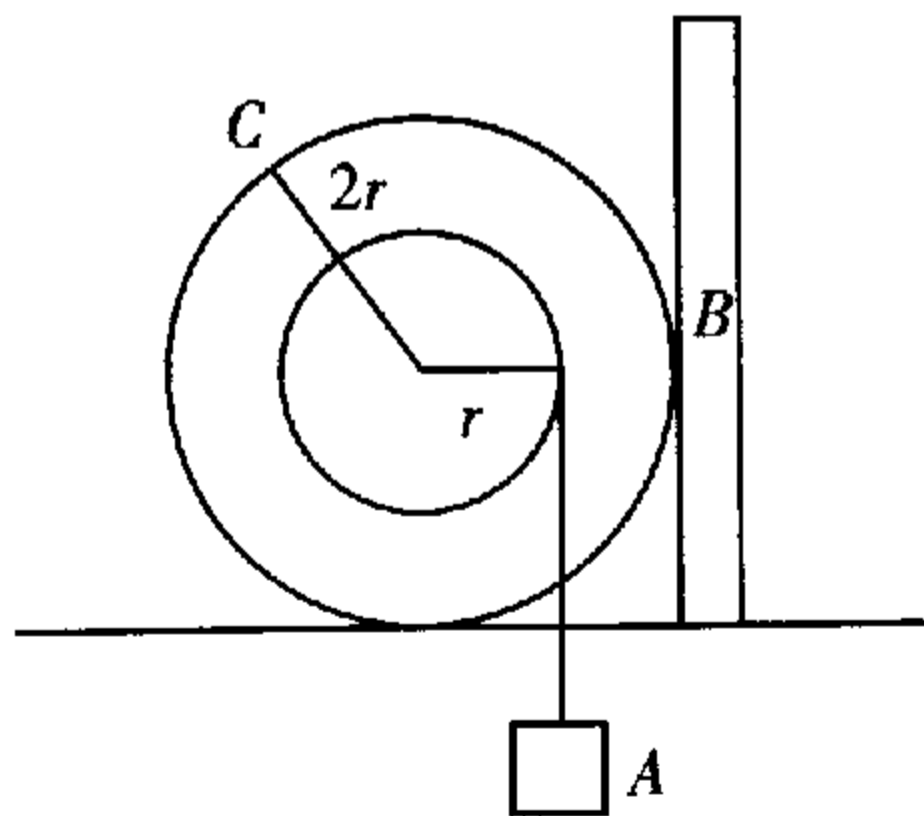


图 2-45

22. 四块相同的砖叠放在桌边. 是否可能将它们水平滑动, 使得最上面的砖能够突出到全部砖体在桌外? 如果砖的个数可以任意增加, 最上面的砖位移的理论极限是什么?

23. 求解如图 2-46 所示用一根细线悬挂圆规时, 圆规张开多大的角度可以使其旋转点抬升得最高, 假定圆规两臂的长度相等.

24. 如图 2-47 所示, 一条不可伸长的轻绳半绕在固定圆柱的表面上.

作为摩擦力的结果, 当两端所施加的力满足下列不等式时, 绳子不会在圆柱上滑动.

$$\frac{1}{2}F_A \leq F_B \leq 2F_A$$

确定绳子与圆柱之间的摩擦系数.



图 2-46

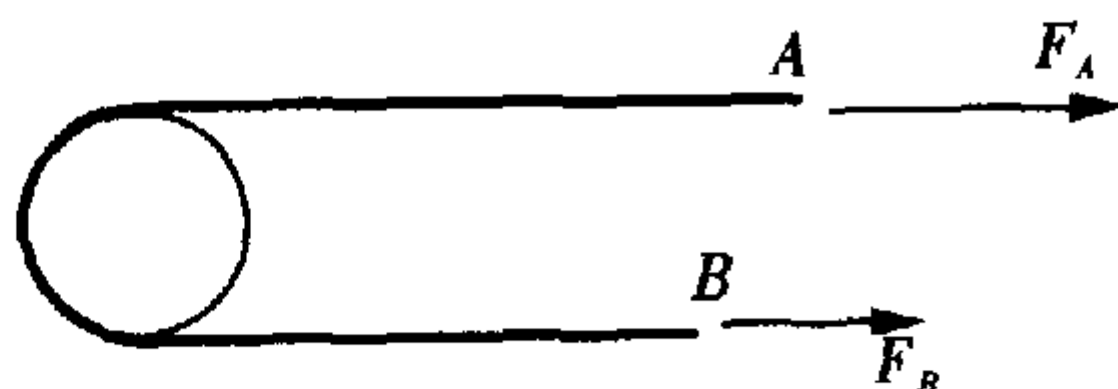


图 2-47

25. 如图 2-48 所示, 固定在竖直平面内的椭圆环, 其长轴沿竖直方向, 有两个完全相同的小圆环套在椭圆环上, 不计质量的轻线将两个小圆环连接在一起, 轻线跨过位于椭圆焦点 F 的水平轴, 小圆环与轻线系统处于平衡状态, 不计各处的摩擦, 小圆环的大小忽略不计. 试分析说明, 系统属于哪一种平衡状态?

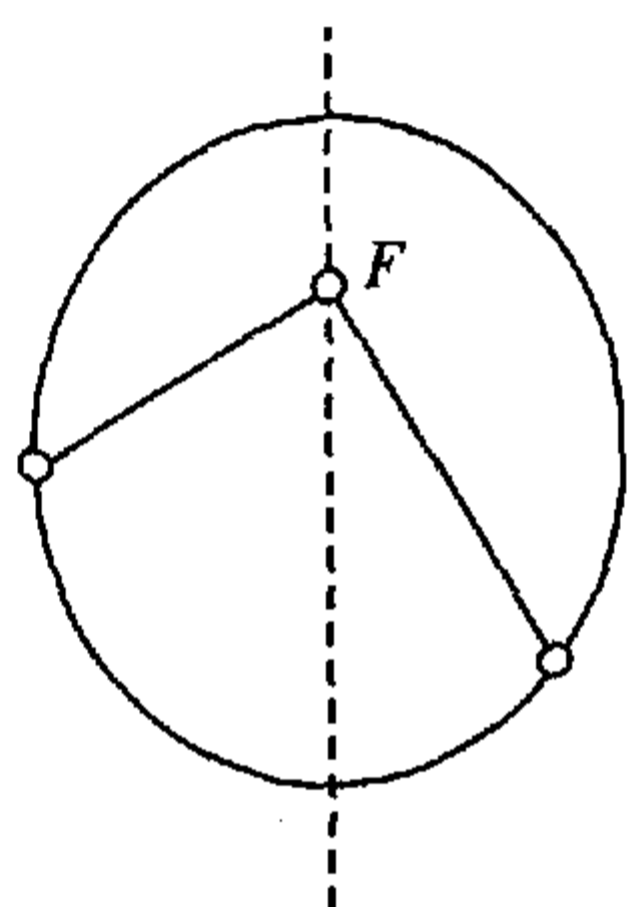


图 2-48

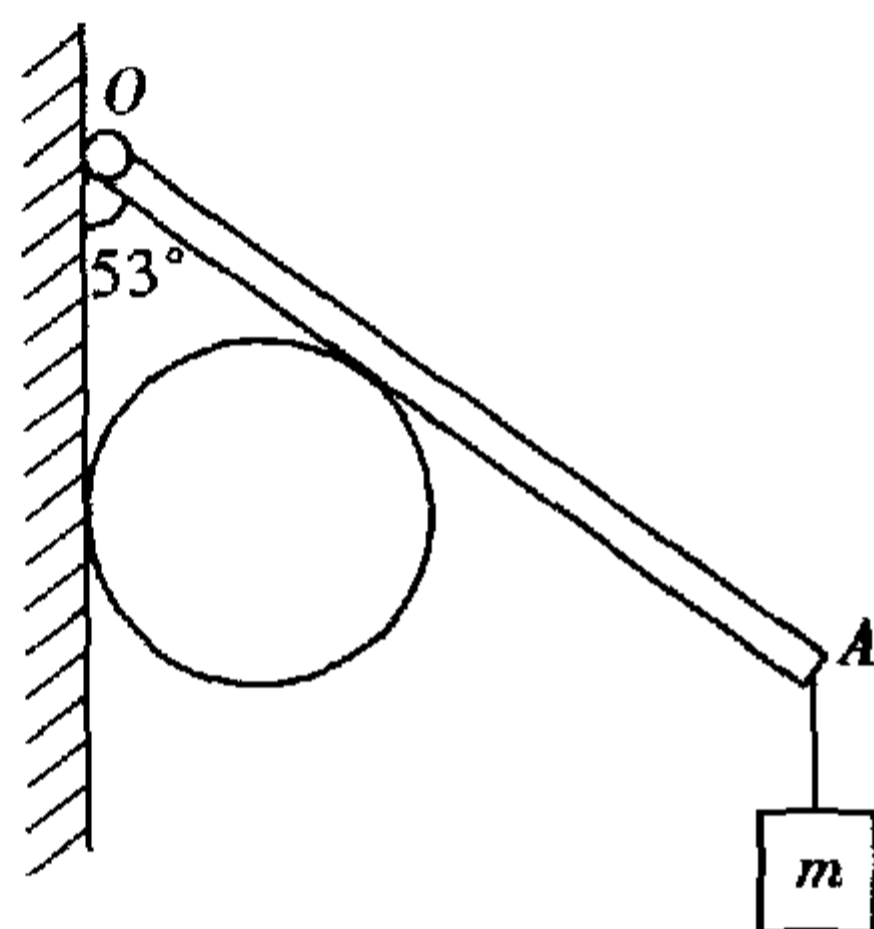


图 2-49

26. 如图 2-49 所示, 匀质圆柱体夹在木板与竖直墙之间, 其质量为 m , 半径为 R , 与墙和木板间的摩擦因数均为 μ , 板很轻, 其质量可忽略. 板的一端 O 与墙用光滑铰链相连, 另一端 A 挂有质量为 m' 的重物, OA 长为 L , 板与竖直墙夹 θ 角, $\theta = 53^\circ$. 试问, m' 至少需要多大才能使系统保持平衡? 并对结果进行讨论.
27. 3 个质量均为 m 的小球串在光滑细杆上, 用 3 根完全相同的弹簧相连, 劲度系数均为 k , 左侧弹簧, 左端固定在细杆的 O 点. 细杆绕 O 点以角速度 ω 转动时, 各弹簧的形变均保持在弹性限度之内且各球之间无相对运动, 则对 ω 有何要求? (如图 2-50)

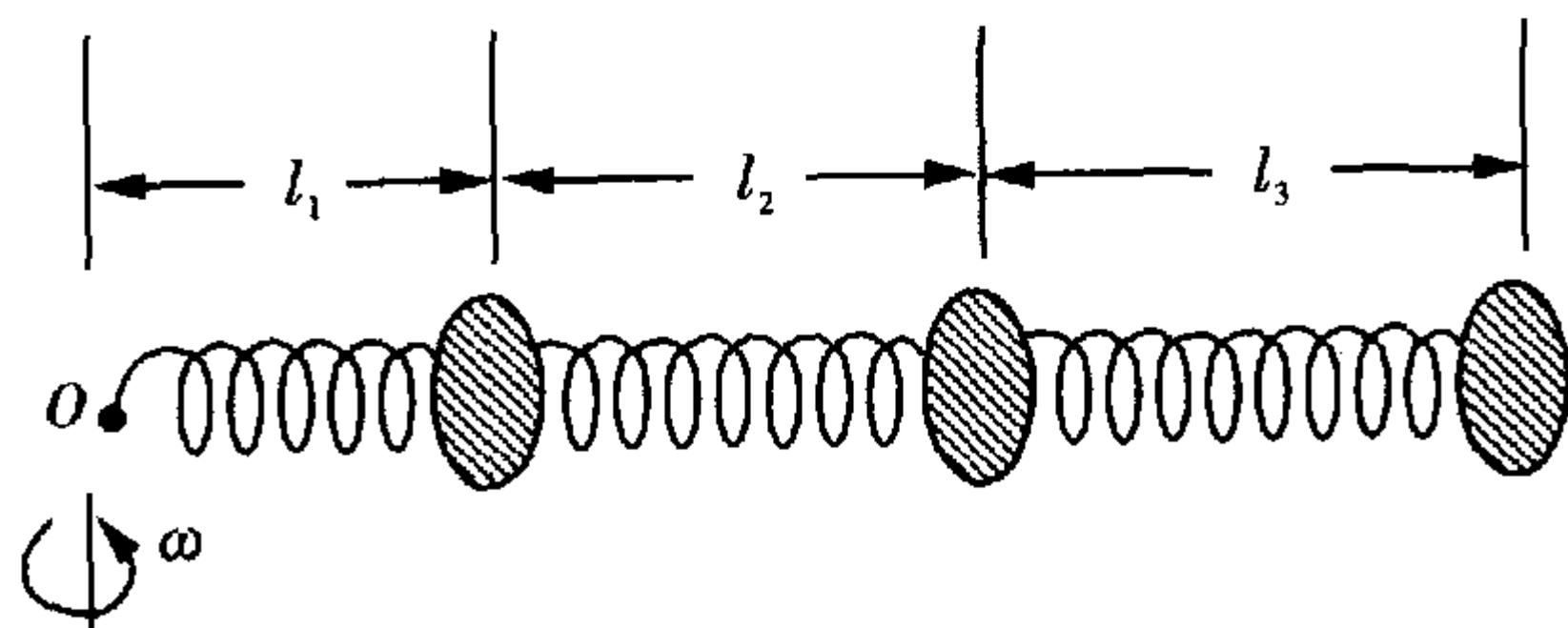


图 2-50

28. 离心机常用来分离不同密度的各种物质(如图 2-51 所示). 设离心机的转速为每秒 100 转. 求距离转轴为 $r = 10 \text{ cm}$ 处的颗粒在使用离心机时与未使用时沉降加速度之比值.

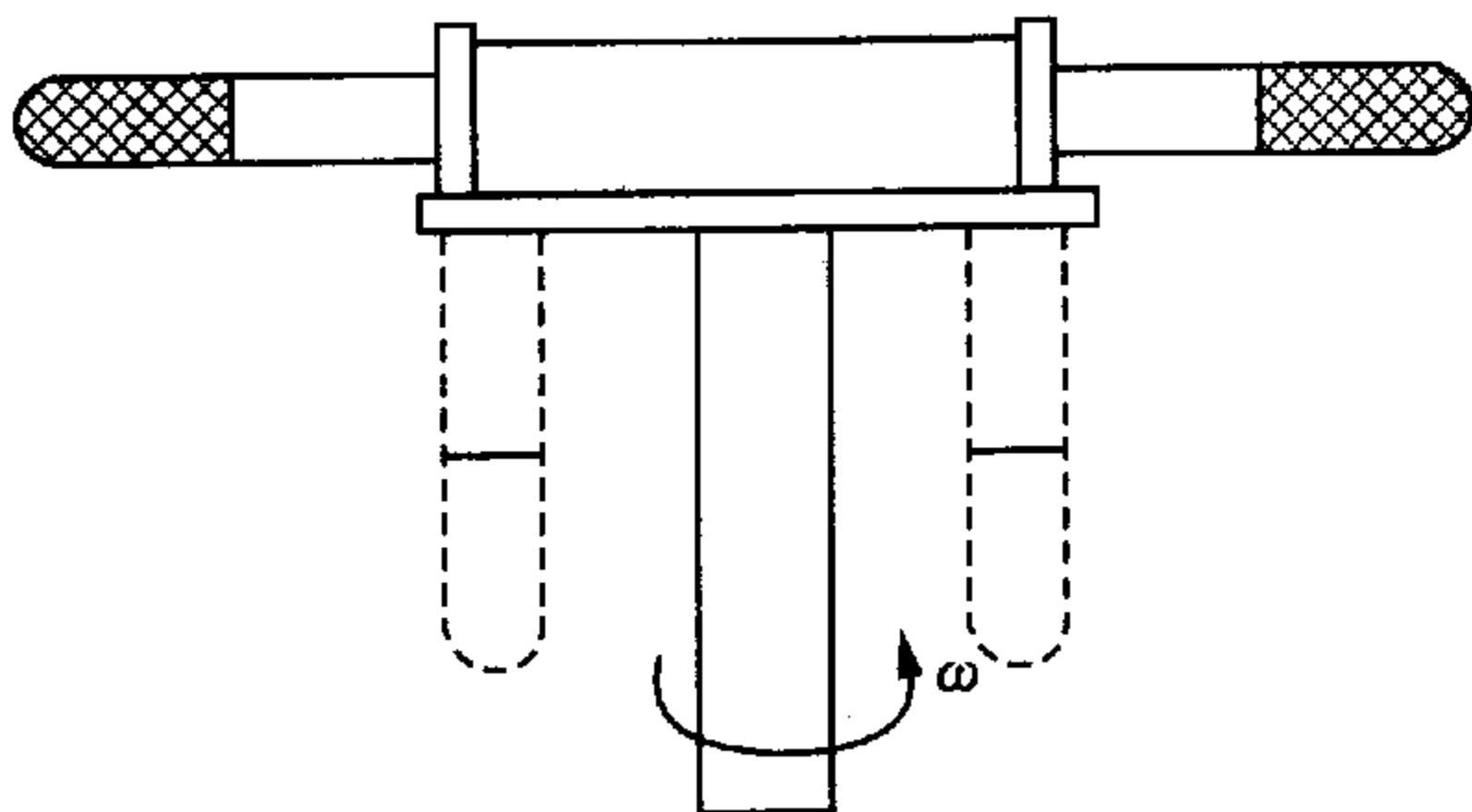


图 2-51

29. 如图 2-52 所示, 当船舶抛锚时, 要把缆绳在系锚桩上绕好几圈(N 圈), 这样做时, 锚桩抓住缆绳必须的力, 比船作用于缆绳的力小得多, 以避免在船舶遭到突然冲击时拉断缆绳, 这两力之比 $F_1 : F_2$ 与缆绳绕系锚桩的圈数有关, 设泊船时将缆绳在系锚桩上绕了 5 圈, 计算比值 $F_1 : F_2$, 设缆绳与锚桩间的摩擦因数 $\mu = 0.2$.

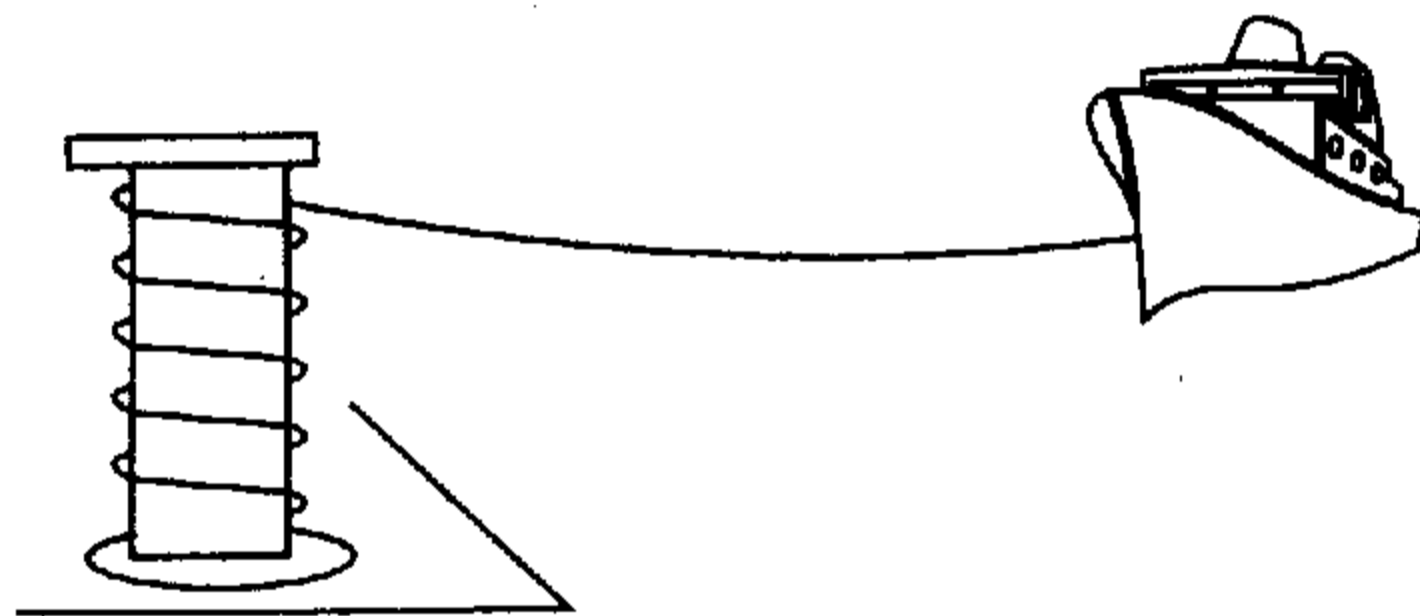


图 2-52

第三章 机械能、动量与角动量

【学习目标】

一、机械能

(一) 功和功率

1. 功

力的瞬时效应:使具有一定质量的物体产生一定的加速度(力是改变物体运动状态的原因). 力的空间积累效应:功.

(1) 定义:力和力的方向上位移的乘积. 功是标量.

$$W = F s \cos \theta$$

(2) 几点说明

① $W = F s \cos \theta$ 必须在 F 是恒力情况下才适用,若 F 为变力,其处理方法为:

微元法:把整个物体运动过程分割成无穷段,令每一段都趋于零,则可将每个微元段做功变为恒力做功,则总功等于每一段功的代数和.

$$W = \sum F_i s_i \cos \theta_i$$

向心力不做功可通过此法得出.

图像法:建立 $F-s$ 坐标系,作出 F 随 s 的变化图像,则图线与位移轴之间围成的“面积”即为功的大小. 如图 3-1 所示.

等效法:即用功和能的关系或 $W = Pt$,等效转变为所求的功.

功能关系:功是能量转化的量度.

② 公式中的位移 s ,应该是力的作用点的位移.

(3) 保守力的功 势能

重力、弹力、万有引力的功仅由物体的初末位置决定,与做功路径无关,这类力称为保守力. 不具有这种特点的力(如摩擦力)叫耗散力.

物体间存在保守力作用,就具有相应的势能. 势能是属于有保守力作用的两个物体在内的系统的,不是一个物体所独有. 任何保守力的功总是等于相关势能的减少,即

$$W_{\text{保}} = -\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$$

势能增量不受势能零点选择的影响:如果选定某参考位置的势能为零,则物体在一定位置的势能 E_p 在数值上等于物体从该位置到零势能位置保守力所做的功. 下面列出力学中常用的势能公式:

重力势能:一般选取地面为零势能处,物体和地球系统的重力势能 $E_p = mgh$.

弹性势能:一般选定弹簧无形变时为零势能点,当弹簧的形变量为 x 时,其弹性势能 $E_p = \frac{1}{2} kx^2$,

k 为其劲度系数.

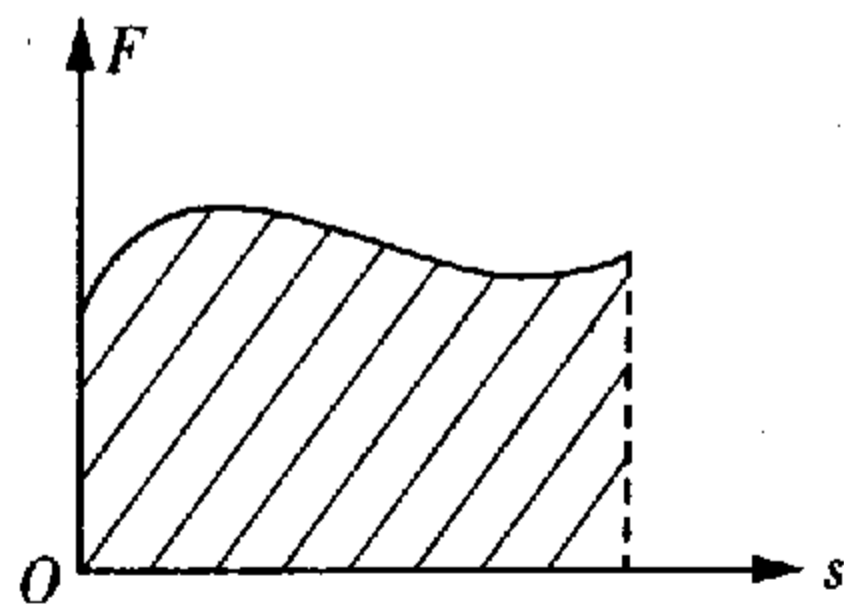


图 3-1

万有引力势能:一般规定无穷远处为零势能点,质点 m_1 和 m_2 相距 R 时的万有引力势能为 $E_p = -G \frac{m_1 m_2}{R}$.

2. 功率:作用在物体上的力在单位时间内所做的功.

$$\text{平均功率: } P = \frac{W}{t}$$

$$\text{瞬时功率: } P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F s \cos \theta}{\Delta t} = F v \cos \theta$$

式中 v 为某时刻的瞬时速度, θ 为此时刻 v 与 F 的夹角.

(二) 动能定理

1. 质点动能定理

$$W_{\text{外}} = F_{\text{外}} s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{K2} - E_{K0} = \Delta E_K$$

所有力对物体做的总功等于物体动能的增量.

2. 质点系动能定理

若质点系由 n 个质点组成,质点系内任何一个质点都会受到来自于系统以外的作用力(外力)和系统内其他质点对它的作用力(内力),在质点运动时这些力都将做功.

$$\sum E_{\text{外}} + \sum W_{\text{内}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$$

$$\text{即 } W_{\text{系外}} + W_{\text{系内}} = W_{\text{耗}} - E_{K0} = \Delta E_K$$

质点所有外力做功之和加上所有内力做功之和等于质点系总动能的改变量.

注意:①无论是质点动能定理还是质点系动能定理,都是牛顿运动定律推导出来的,所以它们只适用于惯性系.

②外力 $F_{\text{外}}$ 做功的位移和速度 v 与惯性参照系的选择有关,所以动能相对于不同的惯性系也不相同,在研究问题时须先确定同一惯性系.

③对于质点系,内力是成对出现的,一对作用力和反作用力(内力)所做的功不一定等值反号,其代数和取决于相对位移,而相对位移与参照系的选择无关.

(三) 功能原理与机械能守恒

1. 功能原理 物体系在外力和内力(包括保守内力和非保守内力)作用下,由一个状态变到另一个状态时,物体系机械能的增量等于外力和非保守内力做功之和.

因为保守力的功等于初末势能之差,即

$$W_{\text{保}} = E_{P0} - E_{P1} = -\Delta E_P$$

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = \Delta(E_K + E_P) = \Delta E$$

2. 机械能守恒

当质点系满足: $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = 0$

则 $\Delta E = 0$, 即 $E_K + E_P = E_{K0} + E_{P0} = \text{常量}$

机械能守恒定律:在只有保守力做功的条件下,系统的动能和势能可以相互转化,但其总量保持不变.

说明:机械能守恒定律只适用于同一惯性系.

在非惯性系中,由于惯性力可能做功,即使满足守恒条件,机械能也不一定守恒.对某一惯性系

$W_{\text{外}} = 0$, 而对另一惯性系 $W_{\text{外}} \neq 0$, 机械能守恒与参照系的选择有关.

二、动量

(一) 冲量与动量

1. 冲量 力的时间积累效应.

(1) 定义: $\vec{I} = \vec{F} \cdot t$

冲量是与力同方向的矢量.

(2) 几点说明

① $\vec{I} = \vec{F} \cdot t$ 必须在 F 是恒力情况下才适用, 若 \vec{F} 为变力, 其处理方法为:

微元法: 把时间分割成无穷段, 令每一段微元时间 Δt 都趋于零, 则可将每个微元时间段 Δt_i 内的冲量变为恒力的冲量 I_i , 则在时间 t 内等于每一段冲量的矢量和.

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \Delta t_i$$

图像法: 对方向一定只改变大小的变力, 建立 $F-t$ 坐标系, 作出 F 随 t 的变化图像, 则图线与时间轴之间围成的“面积”即为在时间 t 内的冲量. 如图 3-2 所示.

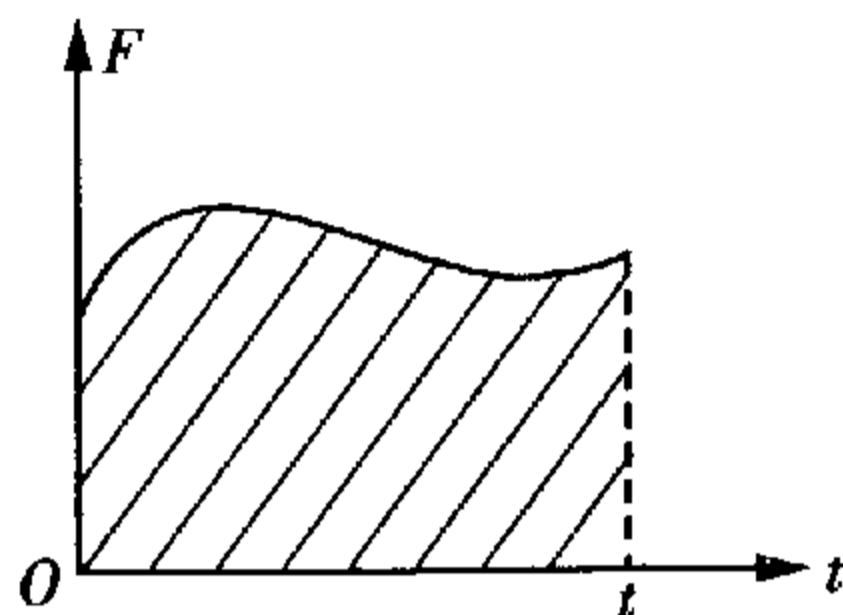


图 3-2

等效法: 即用冲量和动量的关系 $\vec{I} = \Delta \vec{P}$, 等效转变为所求的冲量.

关系: 冲量是动量变化的量度.

② 公式中的时间 t , 应该是对应力作用的时间. 求冲量时, 一定要明确是哪个力在哪段时间内的冲量.

2. 动量

速度从物体的运动快慢和方向角度来描述了物体的运动状态, 而物体的运动状态的改变的难易程度又与物体的质量有关, 所以质量和速度表征了物体的运动状态, 引入动量来表征物体的运动状态.

(1) 定义: 质点的动量为质点的质量和速度 \vec{v} 的乘积.

$$\vec{P} = m \vec{v}$$

动量是与速度同方向的矢量. 动量是表征物体运动状态的物理量.

(2) 质点系的动量为各质点动量的矢量和.

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C, \vec{v}_C \text{ 是质心 } C \text{ 的速度.}$$

(二) 动量定理

1. 质点动量定理

$$\vec{F}_{\text{合}} = m \vec{a} = m \frac{\vec{v}_t - \vec{v}_0}{t}, \text{ 即 } \vec{F}_{\text{合}} \cdot t = m \vec{v}_t - m \vec{v}_0$$

$$\vec{I}_{\text{合}} = \Delta \vec{P}$$

即 合外力的冲量等于质点动量的增量.

2. 质点系动量定理

将质点动量定理推广到有 n 个质点组成的质点系, 即可得到质点系的动量定理.

令 $\vec{I}_{\text{外}}$ 和 $\vec{I}_{\text{内}}$ 分别表示质点系各质点所受的外力和内力的总冲量, 则 \vec{P}_t 和 \vec{P}_0 表示质点系中各质点总的末动量和初动量之矢量和, 则:

$$\vec{I}_{\text{外}} + \vec{I}_{\text{内}} = \vec{P}_t - \vec{P}_0 = \Delta \vec{P}$$

而 $\vec{I}_{\text{内}} = 0$, 因质点系内各质点之间的相互作用力是成对出现的, 且等值反向, 故

$$\vec{I}_{\text{外}} = \vec{P}_t - \vec{P}_0$$

即 所有外力对质点系的总冲量等于质点系总动量的增量.

注意: ①无论是质点动量定理还是质点系动量定理都是牛顿运动定律推导出来的, 所以它们只适用于惯性系.

②速度 \vec{v} 与惯性参照系的选择有关, 所以动量 \vec{P} 相对于不同的惯性系也不相同, 在研究问题时须先确定同一惯性系.

③对于质点系, 内力是成对出现的, 一对作用力和反作用力(内力)的冲量的矢量和必为零, 而与参照系的选择无关.

(三) 动量守恒定律

1. 内容: 系统不受外力或所受外力的合力为零, 这个系统的动量就保持不变.

2. 表达式

(1) 系统内相互作用前总动量 \vec{P} 等于相互作用后总动量 \vec{P}' : $\vec{P} = \vec{P}'$

系统总动量的变化量为零: $\Delta \vec{P} = 0$

(2) 两个物体组成的系统

①相互作用的两个物体的动量的变化量大小相等, 方向相反: $\Delta P_1 = -\Delta P_2$

②作用前两物体的总动量等于作用后的总动量:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

特例: { 作用前两物体静止: $0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$, 反冲运动.

{ 两物体作用后结合在一起运动: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\text{共}}$, 完全非弹性碰撞.

3. 注意几点

①定律适用于惯性系, 各速度都是相对同一惯性系而言, 常采用正交法分解处理.

②系统所受合外力不为零, 但合外力远小于系统内力时, 系统动量近似守恒.

$F_{\text{合}} \neq 0$, 但 $F_{\text{合}} \ll F_{\text{内}}$, $P_{\text{系统}}$ 守恒. 如碰撞、爆炸等作用时间极短的情况.

系统所受合外力不为零, 但在某方向上合外力为零, 此方向上的动量守恒.

$F_{\text{合}} \neq 0$, $F_{\text{合分}} = 0$, $P_{\text{分}}$ 守恒.

③动量守恒定律适用于宏观、微观, 高速、低速.

④矢量性、相对性、同时性(某一状态的总动量).

4. 定律广义: 质点系的内力不能改变它质心的运动状态——质心守恒.

(1) 质点系在无外力作用或者无外力偶作用下, 其质心将保持原来的运动状态.

(2) 质点系的质心在外力作用下作某种运动, 则内力不能改变质心的这种运动.

(3) 质心运动定理: 作用在质点系上的合外力等于质点系总质量与质心加速度的乘积, 即

$$\vec{F} = M \vec{a}_c$$

其质心加速度:

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

定理只给出质心运动情况,并不涉及质点间的相对运动及它们绕质心的运动.

三、碰撞

物体之间相互碰撞,经历时间短,碰撞力很大.为了简化起见,不计碰撞中非碰撞力的作用,不计碰撞时物体的位移.碰撞分正碰和斜碰两种,正碰是碰撞前后速度在同一直线上,斜碰即碰撞前后速度不在同一直线上,此时可用正交分解法列出动量守恒的分量式.

(1) 弹性碰撞:碰撞时无机械能损失.

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

若 $m_1 = m_2$, 则 $v_1 = v_{20}$, $v_2 = v_{10}$, 碰后交换速度. 若轻球碰静止的重球: $m_1 \ll m_2$, $v_{20} = 0$, 得 $v_1 \approx -v_{10}$, $v_2 = 0$, 碰后轻球 m_1 反弹, 重球仍静止. 若重球碰静止的轻球: $m_1 \gg m_2$, $v_{20} = 0$, 得 $v_1 \approx v_{10}$, $v_2 \approx 2v_{10}$, 碰后重球 m_1 速度不变, 轻球以重球的两倍速度运动.

由上面的关系式可以得到: $v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$, 这表明物体间弹性碰撞前后相对速度的大小不变、方向相反, 即分离速度等于接近速度.

(2) 非弹性碰撞:碰撞时有动能损失. 为此引入恢复系数 e , 它由两球材料决定, 与其质量、初速无关. 其定义式为

$$e = \frac{\text{分离速度}}{\text{接近速度}} = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

$e=1$ 为完全弹性碰撞情形; $e=0$ 时, $v_2 = v_1$, 碰后两物体结合在一起速度相同, 称为完全非弹性碰撞; $0 < e < 1$, 称为非完全弹性碰撞, 其机械能的损失为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left(\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \end{aligned}$$

四、角动量

(一) 定轴转动定律 转动惯量

刚体所受的对于某定轴的合外力矩等于刚体对此轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下获得的角加速度的乘积. 即: $M = JB$. 式中 J 为刚体的转动惯量, 表示刚体转动中惯性大小量度.

注意: ① $M = JB$ 中各量均需同一时刻(瞬时性)、同一刚体、同一转轴, 通常写成代数式;

② 与 $F = ma$ 相比较

合外力矩 $M \iff$ 合外力 F

转动惯量 $J \iff$ 质量 m

角加速度 $\beta \iff$ 加速度 a

③ 转动惯量 J 的大小与刚体的总质量及质量对转轴的分布情况有关, 表达式为:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

例如质量 m 、长 L 的均匀细棒对过棒中心且与棒垂直的转轴, 其 $J = \frac{1}{12}mL^2$, 若对棒的一端且与棒垂直的转轴, 其 $J = \frac{1}{3}mL^2$, 等等.

(二) 刚体的功和能

1. 刚体的机械能

(1) 转动动能

$$E_{Ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i (r_i \omega_i)^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega_i^2 \quad (\text{刚体内质元 } i \text{ 的转动动能})$$

$$E_{K_r} = \sum \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (\text{对刚体各质元的角速度 } \omega)$$

(2) 重力势能

$$E_P = \sum E_{Pi} = \sum m_i g h_i = \sum m_i h_i g = m h_C g = m g h_C$$

刚体的重力势能, 相当于刚体质量集中于质心 C 的质点的重力势能.

(3) 刚体的机械能

$$E = E_{K_r} + E_P + E_{K_C} = \frac{1}{2}J_C \omega^2 + m g h_C + \frac{1}{2}m v_C^2$$

2. 力矩的功 外力矩对刚体做的功等于各个外力对定轴转动的刚体做功的总和. 设刚体在外力矩作用下转动角度 $\Delta\theta$, 其力矩的功(位移 $\Delta s_i = r_i \Delta\theta$):

$$W = \sum F_i \Delta s_i \cos\theta_i = (\sum F_i r_i \cos\theta) \Delta\theta = M_{\text{外}} \Delta\theta$$

即 力矩对定轴转动的刚体做的功等于力矩乘以角位移.

$$\text{力矩的功率: } P = \frac{W}{t} = \frac{M \Delta\theta}{t} = M \cdot \omega. \quad \text{单位: W.}$$

3. 刚体定轴转动的动能定理

如图 3-3 所示, 当刚体受外力矩 M 作用, 作匀变速转动, 有

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta\theta$$

$$M = J\beta = J \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\theta}$$

$$M\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = \Delta E_{K_r}$$

即 合外力矩对定轴转动的刚体所作的功等于整个刚体转动动能的增量.

4. 刚体定轴转动的功能原理

若刚体处于重力场中, 则: $M_{\text{外}} = M_{\text{其外}} + M_G$ ($M_{\text{其外}}$ 表示除重力力矩 M_G 以外的其他外力矩)

$$W = W_{\text{其外}} + W_G = (M_{\text{其外}} + M_G)\theta = \Delta E_{K_r}$$

$$\text{而 } W_G = -\Delta E_P = -(E_{P_2} - E_{P_1})$$

$$M_{\text{其外}}\theta = \Delta E_P + \Delta E_{K_r} = (m g h_{C_2} + \frac{1}{2}J\omega_2^2) - (m g h_{C_1} + \frac{1}{2}J\omega_1^2)$$

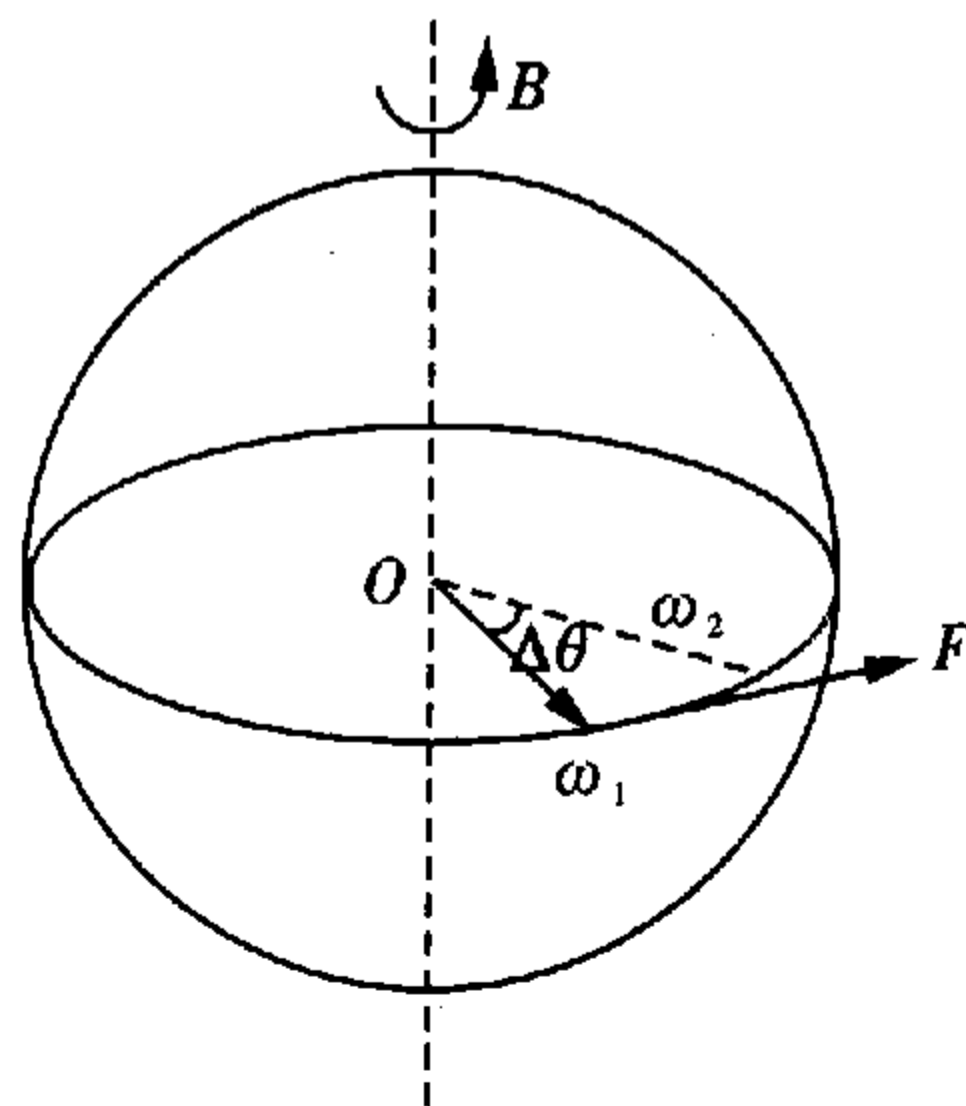


图 3-3

即为重力场中刚体定轴转动的功能原理.

若 $M_{\text{其外}} \theta = 0$, 即 $M_{\text{其外}} = 0$, 则:

$$mgh_c + \frac{1}{2}J\omega^2 = \text{常量}$$

刚体机械能守恒.

(三) 角动量定理及角动量守恒定律

1. 质点角动量

(1) 若质点绕某固定点(轴) O 作圆周运动对 O 点角动量:

$$L = mvr = m\omega r^2 = mr^2\omega = J\omega$$

$L = J\omega$ (如图 3-4 所示)

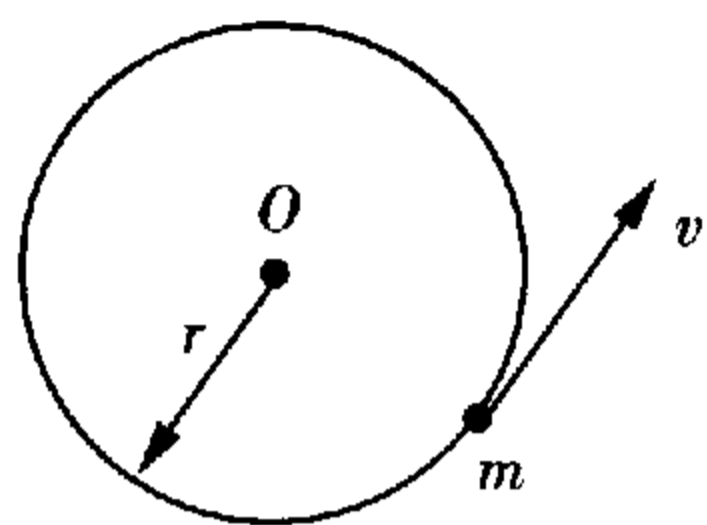


图 3-4

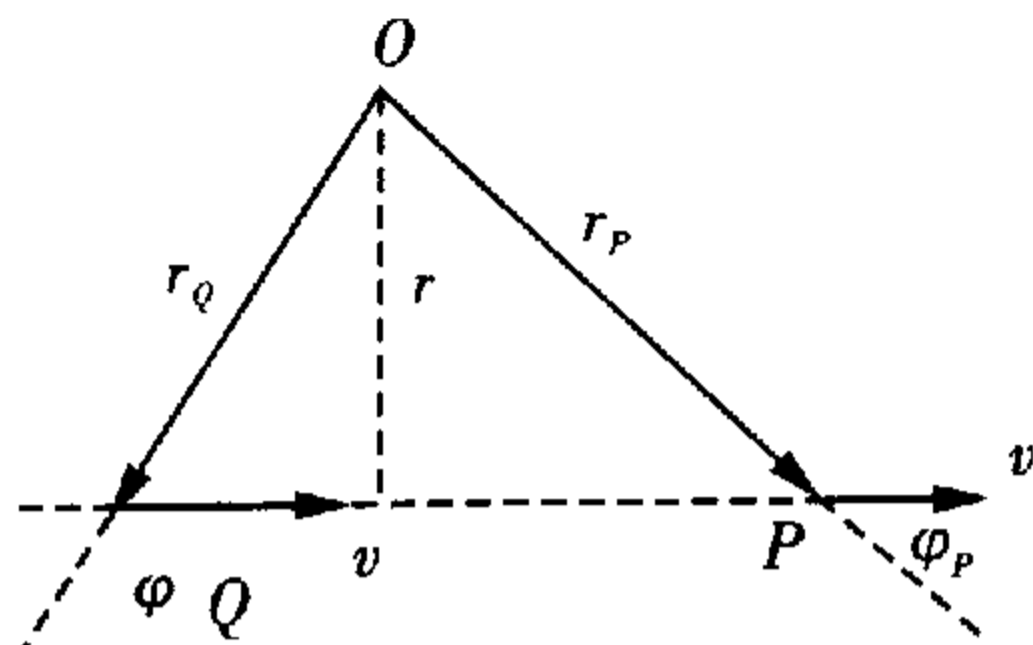


图 3-5

(2) 质点作匀速直线运动时对任意定点 O 的角动量, 如图 3-5 所示.

$$L_Q = r_Q m v \sin \varphi_Q = m v r_Q \sin \varphi_Q = m v r$$

$$L_P = r_P m v \sin \varphi_P = m v r_P \sin \varphi_P = m v r$$

$$L_Q = L_P \text{ (方向垂直纸面向外)}$$

2. 刚体对定轴的角动量

$$\text{刚体对定轴角动量: } L = \sum m_i r_i^2 \omega = J\omega$$

刚体对某定轴的角动量等于刚体对此定轴的转动惯量与角速度的乘积, 其方向由右手螺旋法则确定. 即 L 与 ω 同向(与转轴平行).

通常在设定正方向后, 用正负可表示 L 的方向.

3. 角动量定理

(1) 质点角动量定理

$$M = rF, F\Delta t = \Delta P = P_2 - P_1 = mv_2 - mv_1$$

$$M = r \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv_2 r - mv_1 r}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}, \text{ 或 } M\Delta t = \Delta L$$

一质点所受的外力矩等于它的角动量对时间的变化率; 或者一质点所受的合冲量矩等于它的角动量的增量.

$$\text{冲量矩: 力矩的时间积累 } \Delta L = M\Delta t$$

(2) 刚体的角动量定理

$$M_{\text{外}} = J\beta = J \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(J\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$M_{\text{外}} \Delta t = \Delta L$$

4. 质点和质点系的角动量守恒

(1) 质点角动量守恒

当 $M_{\text{外}} = 0, L = mvr = \text{常矢量}$

① $F_{\text{外}} = 0$, 匀速直线运动的物体对任意定点 O 的角动量守恒.

② 力 F 过定点 O , 此力称为有心力. 有心力作用下的天体运动对力心 O 的角动量守恒.

(2) 质点系(刚体)角动量守恒定律

$\Sigma M_{\text{外}} = 0$, 即外力对定点(轴)力矩之和为零, 有

$$L = \Sigma r \times m_i v_i = \text{常矢量}$$

对刚体: $L = J\omega = \text{常矢量}$

【解题钥匙】

例1 如图3-6所示, 一光滑细杆绕竖直轴以匀角速度 ω 转动, 细杆与竖直轴夹角 θ 保持不变, 一个相对细杆静止的小环自离地面 h 高处沿细杆下滑, 求小球滑到细杆下端时的速度.

解析 惯性离心力 $f = m\omega^2 r$, 随半径 r 的减小 f 均匀减小, 所以小环由半径 r_0 处移到下端 $r=0$ 处, 惯性离心力对 r 的平均值为

$$F = \frac{m\omega^2 r_0}{2}$$

惯性离心力做的功: $\omega_1 = -Fr_0 = -\frac{1}{2}m\omega^2 h^2 \tan^2 \theta$, 重力做功为: $\omega_2 = mgh$, 由动能定理得

$$mgh + (-\frac{1}{2}m\omega^2 h^2 \tan^2 \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh - \omega^2 h^2 \tan^2 \theta}$$

方法与技巧 由于小环所需向心力不断减小, 因此小环不是做匀变速运动, 用牛顿运动定律无法直接求解, 用动能定理, 计算细杆对小环做的功也比较困难, 因此我们选择细杆做参考系, 分析小环受力时必须加上一个惯性力, 小环在旋转的非惯性系中, 虽然有径向运动, 受到科里奥利力的作用, 但小环在切向无位移, 科里奥利力不做功.

例2 如图3-7所示, 一根长为 l 的细刚性轻杆的两端分别连结小球 a 和 b , 它们的质量分别为 m_a 和 m_b . 杆可绕距 a 球为 $\frac{1}{4}l$ 处的水平定轴 O 在竖直平面内转动. 初始时杆处于竖直位置, 小球 b 几乎接触桌面. 在杆的右边水平桌面上, 紧挨着细杆放着一个质量为 m 的立方体匀质物块, 图中 $ABCD$ 为过立方体中心且与细杆共面的截面. 现用一水平恒力 F 作用于 a 球上, 使之绕 O 轴逆时针转动, 求当 a 转过 α 角时小球 b 速度的大小. 设在此过程中立方体物块没有发生转动, 且小球 b 与立方体物块始终接触没有分离. 不计一切摩擦.

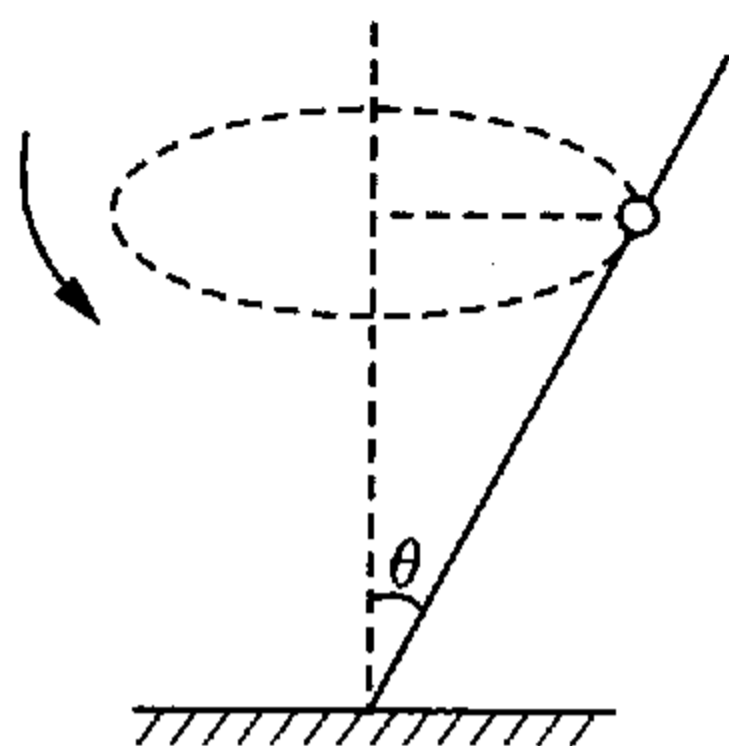


图3-6

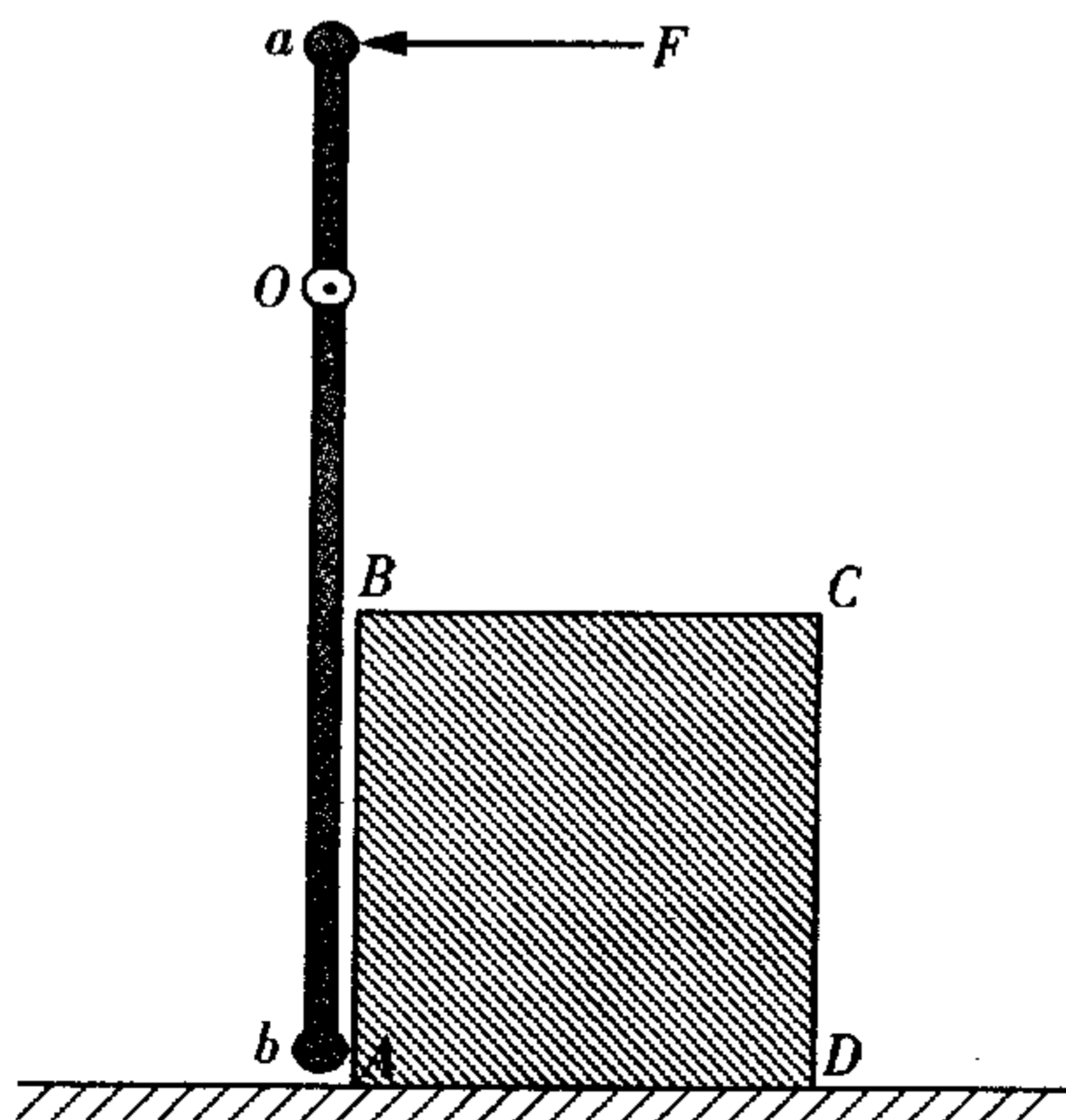


图3-7

解析 如图 3-8 所示,用 v_b 表示 a 转过 α 角时 b 球速度的大小, v 表示此时立方体速度的大小,则有

$$v_b \cos \alpha = v \quad (1)$$

由于 b 与正立方体的接触是光滑的,相互作用力总是沿水平方向,而且两者在水平方向的位移相同,因此相互作用的作用力和反作用力做功大小相同,符号相反,做功的总和为 0. 因此在整个过程中推力 F 所做的功应等于球 a 、 b 和正立方体机械能的增量. 现用 v_a 表示此时 a 球速度的大小,因为 a 、 b 角速度相同, $Oa = \frac{1}{4}l$, $Ob = \frac{3}{4}l$,所以得

$$v_a = \frac{1}{3}v_b \quad (2)$$

根据功能原理可知

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_a v_a^2 - m_a g \left(\frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left(\frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m v^2 \quad (3)$$

将①、②式代入③可得

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_a \left(\frac{1}{3} v_b \right)^2 - m_a g \left(\frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left(\frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m (v_b \cos \alpha)^2$$

解得

$$v_b = \sqrt{\frac{9l [F \sin \alpha + (m_a - 3m_b) g (1 - \cos \alpha)]}{2m_a + 18m_b + 18m \cos^2 \alpha}}$$

方法与技巧 注意 b 球与立方体的速度关系,然后利用功能原理即可求解.

例 3 军训中,战士距墙 s_0 以速度 v_0 起跳,如图 3-9 所示,再用脚蹬墙面一次,身体变为竖直向上的运动以继续升高,墙与鞋底之间的静摩擦因数为 μ . 求能使人体重心有最大总升高的起跳角 θ .

解析 人以角 θ 起跳,水平初速度和竖直初速度分别为

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

从起跳到蹬墙时空中飞行的时间为

$$t = \frac{s_0}{v_0 \cos \theta}, \text{ 则人蹬墙前竖直方向的速度为}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - g \frac{s_0}{v_0 \cos \theta}, \text{ 人重心升高}$$

$$h_1 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \frac{s_0}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{s_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = s_0 \tan \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{s_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

设人蹬墙的时间为 Δt , 因 Δt 很小,则静摩擦力的冲量远大于人体重力的冲量,即 $I_f \gg I_G$, 由动量定理得

$$I_f = \mu N \Delta t = m \Delta v_y, \text{ 而在水平方向同样由动量定理可知}$$

$$N \Delta t = m \Delta v_x = m v_{ax} = m v_0 \cos \theta$$

$$\mu m v_0 \cos \theta = m \Delta v_y, \Delta v_y = \mu v_0 \cos \theta$$

人蹬墙后获得竖直向上的速度:

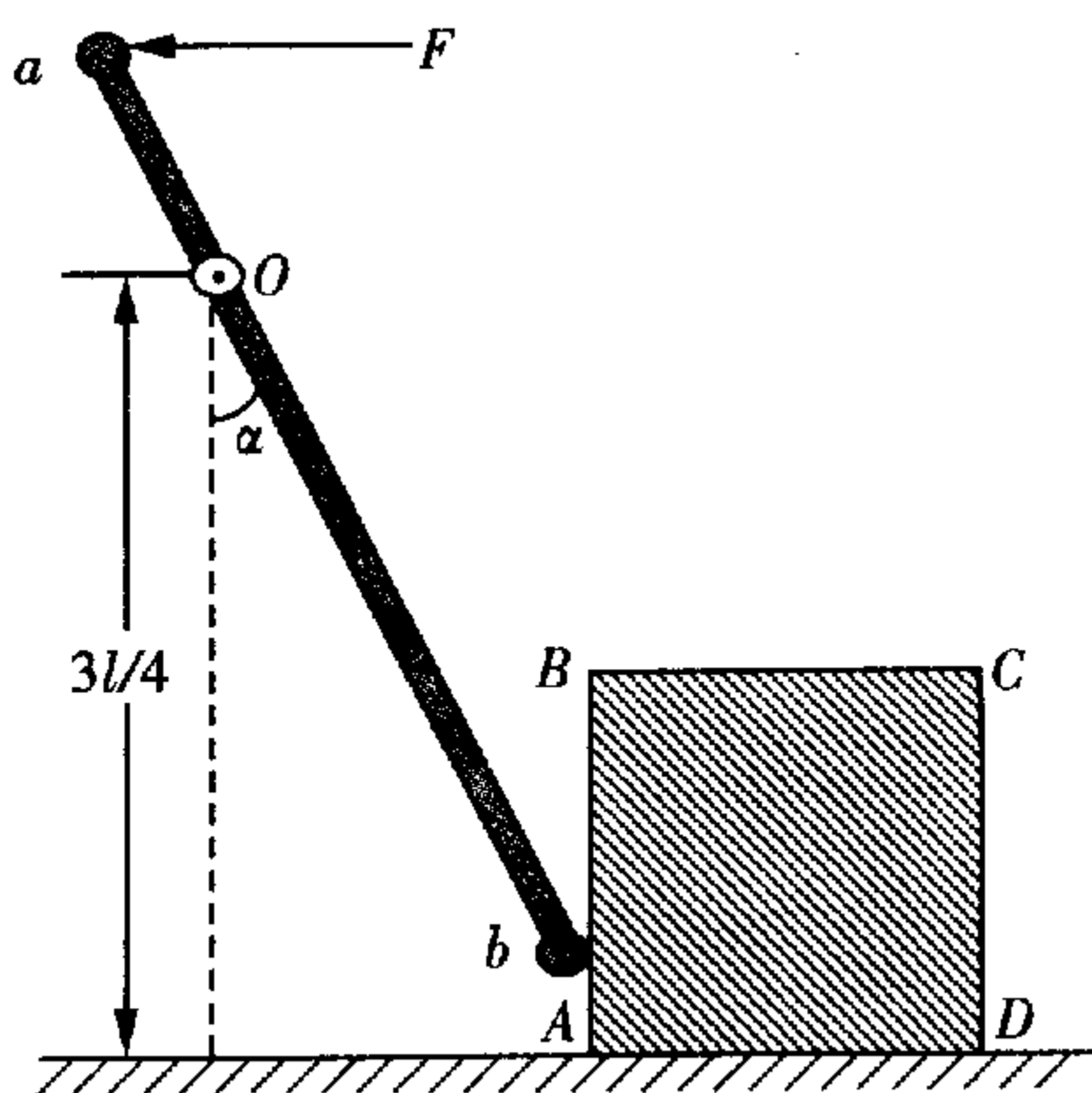


图 3-8

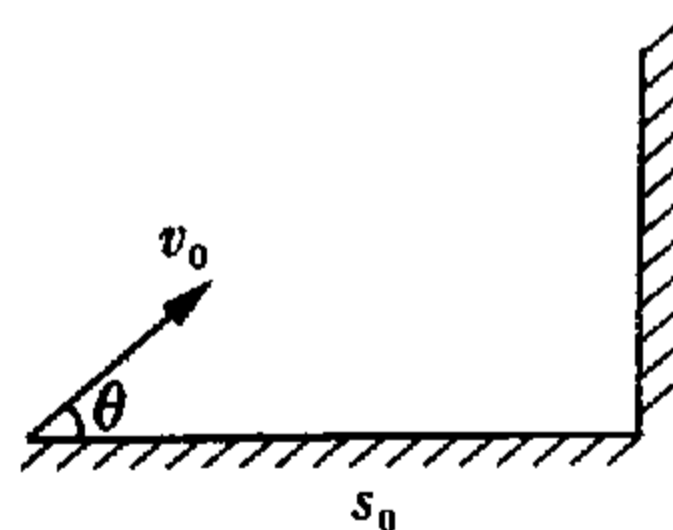


图 3-9

$v'_Y = v_{0Y} + \Delta v_Y = v_0 \sin\theta - \frac{gs_0}{v_0 \cos\theta} + \mu v_0 \cos\theta$, 人蹬墙后再上升的高度

$$h_2 = \frac{v'^2_Y}{2g} = \frac{[v_0(\sin\theta + \mu\cos\theta) - \frac{gs_0}{v_0 \cos\theta}]^2}{2g} = \frac{v_0^2(\sin\theta + \mu\cos\theta)^2}{2g} - s_0 \tan\theta - \mu s_0 + \frac{1}{2}g\left(\frac{s_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

人体重心上升的总高度:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v_0^2(\sin\theta + \mu\cos\theta)^2}{2g} - \mu s_0$$

令 $\tan\varphi = \mu$, 则

$$H = \frac{v_0^2}{2g}(1 + \mu^2)\sin^2(\theta + \varphi) - \mu s_0$$

对 v_0, s_0 一定时, 当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时 H 最大.

即 $\theta = \arctan \frac{1}{\mu}$ 时, 人体的重心总升高最大.

方法与技巧 在解题本题时, 注意摩擦力的冲量远大于人体重力的冲量, 抓住主要因素忽略次要因素, 是经常用到的手段.

例 4 一段凹槽 A 倒扣在水平长板 C 上, 槽内有一小物块 B , 它到槽内两侧的距离均为 $L/2$, 如图 3-10 所示, 木板位于光滑的水平桌面上, 槽与板间的摩擦不计, 小物块与木板间的摩擦因数为 μ . A, B, C 三者的质量相等, 原来都静止. 现使槽 A 以大小为 v_0 的初速度向右运动, 已知 $v_0 < \sqrt{2\mu gL}$. 当 A 和 B 发生碰撞时, 两者速度交换. 求:

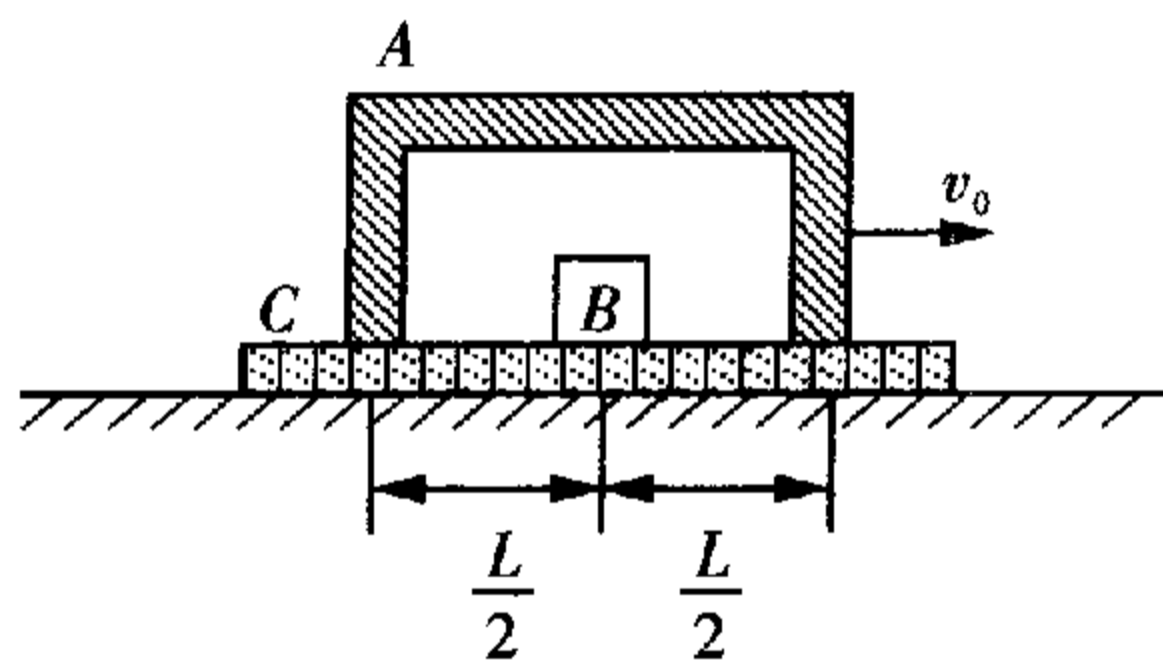


图 3-10

(1) 从 A, B 发生第一次碰撞到第二次碰撞的时间内, 木板运动的路程;

(2) 在 A, B 刚要发生第四次碰撞时, A, B, C 三者速度的大小.

解析 (1) A 与 B 发生第一次碰撞后, 两者交换速度, A 停下来, B 向右做匀减速直线运动, C 由静止开始向右做匀加速直线运动, 两者速度逐渐接近, 设 B 相对 A (地) 移动了 s_1 的路程后和 C 达到共同速度 v_1 .

对 B, C 系统而言:

动量守恒: $mv_0 = 2mv_1$

对 B 用动能定理: $\mu mgs_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

联立得: $s_1 = \frac{3v_0^2}{8\mu g}$, 又 $v_0 < \sqrt{2\mu gL}$, 则 $s_1 < \frac{3}{4}L$, 即 B, C 达到共同速度时未与 A 碰撞, B 和 C 需再以

v_1 的速度继续向右匀速运动一段距离 $(L - s_1)$ 后, 才与 A 发生第二次碰撞.

对 C : 由 0 加速到 v_1 的距离为 s_2 , 则有

$$\mu mgs_2 = \frac{1}{2}mv_1^2, s_2 = \frac{3v_0^2}{8\mu g}$$

因此 C 在两次碰撞之间发生的路程为

$$s = s_2 + L - s_1 = L - \frac{v_0^2}{4\mu g}$$

(2) 在第二次碰撞前, A 静止, B、C 以共同速度 v_1 匀速运动; 刚发生第二次碰撞后, B 静止, A、C 速度均为 v_1 . 因 B、C 间有摩擦, B 加速, C 将减速, 因 $v_1 < v_0$, 则 B、C 再次达到共同速度 v_2 前 A 和 B 不会相碰.

对 B、C 系统: $mv_1 = 2mv_2$, 可得: $v_2 = v_1/2 = v_0/4$

又因 A 的速度 v_1 大于 B 的速度 v_2 , 则第三次碰撞发生在 A 的左壁, 刚碰后, B 的速度变为 v_1 , C 的速度仍然为 v_2 , 此时 A 的速度变为 v_2 , 同理 B 和 C 第三次达到共同速度时 A 和 B 不会相碰.

对 B、C 系统: $mv_1 + mv_2 = 2mv_3$, 可得: $v_3 = 3v_0/8$

所以 A、B 发生第四次相碰前:

$$v_A = v_2 = v_0/4, v_B = v_C = 3v_0/8$$

方法与技巧 这是一个多次碰撞、往复运动问题, 动量守恒及动能定理是当然的解决工具, 但认真分析清楚物理过程和物理情境在本题中非常重要.

例 5 如图 3-11 所示, 在光滑的水平地面上静止放有一块质量 $m_3 = 2 \text{ kg}$, 长度 $L = 0.6 \text{ m}$ 的木板, 板的左右两端分别放置质量 $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$ 的两物块, 并分别以初速度 $v_1 = 0.4 \text{ m/s}$, $v_2 = 0.2 \text{ m/s}$ 同时相向运动. m_1 、 m_2 和 m_3 间的滑动摩擦因数均为 $\mu = 0.22$. 试求:

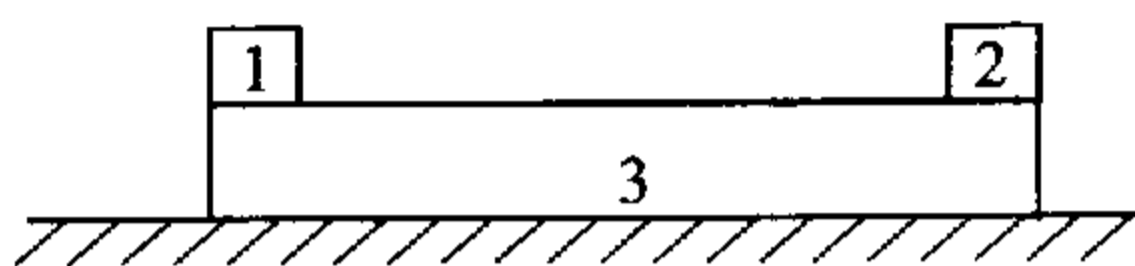


图 3-11

- (1) m_2 在木块上的最大位移;
- (2) m_1 在木块上的最大位移;
- (3) m_3 的最大位移.

解析 (1) 假设物块 1、2 在木板上不会相碰, 当 $v_2 = v_3$ 时, 2 相对于 3 有最大位移, 则

$$v_2 - a_2 t = a_3 t$$

$$a_2 = \mu m_2 g / m_2 = 0.2 \text{ m/s}^2, a_3 = (\mu m_2 g - \mu m_1 g) / m_3 = 0.2 \text{ m/s}^2$$

$$t = 0.5 \text{ s}, \text{ 取 3 为参照系, 2 相对于 3 的加速度为: } a_{23} = a_2 + a_3 = 0.4 \text{ m/s}^2.$$

2 在 3 上最大位移:

$$s_{23} = v_2 t - \frac{1}{2} a_{23} t^2 = 0.5 \text{ m}$$

(2) 因系统总动量为零, 则 1、2、3 最后都静止.

$$f_1 s_{13} + f_2 s_{23} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \text{ 将已知数据和所求得的数据代入:}$$

$$s_{13} = 0.5 \text{ m}.$$

因 $s_{13} + s_{23} = 0.05 + 0.5 = 0.55 \text{ m} < 0.6 \text{ m}$, 假设成立.

(3) 1、2、3 系统的总动量为零, 则系统的质心 C 的位置不变, 移动前质心距右端为 r_C

$$2 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = (2 + 2 + 4) r_C, r_C = 0.225 \text{ m}$$

设木板右端向右移动 x

$$2 \times (0.6 - 0.5 + x) + 2 \times (0.3 + x) + 4 \times (0.05 + x) = 8 \times 0.225, x = 0.1 \text{ m}.$$

方法与技巧 物体 1、2 可能会相碰, 可能不会相碰, 要予以讨论. 利用动量守恒(和质心守恒)解答本题, 会比较简单. 利用质心守恒是解决此类问题的重要手段之一.

例6 如图3-12所示,一轻绳跨过一质量为 m 的定滑轮(视为半径为 r 的超薄圆盘,其转动惯量 $J = mr^2/2$). 绳两端挂质量为 m_1 和 m_2 的两物体,且 $m_2 > m_1$, 滑轮轴间的摩擦力矩为 M_f , 绳与滑轮无滑动,求物体的加速度和绳的张力.

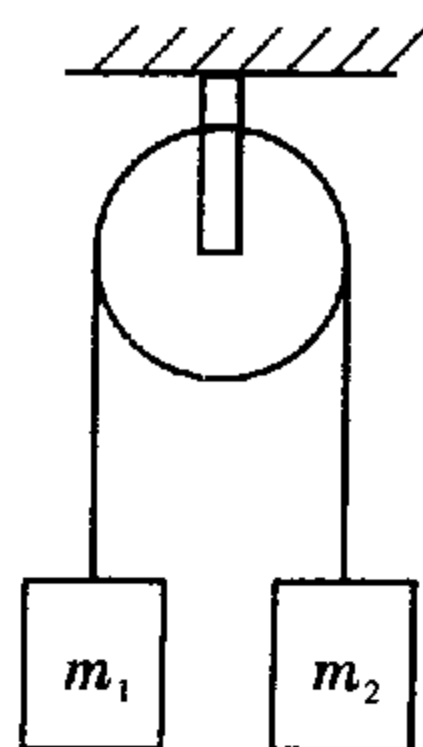


图3-12

解析 设 m_2 的加速度向下, m_1 的加速度向上,大小均为 a , 绳中张力分别为 T_2, T_1 , 则滑轮顺时针转动,其中 $T'_1 = T_1, T'_2 = T_2$, 如图3-13所示,根据牛顿定律和转动定律

$$\text{对 } m_1: T_1 - m_1g = m_1a$$

$$\text{对 } m_2: m_2g - T_2 = m_2a$$

$$\text{对滑轮: } T'_2r - T'_1r - M_f = mr^2/2 \cdot \beta$$

$$\text{因滑轮与绳间无滑动,则有 } a = r\beta$$

联立以上四式:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - M_f/r}{m_1 + m_2 + m/2}$$

$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{m_1[(2m_2 + m/2)g - M_f/r]}{m_1 + m_2 + m/2}$$

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{m_2[(2m_1 + m)g + M_f/r]}{m_1 + m_2 + m/2}$$

若不计摩擦力矩和滑轮质量:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g$$

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

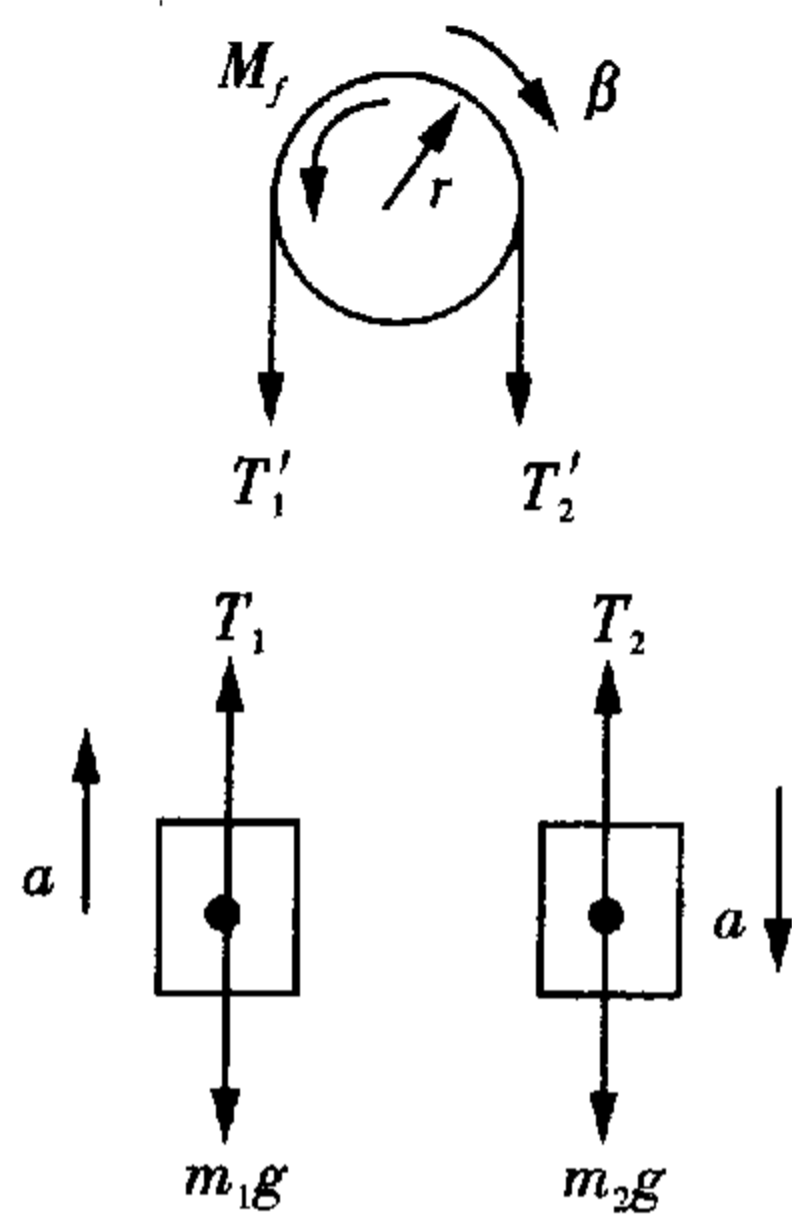


图3-13

方法与技巧 由于滑轮质量不能忽略,因此必须考虑滑轮的影响,对滑轮受力要进行分析.

例7 如图3-14所示,两物体的质量分别为 m_1 和 m_2 , 滑轮的转动惯量为 J , 转动半径为 r .

(1) 若 m_2 与桌面间的摩擦因数为 μ , 求系统加速度 a 及绳中张力 T_1 和 T_2 (设绳与滑轮无相对滑动);

(2) 如 m_2 与桌面为光滑接触, 求系统的加速度 a 及绳中张力 T_1 和 T_2 (设绳与滑轮无相对滑动).

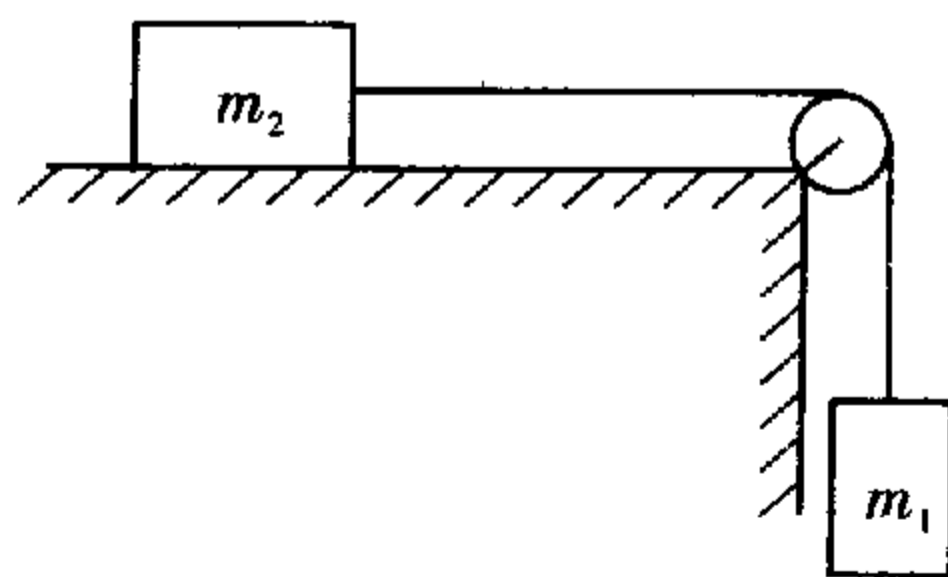


图3-14

解析 m_1, m_2 和滑轮的受力情况和运动情况如图3-15所示.

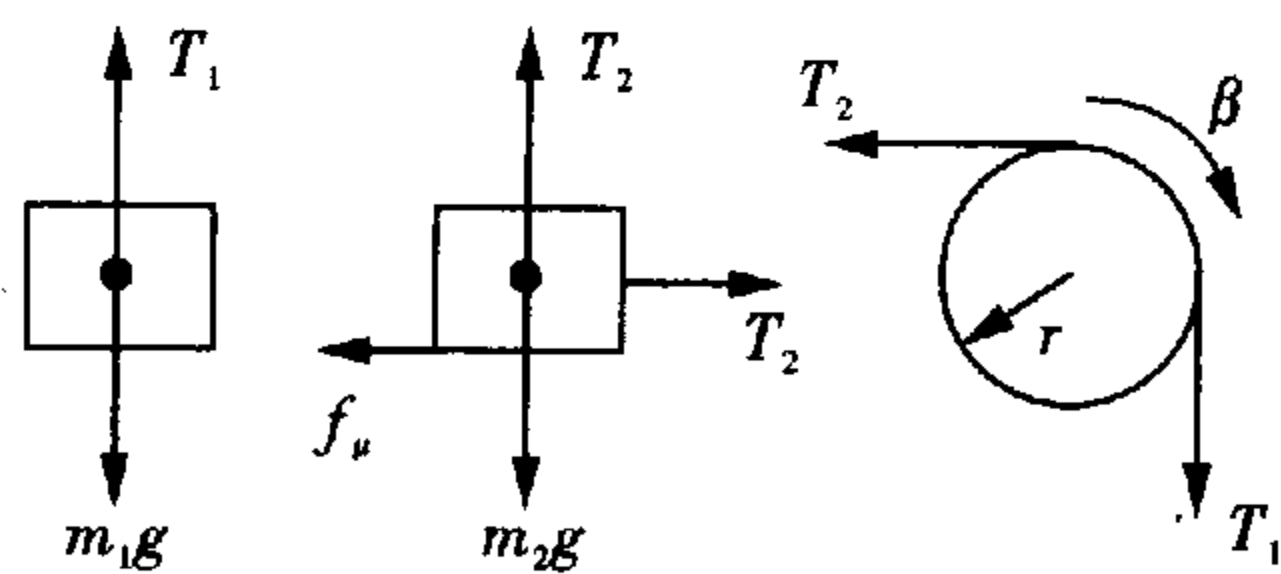


图3-15

$$\text{对 } m_1: m_1g - T_1 = m_1a \quad \textcircled{1}$$

②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧

对 m_2 : $T - m_2g = m_2a$

对滑轮: $T_1r - T_2r = J\beta$

绳与滑轮间无相对滑动: $a = J\beta$

由①②得: $a = g - \frac{T_1}{m_1} = \frac{T_2}{m_2} - g$

整理: $T_1m_2 + T_2m_1 = m_1m_2g(1 + \mu)$

由③④得: $T_1 - T_2 = \frac{J}{r^2}a$

由⑤⑦得: $T_1m_2 - T_2m_1 = \frac{J}{r^2}mg - \frac{J}{r^2}T_1$

由⑥⑧得: $T_1(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}) = m_1g(m_1 + \mu m_2 + \frac{J}{r^2})$

$$T_1 = \frac{m_1g(m_1 + \mu m_2 + \frac{J}{r^2})}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}, \text{同理: } T_2 = \frac{m_2g(m_1 + \mu m_1 + \frac{\mu J}{r^2})}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

则: $a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}g$, 将 $\mu = 0$ 代入即得(2)结果.

方法与技巧 滑轮质量不可忽略, 必须考虑滑轮的转动.

例 8 如图 3-16 所示, 已知滑轮的质量为 M , 半径为 R , 物体的质量为 m , 弹簧的劲度系数为 k , 斜面的倾角为 θ , 物体与斜面间光滑. 物体从静止释放, 释放时弹簧无形变. 设细绳不伸长, 且与滑轮无相对滑动, 忽略轴间摩擦力矩, 求物体沿斜面下滑 x 时的速度多大? (滑轮视作薄圆盘)

解析 选择 m 、 M 、弹簧和地球为系统, 只受重力和弹力, 其他外力不做功, 故系统的机械能守恒.

$$mgx\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$v = R\omega$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4(mgx\sin\theta - \frac{1}{2}kx^2)}{2m + M}}$$

方法与技巧 系统机械能守恒, 并注意滑轮的转动动能及物体速度与滑轮转动的角速度的关系.

例 9 如图 3-17 所示, 长为 $2L$ 的细线系住两个相同的小钢球, 放在光滑的水平地面上, 在线的中央有一水平恒力 F 作用于线, 问:

(1) 钢球第一次碰撞时, 在与 F 垂直的方向上钢球对地面的速度多大?

(2) 经过若干次碰撞后, 最后两球一直处于接触状态下运动, 那么因碰撞损失的总能量是多少?

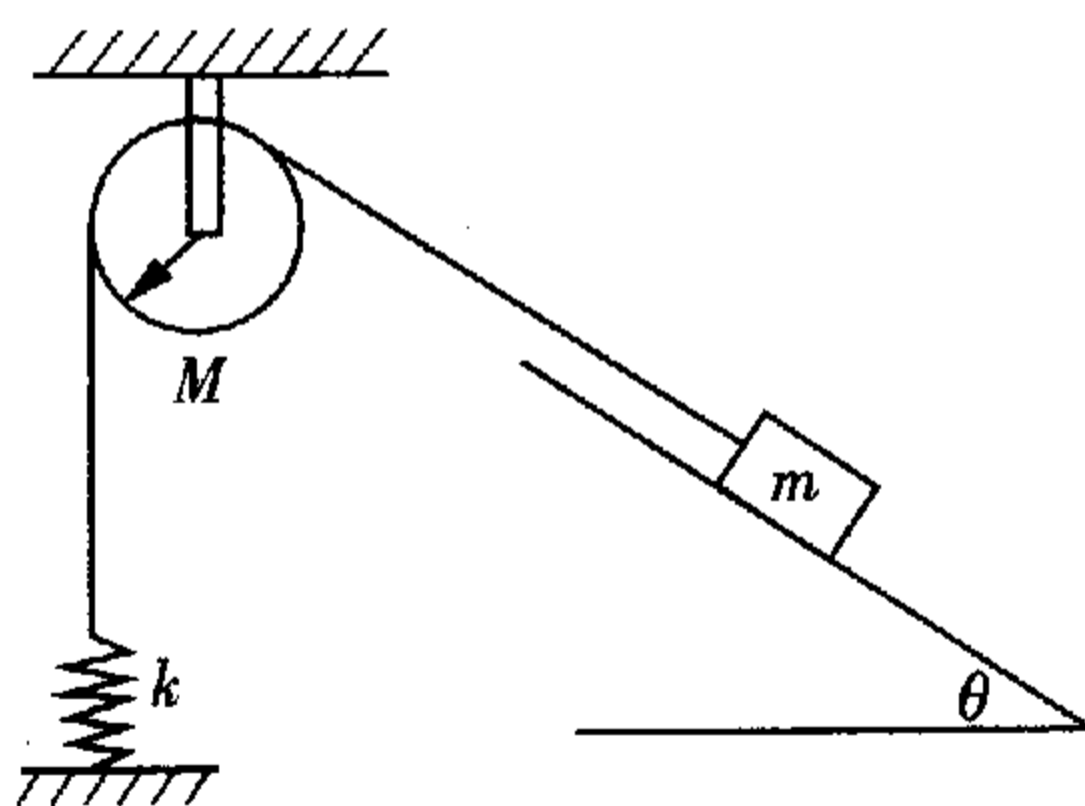


图 3-16

解析 (1) 设 m 沿 F 方向运动 x , 钢球第一次碰撞时, 力 F 的作用点移动的距离为 $(x+L)$, 两球碰撞时除有水平方向速度 v_x 外, 还有绕 F 作用点的瞬时速度 v_y , 即所求的 v_y , 对两球质点系, 由动能定理:

$$F(x+L) = 2 \times \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) = mv_x^2 + mv_y^2$$

对两球系统, 由牛顿第二定律:

$$F = 2ma_x, \text{ 两球在水平方向作匀加速运动: } v_x^2 = 2a_x x$$

$$\text{联立上述三式得: } v_y = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

(2) 最后两球一起处于接触状态下, 垂直于 F 方向的速度为零, 对应这部分动能的损失即为系统损失的总能量, 即:

$$\Delta E_k = 2 \times \frac{1}{2} mv_y^2 = mv_y^2 = Fl$$

方法与技巧 质点系的牛顿第二定律的应用使得本题变得很容易.

例 10 一竖直放置的半径为 R 的固定光滑圆环上, 穿有一颗质量为 m 的小环, 小环通过一根原长也为 R 、劲度系数为 k 的弹簧与圆环的最高点 A 相连, 如图 3-18 所示, 若小环从与 A 点相距为 R 的 B 点由静止开始下滑, 试求小环以后的运动过程中获得的最大速度 v_m , 以及此时对圆环作用力 N .

解析 由几何关系知: $\angle OAB = 60^\circ$.

设小环和 A 连线与竖直方向的夹角为 θ 时速度达到最大, 则沿大圆环的切向加速度为零, 小环的受力情况如图 3-19 所示.

$$\text{则有: } T \sin \theta = mg \sin 2\theta$$

$$\text{即: } T = 2mg \cos \theta$$

$$\text{而 } T = kx = k(2R \cos \theta - R)$$

$$k(2R \cos \theta - R) = 2mg \cos \theta$$

$$\text{则有: } \cos \theta = \frac{kR}{2(kR - mg)}, \text{ 且满足 } \frac{kR}{2(kR - mg)} \leq 1$$

$$\text{即: } kR \geq 2mg$$

$$\text{又根据机械能守恒定律有: } mg(2R \cos^2 \theta - \frac{R}{2}) = \frac{1}{2} mv_m^2 +$$

$$\frac{1}{2} k(2R \cos \theta - R)^2$$

$$v_m^2 = 2gR \cos \theta - gR = \frac{mg^2 R}{kR - mg}, v_m = \sqrt{\frac{mg^2 R}{kR - mg}}$$

$$\text{在半径方向有: } T \cos \theta - mg \cos 2\theta - N = m \frac{v_m^2}{R}$$

$$2mg \cos \theta \cos \theta - mg(2 \cos^2 \theta - 1) - N = m \frac{mg^2}{kR - mg}$$

$$N = \frac{(kR - 2mg)}{(kR - mg)} mg, \text{ 且 } N \geq 0, \text{ 其方向为沿半径背离环心指向.}$$

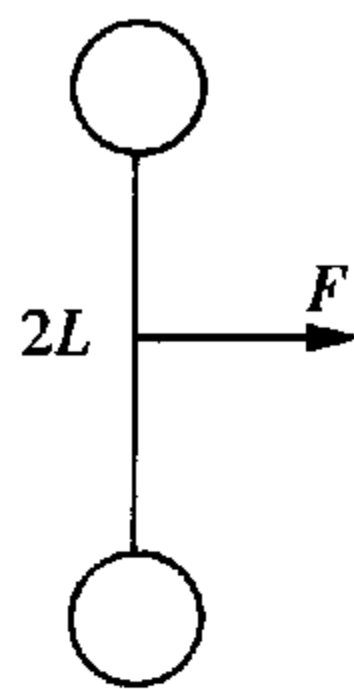


图 3-17

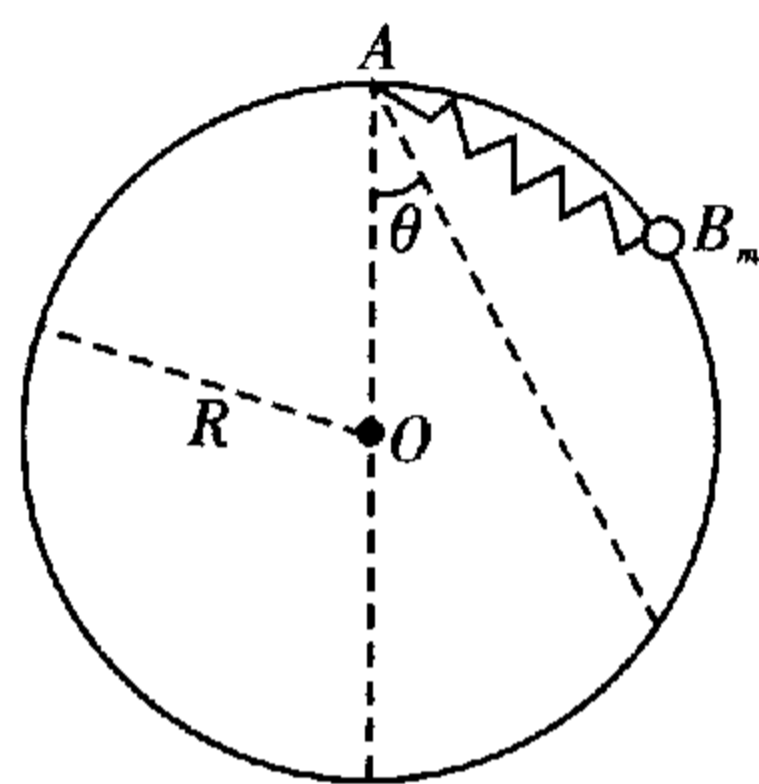


图 3-18

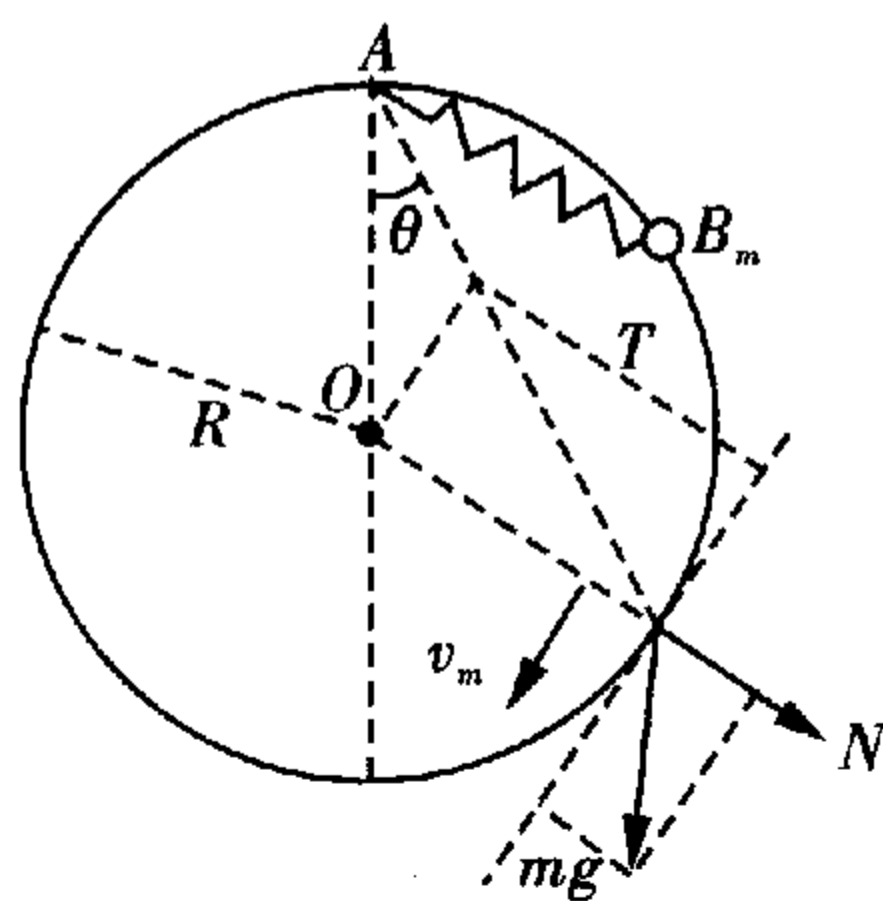


图 3-19

(以小环为非惯性系,则有: $N + ma = mg$, 即: $N + m \frac{v_m^2}{R} = mg$, 也可得出)

若 $kR < 2mg$, 则在环最低点达到速度最大, 则由机械能守恒定律:

$$mg \frac{3R}{2} = \frac{1}{2} m v_m'^2 + \frac{1}{2} k R^2$$

$$v_m' = \sqrt{\frac{R}{m} (3mg - kR)}$$

在最低点受力情况如图 3-20 所示, 则有: $T' - mg + N' = m \frac{v_m'^2}{R}$

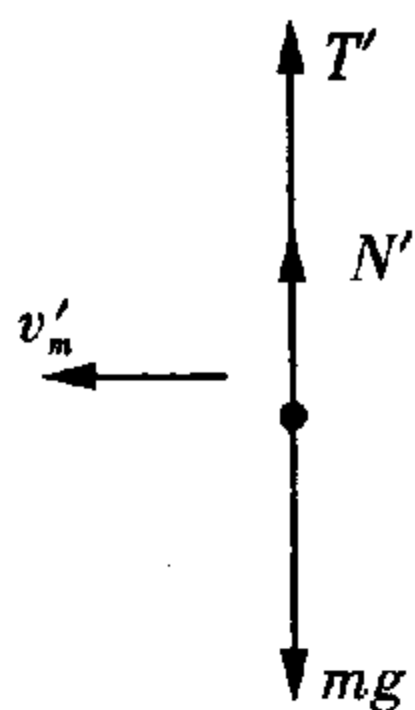


图 3-20

$$kR - mg + N' = 3mg - kR$$

$$N' = 4mg - 2kR, \text{ 其方向沿半径指向环心.}$$

方法与技巧 注意几何关系, 利用机械能守恒和向心力公式是解本题的基本方法.

例 11 有一台反作用式汽艇的喷水式发动机, 其进水孔面积为 $S_1 = 0.9 \text{ m}^2$, 而出水孔面积为 $S_2 = 0.02 \text{ m}^2$, 求发动机的效率.

解析 在 Δt 时间内发动机吸收的水的体积为 $V = v S_1 \Delta t$ (其相对汽艇的速度为 v), 动能关系式为

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho S_1 v^2 \Delta t$$

水喷出的速度为 u , 其动能关系式为:

$$E'_K = \frac{1}{2} (\rho S_1 v \Delta t) u^2$$

因为水是不可压缩的, 所以有 $v S_1 \Delta t = u S_2 \Delta t$, 由此得

$$u = \frac{S_1}{S_2} v$$

$$E'_K = \frac{1}{2} \rho \frac{S_1^3}{S_2^2} v^3 \Delta t$$

由此可得发动机所做的功为

$$W = E'_K - E_K = \frac{1}{2} \rho \frac{S_1 (S_1^2 - S_2^2)}{S_2^2} v^3 \Delta t$$

而有效功为

$$W' = F v \Delta t (F \text{ 为对汽艇的反作用力})$$

$$F = \frac{m u - m v}{\Delta t} = \rho v^2 S_1 \frac{S_1 - S_2}{S_2}$$

$$\therefore W' = \rho S_1 \frac{S_1 - S_2}{S_2} v^3 \Delta t$$

$$\therefore \eta = \frac{W'}{W} = \frac{2 S_2}{S_1 + S_2} = 4.3\%$$

方法与技巧 发动机所做的功等于水的动能的变化, 因此求出水动能的变化及有效功是解决本

的关键.

例 12 一根直的刚性毛发平放在光滑的桌面上, 毛发的两端都坐着一只跳蚤. 如果毛发的质量不是远远大于跳蚤的质量 m , 它们能否同时以相同的速度和起跳角度起跳, 交换位置而不在半空

中撞在一起?

解析 跳蚤跳起的方向和毛发的原始方向之间的角度为 $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$, 它们在空中的时候, 毛发由于受到反作用力力偶的作用, 向相反的方向转动角度 $(\pi - \theta)$, 则两个跳蚤将落在毛发上和初始位置相反的一端.

令 v 和 α 分别为起跳的速度和角度, 毛发的长度为 $2L$. 飞行时间 t 和通常一样, 为 $2v\sin\alpha/g$, 飞行距离为 $vt\cos\alpha$. 从几何性质(见图 3-21)可得, 飞行距离也等于 $2L\sin(\theta/2)$. 现在, 毛发的两端均受到一个推力的作用, 但是只有切线方向上的分量对作用在毛发上的力偶有贡献. 因此有

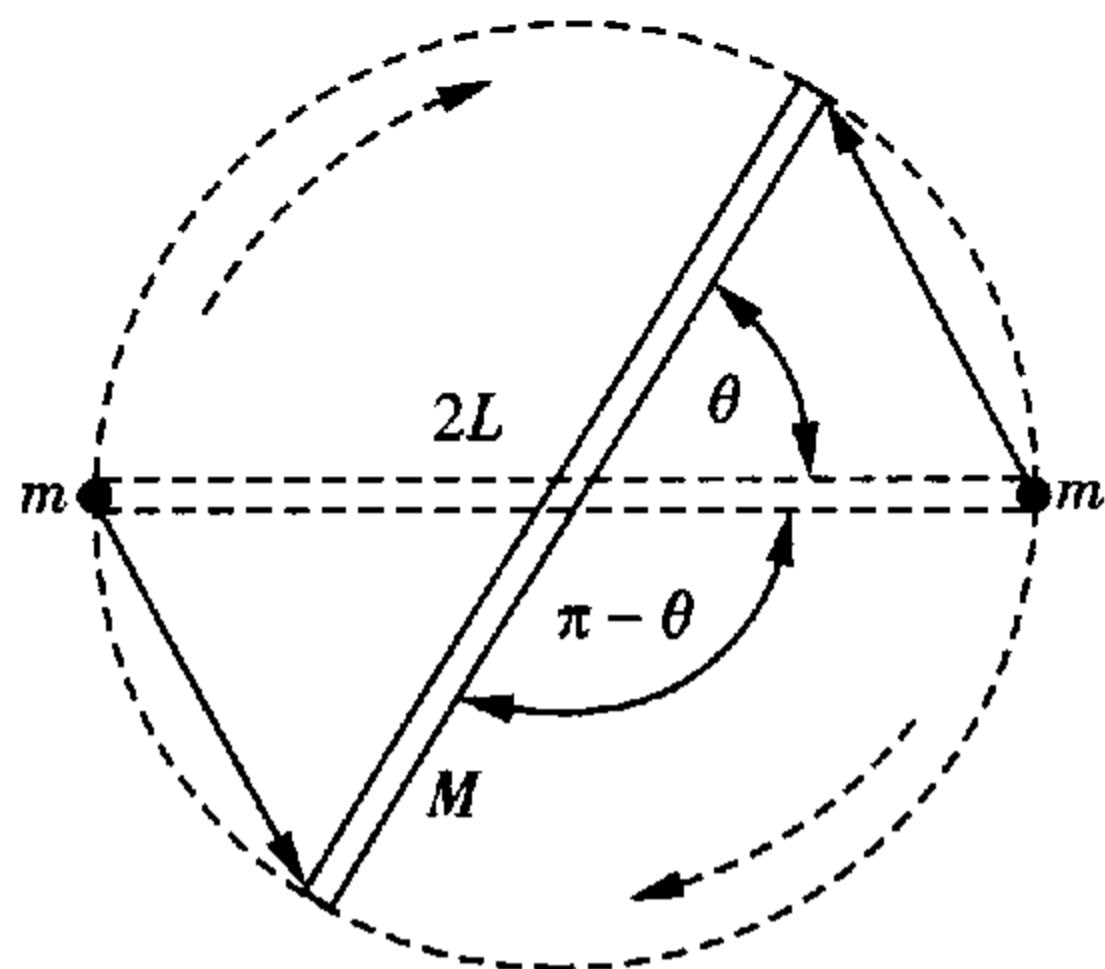


图 3-21

$$2mvL\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2} = I\omega, \text{ 其中 } I = \frac{1}{3}ML^2$$

同时满足条件 $\omega t = \pi - \theta$.

从式中消去 α, t 和 ω , 可以得到 θ 必须满足方程

$$\frac{6m}{M}\sin\theta + \theta = \omega$$

无论 n 为何值, 函数 $f(\theta) = n\sin\theta + \theta$ 满足 $f(\pi) = \pi$. 另外, $f'(\theta) = n\cos\theta + 1 = 0$ 在 $\theta < \pi$ 有解, 要求 $n > 1$. 因此若 n 严格大于 1, 则 $f(\theta)$ 在确定的 $\theta < \pi$ 的范围内, 有最大值. 这一点, 连同我们对 $f(\pi)$ 的结论, 显示出满足 $n > 1$ 时, $f(\theta) = \pi$ 在 $\theta < \pi$ 的范围内有解. 从题目中可得, 此条件为 $m > M/6$. 图解见图 3-22.

方法与技巧 它们直接跳向对方是不可能没有灾祸发生的, 因此考虑其他的方向同时保留该情况下的对称性.

例 13 两个相同的哑铃在一个水平气垫桌上相向运动, 如图 3-23 所示. 每一个哑铃都被看做两个质量为 m 的质点被一根长为 $2l$ 的无重杆相连. 初始状态哑铃并不转动. 描述哑铃弹性碰撞后的运动, 画出哑铃质心运动速度关于时间的函数曲线.

解析 因为哑铃以相同的速度彼此靠近, 所以在气垫桌的参考系中它们的总动量为零(对它们共同质心的参考系也一样). 因此, 动量守恒意味着两个哑铃的质心始终以相同的速度向相反方向运动.

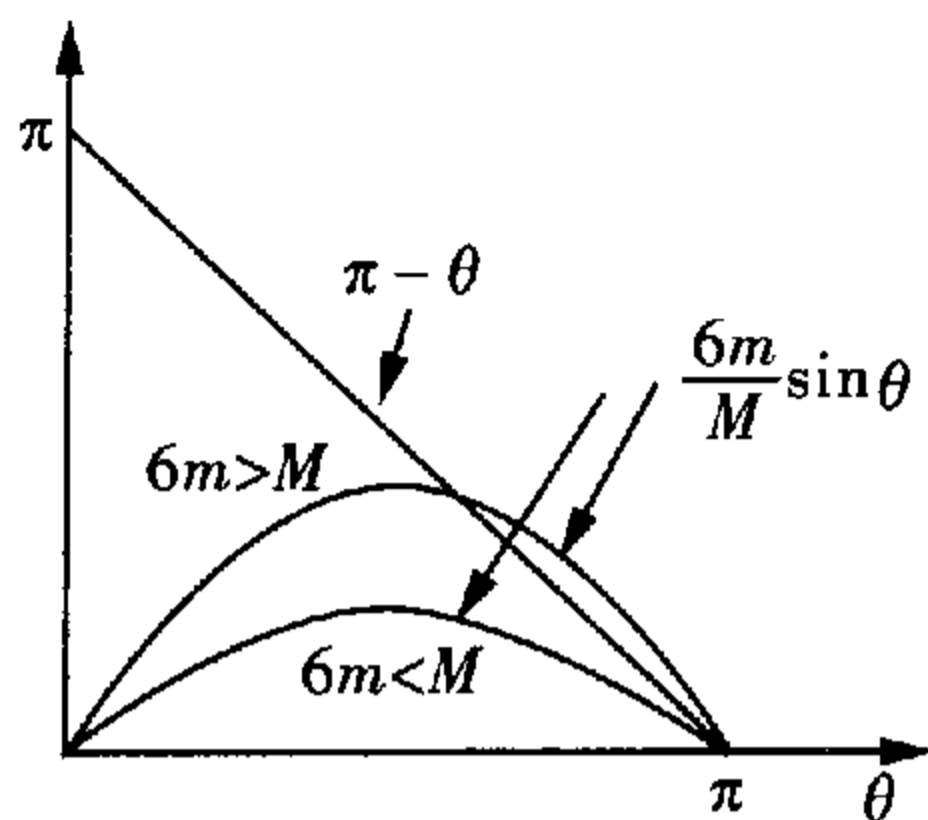


图 3-22

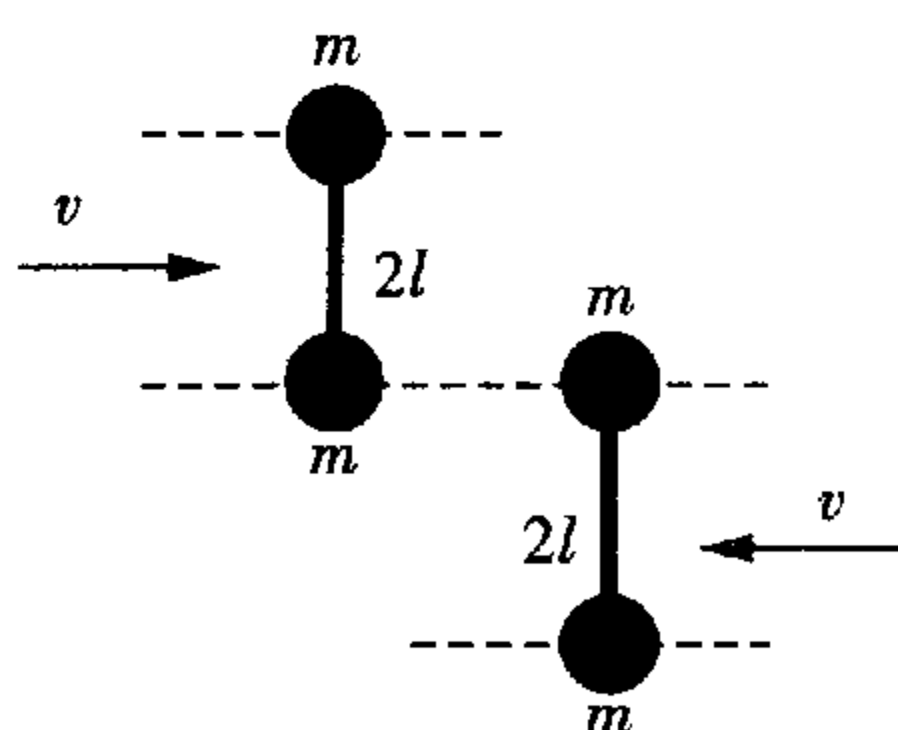


图 3-23

当哑铃碰撞时,因为碰撞是弹性的,也没有外力矩施加,所以它们的能量和角动量都守恒.碰撞前后的状态如图 3-24 所示.

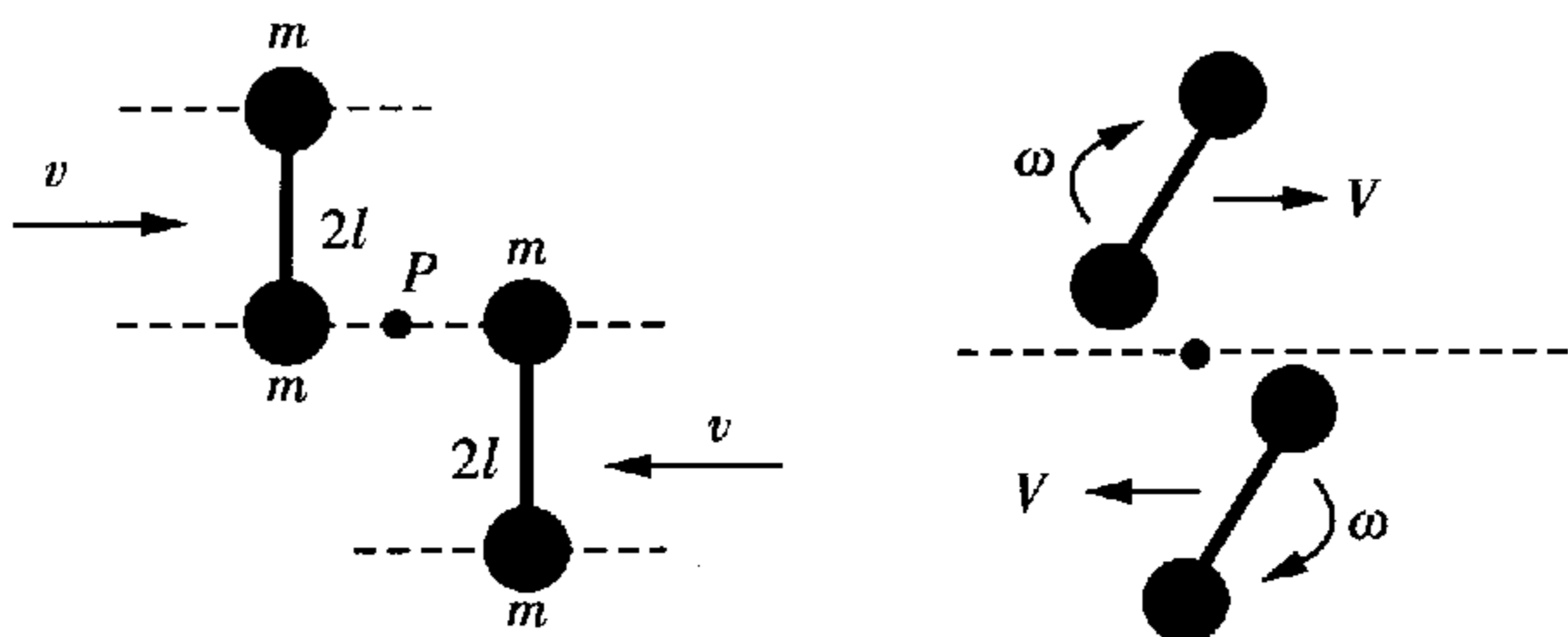


图 3-24

碰撞前哑铃只有平移的动能,碰撞后出现了转动项.当写下哑铃的能量和角动量守恒的方程时,计算后者关于接触点 P 的值,有

$$2\left(\frac{1}{2}2mv^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}2mV^2 + \frac{1}{2}2ml^2\omega^2\right)$$

碰撞前哑铃只有轨道角动量,而碰撞后必须包括一个描述哑铃关于质心自旋的项,即

$$4lmv = 4lmV + 4ml^2\omega$$

上面方程组的惟一解 ($V \neq 0, \omega \neq 0$) 可以求得,为 $V=0, \omega=v/l$. 这意味着碰撞后哑铃的质心停止运动,同时碰撞端的质点交换彼此的速度而非碰撞端保持它们原来的速度.这一点可以解释如下:通过刚性无重杆连接的质点在碰撞瞬间彼此并不知道对方在碰撞过程中的表现.杆仅在碰撞后、哑铃已经开始围绕其静止的质心运动时,才施加力的作用.

本题中隐藏着有趣的一点,哑铃在各自转过半周之后会再次碰撞,即在时间 $t = \pi/\omega$ 之后.使用上面的结果,不用写方程就可以预言其后的运动:哑铃停止旋转,并以与第一次碰撞前相同的速度再次运动.它们的路径仍然是先前的直线,但是它们现在是“头下脚上”地行进.换句话说,在两次碰撞之间,哑铃花费时间来转了个圈.哑铃的运动速度和时间的关系如图 3-25 所示.

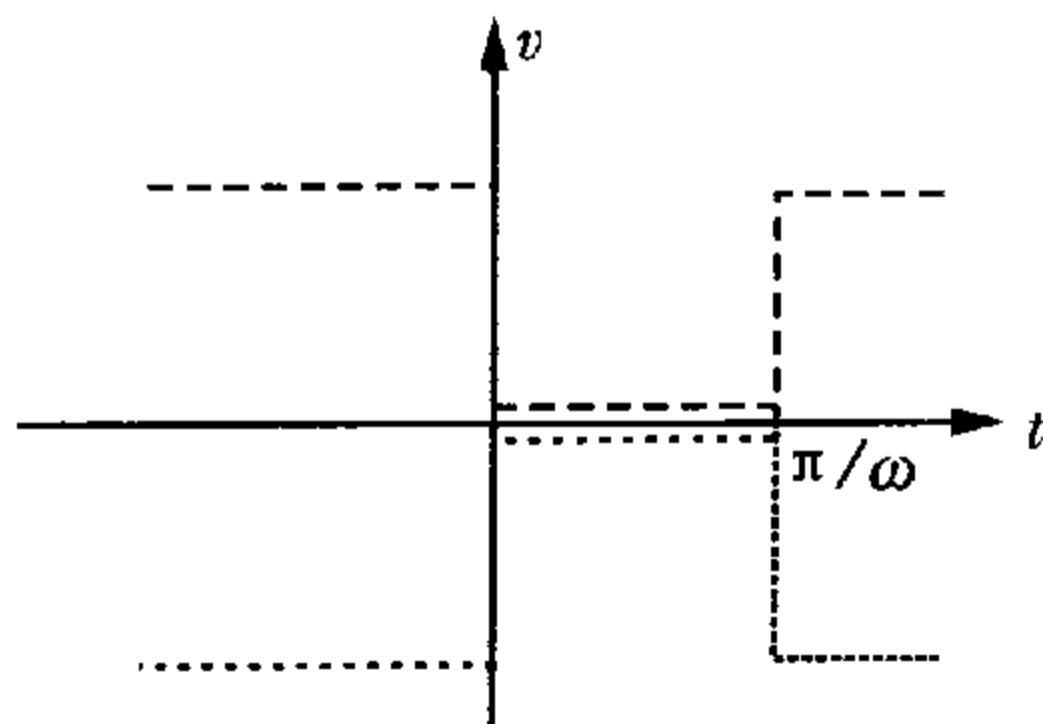


图 3-25

方法与技巧 在碰撞过程中,系统的动能、动量、角动量均守恒,三者配合使用,方可解出此题.

例 14 半径等于 r 的半球形水池内充满了水,把池内的水完全抽出至少要做多少功?

解析 如图 3-26 所示,沿着容器的竖直直径,我们将水池内的水均匀细分成 n 层,每一元层水的高度 $\Delta h = \frac{r}{n}$, Δh 很小,故每一层水均可看做是一个薄圆柱,水面下第 i 层水柱底面的半径 $r_i^2 = r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2$,这层

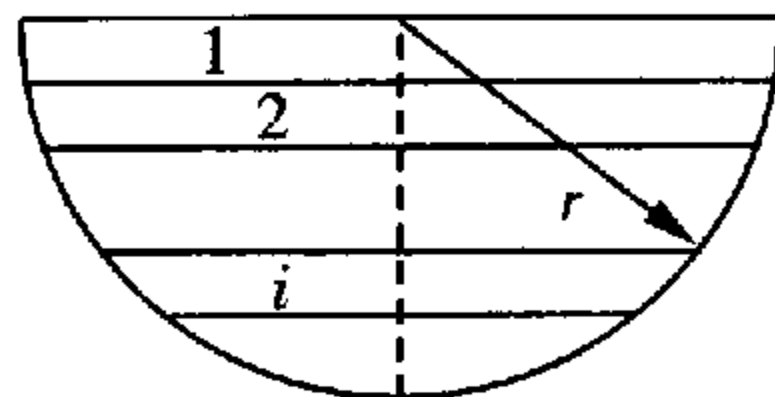


图 3-26

水的质量为

$$m_i = \rho \cdot \pi \left[r^2 - \left(\frac{ir}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{r}{n}$$

那么将这层水抽出至少应做的功是

$$W_i = \rho g \pi \left[r^2 - \left(\frac{ir}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{r}{n} \cdot \frac{ir}{n}$$

而将池内水完全抽出至少要做的功就是

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n^2} - \frac{i^3}{n^4} \right] \\ &= \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) - \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \right] \\ &= \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \rho g \pi r^4. \end{aligned}$$

方法与技巧 利用微元法求功是解决力随位移而变化的问题的重要手段和方法. 由于功是标量, 因而具有“可加性”, $W = \sum_{i=1}^n W_i$.

例 15 如图 3-27 所示, 一水塔的蓄水箱底离地面的高度为 $H_0 = 20 \text{ m}$, 其横断面是半径 $R = 2 \text{ m}$ 的圆. 储水深 $h = 1 \text{ m}$, 如果用安装在高 $H_1 = 5 \text{ m}$ 处、截面积为 2 cm^2 的水龙头放水, 问需要多久才能将水放完?

解析 水箱中的水从底部截面积为 S 的小孔流出, 若流速为 v_i , 则时间 t_i 内的水流量 $Q_i = v_i t_i S$, 总水量 Q 全部流尽的时间 $t = \sum_{i=1}^n t_i$. 我们先根据动能定理推导出小孔流速 v . 如图 3-28 所示, 一容器底部小孔截面积为 S , 容器内液体深为 h , 密度为 ρ . 取正欲从小孔流出的一液片考察: 若其厚 Δx ($\Delta x \rightarrow 0$), 则质量为 $\rho S \cdot \Delta x$, 其上表面受到向下的压力 $F_{\uparrow} = (p_0 + \rho gh) S$, 下表面则受到向上的压力 $F_{\downarrow} = p_0 S$, 式中 p_0 为大气压强. 若液片离开小孔时速度为 v , 由动能定理得

$$\rho gh S \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \rho S \cdot \Delta x \cdot v^2,$$

可得 $v = \sqrt{2gh}$.

这里, 小孔流速大小与液面距小孔高度 h 有关.

现在回到我们的水塔, 将 h 深的蓄水箱储水均匀分成 n 层, 如图 3-29 所示. 每层水的容量 $Q_i = \frac{\pi R^2 h}{n}$, $n \rightarrow \infty$, 故可认为每层水以相同流速流出水龙头, 则 $Q_i = v_i \cdot t_i \cdot S$, 其中 v_i 是对应于第 i 层水从水箱流出时龙头处的“小孔流速”, 它表述为

$$v_i = \sqrt{2g \left(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n} \right)},$$

t_i 是放出该层水所需的时间, 于是每层水放出时间的通项式为

$$t_i = \frac{Q_i}{v_i S} = \frac{\frac{\pi R^2 h}{n}}{\sqrt{2g \left(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n} \right)} \cdot S}$$

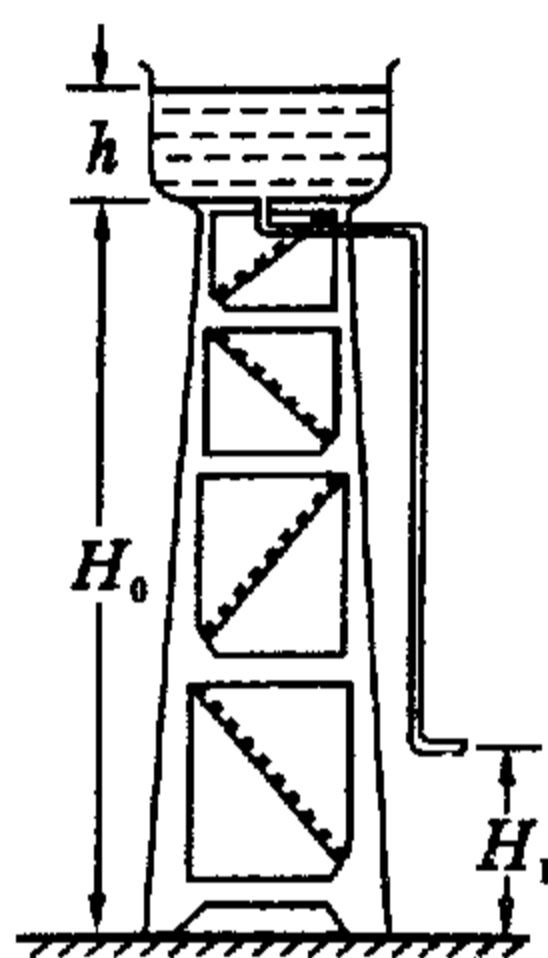


图 3-27

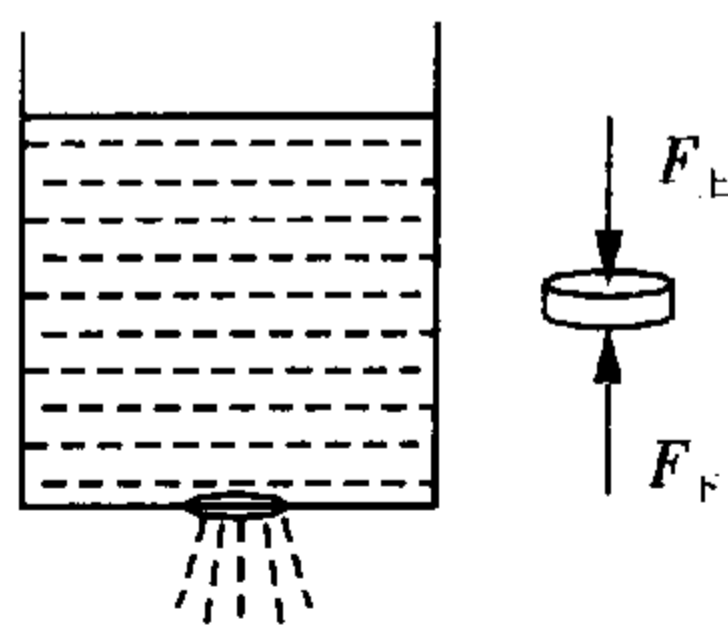


图 3-28

那么,全部水箱储水放尽的时间为

$$\begin{aligned}
 t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n t_i \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\pi R^2 h}{n}}{\sqrt{2g(H_0 + h - H_1 - i \cdot \frac{h}{n})} \cdot S} \\
 &= \frac{\pi R^2 h}{S} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{(H_0 + h - H_1 - i \cdot \frac{h}{n})}} \\
 &= \frac{\pi R^2 h}{S} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - i \cdot \frac{h}{n(H_0 + h - H_1)}}}
 \end{aligned}$$

n
⋮
i
⋮
2
1

图 3-29

至此,物理问题已然解决,下面是运用数学工具求数列和极限. 为方便起见,令 $\frac{h}{(H_0 + h - H_1)} =$

$k, (k = \frac{1}{16})$, 则有

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - i \cdot \frac{k}{n})}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}i \cdot \frac{k}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{2}i \cdot \frac{k}{n}) \\
 &= 1 + \frac{k}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= 1 + \frac{k}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{k}{4} \\
 t &= \frac{\pi R^2 h}{S \sqrt{2g(H_0 + h - H_1)}} \cdot (1 + \frac{k}{4}),
 \end{aligned}$$

代入题给数据,得

$$t = \frac{\pi \times 2^2 \times 1}{2 \times 10^{-4} \sqrt{2g \times 6}} \cdot (1 + \frac{1}{64}) \text{ s} = 3.6 \times 10^3 \text{ s}$$

方法与技巧 本题利用动量定理及微元法,在运算中注意近似处理(这是物理题经常出现的): $(1+x)^n \approx 1+nx$ (当 $|x| \ll 1$ 时).

例 16 如图 3-30 所示,质量为 m 、长度为 l 的均匀柔软粗绳穿过半径为 R 的滑轮,绳的两端吊在天花板上的两个钉子上,两钉间距离为 $2R$,滑轮轴上挂一重物,重物与滑轮总质量为 M ,且相互间无摩擦,求绳上最低点 C 处的张力.

解析 分析粗绳、滑轮和重物构成的系统的受力情况可知,悬点 $A(O)$ 处绳子的张力 $T_A = \frac{m+M}{2}g$; 分析绳之半 ABC 段受力情况是:这段绳的重力; A 处钉对绳的拉力 T_A , C 处绳之张力 T_C 及 BC 段滑轮

的正压力. 现设想在 A 处以力 T_A 将 ABC 段绳竖直向上拉过一极小距离 Δx , 在此微动过程中, T_A 所做元功 $\Delta W_A = T_A \cdot \Delta x$, T_C 所做元功 $\Delta W_C = T_C \cdot \Delta x$, 正压力不做功. 绳势能增加相当于 C 端长为 Δx 的一段绳元移至 A 处, 即为 $\frac{\Delta x m}{l} g H$, 其中 H 是 C 到天花板的垂直距离, 即

$$H = R + \frac{l - \pi R}{2}$$

由功能原理得

$$\frac{M+m}{2} g \cdot \Delta x - T_C \cdot \Delta x = \frac{\Delta x \cdot m}{l} g \left(R + \frac{l - \pi R}{2} \right),$$

即得

$$T_C = \frac{M}{2} g + \frac{(\pi - 2) R \cdot m}{2l} g.$$

方法与技巧 利用“元功法”(取元功做微元, 以功能原理为基本物理规律求得一类物理问题解题方法)求此类平衡问题, 往往很简单.

例 17 如图 3-31 所示, 一轻质三足支架每边长度均为 l , 每边与竖直线成同一角度 θ , 三足置于一光滑水平面上, 且恒成一正三角形. 现用一绳圈套在三足支架的三足上, 使其不能改变与竖直线间的夹角, 设三足支架负重为 G , 试求绳中张力 F_T .

解析 分析支架受力: 由于负重受到重力 G , 支架的每边足部同时受到两侧绳的拉力 F_T , 易得其合力为 $\sqrt{3}F_T$, 方向指向三足构成的正三角形的几何中心, 支架三边足部受水平地面支持力 F_N , 此力方向竖直向上. 现设想支架各边足底在 $\sqrt{3}F_T$ 力作用下向正三角形中心移动一极小位移 Δx , 因而支架的高度升高了 Δy , 则在此虚拟的微动过程中, $\sqrt{3}F_T$ 力有一元功, F_N 力不做功, 负重重力势能增大. 对系统用功能原理得

$$3 \cdot \sqrt{3}F_T \cdot \Delta x = G \cdot \Delta y.$$

上式中, 支架升高 Δy 与 Δx 关系如图 3-32, 图中支架一边位置从 ab 变为 $a'b'$, 作 $b'b'' \perp ab$, $aa'' \perp a'b'$, 由于 Δx 很小, ab 边转过的角度 $\Delta\theta$ 也很小, 故可认为 $a''b' = ab''$, 且 $a'b'$ 边与竖直方向夹角为 θ , 则有

$$\Delta x \sin\theta = \Delta y \cos\theta,$$

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan\theta,$$

于是可得

$$3 \sqrt{3}F_T \cdot \Delta x = G \cdot \Delta x \cdot \tan\theta,$$

$$\text{即 } F_T = \frac{G \tan\theta}{3 \sqrt{3}}.$$

方法与技巧 取与原平衡状态逼近的另一平衡态, 从而虚设了一个元过程, 此过程中所有元功之和为零, 以此为基本关系列出方程, 通过极限处理, 从而求得最后结果.

例 18 在水平地面上置有一质量为 M 的滑块, 滑块内有一圆环形细空心通道, 半径为 R , 通道顶部有一质量为 m 的小球(如图 3-33), 一开始滑块和小球都静止, 后来小球受到一微小扰动而向右

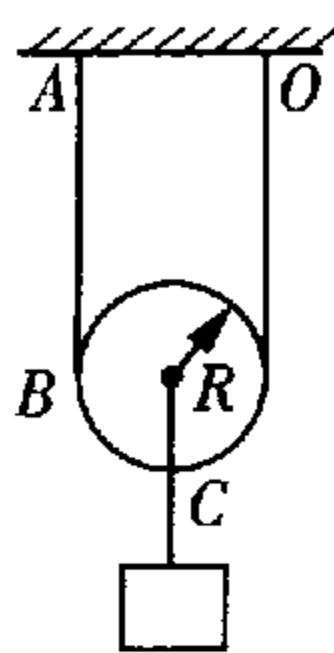


图 3-30

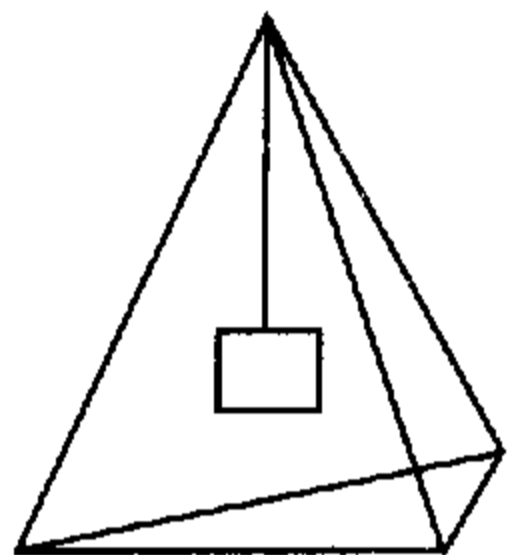


图 3-31

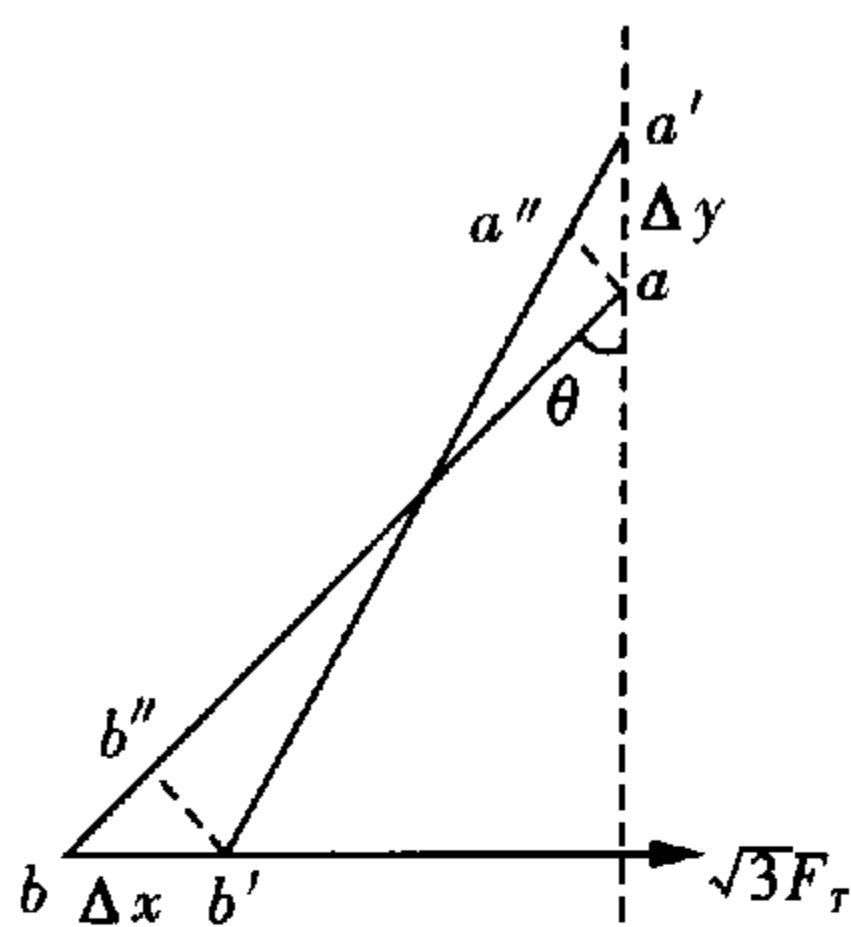


图 3-32

滑下。(忽略一切摩擦)

- (1) 求小球的轨迹方程(相对地面);
 (2) 计算小球运动到 P 、 Q 两点时轨迹的曲率半径.

解析 (1) 因为滑块和小球组成的系统原来静止, 而且在水平方向上保持动量守恒, 所以系统质心的位置保持不变, 在地面上建立原点 O 在环心初始位置、水平向右为 x 轴、竖直向上为 y 轴的静坐标系, 同时在滑块上建立原点在环心、水平向右为 x' 轴、竖直向上为 y' 轴的动坐标系.

在静系中有: $mx_m + Mx_M = 0, mv_m + Mv_M = 0$

$$x_M = -\frac{m}{M}x_m, v_M = -\frac{m}{M}v_m$$

在动系中水平方向的位移: $x'_m = x_m - x_M = \frac{m+M}{M}x_m$ ①

在动系中水平方向的速度: $v'_m = v_m - v_M = \frac{m+M}{M}v_m$ ②

在竖直方向滑块不动, 则有 $y'_m = y_m$ ③

而: $x'_m + y'_m = R'$, 将①③代入得

$$\left(\frac{m+M}{M}\right)^2 x_m^2 + y_m^2 = R^2, \text{即: } \frac{x_m^2}{\left(\frac{MR}{m+M}\right)^2} + \frac{y_m^2}{R^2} = 1, \text{为椭圆方程.}$$

短半轴: $A = \frac{M}{m+M}R$, 在水平方向; 长半轴: $B = R$, 在竖直方向.

在 P 点的曲率半径: $r_P = \frac{B^2}{A} = \frac{m+M}{M}R$

在 Q 点的曲率半径: $r_Q = \frac{A^2}{B} = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 R$

或: 设小球在 P 点时相对轨道的速度为 v , 方向竖直向下; 轨道的加速度为 a_M , 方向向右; 轨道对小球的弹力为 F , 方向水平向左.

则在滑块参照系中: $F + ma_M = mv^2/R$

在地面参照系中: $F = Ma_M$

$$F = \frac{mM}{m+M} \frac{v^2}{R} = m \frac{v^2}{\left(\frac{m+M}{M}\right)R} \quad \text{“二体”问题}$$

因 m 、 M 系统的总动量为零, 则小球在 P 点, m 、 M 无水平速度, 相对地面的速度也为 v . 则对 m , 在地面参照系中:

$$F = m \frac{v^2}{r_P}, r_P = \frac{m+M}{M}R = \frac{B^2}{A}$$

在 Q 点两者只有水平速度, m 相对 M 的速度和对地的速度满足②式.

在 M 参考系中, m 做圆周运动, 则

$$N - mg = m \frac{v_m'^2}{R} \quad \text{④}$$

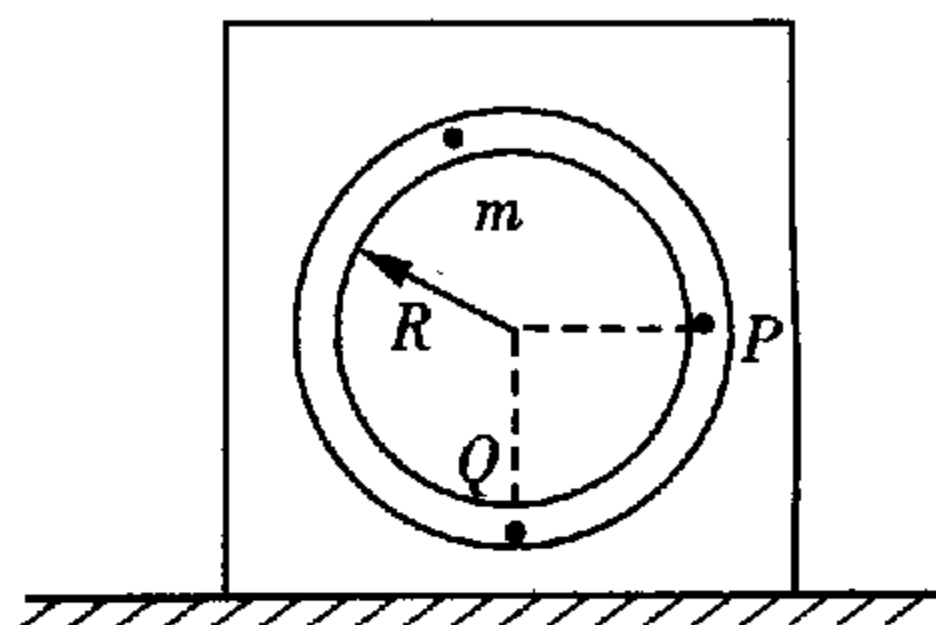


图 3-33

在地面参考系中,则

$$N - mg = m \frac{v_m^2}{r_Q} \quad (5)$$

由②④⑤得: $r_Q = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 R = \frac{A^2}{B}$.

方法与技巧 巧妙建立并利用动、静坐标系,并注意系统的质心守恒,在解题的过程中,利用“二体”问题,可以简化问题.

例 19 一支铅笔笔尖向下竖直放置在桌面上,然后释放倾倒. 笔尖运动的方向,相对于铅笔倾倒的方向,与摩擦因数之间的关系如何? 铅笔尖会离开桌面吗(还是只有当铅笔“尖”与桌面接触时才会离开)?

解析 首先假设桌面非常光滑(摩擦因数很小),铅笔释放后其质心将在倾倒的方向上加速并获得竖直和水平方向的速度. 加速度的水平分量只能由笔尖和桌面之间的摩擦力来提供,但由于桌面是光滑的,所以笔尖很快会向铅笔倾倒的“反方向”滑动.

如果摩擦力很大,铅笔将在相当长的一段时间内不滑动. 由于质心作圆周运动,最初其水平速度在倾倒的方向上逐渐增加;但后来却将开始逐渐减小,这样一直到铅笔趋于水平,而质心水平速度趋于零. 质心水平加速度的符号,同样也是摩擦力的符号,在运动过程中是变化的. 如果在第一阶段铅笔尖是不滑动的,那么在第二阶段只能是“向前”(即铅笔的倾倒方向)滑动.

下面将证明铅笔尖可能向前或向后滑动,但它始终不会离开桌面. 为了数学上的简化,取铅笔的长度、质量和重力加速度为单位大小,即 $l = M = g = 1$. 因此,铅笔的重量为 1,其质心位置(CM)为 $\frac{1}{2}$,

关于质心的转动惯量为 $\frac{1}{12}$,关于铅笔一端的转动惯量为 $\frac{1}{3}$.

在第一阶段铅笔尖没有滑动,因此整个铅笔绕其笔尖转动(如图 3-34 所示). 由能量守恒可以求得铅笔的角速度:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \omega^2$$

由此得出 $\omega = \sqrt{3(1 - \cos\theta)}$. 瞬时力矩 $\frac{1}{2} \sin\theta$ 产生的角加速度为

$$\frac{1}{2} \sin\theta = \frac{1}{3} \alpha, \text{ 即 } \alpha = \frac{3}{2} \sin\theta$$

在竖直方向上,作用于铅笔上的有两个力:重力和桌面的支持力 N . 质心向心加速度的竖直分量为 $\frac{1}{2} \omega^2 \cos\theta$, 切向加速度的竖直分量为 $\frac{1}{2} \alpha \sin\theta$. 因而运动方程的竖直分量为

$$1 - N = \frac{1}{2} \alpha \sin\theta + \frac{1}{2} \omega^2 \cos\theta$$

由此得出

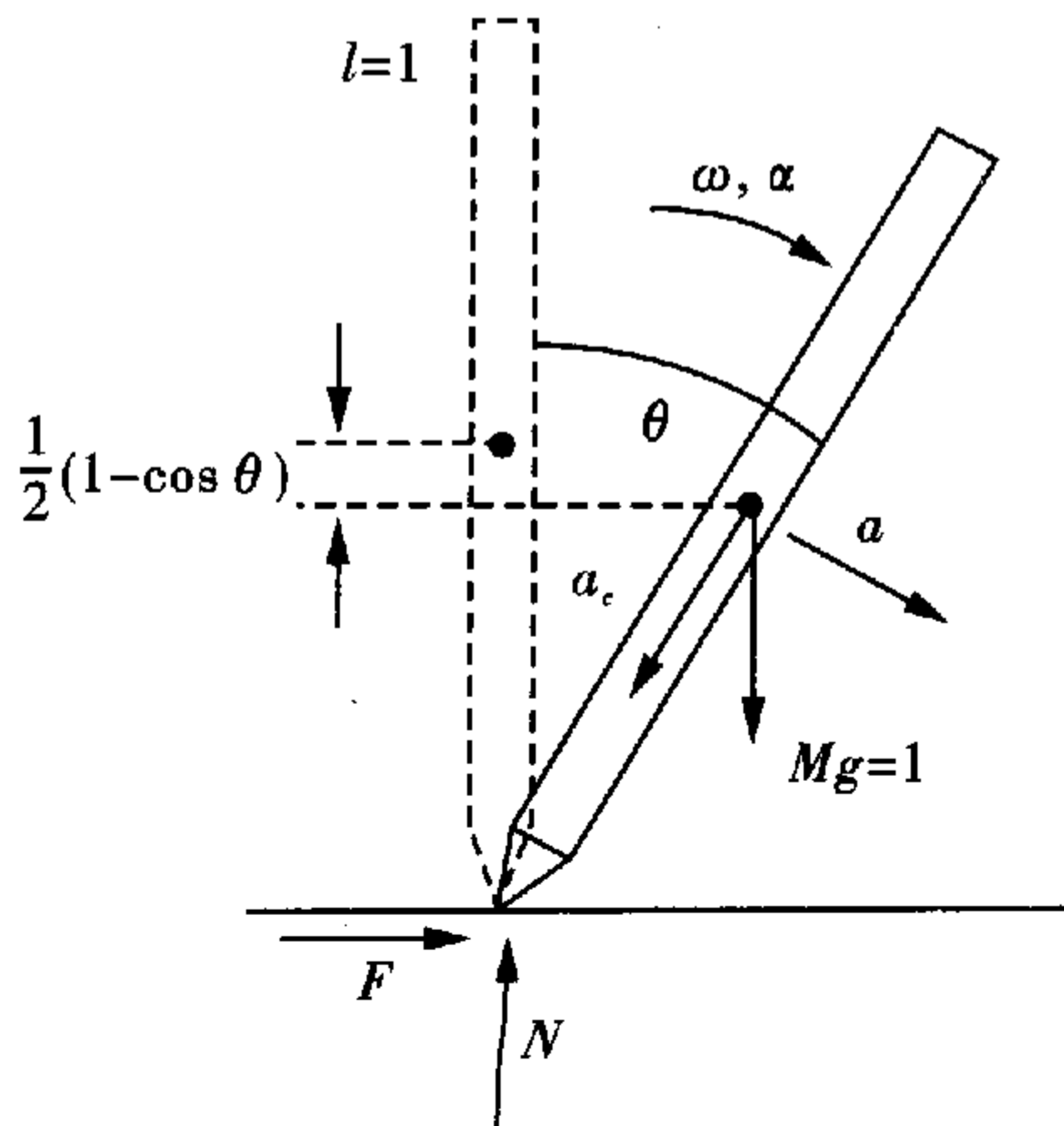


图 3-34

$$N = \left(\frac{3\cos\theta - 1}{2}\right)^2$$

从上式可见, 需要的支持力永远不会为负, 因此铅笔尖在转动过程中永远不会离开桌面. 当 $\theta = \arccos \frac{1}{3} = 70.5^\circ$ 时, 支持力为零; 此时摩擦力也将为零, 如果在这之前未曾滑动, 铅笔尖将发生滑动.

运动方程的水平分量为

$$F = \frac{1}{2}\alpha\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2\sin\theta$$

其中 F 为摩擦力. 把角加速度和角速度的表达式代入上式, 我们得到

$$F = \frac{3}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

笔尖滑动的条件是 $|F| > \mu N$, 其中 μ 为静摩擦因数. 使用函数 $f(\theta)$ 可以重新整理笔尖滑动的条件, $f(\theta)$ 定义为力 F/N 比值的绝对值

$$f(\theta) = \left| \frac{F}{N} \right| = \left| \frac{3\sin\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} \right| > \mu$$

在图 3-35 中画出了函数 $f(\theta)$ 随角度 θ 的变化曲线.

摩擦力在 $\theta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ$ 时改变符号, 意味着在 $0 < \theta < 48^\circ$ 时将发生“向后”滑动. 利用数学方法可以求出在此区域 $f(\theta)$ 有一个最大值, 此时 $\theta \approx 35^\circ$, 而临界摩擦因数为 $\mu_{\text{crit}} \approx 0.37$. 可见, 如果 $\mu < \mu_{\text{crit}}$, 铅笔将向后滑动.

如果 $\mu > \mu_{\text{crit}}$, 在铅笔倾倒角度达到 $\theta \approx 70.5^\circ$ [此时 $f(\theta)$ 趋于无穷大] 前, 铅笔尖将“向前”滑动. (注意这种情况下铅笔在 $35^\circ < \theta < 51^\circ$ 范围内不能开始滑动.) 铅笔尖“向前”和“向后”滑动的情况如图 3-36 所示, 在两种情形下滑动均可以再一次停止下来.

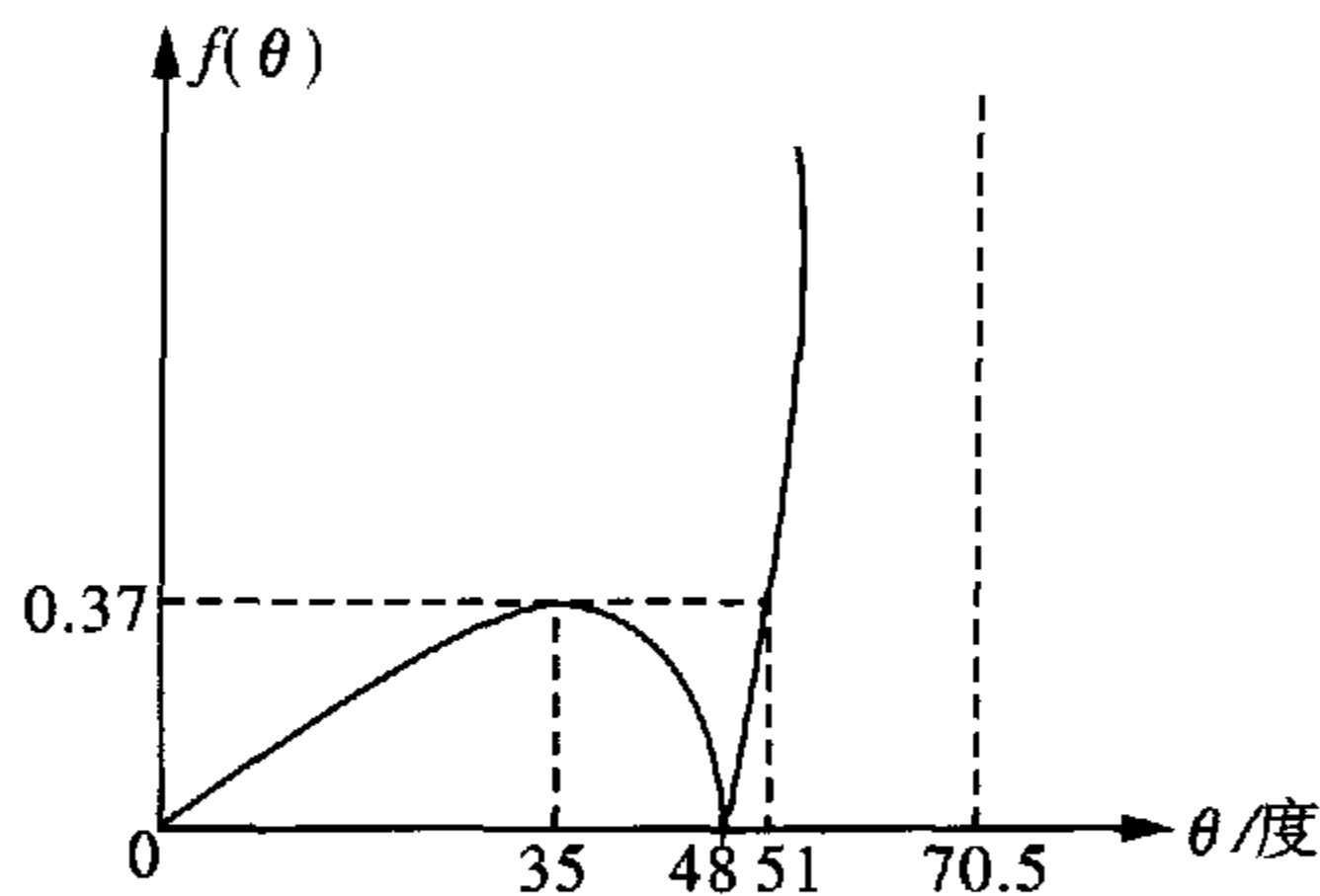


图 3-35

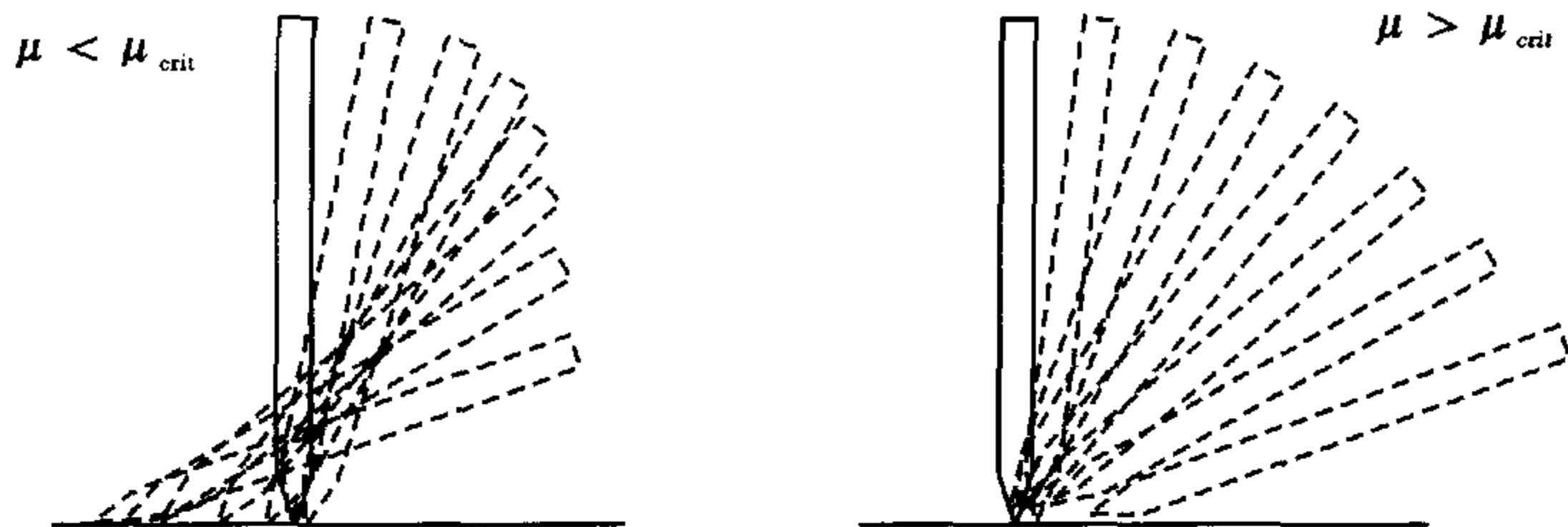


图 3-36

最后, 将会分析得出铅笔尖不会脱离桌面. 首先考虑向前滑动的情况如图 3-37, 根据功能原理和三角函数关系有

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = W_{\text{fr}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}\omega^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + v_{\text{笔尖}}^2 + 2v_{\text{笔尖}} \times \frac{1}{2}\omega\cos\theta \right]$$

如果忽略摩擦力做功和两个包含铅笔尖速度 $v_{\text{笔尖}}$ 的项(这三项均为正值),可得角速度的一个不等式: $\omega^2 < 3(1 - \cos\theta)$. 由关于质心的瞬时力矩可以得出

$$\frac{1}{2}N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \frac{1}{12}\alpha$$

同时竖直方向的运动方程为

$$1 - N = \frac{1}{2}\alpha\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\cos\theta$$

(可见,这个方程与无滑动情形下的方程是一样的,其原因是铅笔尖只有水平方向的加速度,而质心的竖直方向加速度分量没有变化,参见图 3-38).

从以上两个方程可以得到支持力关于 θ 和 ω^2 的函数. 考虑上面关于 ω^2 的不等式,有

$$N = \frac{1 - (1/2)\omega^2\cos\theta}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta + \mu\cos\theta)} > \frac{(3/2)[\cos\theta - (1/2)]^2 + (5/8)}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta + \mu\cos\theta)} > 0$$

因此,支持力总是正的,铅笔尖将一直不脱离桌面.

对于“向后”滑动的情况,其方法是类似的. 在图 3-39 中分别标出了质心水平和竖直方向的速度 v_x 和 v_y . 由于铅笔尖竖直速度为零,可以得到 v_y 和 ω 之间的一个函数关系: $v_y - \frac{1}{2}\omega\sin\theta = 0$. 再一次使用功能原理,有

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = W_{fr} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\omega^2 + v_x^2 + v_y^2\right)$$

忽略摩擦力做功和另一个包含 v_x 的正数项,有

$$\omega < \frac{1 - \cos\theta}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\sin^2\theta}$$

再考虑对于质心的净力矩和运动方程的竖直分量,可以进一步得到支持力应满足的不等式:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1 - (1/2)\omega^2\cos\theta}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta - \mu\cos\theta)} \\ &> \frac{1 + 3(\cos\theta - 1)^2}{[1 + 3\sin\theta(\sin\theta - \mu\cos\theta)](1 + 3\sin^2\theta)} \end{aligned}$$

上式中分子总是正值,分母对于 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, 当 $\mu < 4/3$ 时也是正的. 可见,在笔尖“向后”滑动($\mu < 0.37$)的情况下,它也不会离开桌面.

如果笔尖在某个阶段停止滑动,它依然不会离开桌面. 因为 $\omega^2 < 3(1 - \cos\theta)$, 故 $N > (3\cos\theta - 1)^2/4 \geq 0$ (参见解析的第一部分).

方法与技巧 本题是一个发散性题型,要求通过各种情况进行讨论并得出结论,此类题往往容易出现解答不完全的错误. 当摩擦因数较小时,笔尖“向后”移动,当摩擦因数大于某个特定的临界值时,笔尖“向前”移动. 考虑到滑动摩擦使机械能减少的事实,可以发现笔尖将一直保持与桌面的接触.

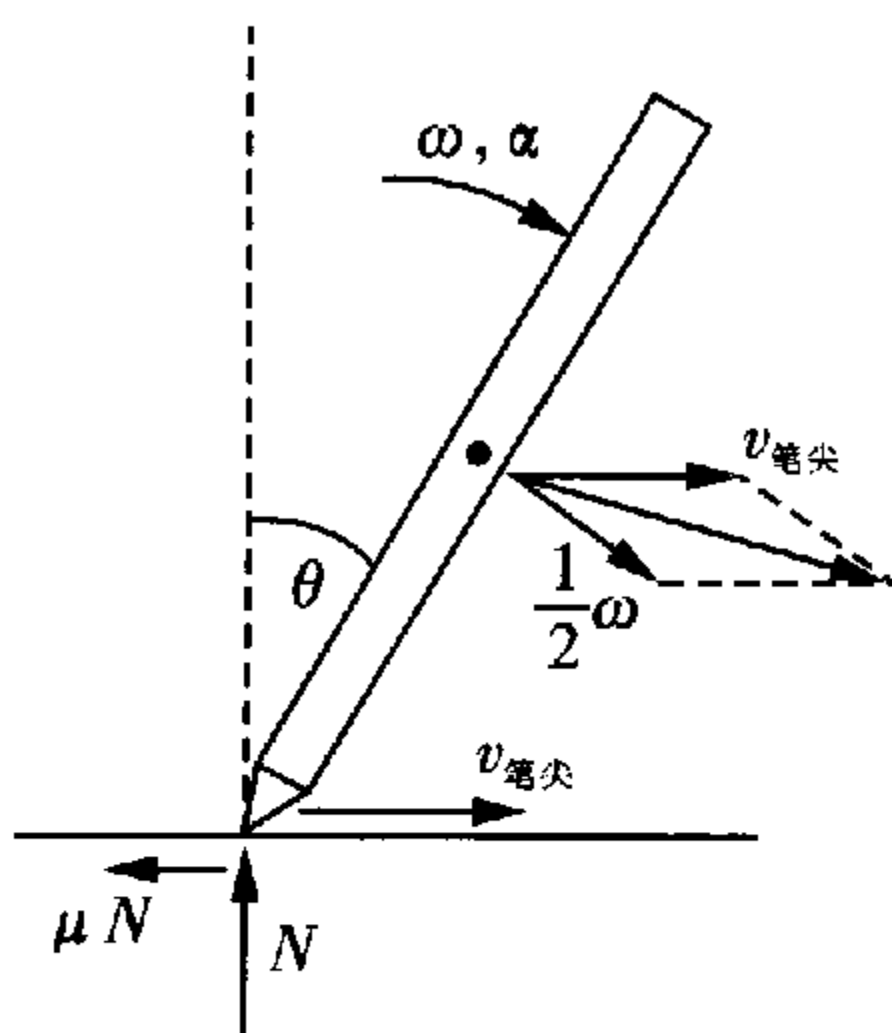


图 3-37

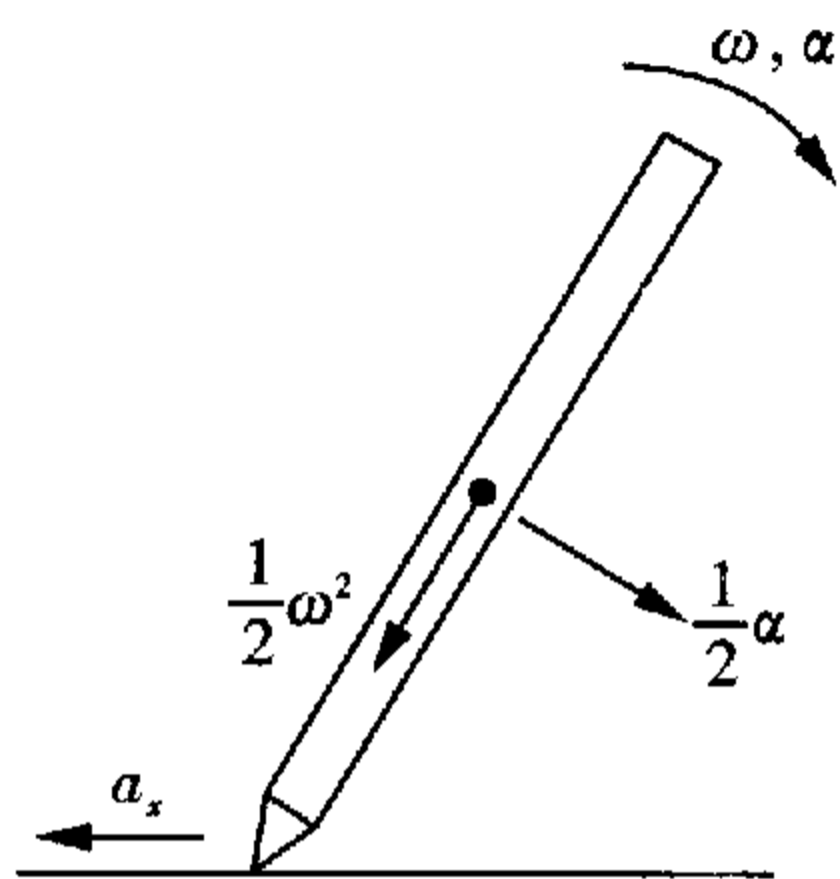


图 3-38

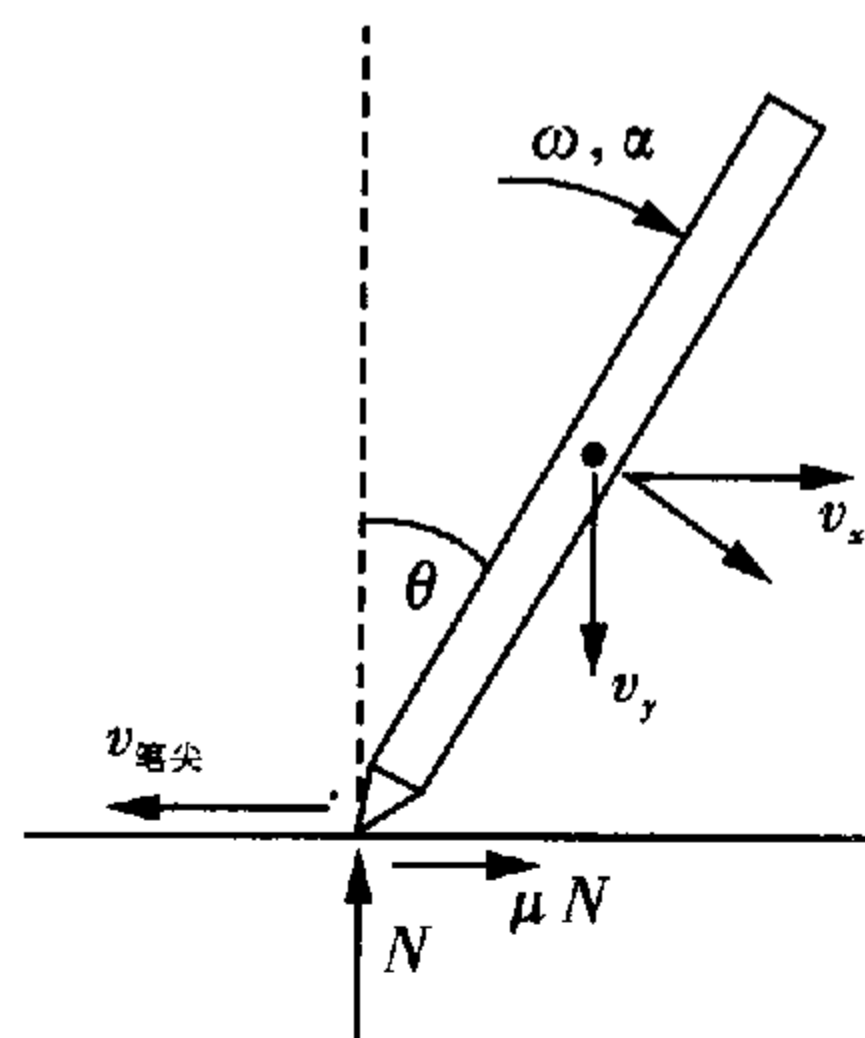


图 3-39

例 20 一根均匀木棒近于竖直地放置在桌子的一端, 然后从静止释放. 考虑以下两种极端情况, 求出木棒离开桌面时它与竖直方向所成的角度.

(i) 桌面是光滑的(摩擦力可以忽略不计), 但在桌子的一端刻有一个小槽[如图 3-40(a)所示].

(ii) 桌面是粗糙的(摩擦力很大), 并且棱角很锐利, 也就是说桌边的曲率半径和木棒的端面相比非常小. 木棒端面的一半突出桌子的边缘[如图 3-40(b)所示], 这样保证了木棒由静止释放后将沿桌边旋转, 木棒的长度远远大于它的直径.

解析 引力势能在木棒下落 θ 角过程中的减少为 $Mg \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$, 这部分能量转换成了木棒相对桌子边缘的转动动能. 不管是直接计算还是使用平行轴定理, 可以得到木棒相对于其端点的转动惯量 $\frac{1}{3}Ml^2$. 结合上面两式, 有

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)$$

加速度 a_c 为 $l/2$ 乘以 ω^2 , 即等于 $\frac{3}{2}g(1 - \cos\theta)$. 考虑到木棒的转动惯量和瞬时力矩 $Mg \frac{l}{2}\sin\theta$,

可以得到质心的切向加速度为 $a_t = \frac{3}{4}g\sin\theta$.

(i) 光滑(无摩擦)小槽的水平 and 竖直表面只能分别提供给木棒端点正的竖直和水平作用力, 分别为 V 和 H (参见图 3-41). 只要这两个力之一减小为零, 而且运动方程要求提供负作用力如吸引力(这在物理上是不可能的)时, 木棒将脱离桌面.

将力和加速度在水平和竖直方向上分解(见图 3-41), 有

$$H = M(a_t \cos\theta - a_c \sin\theta)$$

$$Mg - V = M(a_c \cos\theta + a_t \sin\theta)$$

求解这两个关于 H 和 V 的方程, 得到

$$H = \frac{3}{4}Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

$$V = \frac{1}{4}Mg(3\cos\theta - 1)^2$$

在这两个力中首先消失的是水平分量 H , 消失时 $\theta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ$. 如果角度继续增大, H 将为负值. 此时木棒将脱离桌面, 因为小槽无法提供拉回木棒的力.

(ii) 当桌面的边缘为一个十分小的四分之一圆弧时, 它作用于木棒的支持力将始终沿木棒的方向. 静摩擦力 F_s 沿桌面的切向, 由于桌面粗糙可以为任何值(参见图 3-42).

重力沿木棒方向的分量与桌面提供的支持力之和提供了向心力.

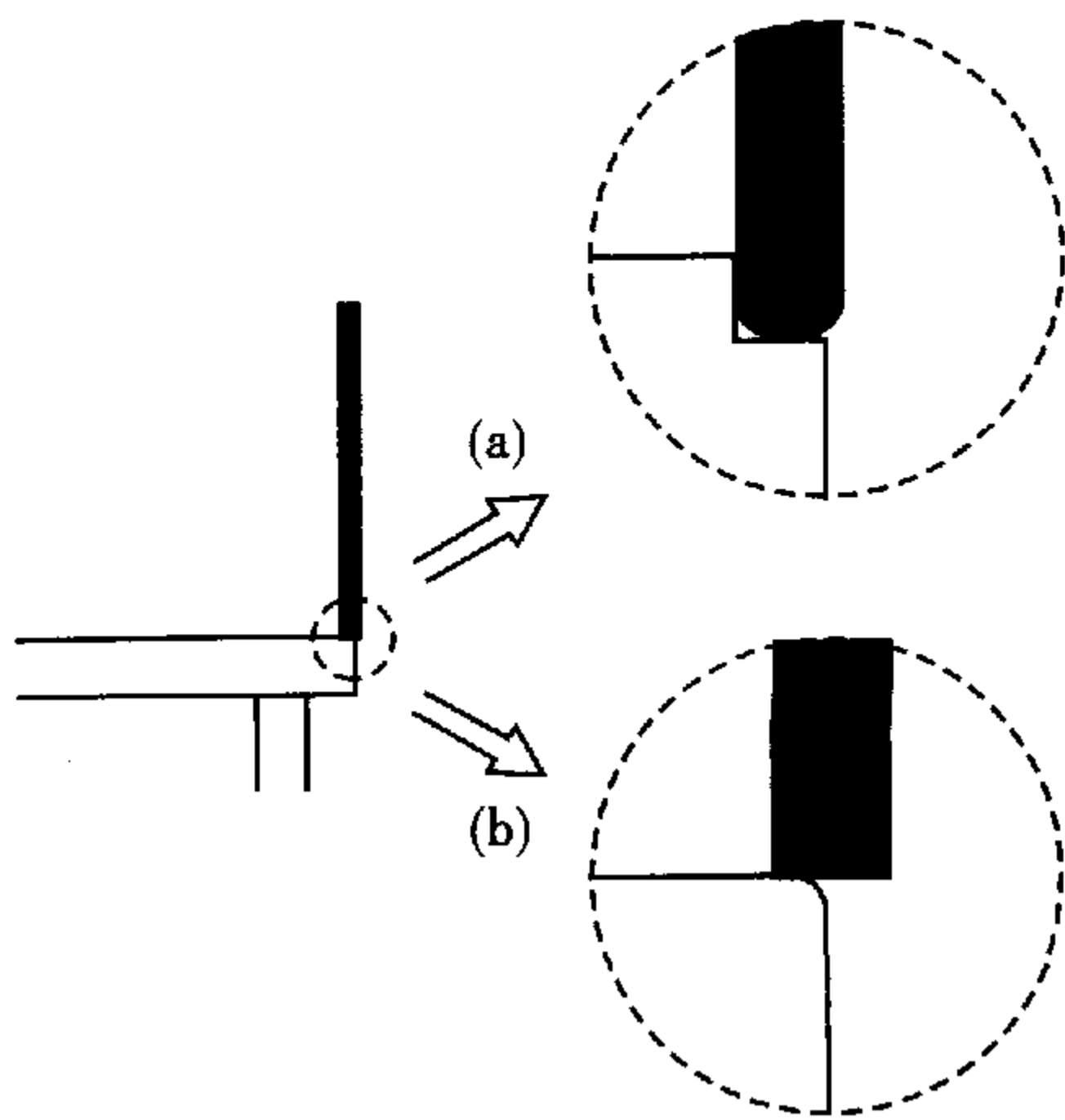


图 3-40

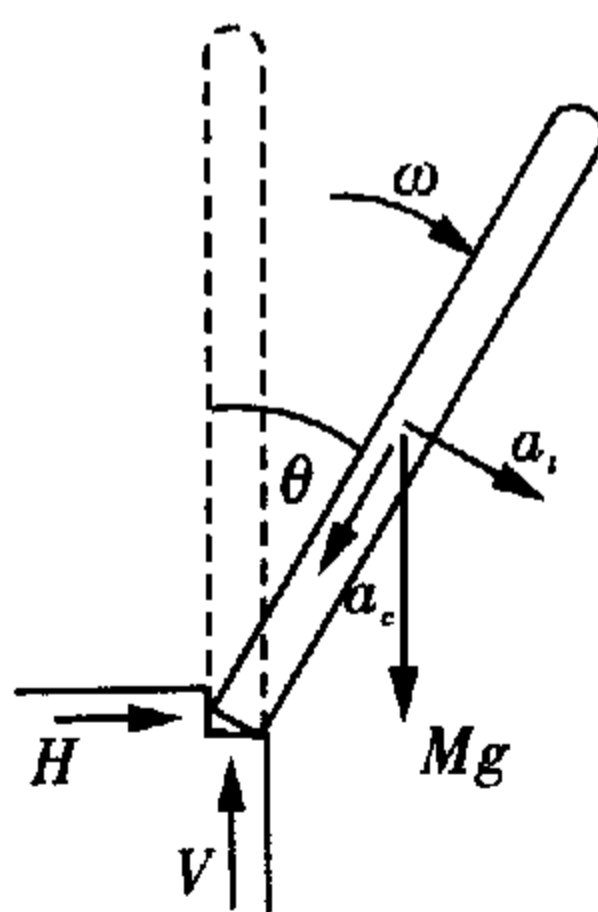


图 3-41

$$Mg\cos\theta - N = Ma_c = M \frac{l}{2} \omega^2 = \frac{3}{2} Mg(1 - \cos\theta)$$

进而得到桌面的支持力为

$$N = \frac{Mg}{2}(5\cos\theta - 3)$$

当 $N=0$, 即 $\theta = \arccos \frac{3}{5} \approx 53^\circ$ 时, 桌面和木棒之间的相互作用为零. 如果角度再继续增大, 支持力将变为负值, 这是不可能的, 因而木棒将离开桌面. 由于桌面粗糙, 静摩擦力除支持力为零的情况外, 总是足够阻止木棒端点的滑动; 因此, 它在木棒的运动中没有影响.

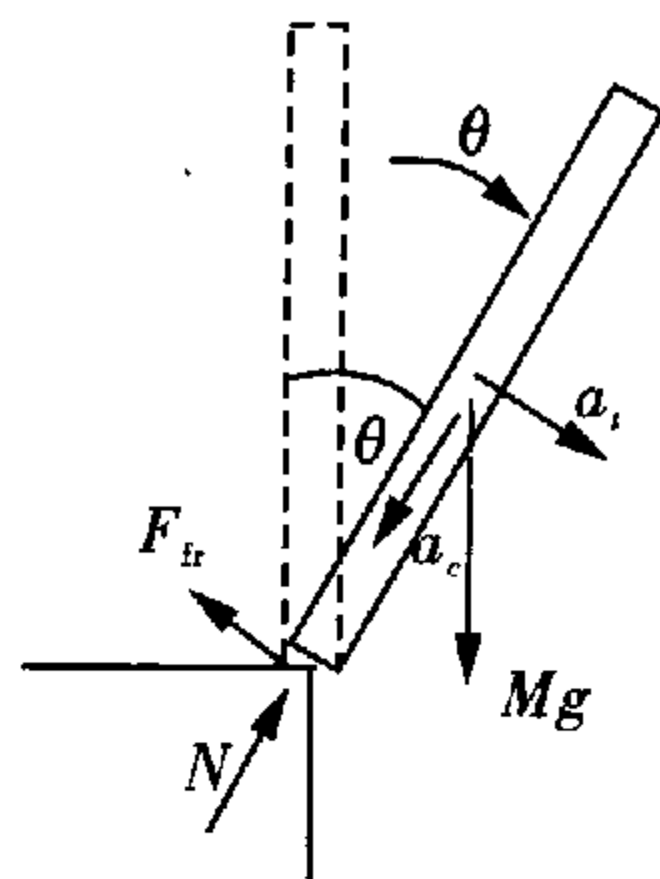


图 3-42

方法与技巧 利用重力势能与转动动能的相互转换关系, 结合两种不同情况求解, 对情况(i), 小槽的光滑水平和竖直面只能分别产生作用于棒端的水平和竖直作用力. 对情况(ii), 桌子的边缘是一个非常小的圆弧, 因此其支持力总是沿棒的轴向. 也就是说, 木棒倒下的过程将强烈地依赖于接触面的几何形状, 也和接触面的摩擦因数有关.

例 21 在一个倾角为 α 的斜面上镶嵌着许多同样的滚筒, 相邻滚筒间的距离为 d . 滚筒沿水平方向放置, 为质量为 m 、半径为 r 的表面覆盖橡胶的圆柱形铁棍. 质量为 M 、长度远大于 d 的厚木板在斜面的顶端释放, 如图 3-43 所示.

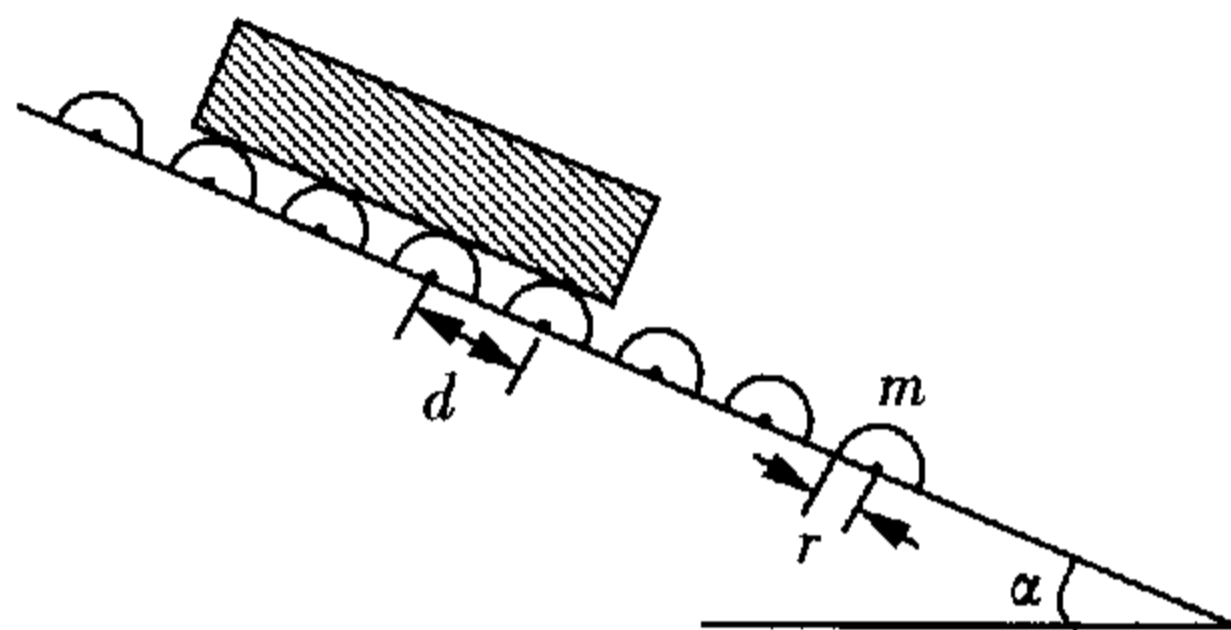


图 3-43

求木板的最终速度 v_{\max} , 忽略空气阻力和滚筒转轴处的摩擦力.

解析 厚木板滑动距离 L 时, 有 L/d 个滚筒得到角速

度 $\omega_{\max} = v_{\max}/r$. 厚木板势能的减少为 $MgL\sin\alpha$, 而每个滚筒的动能为 $\frac{1}{2}I\omega_{\max}^2 = \frac{1}{4}mv_{\max}^2$, 上述结论考

虑了滚筒表面最终的切向速度应该与木板的速度相等, 而每个滚筒的转动惯量为 $I = \frac{1}{2}mr^2$.

认为木板下降过程中损失的重力势能, 全部转化成为滚筒的动能是不正确的. 在此情况下由式

$$MgL\sin\alpha = \frac{L}{d} \frac{1}{4}mv_{\max}^2 \tag{1}$$

可以得到木板的最终速度为

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4dMg\sin\alpha}{m}}$$

然而, 这个结果是错误的, 因为没有考虑滚筒加速过程中由摩擦力作用而导致的热量损失. 令单个滚筒与木板之间的摩擦力为 $F(t)$ (没有必要假定这个力不随时间变化). 在 Δt 时间间隔内, 滚筒角动量的变化为

$$I\Delta\omega = rF(t)\Delta t \tag{2}$$

把上式的变化对时间取和, 从而得出滚筒最终速度的一个方程:

$$r\sum F(t)\Delta t = I\omega_{\max} = I\frac{v_{\max}}{r} \tag{3}$$

另一方面, 在时间 Δt 内, 克服摩擦力所做的功(热散失) ΔQ 为摩擦力与滚筒表面相对位移之积

$$\Delta Q = F(t) [v_{\max} - r\omega(t)] \Delta t.$$

考虑式②、③,总的耗散能量为

$$Q = \sum F(t) [v_{\max} - r\omega(t)] \Delta t = r\omega_{\max} \sum F(t) \Delta t - I \sum \omega \Delta \omega = I\omega_{\max}^2 - I \frac{\omega_{\max}^2}{2} = I \frac{\omega_{\max}^2}{2}.$$

在上式的计算中利用了等式 $\omega \Delta \omega = \frac{1}{2} \Delta(\omega^2)$. 这个结果表明,摩擦生热损失的能量与滚筒得到的动能相等. 需要注意的是,这个结果既不依赖于摩擦力的大小,也不依赖于摩擦力随时间的变化. 正确的能量守恒方程不是①式,而应该是

$$mgL \sin \alpha = \frac{L}{d} \frac{1}{4} mv_{\max}^2 + Q = 2 \frac{L}{d} \frac{1}{4} mv_{\max}^2$$

可以得到木板的最终速度为

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2dMg \sin \alpha}{m}}$$

方法与技巧 考虑到能量守恒,但别忘了耗散的能量. 本题的出错热点就在于认为“机械能守恒”.

例 22 一个无滑滚动的台球正面撞上一个同样的静止台球,请分析碰撞后两个球的运动. 证明两球的终态和两球之间或球与桌面之间的滑动摩擦因数无关.(滚动摩擦可以忽略不计)

解析 两球之间的摩擦可以忽略不计,因此碰撞过程中,它们之间的相互作用力与其表面垂直. 因而,第一个球碰撞后停下来,同时第二个球得到了第一个球的初速度 v_0 . 两个球的转动在碰撞前后没有变化,即第一个球在原地转动,第二个球无转动地以速度 v_0 平移.

台球和桌面之间的摩擦力很重要,将影响两球的运动. 第一个球在摩擦力 $F_{\text{摩擦力}} = \mu mg$ 的作用下加速向前,而第二个球则在同样的力的作用下减速运动,如图 3-44 所示. 第一个球的转动由于摩擦力的作用将变慢,而第二个球的转动将因之增加. 这部分摩擦力的作用,直到两球达到无摩擦滚动的状态为止,然后将保持那样的运动状态.

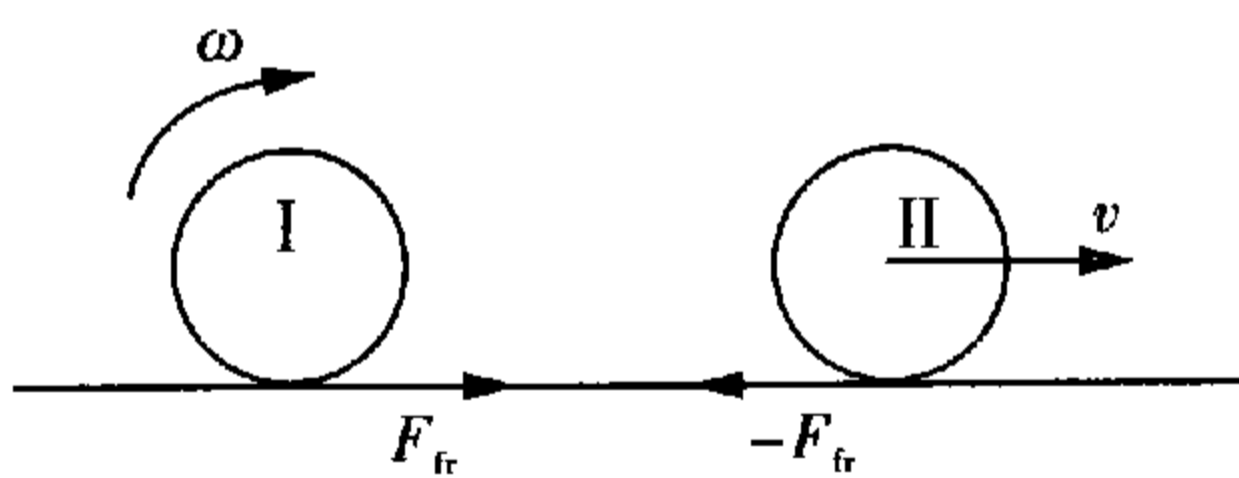


图 3-44

下面证明,两个小球最终的运动状态既不依赖于摩擦因数,也与摩擦因数随位置的可能变化无关. 碰撞后,原来运动的小球以角速度 $\omega = v_0/r$ 转动,其相对于转动轴的角动量为 $I\omega = \frac{2}{5}mr^2(v_0/r) = \frac{2}{5}mv_0r$. 由于小球的质心静止,即平动带来的角动量变化为零,所以小球相对于其与桌面接触点 P 的角动量也为 $\frac{2}{5}mv_0r$. 由于摩擦力经过 P 点,因此小球相对于 P 点的角动量不会因摩擦力的作用而变化.(重力和桌面的支撑力之和为零,因此它们也不会产生净力矩.)

以速度 v 作无滑滚动的小球,其角动量为自身角动量 $\frac{2}{5}mvr$ 和质心运动的角动量 mvr 之和. 如图 3-45 所示,左侧为碰撞后短时间内运动小球和它的受力情况,右侧为最后的无滑滚动状态. 根据角动量守恒,我们有 $\frac{2}{5}mv_0r = \frac{2}{5}mvr + mvr$, 因此 $v = \frac{2}{7}v_0$. 由类似的道理可以得到,第二个小球的最终速度

为 $\frac{5}{7}v_0$, 与摩擦因数的大小无关.

方法与技巧 本题的焦点在于每一个小球相对于其与桌面的接触点的角动量保持不变. 我们可以将题中的物理过程用慢镜头回放, 可以看到在碰撞之后, 第一个台球停止下来并在原地转动, 而第二个球则运动起来但无转动. 因此在整个碰撞过程中, 第一个台球只是把动量传递给第二个球, 角动量却保持了下来. 碰撞之后, 摩擦使得第一个球向前运动, 但转动越来越慢, 同时摩擦使得第二个球平移运动越来越慢, 同时增加了转动.

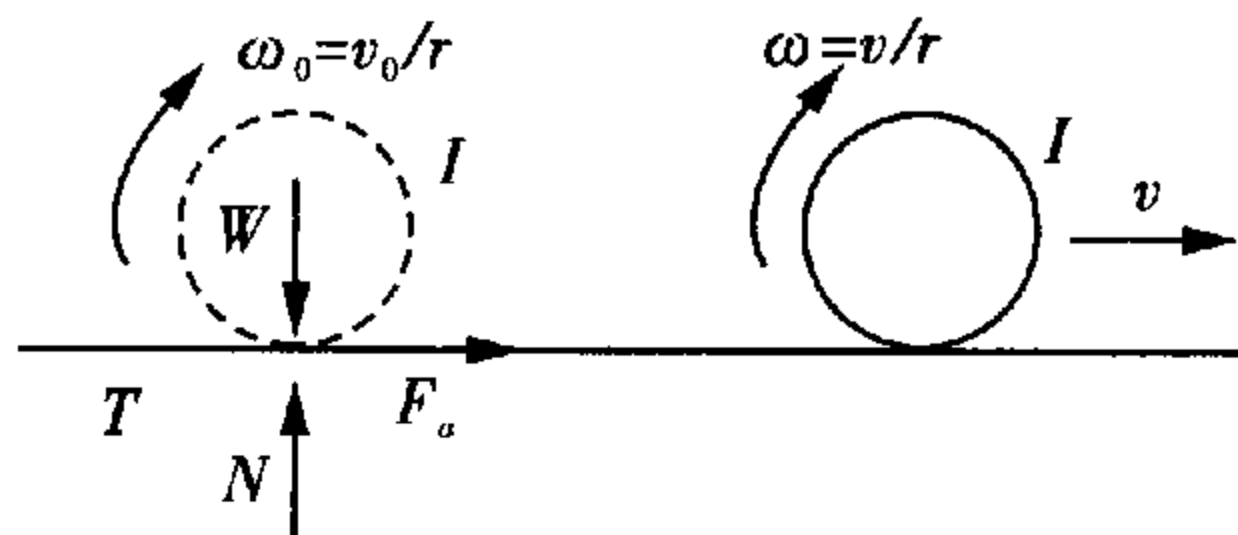


图 3-45

【解题尝试】

1. 一质量为 m 的皮球从高为 h 处自由下落(不计空气阻力), 反弹起来的高度为原来的 $\frac{3}{4}$, 要使皮球反弹回高 h 处, 求每次拍球需对球做的功.
2. 一质点位于光滑的固定半球面上距球心高度为 H 的任意点 P 处, 在重力作用下质点由静止开始往下滑, 从 Q 点离开球面, 求 P 、 Q 两点的高度差 h .
3. 使木板在水平地面上绕其一端转动的角度为 α , 求所需要做的功. 木板长度为 L , 质量为 M , 木板与地面之间的动摩擦因数为 μ .
4. 一质量为 m 、长为 l 的柔软绳索的一部分平直地放在桌面上, 另一部分跨过桌面边缘的光滑定滑轮下垂, 如图 3-46 所示, 柔绳与桌面间的动摩擦因数为 μ .
 (1) 柔绳能由静止开始下滑, 求下垂部分长度至少多长.
 (2) 由这一位置开始运动, 柔绳刚离开桌面时的速度多大? (设桌面足够高)

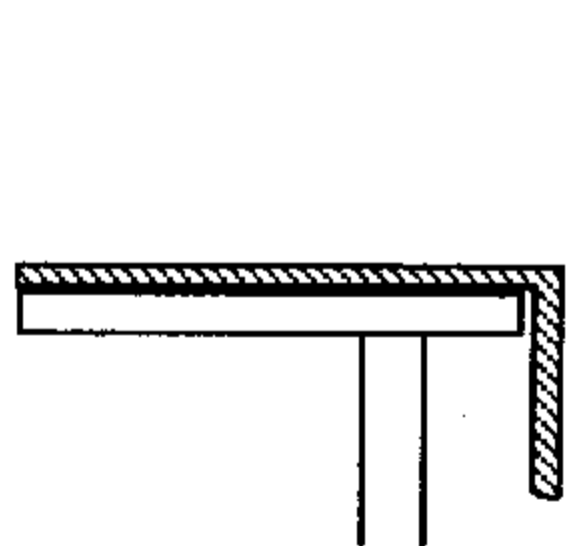


图 3-46

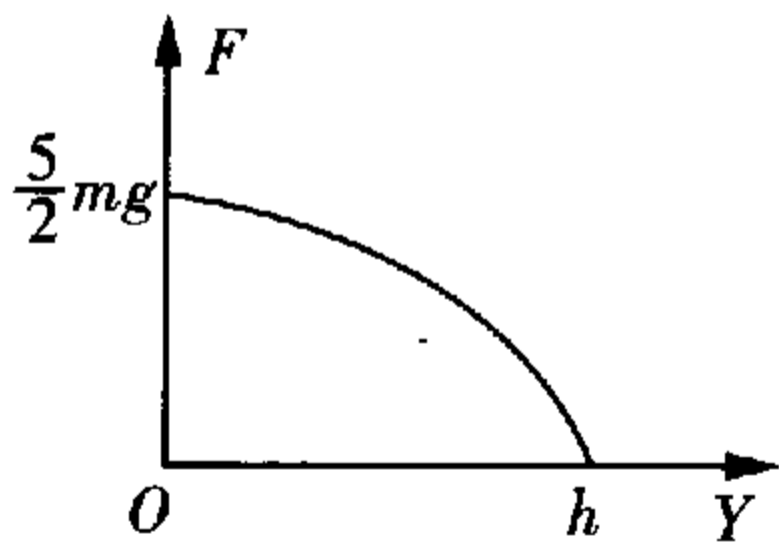


图 3-47

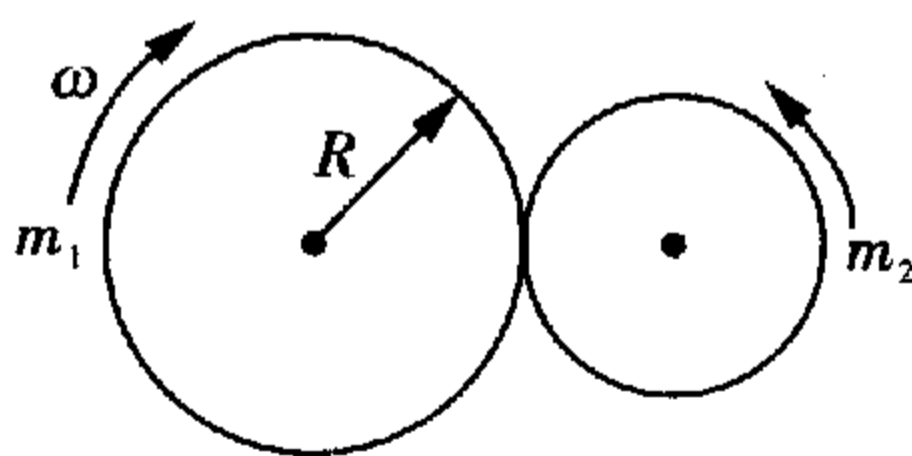


图 3-48

5. 跳水运动员从高于水面 $H = 10 \text{ m}$ 的跳台自由落下, 运动员的质量 $m = 60 \text{ kg}$, 其体型可等效为长度 $l = 1.0 \text{ m}$ 、直径 $d = 0.30 \text{ m}$ 的圆柱体, 略去空气阻力, 运动员入水后水的等效阻力 F 作用圆柱体下端, 力 F 的大小随入水深度 y 变化如图 3-47 所示, 该曲线近似为椭圆的一部分, 长轴和短轴分别与 OY 和 OF 重合, 为了确保运动员绝对完全, 试计算水池中水的深度 h 至少应等于多少.
6. 如图 3-48 所示, 有两个薄壁圆筒, 半径为 R 的圆筒绕自己的轴以角速度 ω 转动, 而另一个圆筒静止. 使两圆筒相接触并且它们的转轴平行, 过一会儿, 由于摩擦两圆筒开始做无滑动的转动. 问有多少机械能转换成内能? (两圆筒的质量分别为 m_1 、 m_2)
7. 质量为 m 的小球以某一初速度竖直上抛, 若运动中所受阻力 $F_f = kv^2$, 最大阻力为重力的 0.44 倍, 试求小球上升的最大高度 H 及落回抛出点时的速度 v .
8. 如图 3-49 所示一飞轮, 其转轴成水平方向, 轴的半径为 2.00 cm , 其上绕有一根细长的绳, 在自由

端先系以质量 $m_1 = 20.0 \text{ g}$ 的轻物,此物能匀速下降,然后改系一质量 $m_2 = 5.00 \text{ kg}$ 的重物,则此重物从静止开始,经过 $t = 10.0 \text{ s}$ 下降了 $h = 400 \text{ cm}$,若略去绳的质量和空气阻力,并设 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$,求:

- (1) 飞轮主轴与轴承之间的摩擦阻力矩大小;
- (2) 飞轮转动惯量的大小;
- (3) 绳上的张力.

9. 一长为 l 、质量为 m 的匀质细棒,如图 3-50 所示,可绕图中水平轴 O 在竖直面内旋转,若转轴光滑,今使棒从水平位置自由下摆,求:

- (1) 在水平位置和竖直位置棒的角加速度;
- (2) 在竖直位置时棒的角速度、质心速度和加速度各为多少?
- (3) 在竖直位置时,轴对棒的作用力.

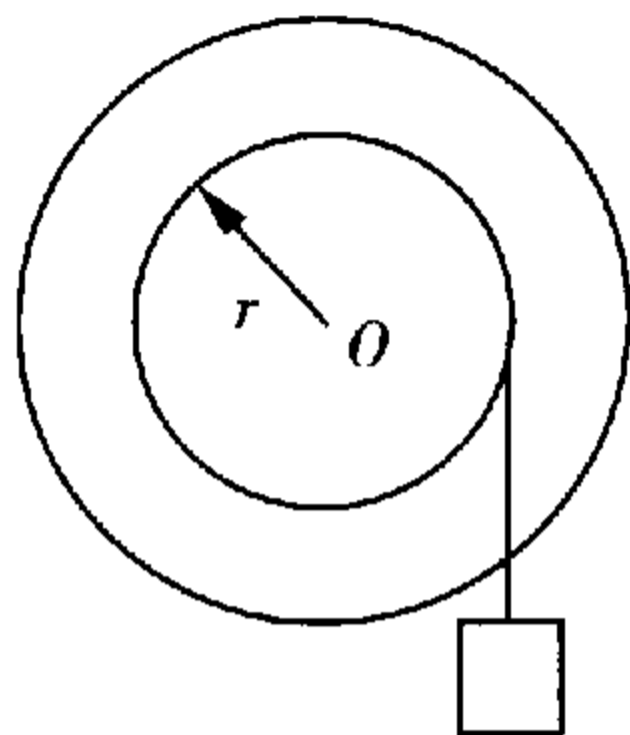


图 3-49

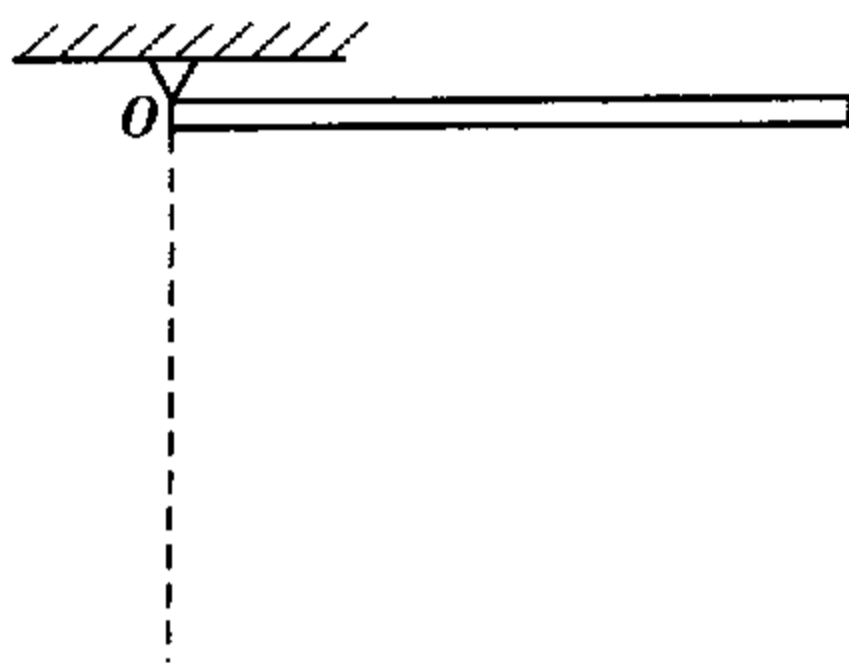


图 3-50

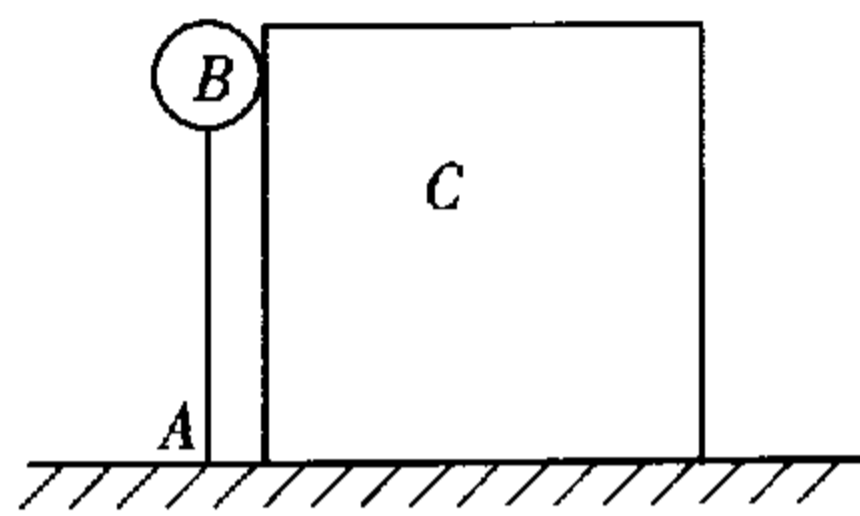


图 3-51

10. 如图 3-51 所示,长度为 L 的轻杆上端连着一质量为 m 的体积可忽略的小重物 B . 杆的下端被用铰链固接于水平地面上的 A 点. 同时,置于同一水平地面上的立方体 C 恰好与 B 接触,立方体 C 的质量为 M . 今作微小扰动,使杆向右倾倒,设 B 与 C 、 C 与地面间均无摩擦,而 B 、 C 刚脱离接触的瞬间,杆与地面夹角恰好为 30° ,求 B 、 C 的质量之比 $m:M$.

11. 如图 3-52 所示,一条均匀的绳子,上端用手拉住放在光滑的水平桌面上,绳子的全长为 l ,在桌边下垂的长度为 a (桌面上的长度为 $l-a$). 若由此状态松手,让绳子自由滑下,求绳子全部离开桌面瞬间的即时速度 v . (注:不计空气阻力和摩擦力. 桌腿较长,当绳子全部离开桌面的瞬间,绳子的下端尚未触地.)

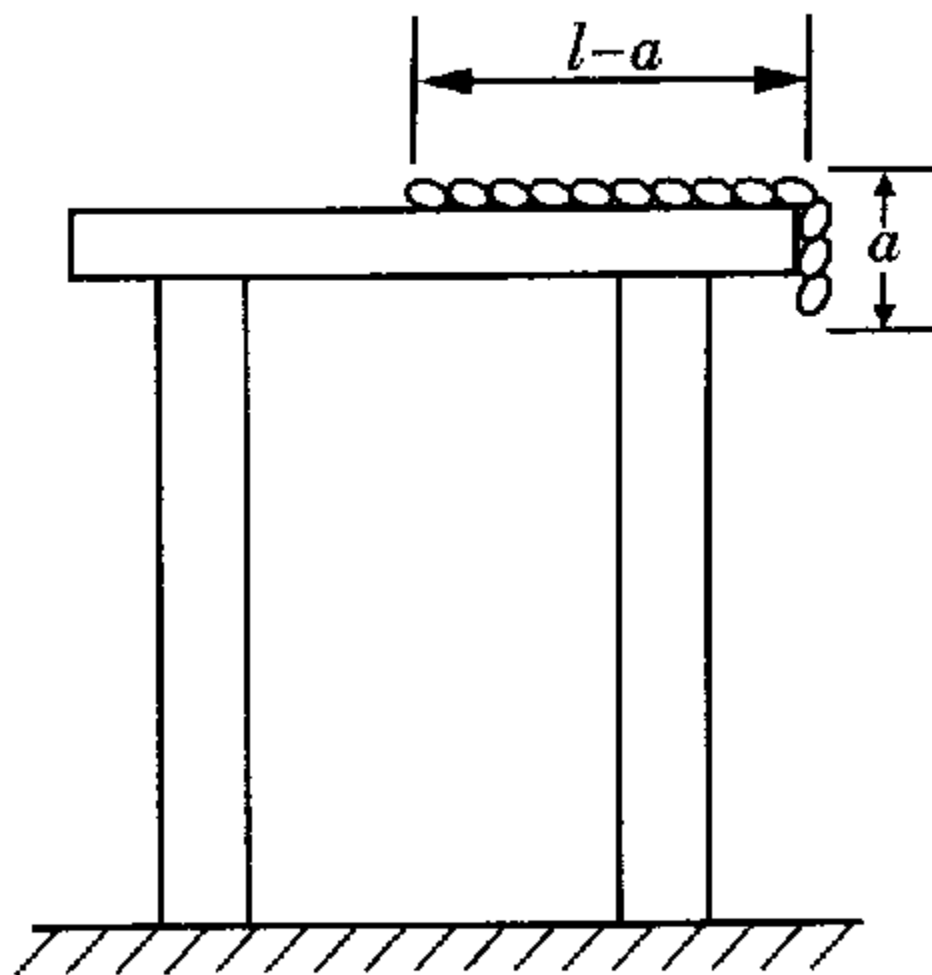


图 3-52

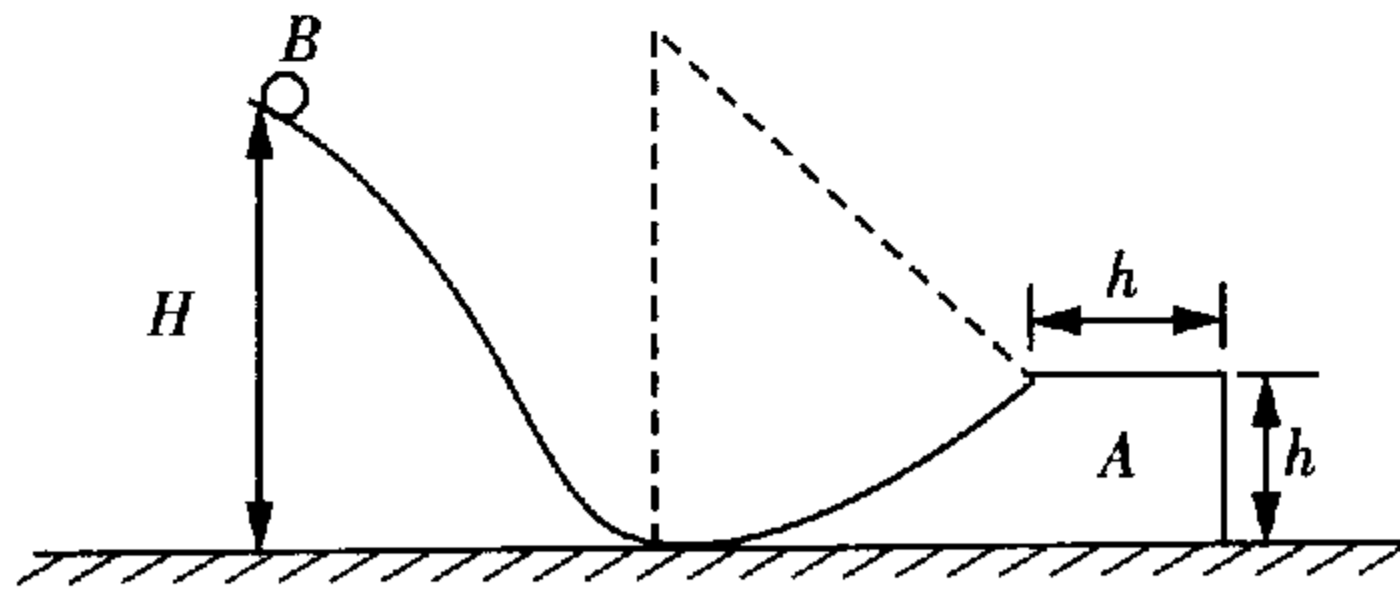


图 3-53

12. 如图 3-53 所示, A 是放置在光滑水平面上的滑块, 其质量为 M , 滑块的上端是一水平台面, 台面长和高度均为 h , 滑块的侧面有一条长度为 $1/8$ 圆周的圆弧形光滑槽, 槽底跟水平面相切. 另有一条高为 H 的固定的光滑导轨, 导轨的底端正好对准 A 的底端. B 是质量为 m 的小球, $m = 0.4M$, 它由导轨的顶端滑下, 初速为零. 试问, 欲使小球冲上 A 平台, 高度比 H/h 的数值范围是多少?
13. 飞轮质量 $m = 60 \text{ kg}$, 半径 $R = 0.25 \text{ m}$, 绕水平中心轴 O 转动, 转速为 900 r/min . 现利用一闸杆制动, 在闸杆的一端加一竖直方向的制动力 F , 可使飞轮减速. 已知闸杆尺寸如图 3-54 所示, 闸杆与飞轮之间的摩擦因数 $\mu = 0.4$, 飞轮的转动惯量可按匀质圆盘计算.
- (1) 设 $F = 100 \text{ N}$ 时, 问飞轮在多大的时间内停止转动? 在这段时间内, 飞轮转了几转?
- (2) 如果要在 2 s 内使飞轮转速减为一半, 需要多大制动力 F ?

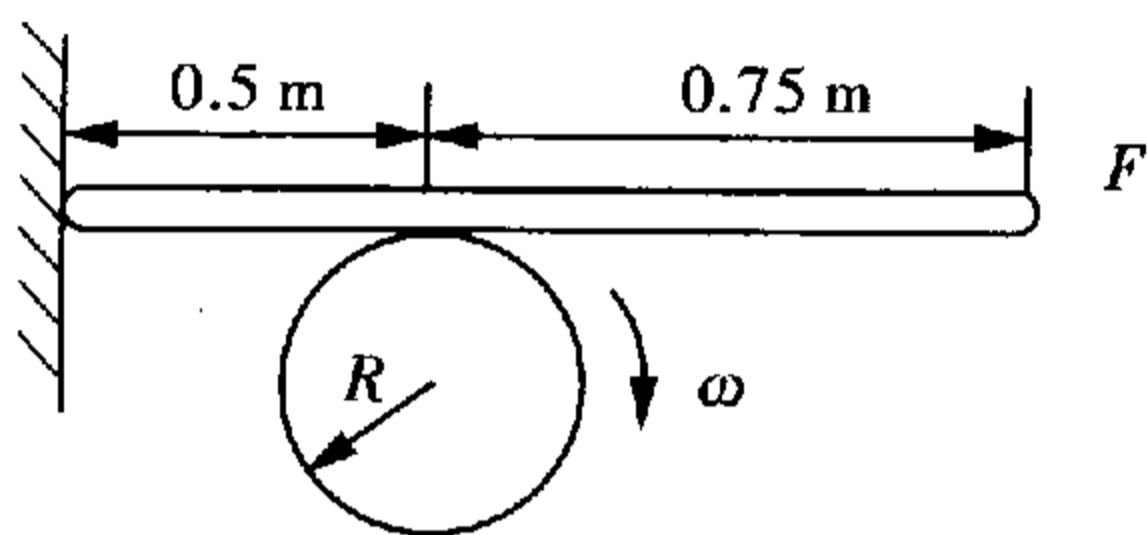


图 3-54

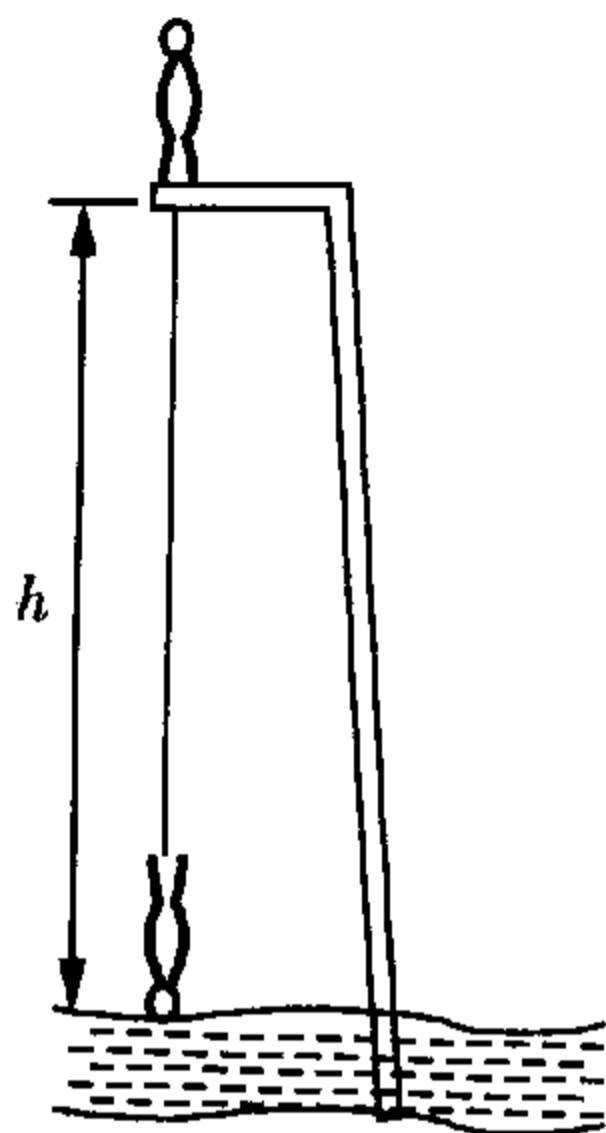


图 3-55

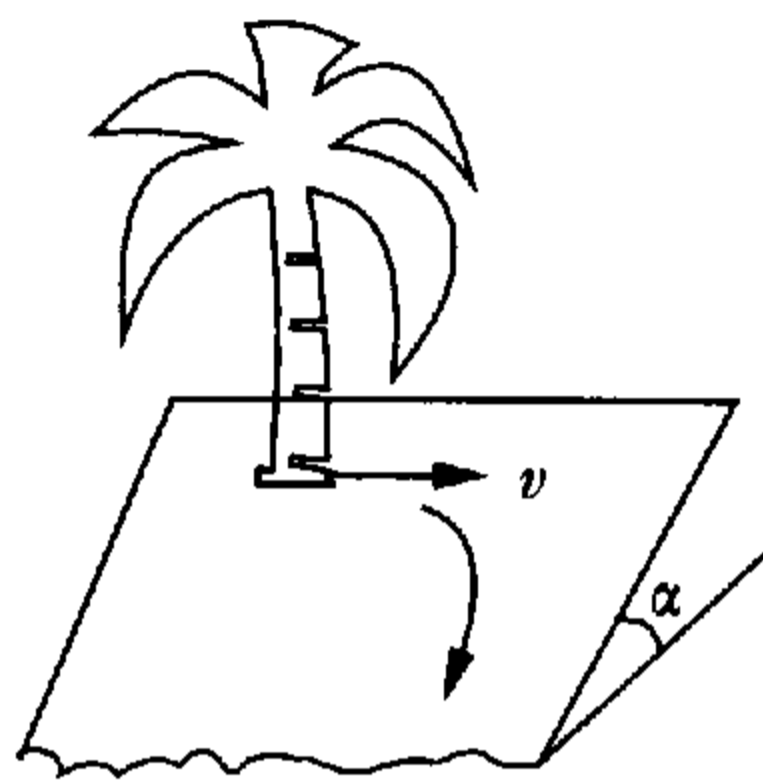


图 3-56

14. 一个身高 2 m 的人从湖边高 25 m 的平台上做蹦极跳, 弹性绳的一端系在他的脚上, 另一端固定在平台上. 如图 3-55 所示, 他从静立开始下落, 弹性绳的长度和弹性选择为恰好当他的头触及湖面时, 其速度减小为零. 最终静止时, 人的头高于水面 8 m .
- (1) 求没有被拉伸时的绳长.
- (2) 求在跳下过程中的最大速度和加速度.
15. 当一架直升机的发动机的输出功率为 P 时, 可以保持在空中盘旋. 另外一架直升机完全是第一架的“拷贝”, 但其线度只是前者的一半. 请问要使第二架直升机保持盘旋, 发动机的输出功率应为多少?
16. 两个小孩站在一个开阔、倾斜的山坡上, 山坡可以看成是一个平坦的斜面. 地面上结了足够的冰, 只要小孩受到一点点的作用力就会以恒定的速度滑向山下, 如图 3-56 所示.
- 一个小孩与另外一个小孩玩, 他背靠一棵大树上以 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ 的速度水平推了对方一下. 后者滑下了山坡, 此间其速度的大小和方向均发生了变化. 如果忽略空气阻力, 并且假定摩擦力与速度无关, 被推的小孩最终的速度为多大?
17. 一根重的、可变形的、无弹性的长为 L 的链条被近乎对称地放在一个可以绕固定转轴旋转的轻质滑轮上面, 如图 3-57 所示. 请问在链条离开滑轮的时候, 它的速度是多少?
18. 一薄圆盘, 半径为 R , 质量为 m , 用一长为 $2R$ 的轻细杆垂直穿过其圆心, 并将杆的中点与圆盘圆心固定在一起 (如图 3-58 所示). 现将杆的一端 O 固定于水平地面的一光滑铰链上, 整个物体

绕 y 轴以角速度 ω 在水平地面上滚动,如图 3-59 所示,求地面在 A 端对圆盘的支持力.

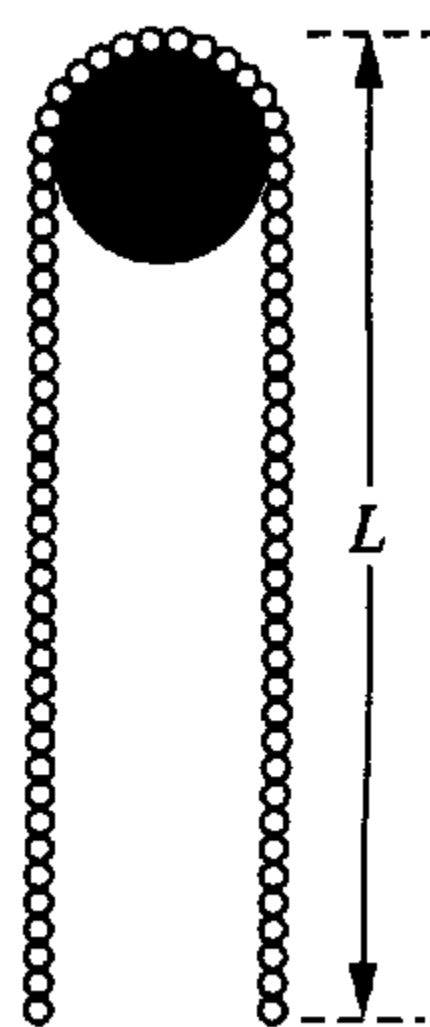


图 3-57

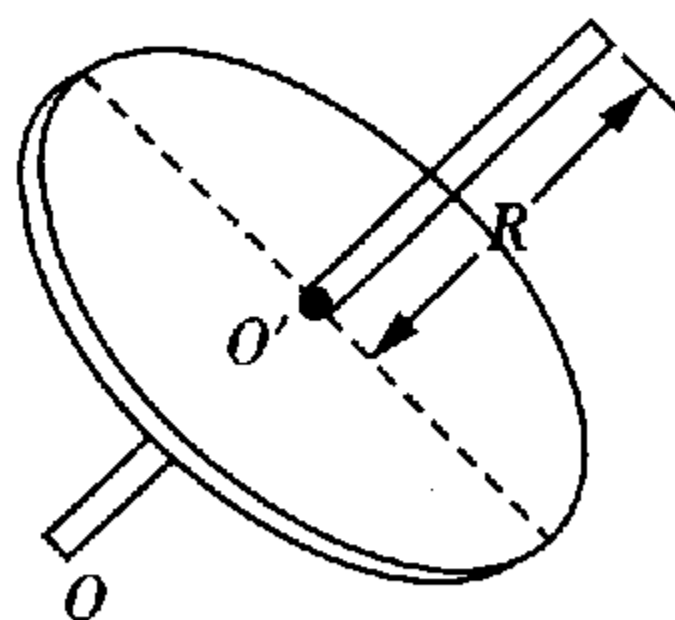


图 3-58

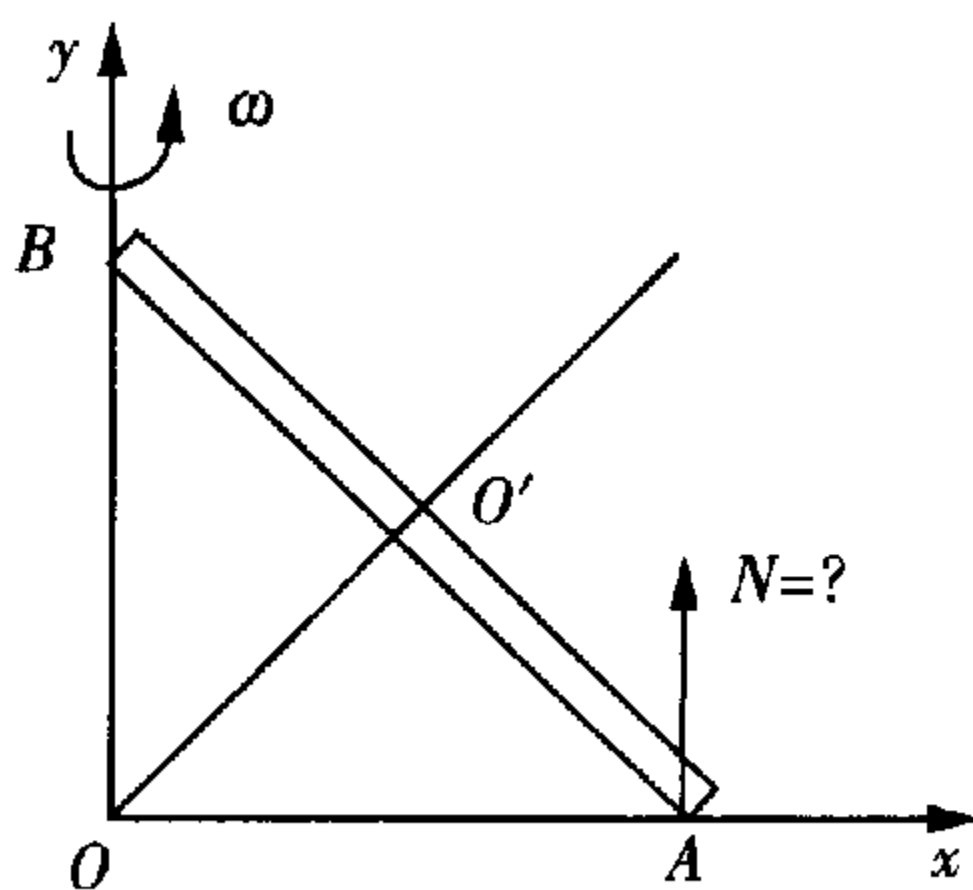


图 3-59

19. 有一股厚度为 d_0 的平面连续液流,以与平面成 α 角流下,如图 3-60 所示. 液流速度为 v ,其密度为 ρ . 该液流将分成什么样的液流?
20. 地震有时能引起巨大的海啸(如 2004 年东南亚的海啸),海啸能传播很远的距离. 这些波的波长有时超过海洋深度的几倍,而其高度可达几十米. 在这种波涛作用下,全部海水都卷入运动,其波涛一直达到海洋底部. 设海洋平均深度为 5 km,求海啸的速度.

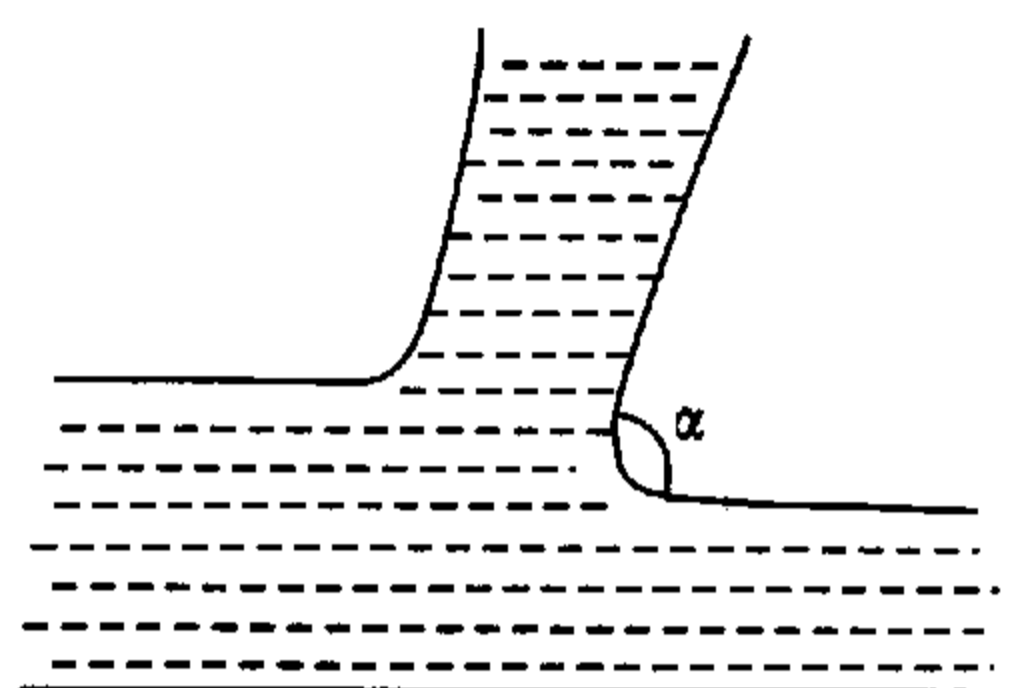


图 3-60

第四章 万有引力和天体运动

【学习目标】

一、开普勒定律

第一定律(轨道定律):所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动. 太阳是在这些椭圆的一个焦点上.

第二定律(面积定律):对每个行星来说,太阳和行星的连线(叫矢径)在相等的时间内扫过相等的面积.

“面积速度”: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv\sin\theta$ (θ 为矢径 r 与速度 v 的夹角)

即: $rv\sin\theta = \text{常量}$

故对于远近日点来说有 $v_{\text{近}}r_{\text{近}} = v_{\text{远}}r_{\text{远}}$.

第三定律(周期定律):所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方跟公转周期的平方的比值相等.

即 $\frac{T^2}{a^3} = \text{常量}$.

二、万有引力定律

1. 内容:自然界中任何两个物体都是相互吸引的. 任何两个质点之间引力的大小跟这两个质点的质量的乘积成正比,跟它们的距离的二次方成反比.

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 称为引力常量.

计算表明:均质球体对球外质点的万有引力等效于质量集中在球心处对质点的引力;均质球壳对球外质点的万有引力等效于质量集中在球心处对质点的引力;均质球壳对壳内质点的引力等于零.

2. 重力加速度的基本计算方法

设 M 为地球的质量, g 为地球表面的重力加速度.

(1) 在地球表面附近 ($h \ll R$) 处:

$$G \frac{Mm}{R^2} = mg, g = \frac{GM}{R^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

(2) 在地球上空距地心 $r = R + h$ 处:

$$g_r = G \frac{M}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}, \frac{g_r}{g} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$g_r = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$$

(3) 在地球内部距离地心 r 处:

$$g_r = G \frac{M_r}{r^2} = G \frac{4\pi r^3 \rho / 3}{r^2} = \frac{4}{3} G \pi \rho r \propto r,$$

其中 ρ 为地球体平均密度.

$$\frac{g_r}{g} = \frac{r}{R}, g_r = \frac{r}{R} g$$

地球上不同位置处的重力加速度, 随该位置到地球球心距离变化的 $g'-r$ 图线如图 4-1 所示.

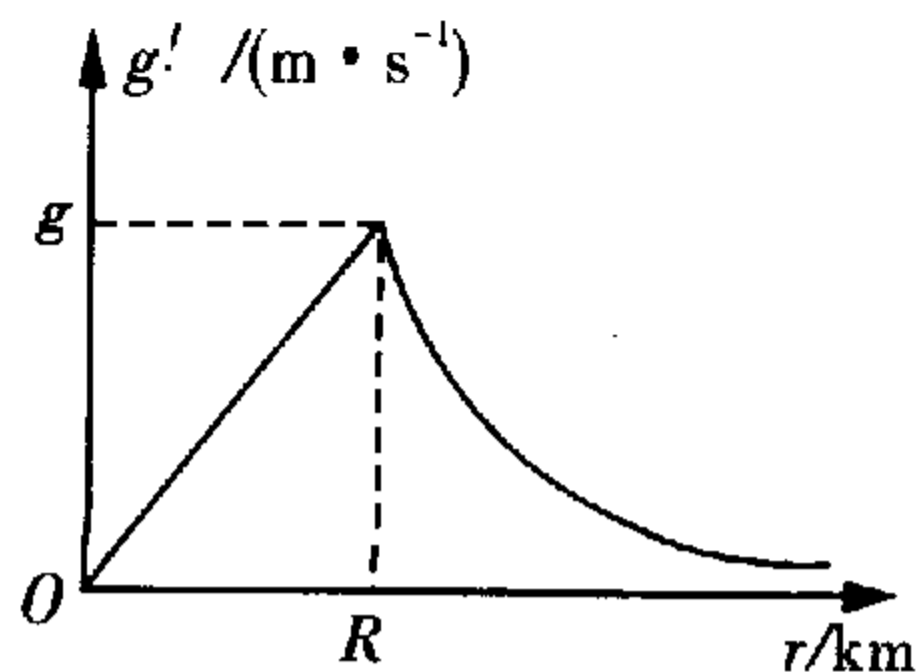


图 4-1

三、行星运动的能量

1. 行星的动能

当一颗质量为 m 的行星以速度 v 绕着质量为 M 的恒星做半径为 r 的圆周运动:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = G \frac{Mm}{2r}, \text{ 式中 } v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

2. 行星的势能

对质量分别为 M 和 m 的两孤立星系, 取无穷远处为引力势能零点, 当 m 与 M 相距 r 时, 其体系的引力势能:

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

3. 行星的机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2a}$$

对圆轨道: $a = r$; 对椭圆轨道, a 为半长轴.

四、三个宇宙速度(相对地球)

第一宇宙速度: 环绕地球运动的速度(环绕速度).

$$\text{在地球表面: } G \frac{M_e m}{R_e^2} = mg, G \frac{M}{R_e} = R_e g$$

$$G \frac{M_e m}{R_e^2} = m \frac{v_1^2}{R_e}, v_1 = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e}} = \sqrt{R_e g} = 7.9 \text{ km/s}$$

第二宇宙速度: 人造天体发射到地球引力作用以外的最小速度(脱离速度).

由机械能守恒:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mm}{r}$$

r 为引力以外某点到地球的距离, 显然 $r \rightarrow \infty$, 所以

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{Mm}{R_e} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm}{R_e}} = \sqrt{2} v_1 = 11.2 \text{ km/s}$$

第三宇宙速度:使人造天体脱离太阳引力范围的最小速度(逃逸速度).

人造天体发射到太阳系以外相对太阳的速度为 v_s , 地球到太阳的距离为 R_s , 则:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 - G\frac{M_s m}{R_s} = 0, v_s = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_s}} = 42.2 \text{ km/s}$$

由于地球绕太阳的公转速度为: $v_e = 29.8 \text{ km/s}$, 则人造天体相对地球的速度只要:

$$u = v_s - v_e = 12.4 \text{ km/s}$$

在人造天体和地球质心系中, 有机械能守恒,

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = \frac{1}{2}mu^2, \text{ 即 } \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + u^2} = 16.7 \text{ km/s}$$

【解题钥匙】

例1 如果太阳系等比例地缩小, 当地球和太阳间的平均距离为 1 m 时, 1 年对应的时间有多长? 假设各物体密度不变.

解析 将太阳和地球之间的万有引力与使地球保持在近似圆形轨道上的向心力视为相等. 将角速度 ω 用旋转的周期 T 表示, 则有

$$G\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

这里的 m 和 M 分别为地球和太阳的质量, r 是两者之间的平均距离. 将上式两端除以 m , 并将 M 表示为平均密度 ρ 和太阳的半径 R 的表达式如下:

$$G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

则可得到旋转的周期为

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \left(\frac{r}{R}\right)^3}$$

可以看出地球的旋转周期只与万有引力常数 G 、太阳的平均密度以及比率 r/R 有关. 因此只要物质密度不变, 任意缩放的太阳系其一年的长度都会保持不变. 还可以看到只有太阳的密度和大小才与周期有关; 而地球的数据与之无关. 任何在大小上比太阳小的物体将按照同样的轨道以同样的周期运行.

方法与技巧 利用万有引力和向心力公式推导出周期 T 的表达式, 可以发现其规律, 万有引力提供向心力, 由此可以推导、解决很多近似圆运动的天体运动, 这是一个基本方法. 同时本题也可以使用开普勒第三定律 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ 得到相同的结果.

例2 质量为 m 的质点分别静止于正 n 边形的每一个顶点上, 如图 4-2 所示为 $n=6$ 的情况.

如果只考虑各个质点之间的万有引力作用, 整个系统将如何运动? 在 $n=2, 3, 10$ 的情况下质点之间要经过多长时间才会相撞? 考虑一下极端情况: $n \gg 1$, 而 $m = M_0/n$, 其中 M_0 为整个系统的总质量.

解析 从质点的对称性分布和初始条件, 我们不难推知所有质点都将以相同的非均匀加速度掉

向正 n 边形的中心位置. 整个过程中系统的形状保持不变, 但是每一个质点与中心的距离将非匀加速变小. 一个质点(不妨称其为第 n 个)位于距中心 r 处时所受到的等效力为

$$F(r) = G \frac{m^{2n-1}}{r^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4 \sin(\pi k/n)}$$

所有其他质点对其施加的引力作用共同形成了这个等效力, 更准确地说, 就是这些力指向中心位置的分量等效于位于中心位置的一个物体产生的引力作用, 其质量为

$$M_n = \frac{m^{2n-1}}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n)}$$

对于不同的 n 值, 可以计算质量 M_n (以 m 为单位) 的值为

$$M_2 = 0.25, M_3 = 0.58, M_4 = 0.96, \dots, M_{10} = 3.86, \dots$$

从初始位置 R 塌缩成一个中心质量 M 所需要的时间为 T , 可以看成是半长轴为 $R/2$ 的(退化)椭圆轨道周期 T'_c 的一半. 半径为 R 的圆形轨道周期 T_c , 可以通过圆周运动的动力学方程直接得到

$$G \frac{Mm}{R^2} = mR \left(\frac{2\pi}{T_c} \right)^2 \quad \text{即} \quad T_c = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

然而, 按照开普勒第三定律.

$$\left(\frac{T'_c}{T_c} \right)^2 = \left(\frac{R/2}{R} \right)^3$$

因此, 最后得到塌缩的时间为 $T = \pi \sqrt{R^3/8GM_n}$.

方法与技巧 由于问题的对称性, 所以每个质点将一直保持位于不断减小的正 n 边形的各个顶点上, 它们都好像只受到位于中心位置的物体(其质量为某个适合的 M_n) 的万有引力作用一样(等效法). 整个系统塌缩的时间, 可以通过开普勒第三定律求得.

注: 极限情况 $n \gg 1$ 是十分有趣的. 随着质点数 n 的增加, 即使总质量为常数 M_0 , 即 $m = M_0/n$, M_n 也会不断地增加. 一定质量的物质越均匀地分布在一个圆周上, 在引力作用下塌缩到中心位置所需要的时间越短. 尽管如此, 我们的上述结论仍不适用于在一个几何圆周上的连续物质分布, 物质的径向尺度不可忽略.

例 3 新发现一行星, 其星球半径为 6400 km, 且由通常的水形成的海洋覆盖它所有的表面, 海洋的深度为 10 km, 学者们对该行星进行探查时发现, 当把试验样品浸入行星海洋的不同深度时, 各处的自由落体加速度以相当高的精确度保持不变. 试求此行星表面处的自由落体加速度. 已知万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

解析 以 R 表示此星球的半径, M 表示其质量, h 表示其表面层海洋的深度, R_0 表示除海洋外星球内层的半径, r 表示海洋内任一点到星球中心的距离. 则:

$R \gg r \gg R_0$, 且 $R = R_0 + r$, 以 $\rho_{\text{水}}$ 表示水的密度. 则此星球表面海洋水的总质量为

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{水}} - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_{\text{水}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{水}} (3R^2 h - 3R h^2 + h^3), \text{ 因 } R \gg h, \text{ 略去 } h \text{ 高次项, 得}$$

$$m = 4\pi \rho_{\text{水}} R^2 h$$

$$\text{由 } G \frac{Mm}{R^2} = mg_{\text{表}}, g_{\text{表}} = \frac{GM}{R^2}$$

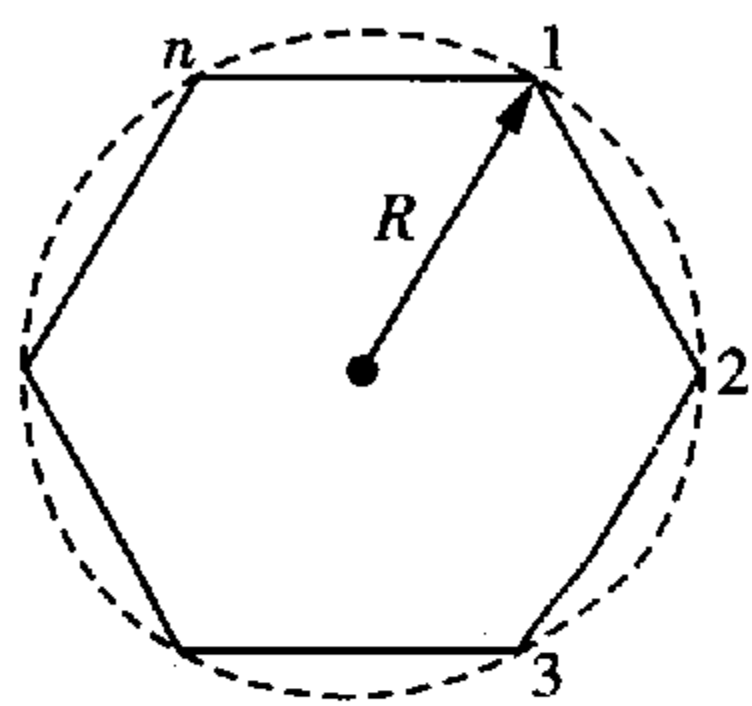


图 4-2

$$G \frac{(M-m)m}{R_0^2} = mg_0, g_0 = \frac{G(M-m)}{R_0^2}$$

$$\text{依题意: } g_{\text{表}} = g_0, \text{ 即: } \frac{M}{R^2} = \frac{M-m}{R_0^2} = \frac{M-m}{(R-h)^2}$$

$$M = \frac{R^2 m}{2Rh - h^2} \approx \frac{Rm}{2h}, \text{ 则}$$

$$g_{\text{表}} = \frac{G \times 4\pi\rho_{\text{水}} R^3 h}{2h} = 2\pi G\rho_{\text{水}} R$$

将 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $\rho_{\text{水}} = 1.0 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$, $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 代入得

$$g_{\text{表}} = 2.7 \text{ m}/\text{s}^2$$

方法与技巧 求出水的总质量,利用万有引力定律.在运算过程中注意忽略微小量,是解决本题很重要的一个因素.

例 4 质量为 m 的人造地球卫星,在圆形轨道上运行.运行中受到大小恒为 f 的微弱阻力作用.以 r 表示卫星轨道的平均半径, M 表示地球质量,求卫星在旋转一周的过程中:

(1) 轨道半径的改变量 $\Delta r = ?$

(2) 卫星动能的改变量 $\Delta E_k = ?$

解析 因卫星沿圆形轨道运动,则

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \text{ 则 } E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \text{ 则卫星的机械能为}$$

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

(1) 设卫星旋转一周轨道半径改变量为 Δr , 则对应机械能改变量为

$$\Delta E = -\frac{GMm}{2(r+\Delta r)} - \left(-\frac{GMm}{2r}\right) = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r} = \frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)} \approx \frac{\Delta r}{r^2}$$

$$\Delta E = \frac{GMm}{2r^2} \Delta r$$

根据动能原理: $W = \Delta E$, 即

$$-2\pi r f = \frac{GMm}{2r^2} \Delta r, \Delta r = -\frac{4\pi r^3 f}{GMm}, \text{ 负号表示轨道半径减小.}$$

$$(2) \Delta E_k = \frac{GMm}{2(r+\Delta r)} - \frac{GMm}{2r} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right) \approx -\frac{GMm}{2r^2} \Delta r = -\frac{GMm}{2r^2} \times \frac{4\pi r^3 f}{GMm} = 2\pi r f$$

方法与技巧 注意在轨运行的卫星的机械能,然后利用机械能的改变及动能定理.在运算中注意近似计算.

例 5 要发射一艘探测太阳的宇宙飞船,使其具有与地球相等的绕日运动周期,以便发射一年后又将与地球相遇而发回探测资料.在地球发射这一艘飞船时,应使其具有多大的绕日速度?

解析 如图 4-3 所示,圆为地球绕日轨道,椭圆为所发射飞船的绕日轨道, S 点(太阳)为此椭圆的一个焦点,因飞船与地球具有相等的绕日周期,由开普勒周期定律:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = \frac{T^2}{R^3}$$

可知椭圆的半长轴 $a = R$, 两轨道的交点必为半轴顶点, 发射飞船时, 绕日速度 v 应沿轨道切线方向, 即与椭圆长轴平行的方向.

$$\text{则飞船的“面积速度”为: } \Delta S_{\text{椭}} = \frac{1}{2}vb = \frac{\pi Rb}{T}, v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\text{地球的“面积速度”为: } \Delta S_{\text{圆}} = \frac{1}{2}v_0R = \frac{\pi R^2}{T}, v_0 = \frac{2\pi R}{T}$$

故: $v = v_0$.

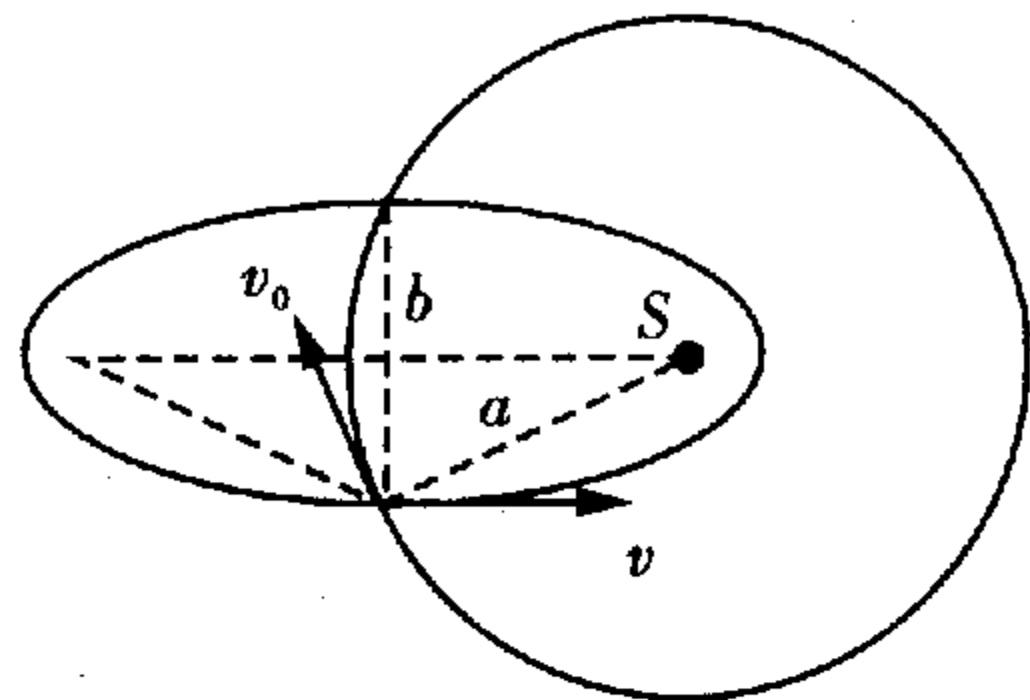


图 4-3

当绕日速度的方向不同时, 其轨道的短轴 b 不同, 但长半轴 R 相同, 太阳为椭圆轨道的一个焦点, 且发射的绕日速度大小相同.

方法与技巧 利用开普勒第三定律, 抓住两者具有相同的绕日周期, 借助“面积速度”就比较容易解决此类问题.

例 6 一物体 A 由离地面很远处向地球下落, 落至地面上时, 其速度恰好等于第一宇宙速度. 已知地球半径 $R = 6400 \text{ km}$. 若不计物体在运动中所受到的阻力, 求此物体在空中运动的时间.

解析 物体落至地面时其速度值为第一宇宙速度值, 即:

$$v = \sqrt{Rg}$$

上式中 R 为地球半径, g 为地球表面处的重力加速度.

设 A 最初离地心的距离为 r , 则由其下落过程中机械能守恒, 应有

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r}$$

$$\text{且 } GM = gR^2$$

联立上三式可解得: $r = 2R$

物体 A 下落可以看成是沿着很狭长的椭圆轨道运行, 其焦点非常接近此椭圆轨道长轴的两端, 如图 4-4 所示, 则由开普勒第一定律, 得知地心为椭圆的一个焦点. 则椭圆长半轴为

$$a = R$$

又由开普勒第三定律, 物体沿椭圆轨道运行的周期和沿绕地心 (轨道不计为 R) 的圆轨道运行的周期相等. 其周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

再由开普勒第二定律得

$$\frac{S}{S_0} = \frac{t}{T}$$

$$S = \frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}ab, S_0 = \pi ab$$

$$t = \frac{S}{S_0}T = \frac{\frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}ab}{\pi ab} 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$= \left(\frac{3.14}{2} + 1\right) \sqrt{\frac{6400 \times 10^3}{9.8}} = 2.06 \times 10^3 \text{ s}$$

方法与技巧 物体在中心天体引力作用下做直线运动时, 其速度、加速度是变化的, 可以将它看

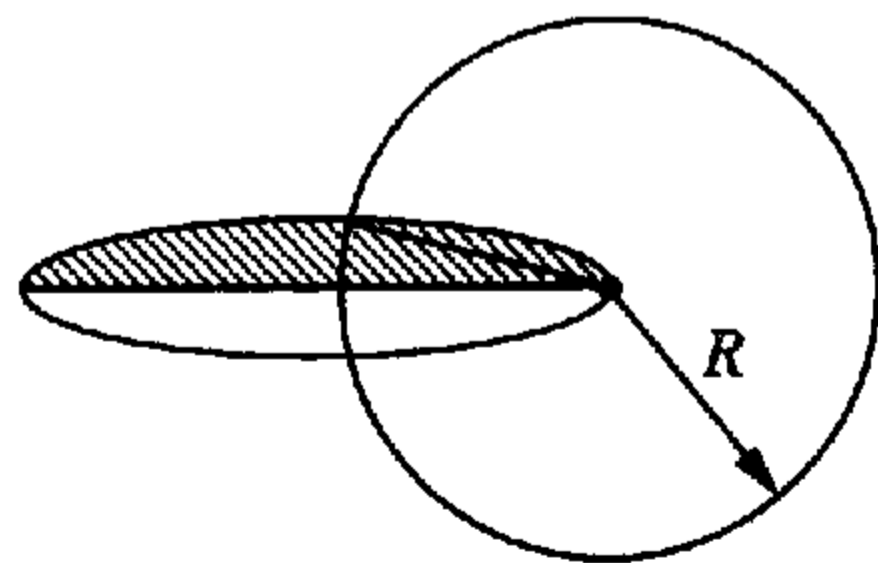


图 4-4

成绕中心天体的椭圆轨道运动,将其短轴取无限小.这就是我们通常所说的“轨道极限化”.

例7 一个飞行器被发射到一围绕太阳的椭圆轨道上,以地球轨道为近日点,而以火星轨道为远日点,如图4-5所示.已知地球至太阳的距离为 R_1 ,火星至太阳的距离为 R_2 .

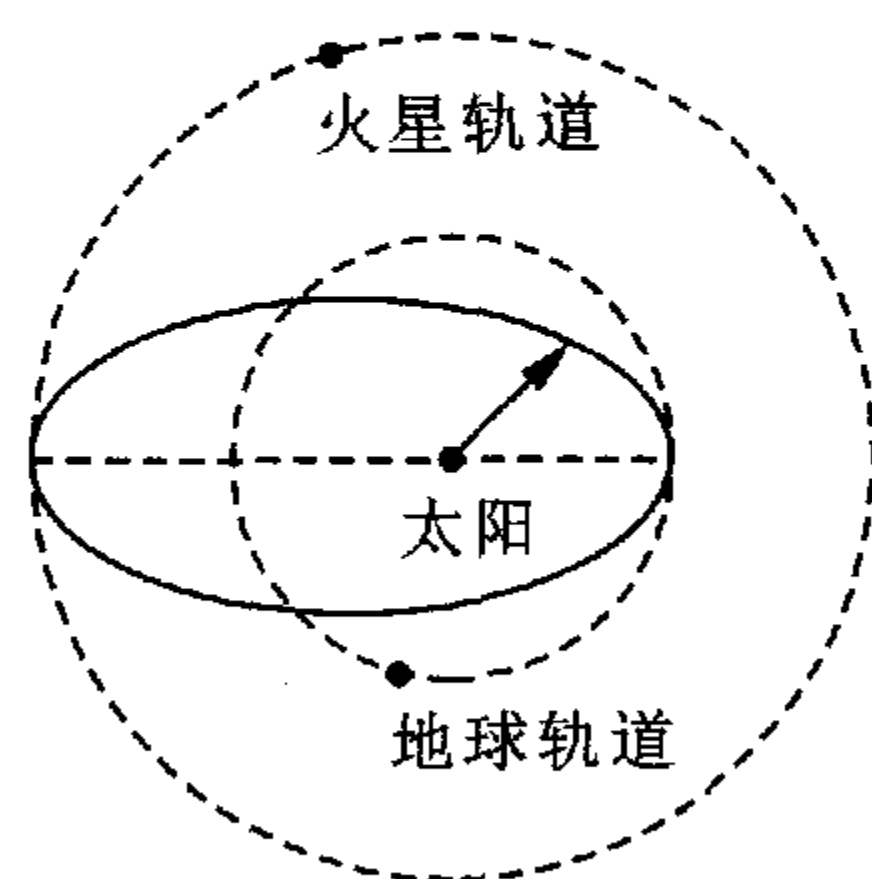


图4-5

(1) 求轨道方程 $r = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 中的参数 λ 和 ε 值;

(2) 利用开普勒第三定律计算沿此轨道到达火星所需的时间.

解析 在近日点处,椭圆轨道方程中的 $\theta=0$,即

$$R_1 = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \lambda \quad \text{①}$$

在远日点处: $\theta = \pi$, 即

$$R_2 = \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \quad \text{②}$$

联立①②式解得

$$\lambda = R_1, \varepsilon = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

(2) 设飞行器运行的周期为 T , 地球的周期 $T_c = 1$ 年

根据开普勒第三定律:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = C$$

$$\text{得: } \frac{T^2}{T_c^2} = \frac{a^3}{R_1^3} = \frac{(R_1 + R_2/2)^3}{R_1^3}$$

$$T = \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1}\right)^{\frac{3}{2}} T_c = \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1}\right)^{\frac{3}{2}} \text{年}$$

因此该飞行器沿此轨道运行到火星所需的时间为

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1}\right)^{\frac{3}{2}} \text{年.}$$

方法与技巧 注意利用轨道的特殊位置是方便处理某些问题的重要手段,本题中抓住近日点与远日点两个端点,可以得出两个方程.

例8 有一个质量大而体积小的星球,一个物体离这个星球的距离为 r ,物体从静止开始自由落向此星球,求物体落到这个星球上经历的时间.(已知星球的质量为 M)

推广:根据某种假设,星球是由星际物体(宇宙尘埃)在万有引力的作用下经坍缩而成的,试估算由 $\rho = 2 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$ 的宇宙尘埃组成的巨大云团到生成一颗星球所需要的时间?

解析 物体落向星球的运动轨迹可视为一个很扁的椭圆,其半长轴 $a = r/2$,周期为 T ,如果此物体绕星球做半径为 r 的圆周运动,则

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 r, T' = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

由开普勒第三定律得到

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{r^3} = \frac{(r/2)^3}{r^3}, T = \frac{1}{\sqrt{8}} T'$$

$$\text{所需时间 } t = \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} T' = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

推广:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho, t = \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{3}{G \pi \rho}} = 4.76 \times 10^5 \text{ 年}$$

方法与技巧 解本题的方法仍是前面用到过的“轨道极限化”,但我们要注意本题的推广部分,它提供了一个处理此类问题的基本而又重要的手段.

例 9 宇宙飞船在距离火星表面 H 高度作匀速圆周运动,火星半径为 R ,今设飞船在极短的时间内向外喷气,使其获得一径向速度,其大小为原来速度的 α 倍,因 α 量很小,所以飞船新轨道不会与火星表面交会.如图 4-6 所示,飞船喷气质量可忽略不计.

(1) 试求飞船新轨道的近火星点的高度 $h_{\text{近}}$ 和远火星点高度 $h_{\text{远}}$.

(2) 设飞船原来的运动速度为 v_0 ,试计算新轨道的运行周期 T .

解析 设火星和飞船的质量分别为 M 和 m ,飞船沿椭圆轨道运行时,近地点和远地点与火星的距离为 r ,飞船的速度为 v .

对火星和飞船系统,因喷气沿径向,系统合外力矩为零,则喷气前后角动量守恒,即

$$v_0 r_0 = v r \quad \text{①}$$

喷气后机械能守恒,即

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m [v_0^2 + (\alpha v)^2] - G \frac{Mm}{r_0} \quad \text{②}$$

而飞船沿原圆周运动时,有

$$G \frac{Mm}{r_0^2} = m \frac{v_0^2}{r_0} \quad \text{③}$$

上式中: $r_0 = R + H, r = R + h$

联立①②③消去 G, M, v_0 得到关于 r 的方程:

$$(1 - \alpha^2) r^2 - 2r_0 r + r_0^2 = 0$$

$$\text{则: } r_{\text{近}} = \frac{r_0}{1 + \alpha} = \frac{R + H}{1 + \alpha}, h_{\text{近}} = r_{\text{近}} - R = \frac{H - \alpha R}{1 + \alpha}$$

$$r_{\text{远}} = \frac{r_0}{1 - \alpha} = \frac{R + H}{1 - \alpha}, h_{\text{远}} = r_{\text{远}} - R = \frac{H + \alpha R}{1 - \alpha}$$

$$(2) \text{ 椭圆的长轴: } 2a = r_{\text{近}} + r_{\text{远}} = \frac{2r_0}{1 - \alpha^2}, a = \frac{r_0}{1 - \alpha^2}$$

喷气前圆周运动的周期: $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi(R + H)}{v_0}$. 喷气后的周期 T 为

$$T = \left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} T_0 = \left(\frac{1}{1 - \alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi(R + H)}{v_0}$$

方法与技巧 本题计算中,利用了角动量守恒和机械能守恒.这也是处理与本题相似问题的基本思路和方法.

例 10 从一个半径为 R 的球形行星发射并返回火箭,要求返回时其速度矢量与发射时的速度矢

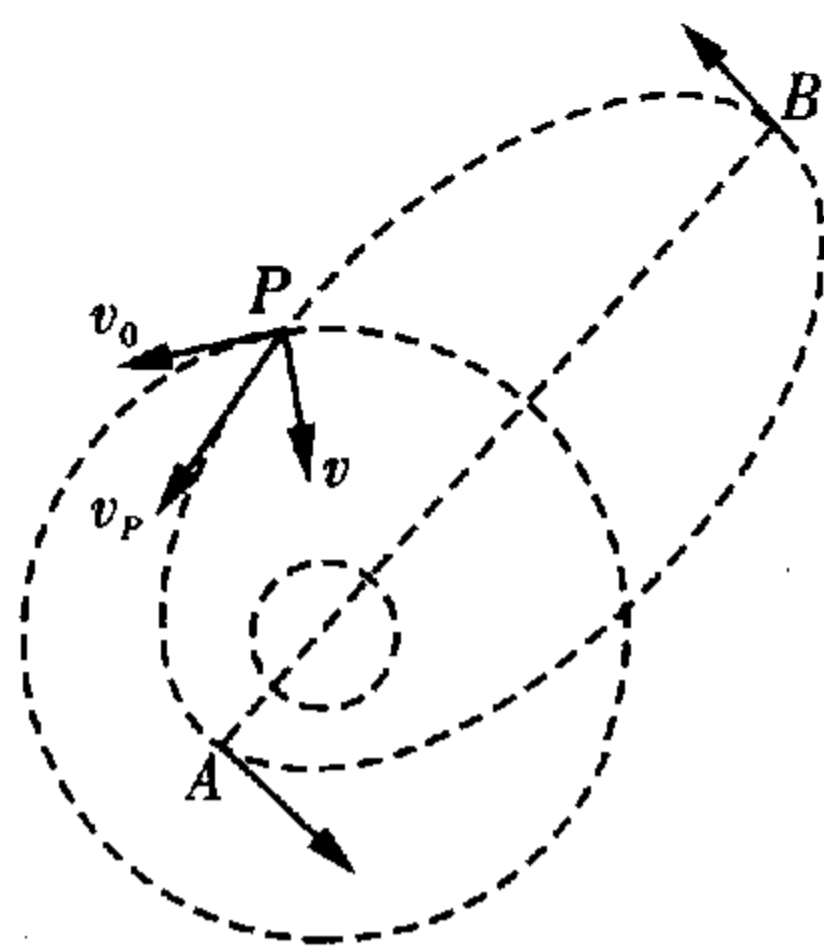


图 4-6

量平行. 行星表面发射和返回点处的半径间夹角为 θ . 如果绕行星表面运行的卫星周期为 T_0 , 求火箭的飞行需要多长时间? 火箭离开行星表面的最大距离是多少? 考虑一下你的答案是否适用于 $\theta \rightarrow 0$ 的极限情况.

解析 根据开普勒第一定律, 火箭将沿椭圆轨道运动, 轨道的一个焦点在行星的中心. 只有当发射点和返回点分别位于椭圆短轴两端时, 发射和返回速度才会相互平行(尽管方向相反). 但是, 对于椭圆, 焦点到短轴端点的距离等于其半长轴的长度 a , 由此得出 $a = R$ (见图 4-7).

由开普勒第三定律, 有不同的偏心率、相同的长轴长度的卫星轨道, 应该具有相同的周期, 本题中这个轨道的周期应是给定的 T_0 . 题目中火箭的运动覆盖了整个椭圆轨道的一半, 但是经历的时间并不是整个周期的 $1/2$. 根据开普勒第二定律, 火箭的运行时间与径向矢量扫过的面积成正比. 整个椭圆的面积为

$$A_0 = \pi ab = \pi a^2 \sin \frac{\theta}{2}$$

经历半个轨道时扫过的面积为

$$A_1 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \times 2bc = \frac{1}{2} a^2 \pi \sin \frac{\theta}{2} + a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

因此火箭的飞行时间为

$$T_1 = \frac{A_1}{A_0} T_0 = T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

火箭离开行星表面的最大距离为

$$2a - a - (a - c) = c = R \cos \frac{\theta}{2} \leq R$$

如果发射点和返回点间的夹角趋于 0 ($\theta \rightarrow 0$), 依据上述结果可以得到火箭运行时间的最大值为

$$T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

到达的最大高度接近行星的半径 ($c \rightarrow R$). 但是, 事实上如果出发点和着陆点在同一位置 ($\theta = 0$), 火箭就可以达到任何或大或小的距离. 这意味着, 在 $\theta = 0$ 这一点上, 周期和最大高度不再是 θ 的连续函数.

如果发射的速度足够大(大于等于第一宇宙速度 $v = \sqrt{Rg}$), 并且初始速度与行星表面相切, 则如图 4-8 所示的轨道是可能的. 这种情况下, 返回速度也和发射速度平行, 但是此时两速度方向也相同. 最大高度可以达到任何值, 但周期一定比 T_0 大. 这些轨道都对应于 $\theta = 0$ 的特殊情况.

方法与技巧 求解过程中利用了所有的三个描述行星运动规律的开普勒定律.

例 11 在古时候, 人们通常认为地球是扁平的. 想象地球真的不是一个半径为 R 的球, 而是一个厚度为 H 的无限大的盘子. 如果要想体验与真正地球表面一样的重力加速度, 那么需要的 H 值是多大? (假定这两种模型中地球密度均匀而且相等.)

解析 半径为 R 、质量为 M 、密度为 ρ 的球形地球表面的重力加速度可以被写作

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{4\pi R^3 \rho}{3R^2} = \frac{4\pi}{3} GR\rho$$

为了解决所给的问题, 必须找出在一个非常大的、厚度为 H 、密度为 ρ 的圆盘的表面上远离其边缘一点的重力加速度的大小. 通过应用支配静电和重力相互作用的定律之间的相似性, 可以比较容

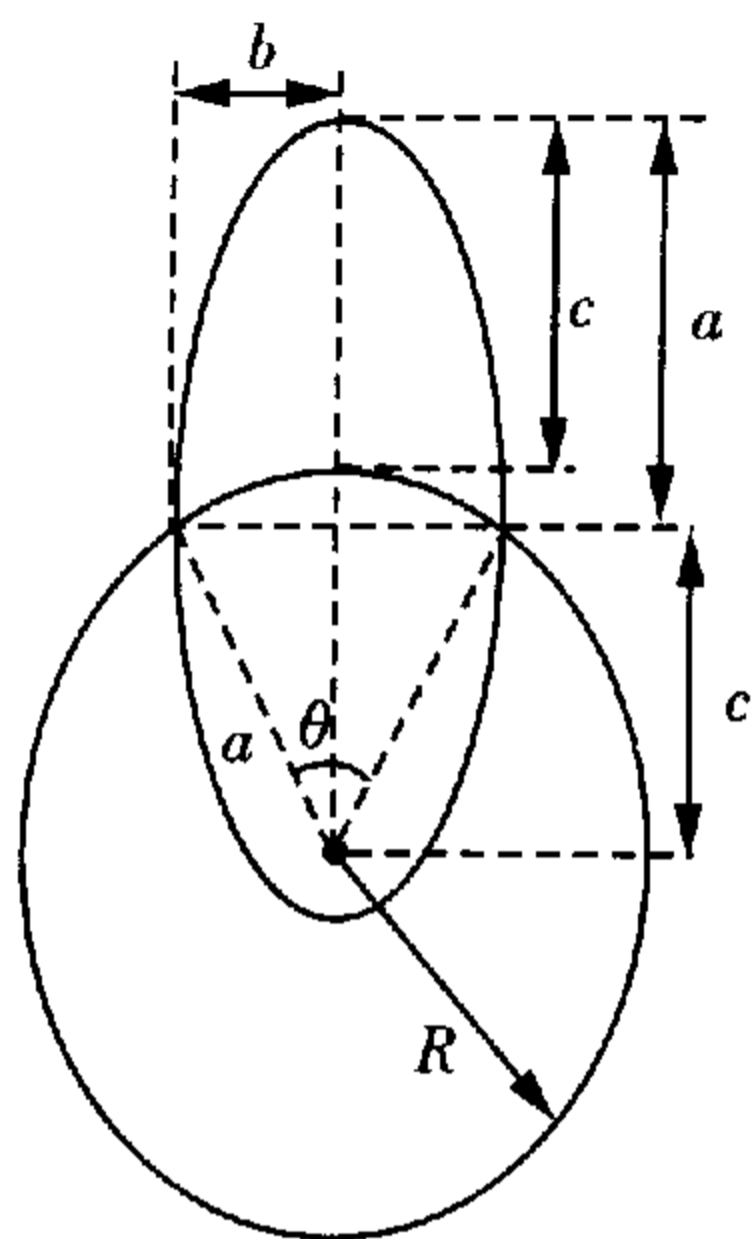


图 4-7

易地得出结果.

我们给出它们之间的相似性,在质量为 m (“重力荷”)和电荷 q 之间,万有引力常数为 G ;静电学中的常数为 $1/(4\pi\epsilon_0)$,重力加速度为 $g = F/m$,而电场强度为 $E = F/Q$. 在两种情况中, F 均为经过“检验电荷”所得出的力. 下一步,确定一个所带电荷为均匀分布的无限大圆盘的电场强度(圆盘外部),然后通过替换相似的量,来得到一个质量有相似的几何分布情况下的重力加速度.

对于一个面积为 A 的圆盘,电场强度可以应用高斯定理来计算:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

其中 $\Phi_E = 2AE$ 为电通量(参见图 4-9). 如果电荷密度为 ρ_q ,那么封闭表面所包围的总电荷为

$$\sum q = \rho_q AH$$

所以

$$2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q AH$$

可以得到电场强度为

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_q H}{2}$$

替换有关的相似的量,可以得到重力加速度 $g = 2\pi G\rho H$. 这个值应该与地球表面所测的重力加速度相等,也就是

$$G \frac{4\pi R\rho}{3} = g_{\text{球}} = g_{\text{球}} = 2\pi G\rho H$$

对于一个“扁平的地球”,我们可以得出其厚度为

$$H = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}6370 \text{ km} = 4250 \text{ km}$$

方法与技巧 本题应用了“类比法”,将引力定律和静电场定律进行类比,找出相似量,通过高斯定理求解,这就是解此题的巧妙之处.

例 12 离地球很远处有一行星 $K-1$. 行星 $K-1$ 有一个卫星 $K-0010$ 沿圆轨道围绕该行星旋转. 卫星上装有无线电台,其发射信号频率为常数. 在地面上接收这个信号,但信号时通时断——45 分钟有信号,然后 45 分钟无信号,再 45 分钟有,再 45 分钟无……而且接收到的信号频率的平均值为 $f_0 = 1.5 \times 10^9 \text{ Hz}$,其变化规律如图 4-10 所示,频率偏差为 $\Delta f = 3 \times 10^4 \text{ Hz}$. 假设从地球到行星的连线位于卫星轨道平面内,求行星 $K-1$ 的质量.

解析 卫星绕行星运行的周期为

$$T = 45 + 45 = 90 \text{ min}$$

在周期一半时间内卫星被行星遮住,这说明卫星相当靠近行星表面,所以卫星的轨道半径可近似认

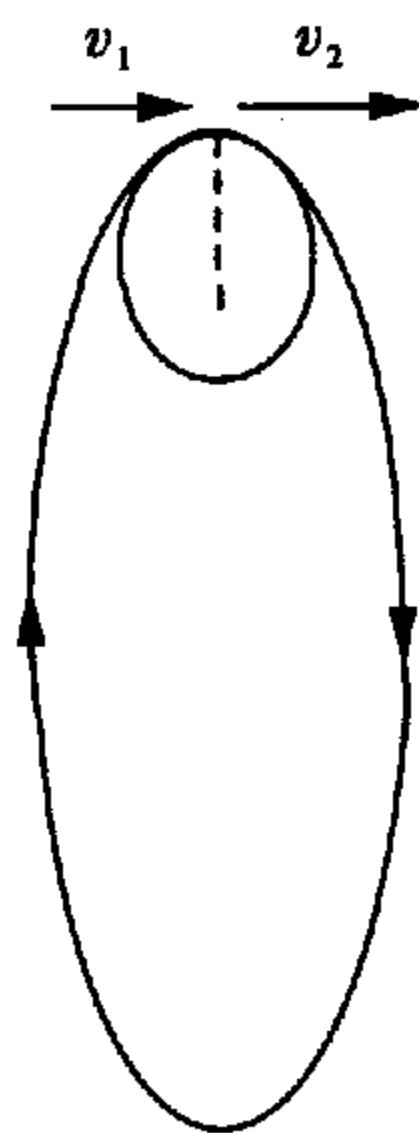


图 4-8

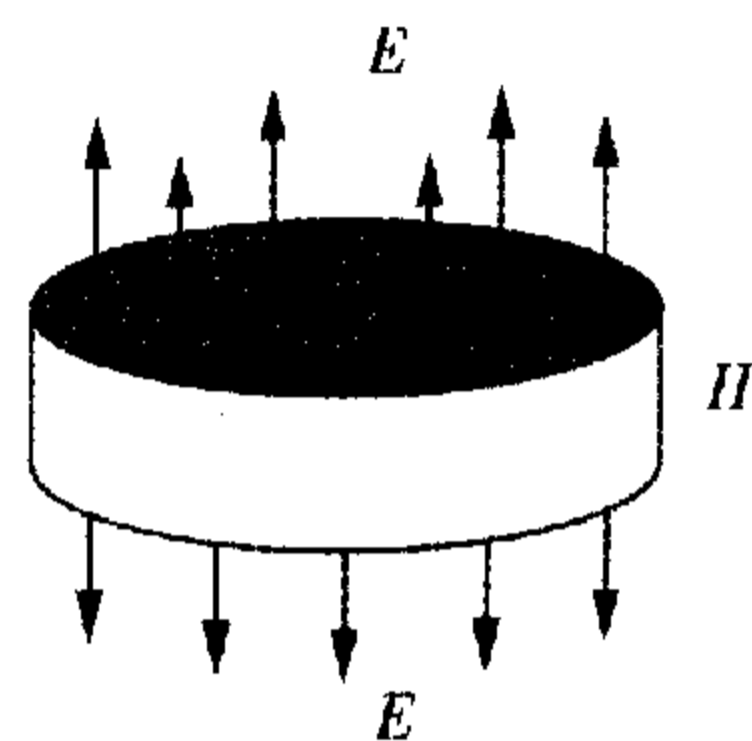


图 4-9

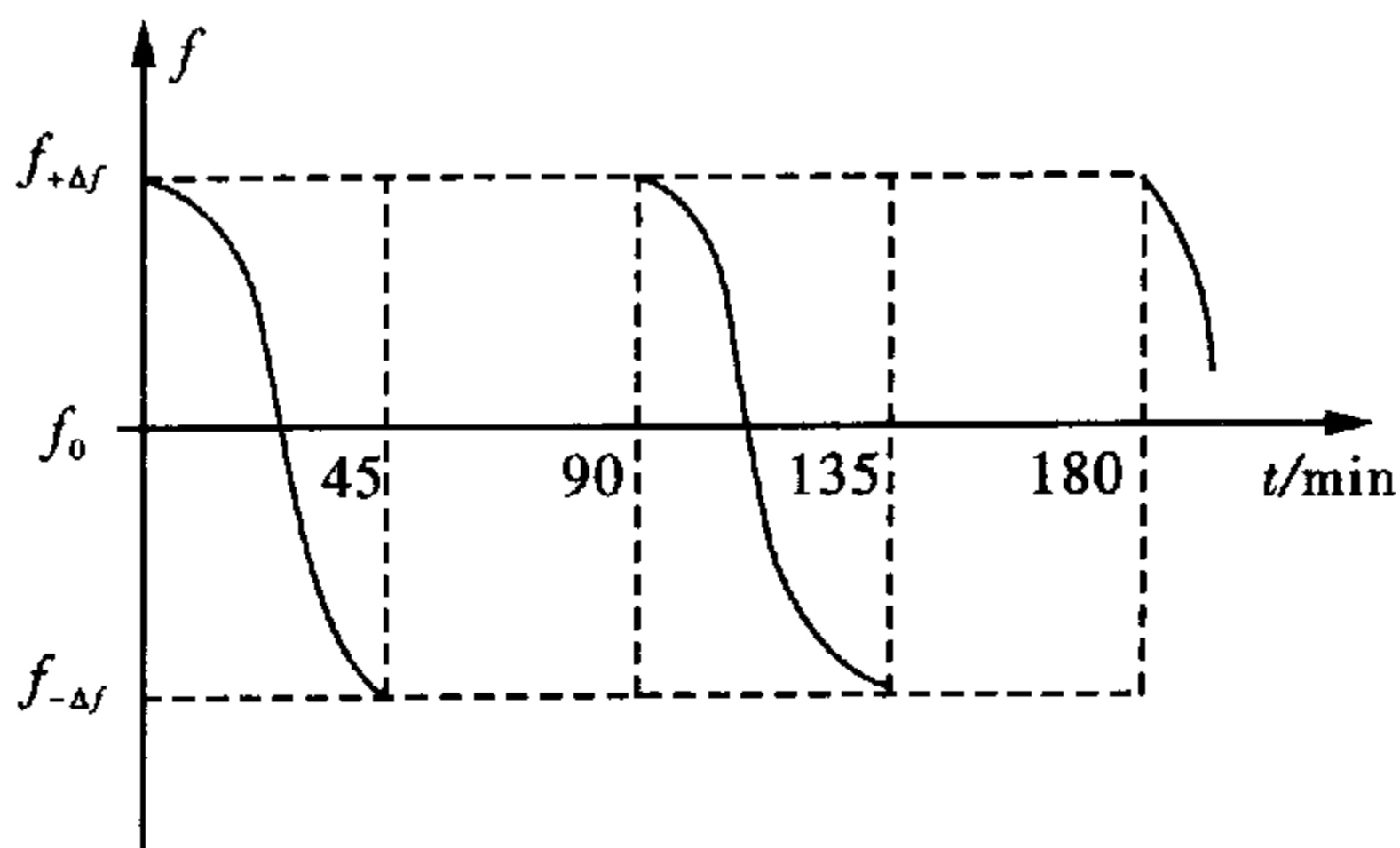


图 4-10

为就是行星的半径. 接收到的信号频率变化与多普勒效应有关, 其表达式为

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c} \quad (1)$$

从另一方面, 有如下关系式:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad (2)$$

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \quad (3)$$

从公式①②③可以求得

$$M = \left(\frac{c\Delta f}{f}\right)^3 \times \frac{T}{2\pi G}$$

代入数据得

$$M \approx 2.8 \times 10^{24} \text{ kg}$$

方法与技巧 本题是一道综合题, 涉及天体运动、多普勒效应、电磁波等相关知识, 但求解并不困难, 关键要从题中找出重要的隐含条件: 周期 T 及卫星的轨道半径 R .

例 13 如大家所知, 海洋的潮汐基本上来自月球的引力作用, 而在较小一些的程度上也来自太阳的引力作用. 为使问题简化, 作如下假设:

- (a) 地球和月球组成 1 个封闭系统;
- (b) 月球到地球的距离为 1 个常量;
- (c) 地球完全由海洋覆盖;
- (d) 不计地球的自转.

(1) 试求月球在地球上任意位置对单位质量的海水产生的潮汐力. 设月球质量为 M , 地月中心间距离为 r , 万有引力常量为 G , 地球半径为 R .

(2) 求地球上任意位置处的水位变化 $h(\theta)$.

解析 方法一 地球-月球系统绕其质心转动, 对连接于地心的转动参照系, 分析地球表面上任一点 P 处的水粒 m 运动规律.

对于地面上任意一点 P 处的水粒 m , 其受力为月球的万有引力和惯性离心力, 则在 x 方向的合力为 (如图 4-11 所示)

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{GMm}{\left(\frac{r-x}{\cos\alpha}\right)^2} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{GMm}{r^2} \\ &= \frac{GMm}{(r-x)^2} \cos^3\alpha - \frac{GMm}{r^2} \quad (\text{因为 } \alpha \\ &\text{很小}) \\ &\approx \frac{GMm}{(r-x)^2} - \frac{GMm}{r^2} \\ &\approx \frac{2GMm}{r^2} x \end{aligned}$$

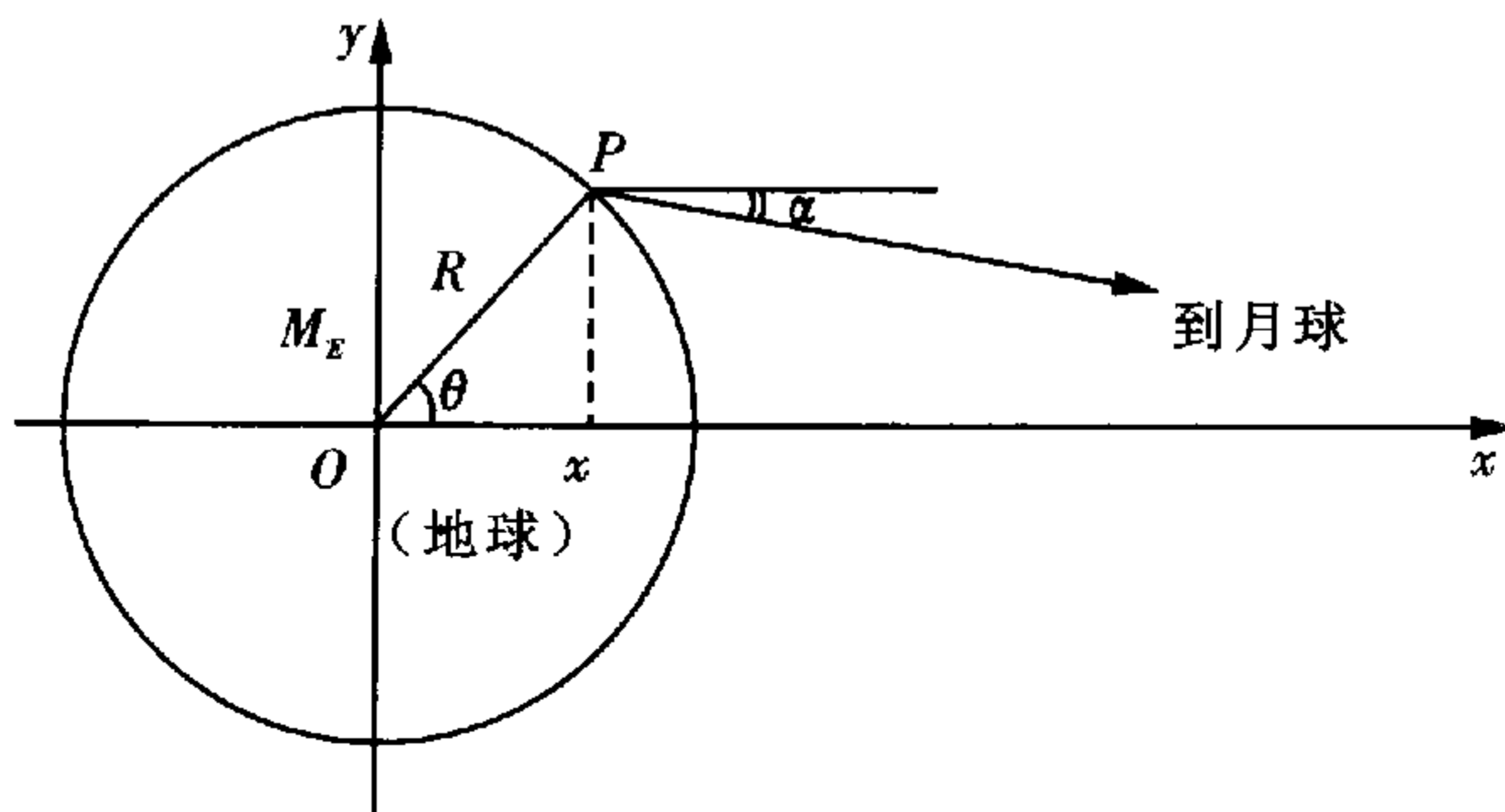


图 4-11

所以单位质量物质位于 P 处受到的潮汐力(x 分量)为

$$f_x = \frac{2GM}{r^2}x = \frac{2GM}{r^2}R\cos\theta$$

同理,得 y 方向的潮汐力为

$$f_y = -\frac{GM}{r^2}\sin\alpha, \sin\alpha \approx \frac{y}{r}$$

所以 $f_y = -\frac{GM y}{r^3} = -G \frac{M}{r^3}R\sin\theta$

方法二 如图 4-12 所示,考察一水粒(质量为 m)被潮汐从 D 点带到任意点 P 的过程中所做的功:

$$\begin{aligned} W &= \sum (F_x \Delta x + F_y \Delta y) \\ &= \frac{GMm}{r^3} \sum (2x \cdot \Delta x + y \Delta y) \\ &= \frac{GMm}{r^3} (x^2 + \frac{y^2}{2}) \\ &= \frac{GMm}{r^3} [(R\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}(R\sin\theta)^2] \\ &= \frac{GMm}{r^3} R^2 (\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta) \end{aligned}$$

由 $W = mg(h_p(\theta) - h_D)$, 得

$$h_p(\theta) - h_D = h(\theta) = \frac{GMR^2}{gr^3} (\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta)$$

方法与技巧 对于问题 1, 可以任取一水滴进行分析, 在计算时注意近似运算; 对问题 2, 利用功能关系求解较为简捷.

【解题尝试】

1. 把地球考虑为球对称的, 则地球的表面和地下 100 km 处, 哪个地方的重力加速度较大? 地球的平均密度是 5500 kg/m^3 , 地壳的密度是 3000 kg/m^3 . (地壳的厚度可以认为至少有 100 km)
2. 一枚火箭将要离开地球的重力场. 它的主引擎中的燃料略少于所需要的量, 因此必须要用到只能工作一小段时间的辅助引擎. 问什么时候使用辅助引擎最好, 是刚离开的时候, 火箭相对于地球快要停止的时候, 还是任何时候都没有区别?
3. (1) 将一颗地球卫星送上圆形轨道所需要的最小发射速度是多少?
(2) 将地球卫星送入两极轨道所需的能量要比赤道轨道高多少倍?
(3) 空间探测器离开地球引力场需要多大的初始速度?
4. 1997 年 8 月 26 日在日本举行的国际天文学大会上, 德国 Max Planck 学会的一个研究组宣布了他们的研究成果: 银河系的中心可能存在一个黑洞, 他们的根据是用直径为 3.5 m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心伏击的星体进行了近 6 年的观测所得的数据. 他们发现, 距离银河系中心的 $6 \times 10^9 \text{ km}$ 的星体正以 2000 km/s 的速度围绕银河系中心旋转. 根据上面数据, 试在经典力学的范围内(见提示 2), 通过计算确认, 如果银河系中心确实存在黑洞的话, 其最大半径是多少?

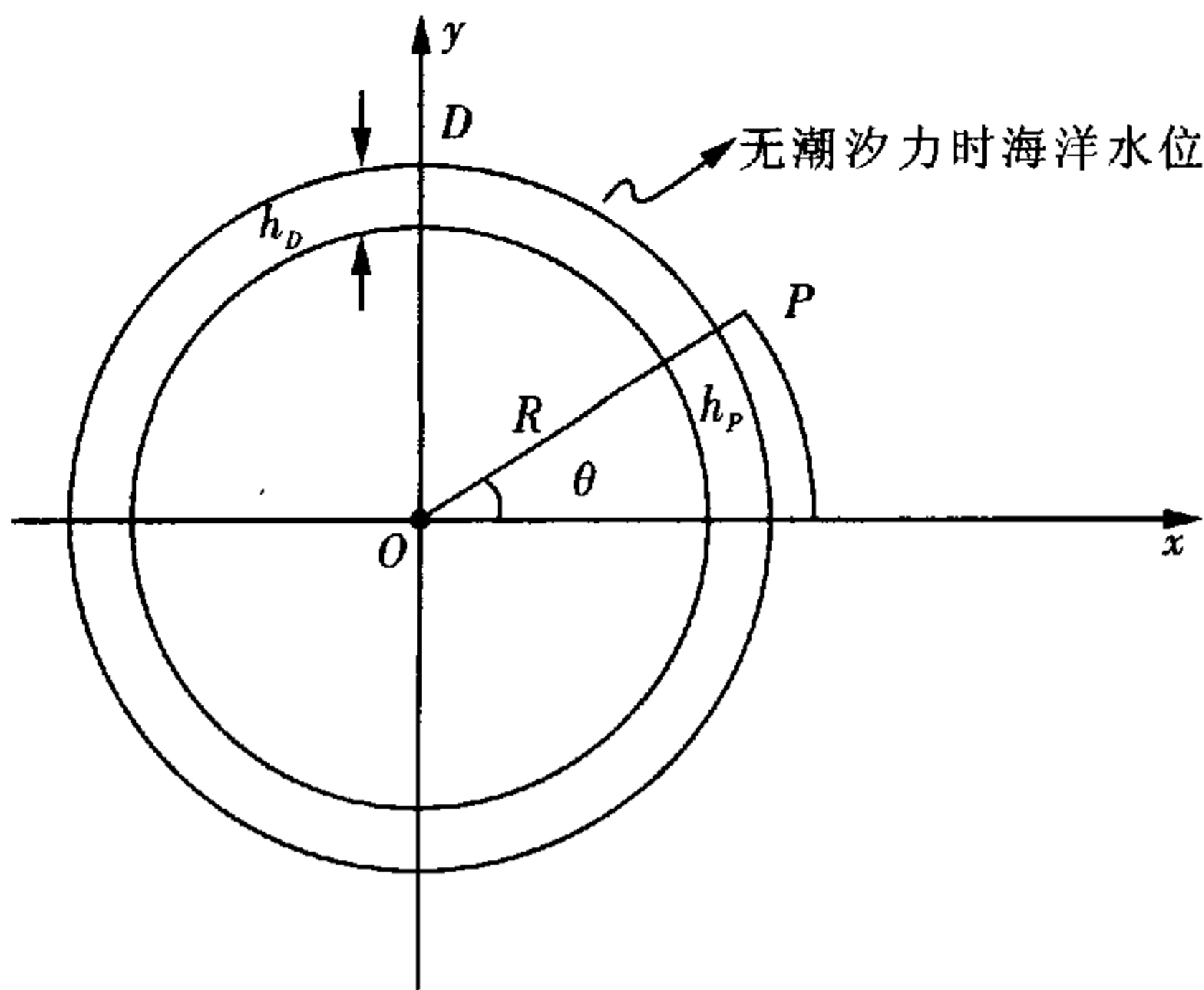


图 4-12

(引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)

提示 1. 黑洞是一种密度极大的天体,其表面的万有引力如此之强,以至于包括光在内的所有物体都逃脱不了其引力作用.

提示 2. 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型,在这种模型中,在黑洞表面上的所有物质,即使初速度等于光速 c 也逃脱不了其引力的作用.

5. 已知太阳光从太阳射到地球需要 500 s,地球公转轨道可近似看成圆轨道,地球半径约为 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$,试估算太阳质量 M 与地球质量 m 之比 M/m 为多少?
6. 某行星质量为 M 、半径为 R ,若在距行星中心 $10R$ 处有一物体,正沿着它和行星连线夹角 $\theta = 30^\circ$ 的方向运动,此物体的速度 v 至少多大才能避免该物体落在行星上与行星发生碰撞?
7. 从地球表面向火星发射火星探测器. 设地球和火星都在同一平面上绕太阳做圆周运动. 火星轨道半径 R_m 为地球轨道半径 R_e 的 1500 倍. 简单而又比较节省能量的发射过程可分为两步进行:第一步,在地球表面用火箭对探测器进行加速,使之获得足够的动能,从而脱离地球引力作用成为一个沿地球轨道运行的人造行星;第二步是在适当时刻点燃与探测器连接在一起的火箭发动机,在极短时间内对探测器沿原来方向加速,使其速度值增加到适当值,从而使得探测器沿着一个与地球轨道及火星轨道分别在长轴两端相切的半个椭圆轨道正好射到火星上,如图 4-13(a) 所示. 问:

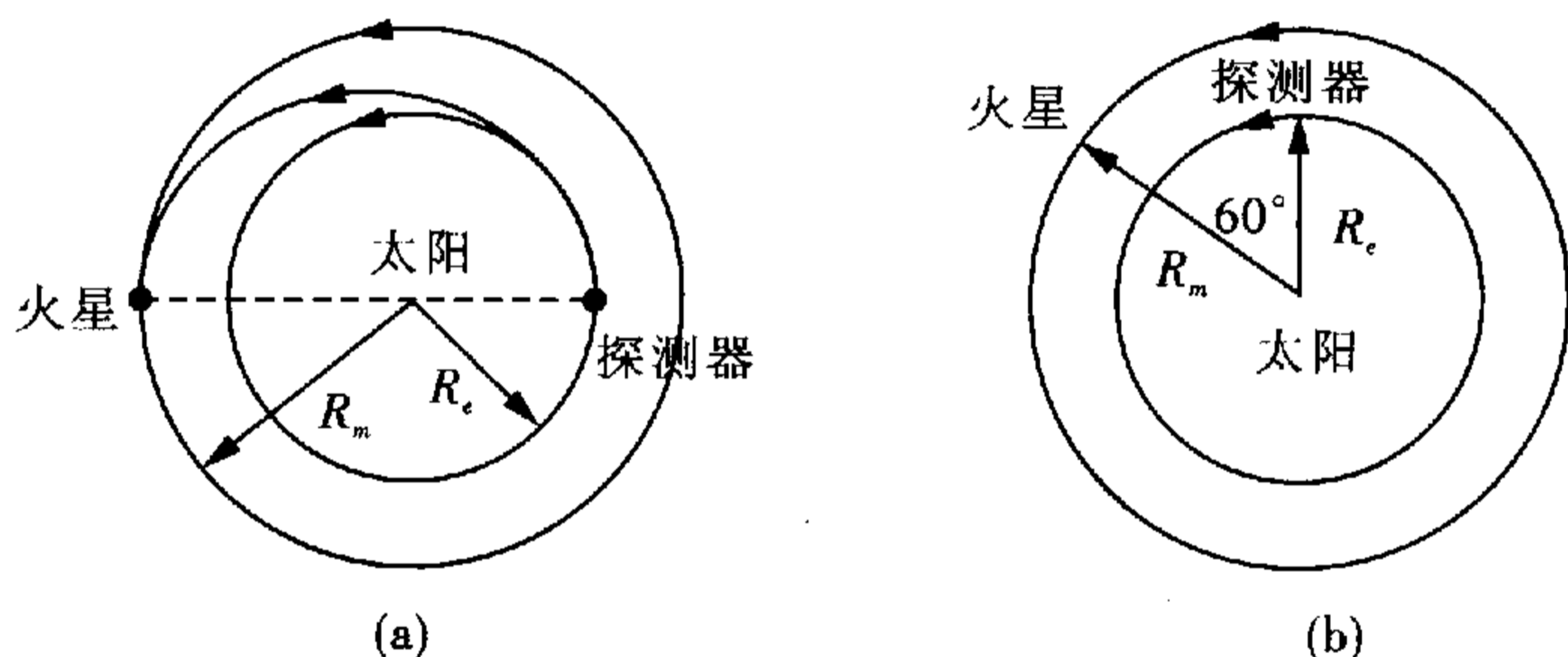


图 4-13

(1) 为使探测器成为沿地球轨道运行的人造行星,必须加速探测器,使之在地面附近获得多大的速度(相对地球)?

(2) 当探测器脱离地球并沿地球公转轨道稳定运行后,在某年 3 月 1 日零时测得探测器与火星之间的角距离为 60° ,如图 4-13(b) 所示. 问在何年何月何日点燃探测器上的火箭发动机方能使探测器恰好落在火星表面(时间计算需精确到日)? 已知地球半径 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$,重力加速度 g 可取 9.8 m/s^2 .

8. (1) 设有 1 个质量为 m 的物体,因受重力作用绕着另 1 个质量为 M 的物体($M \gg m$) 做等速率圆周运动. 若该物体的轨道半径为 r ,试证

$$M = 4\pi^2 r^3 / (GT^2)$$

式中, G 为万有引力常数, T 为周期.

(2) 在上式中,若 M 用太阳质量 M_\odot 为单位, r 用 AU(天文单位)为单位, T 用年为单位,则 $4\pi^2/G$ 的数值等于多少?

注 1 AU = 地球和太阳之间的平均距离.

(3) 已知太阳绕着本银河系的中心做圆周运动,其周期为 2.4×10^8 年,且太阳和银河中心的距离

$a = 1.75 \times 10^9$ AU. 设 $M(r)$ 等于以银河中心为球心, 半径为 r 的圆球所包含的质量, 试估计本银河系在太阳轨道之内所包含的质量为多少? 也就是说 $M(a) = ? M_{\odot}$.

(4) 设 a 为太阳和本银河系中心的距离, 则根据天文观测的结果, 本银河系会发亮的物体 (主要是星球和气体) 大部分集中在 $r \leq R = 1.5a$ 的范围内. 在 $r > R$ 的地方, 仅能观测到少量的氢气云, 借助于氢原子所放射出来的特殊谱线, 我们可以测量到当 $r > R$ 时, 物体绕银河中心做圆周运动的轨道速率 v . 假设本银河系的质量 (包括发亮及不发亮的物质) 绝大部分集中在 $r \leq R$ 的范围内, 试问当 $r > R$ 时, 物体的轨道速率 v 和 r 的关系如何?

(5) 目前物体的轨道速率最远只能测到 $r = 4R$ 的地方. 今由实际观测得知当 $2R/3 \leq r \leq 4R$ 时, 各物体的轨道速率均维持定值, 不会随着 r 而有所改变. 由此结果, 你对本银河系的大小、质量和组成物质有何推论?

9. 在牛顿提出万有引力理论以前, 笛卡尔行星运动模型已被人们广泛接受. 在此模型中, 太阳圆周存在着以太流, 各行星被以太流捕获并绕太阳运动. 若在一层不厚的以太中满足式子 $P + \frac{1}{2}\rho v^3 = c$, 其中 P 为所选点的压强值, ρ 为以太密度, v 为所选点速度, c 为常数, 试以开普勒第三定律判断笛卡尔的理论是否正确. (设以太流沿圆周进行)

10. 如图 4-14 所示, 假设空间中存在一半径为 R 的均质球体 O_1 , 密度为 ρ , 中间被挖出一半径为 $\frac{R}{2}$ 的球体 O_2 , 且 O_1 与 O_2 内切于点 P . 现将一质量为 m 的物体从 P 点释放, 试分析之后 P 点的运动. (所有碰撞为非弹性碰撞)

11. 通信卫星质量为 m , 相对地球静止于赤道上空 nR 高度的空间中, R 为地球半径, 且从卫星上引出了一条最短的直达地球表面的匀质导线, 设地球自转的角速度为 ω , 求导线的线密度.

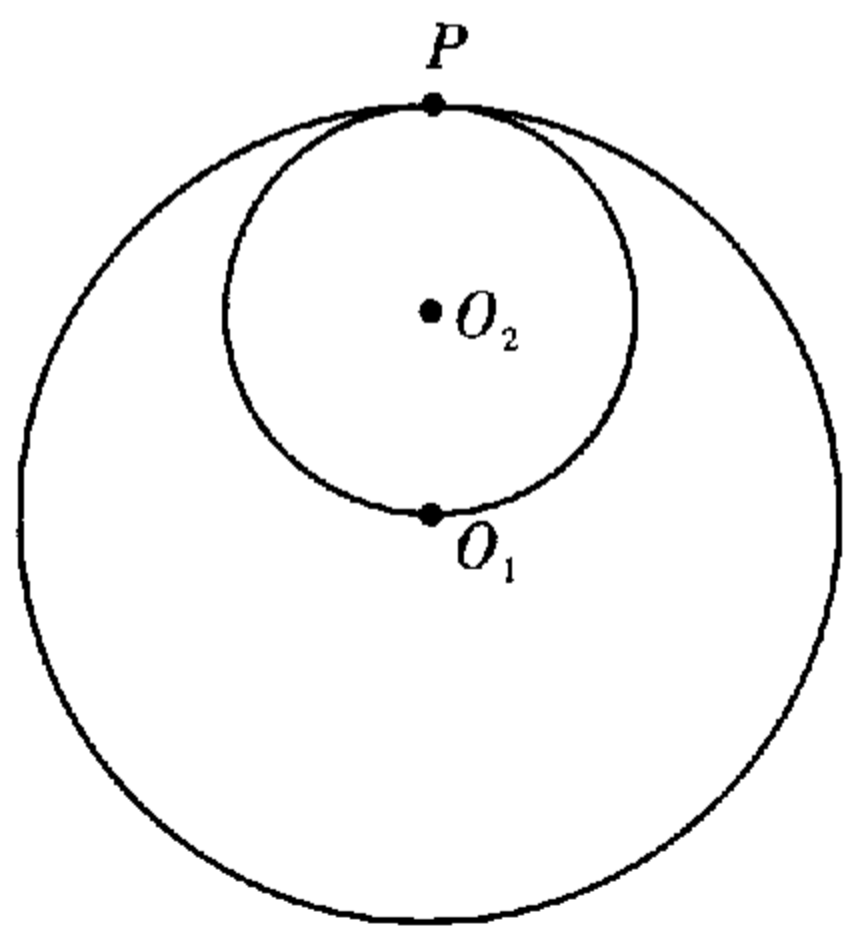


图 4-14

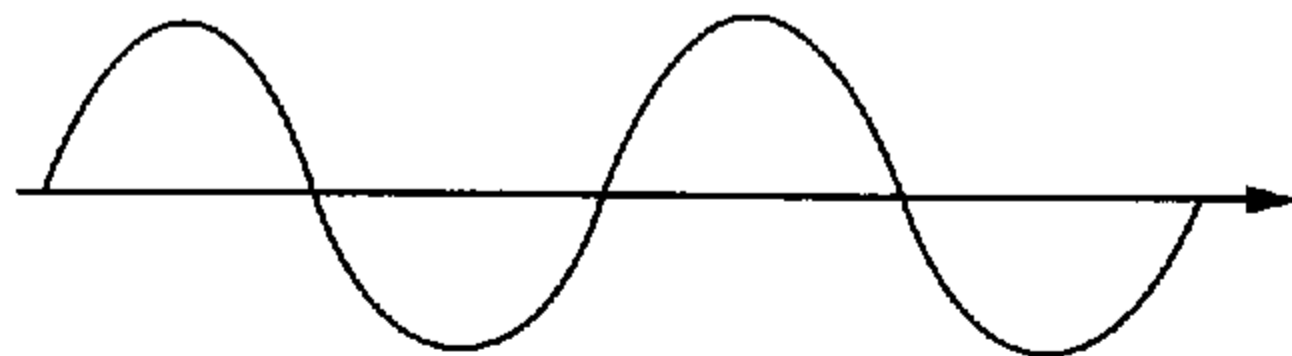


图 4-15

12. 1844 年杰出的数学家和天文学家贝赛尔发现天狼星的运动偏离直线路径的最大角度为 $\alpha = 2.3''$, 周期 $T = 50$ 年. 且呈现正弦曲线 (与地球上观察者的运动无关), 如图 4-15 所示. 贝赛尔推测天狼星运动路线的弯曲是由于存在一较小的伴星. 如果天狼星自身的质量为 $M = 2.3M_{\odot}$, M_{\odot} 为太阳质量, 求它的伴星质量 m 与太阳质量之比. 已知从天狼星看地球轨道半径 R_0 的张角为 $\beta = 0.376''$, 可以把天狼星和它的伴星的轨道看作圆形, 且轨道平面垂直于太阳系到天狼星的方向.

13. 形成小行星区的一种假设是这样的: 许多陨石由于太靠近木星, 在木星引力场作用下分裂成单独的石块——小行星. 假设有一块球形陨石半径大约为 $r = 10^4$ km, 它的质量 m 为木星质量 M 的

$1/10^6$. 若陨石无自转,问:陨石离木星中心的距离为何值才开始分裂?

14. 一个质量均匀、球状的星球,半径为 R ,质量为 M ,在距其表面 $H = kR$ 的轨道上有一飞船,做匀速圆周运动,速度为 v ,此时飞船在 P 点,它要降落到星球上的 Q 点,如图 4-16 所示, $\angle POQ = 90^\circ$,要求:①飞船只在 P 点喷气,到 Q 点时再喷气降落,②为了安全起见,飞船到 Q 点时,速度与星球表面相切. 问飞船在 P 点如何喷气改变速度? 飞船的轨迹如何?
15. 从地球北极发射一枚炮弹至赤道,问当发射角 θ 为多大时,发射速度 v_0 最小? 并给出 v_0 . 已知地球质量为 m ,半径为 R ,忽略地球自转及各种能量损耗.

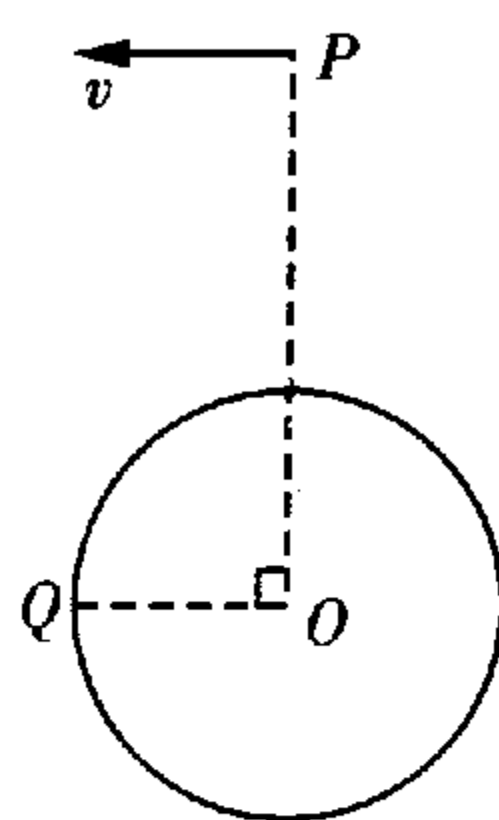


图 4-16

第五章 振动和波

【学习目标】

一、简谐振动

1. 简谐振动的描述

(1) 动力学描述: 当一质点, 或一物体的质心偏离其平衡位置 x , 且其所受合力 F 满足 $F = -kx (k > 0)$

$$\text{故得 } a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

则该物体将在其平衡位置附近作简谐振动.

(2) 运动学描述: 简谐振动图象如图 5-1 所示, 为一余弦函数图象. 而在振动初位相为 φ_0 的情况下, 物体的位移 x 、加速度 a 、速度 v 对于时间的函数为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

式中 A 为该振动的振幅, ω 为圆频率且 $\omega =$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$. φ_0 为初相位, 其值与计时起点的选择有关.

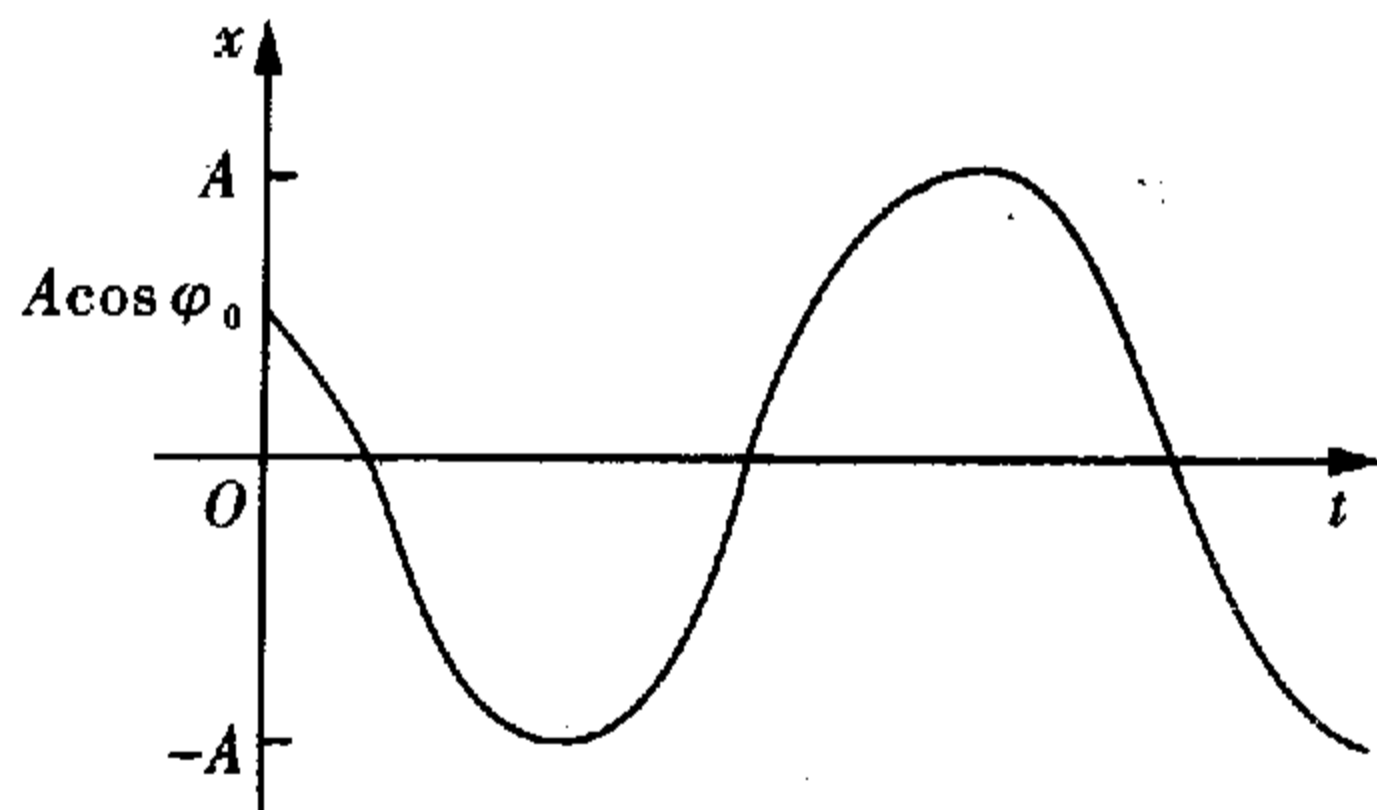


图 5-1

(3) 参考圆——对简谐振动进行几何方法的描述. 如图 5-2 所示, 考察一以恒定角速度 ω 绕一半径为 A 的作逆时针方向圆运动的点 P , 取该圆的圆心为平面直角坐标系的原点 O , P 点的初位置对应角度 φ_0 称为初相位. 则 P 点在 x 轴上的投影 P' 满足:

$$x_{P'} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

显然, 投影 P' 的运动即是一简谐振动.

2. 有关基本量的确定

(1) 振幅、初相位: 令 $t=0$, 有

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_0 = -A \omega \sin \varphi_0 \end{cases}$$

解之得到

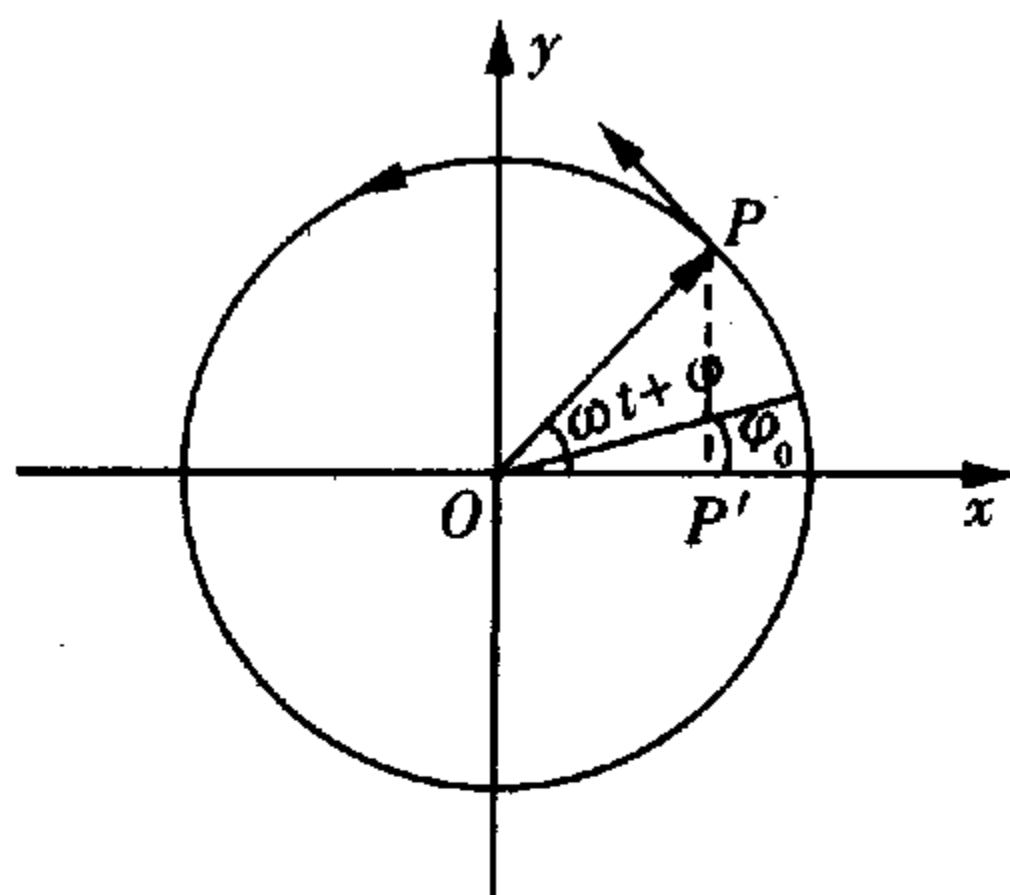


图 5-2

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega} \end{cases}$$

特例: $\begin{cases} x_0 = 0; A = \left|\frac{v_0}{\omega}\right|, \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2} (v_0 \text{ 为负向者取 } \frac{\pi}{2}, \text{ 正向者取 } -\frac{\pi}{2}); \\ v_0 = 0; A = |x_0|, \varphi_0 = 0, \pi (x_0 \text{ 为正向者取 } 0, \text{ 负向者取 } \pi). \end{cases}$

(2) 振动周期: 设 T 为振动周期, 它应该满足

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi_0]$$

因此有 $\omega T = 2\pi$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, f 叫线频率

弹簧振子: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

单摆: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

(3) 简谐振动的能量

振动动能: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$

振动势能: $E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

由于 $K = m\omega^2$, 振动能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KA^2$$

物体在简谐振动过程中动能和势能都随时间变化, 但总能量守恒, 且与振幅的平方成正比.

注意: A, φ_0 不仅取决于系统本身性质, 还取决于振动的初始条件; 而 ω, T 完全由振动系统的性质决定, 故常称固有频率、固有周期.

3. 简谐振动的合成

对于同方向、同频率的两个振动:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

我们可以把这二者叠加起来.

$$\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1 + A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2 \\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

对于 A, φ , 由三角函数知识可知:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

事实上,我们也可以通过参考圆的办法来避免如此繁复的运算.如图5-3所示,以其振幅 A_1 、 A_2 作矢量 \vec{OP}_1 和 \vec{OP}_2 均绕 O 点以角速度 ω 转动,则二者间的夹角是不变的.又作 $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$,则有 $x_P = x_{P_1} + x_{P_2}$,即 P 点在 x 方向上的投影即为 P_1 、 P_2 在该方向上投影的运动的合成.

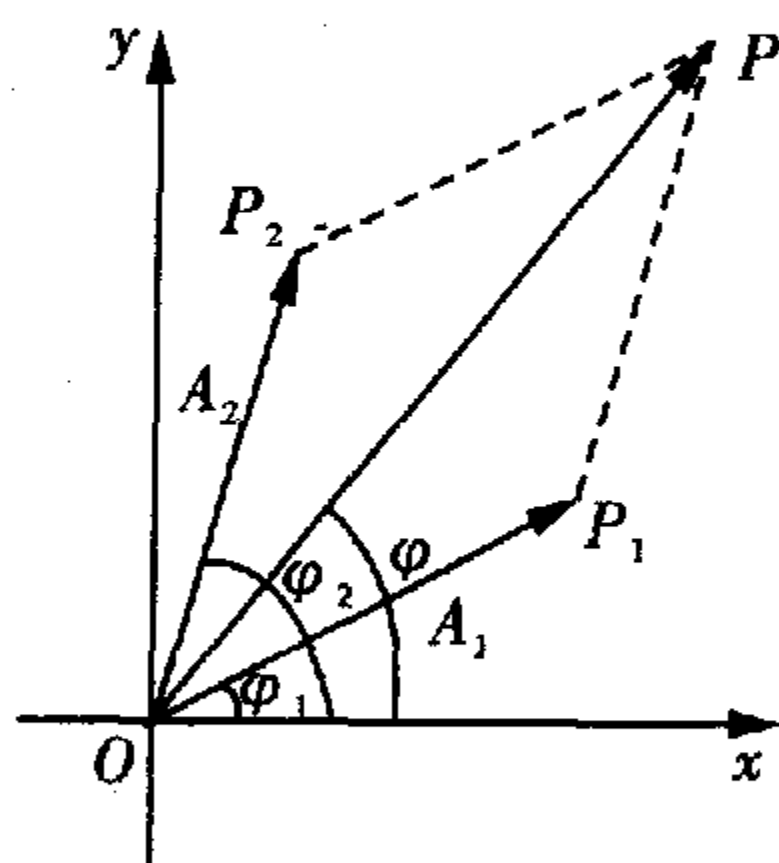


图5-3

∴ 由余弦定理:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{且有 } \tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

与用代数方法推出的结论完全一致.

另外,考虑两个频率相近,振幅、初位相相同的两个振动:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

它们的合成满足

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi) + A \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right) \end{aligned}$$

注意到 $|\omega_2 - \omega_1| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$,所以 $\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ 相对于后一项来说是缓变的,因而 x 可以看作是振幅不断变化的简谐振动,如图5-4所示.这种振幅时大时小的现象叫做拍.而振幅变化的角频率称为拍频:

$$\omega_{\text{拍}} = |\omega_2 - \omega_1|$$

二、机械波

1. 波动的基本概念及描述

波动是振动状态在介质中的传播,它是能量的一种传播形式.在波速 v 、圆频率 ω 、振幅 A 确定的情况下,横波的传播可用如下函数描述:

$$y(r, t) = A \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right]$$

这是一个关于 r 和 t 的函数,表示的是距波源 r 处的质点在 t 时刻的运动状态.对纵波的描述完全类似.由该函数可知,距波源 r 处的振动可以认为是比波源落后 $\frac{r}{v}$ 的时间.

2. 波的干涉

频率相同、振动方向一致、在固定相位差的两个波源称为相干波源.如图5-5,两相干波源传播到 P 点时,分别为

$$y_1 = A_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) + \varphi_{10} \right]$$

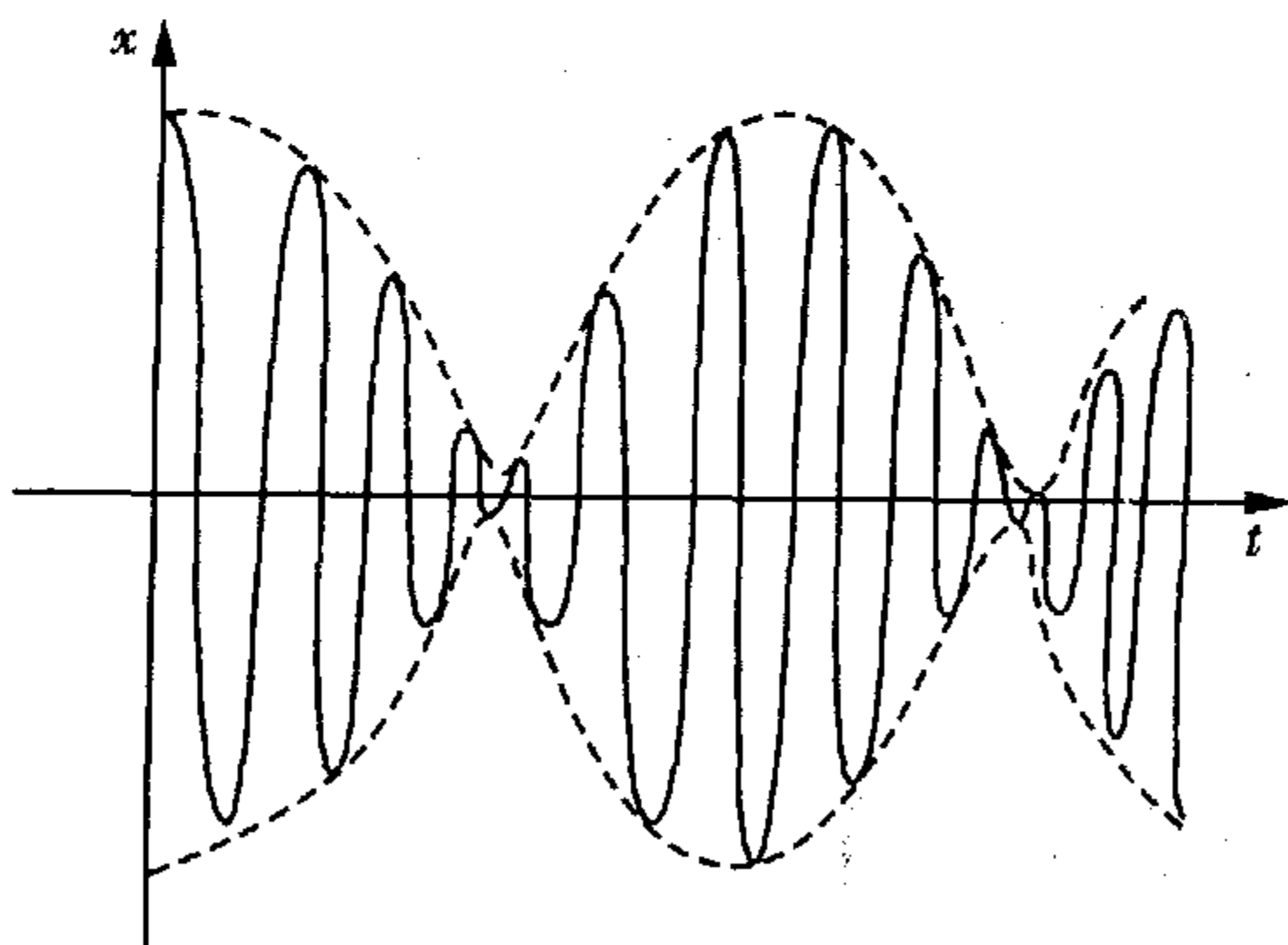


图5-4

$$y_2 = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{v}\right) + \varphi_{20}\right]$$

P 点的运动即为此两振动的合成. 它们的相位差可写成

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) + \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \cdot 2\pi$$

由前面得出的结论可知:

$\Delta\varphi = 2k\pi$ 时, 合振幅最大, $A = A_1 + A_2, k \in \mathbf{N}$.

$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ 时, 合振幅最小, $A = |A_1 - A_2|$.

所以这种两列相干波在同一区域内传播, 使得某些质点振动加强, 某些质点振动减弱的现象就叫做波的干涉. 若两相干波满足 $\varphi_{10} = \varphi_{20}$, 则振动的加强点与减弱点的位置满足:

$r_1 - r_2 = k\lambda (k \in \mathbf{N})$, 合振幅最大点

$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} (k \in \mathbf{N})$, 合振幅最小点

3. 多普勒效应

当声源和观察者之间存在相对运动时, 会发生收听频率和声源频率不一致的现象. 这种现象被称为多普勒效应.

为了简单, 这里仅讨论波源或观察者的运动方向与波的传播方向共线的情况.

设波速为 c , 波的频率为 f , 接收到的频率为 f' :

(a) 观察者以速度 u 向波源运动: $f' = \frac{c+u}{c}f$

(b) 波源以速度 v 向观察者运动: $f' = \frac{c}{c-v}f$

(c) 波源和观察者都运动: $f' = \frac{c+u}{c-v}f$

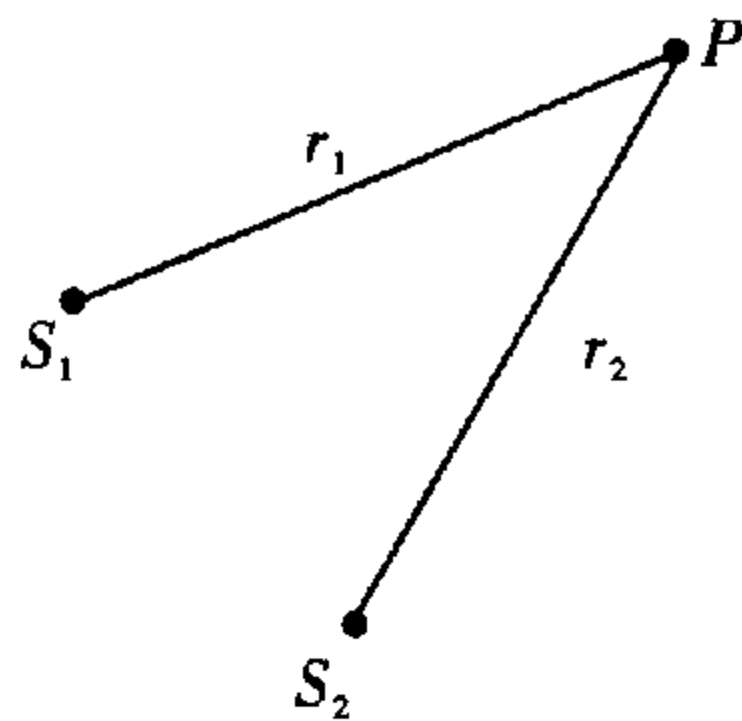


图 5-5

【解题钥匙】

例 1 设想有一单摆, 其摆长 l 与地球半径 R 相比不可忽略, 试求此单摆在地球表面附近振动时的周期 $T = ?$

解析 设摆球偏离其平衡位置一极小位移 x , 如图 5-6. 分析 $\triangle OO'A$, 则有

$$\frac{\sin\varphi}{R} = \frac{\sin r}{l}$$

又 φ, r 均为小角, 且有

$$\varphi \approx \sin\varphi = \frac{x}{l}$$

$$\therefore r \approx \frac{l}{R}\varphi, \theta = \varphi + r \approx \frac{R+l}{R} \cdot \frac{x}{l}$$

同时由于 x 很小, 所以摆球受到的引力仍为 $F = mg$.

则摆球所受的回复力为

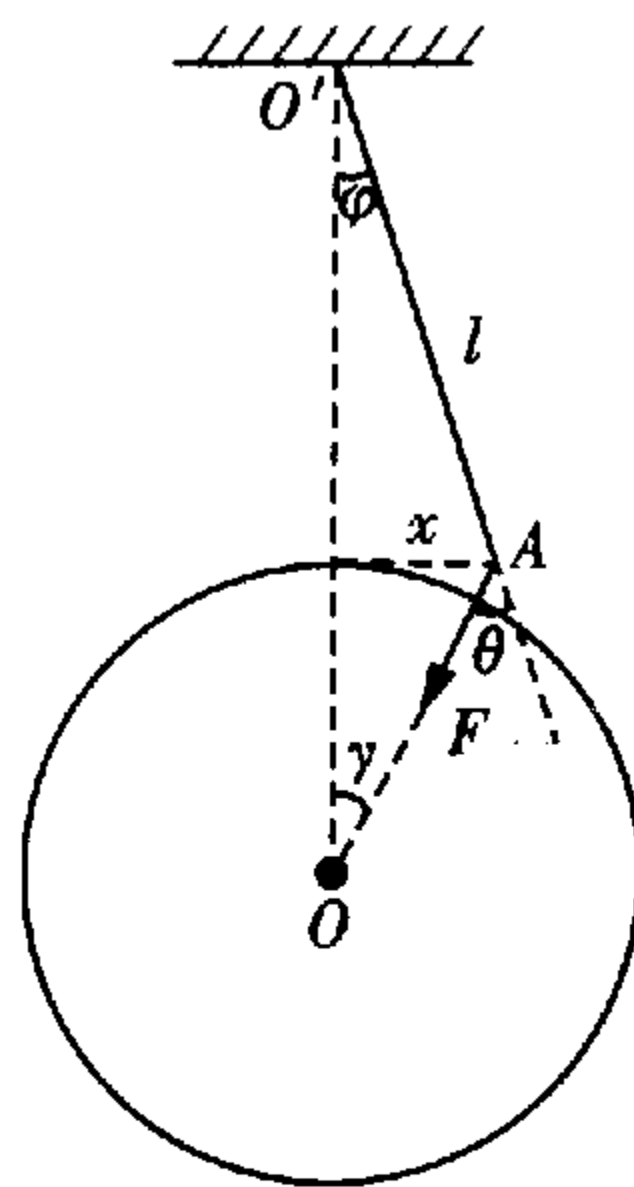


图 5-6

$$f = -F \cdot \theta = -mg \frac{R+l}{Rl} x$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{Rl}{g(R+l)}}$$

方法与技巧 该题的关键在于回复力 $f = -F \cdot \theta$, 而非 $-F \cdot r$, 近似的应用是要建立在严谨的几何关系上的, 能够精确, 尽量精确.

例 2 如图 5-7 所示, 轻杆 AB 左端 A 被光滑铰链固定, 右端 B 被一劲度系数为 k_2 的弹簧拉住, 弹簧的上端系于一固定点 D. 杆上的 C 点系有另一劲度系数为 k_1 的轻弹簧, 弹簧的下端系有一质量为 m 的物体. 系统平衡时, 杆恰处于水平而两弹簧轴线均沿竖直方向. 已知 $AC = a, AB = b$, 求杆绕 A 点在竖直平面内作微小振动的周期.

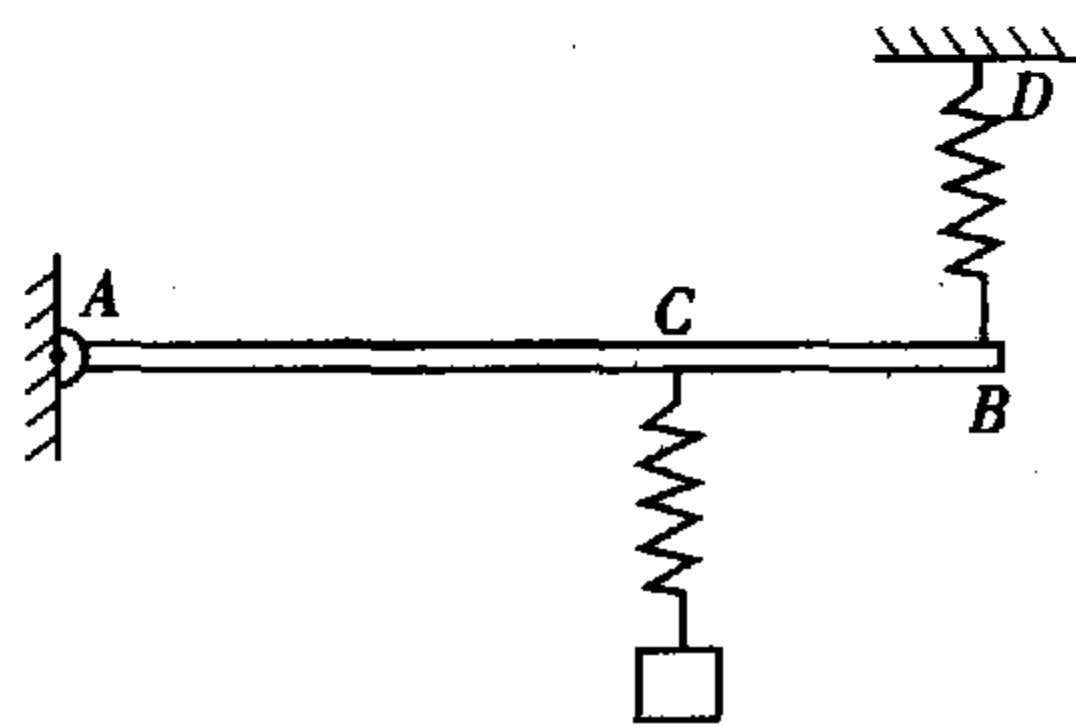


图 5-7

解析 注意到系统在初始状态下已平衡, 所以可以不考虑重力的影响. 现设物体偏离平衡位置一极小位移 Δx , 由此而引起的 k_1, k_2 的长度变化为 $\Delta x_1, \Delta x_2$, 则有

$$\Delta x = \Delta x_1 + \frac{a}{b} \Delta x_2$$

又 AB 为轻杆, \therefore 其受合力矩必定为 0.

$$\text{即 } k_1 \cdot \Delta x_1 \cdot a = k_2 \cdot \Delta x_2 \cdot b$$

$$\text{由以上两式解得 } \Delta x_1 = \frac{b^2 k_2}{a^2 k_1 + b^2 k_2} \Delta x$$

$$\therefore \text{物体受力满足 } f = -k_1 \cdot \Delta x_1 = -\frac{b^2 k_1 k_2}{a^2 k_1 + b^2 k_2} \Delta x$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 k_1 + b^2 k_2)}{b^2 k_1 k_2}}$$

方法与技巧 该题的解答过程即将整个系统等效为一弹簧振子并求其劲度系数的过程: 将物体移动 $-x$, 计算出其受力为 $f = -k' \cdot x$, 则 k' 即为等效的劲度系数.

例 3 如图 5-8, 一弹簧振子, 两端都为质量 $m = 0.1 \text{ kg}$ 、大小不计的物体 A、B, 中间是一静止长度为 l_0 、劲度系数为 k_0 、质量可以忽略的理想弹簧, 现此振子自某一高度、A 端在下, 竖直地自由下落至一水平桌面. 开始下落时, A 距桌面的高度为 $H = 2 \text{ m}$, 开始时弹簧无伸长或压缩. A 与桌面发生弹性碰撞后跃离桌面, 当 A 第二次接触桌面时, 发现弹簧的压缩达到最大, 求:

- (1) 弹簧劲度系数 k_0 之值;
- (2) A 第二次与桌面接触时的速度.

解析 (1) 设 A 第一次与桌面碰前, 速度为 v_0 . 则注意到释放时弹簧无压缩, A、B 均作自由落体运动, 无相对速度. 所以整个运动过程中弹簧的存在对 A、B 的运动无影响.

$$\text{即 } v_0 = \sqrt{2gH}.$$

碰后 A 反向, B 仍以 v_0 向下运动, 所以质心 c 静止, 并重新以加速度 g 开始运动. 取质心系 A、B 所受重力被惯性抵消, 则系统的运动转化成完全对称的, A、B 朝固定点 C 的简谐振动, 弹簧被分成相等的两段, 分别连着 A、B, 劲度系数均为 $2k_0$. 初始情况下 A、B 在平衡位置以 v_0 向质心运动, 设振幅为

A_0 :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}2k_0A_0^2$$

$$\therefore A_0 = \sqrt{\frac{mgH}{k_0}}$$

取向上为正,则 A 在质心系中的运动方程为

$$x'_A = A_0 \sin \omega t - \frac{l_0}{2}, \text{ 其中 } \omega = \sqrt{\frac{2k_0}{m}}$$

而在地面参考系中,若取地面为坐标原点,对质心坐标 x_c , 有 $x_c = \frac{l_0}{2} - \frac{1}{2}gt^2$

$$\begin{aligned} \therefore x_A &= \frac{l_0}{2} - \frac{1}{2}gt^2 + A_0 \sin \omega t - \frac{l_0}{2} \\ &= A_0 \sin \omega t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \text{②}$$

当 A 第二次接触地面时有 $x_A = 0$, 上式则可化成

$$A_0 \sin \omega t = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{③}$$

对于该式,我们可以理解为其表示的是两个函数 $f_1(t) = A_0 \sin \omega t$ $f_2(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 的交点, \therefore 作出 f_1, f_2 的可能图象如图 5-9, 注意到 A 落地时弹簧的伸长量达到最大, 即抛物线必与正弦曲线的波峰有交点. 但我们可以看到, 若交点在第一个之后的波峰, 则两函数必然会在波峰交点之前有诸如 P_1, P_2 的交点, 即 A 会在 t_1 时刻就达到桌面, 这显然不合题意.

\therefore 时间 t 仅有一解.

$$t = t_0 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2K_0}} \quad \text{④}$$

\therefore 由①③④式解得 $K_0 = 0.183 \text{ N/m}$.

(2) 在质心系中 A 的速度满足

$$v'_A = v_0 \cos \omega t$$

又在地面参考系中质心速度为 $v_c = -gt$

\therefore A 的速度为 $v_A = v'_A + v_c = v_0 \cos \omega t - gt$

将 $t = t_0$ 以及 K_0 的值代入, 得到 $v_A = 7.97 \text{ m/s}$.

方法与技巧 在处理诸如本题中具有对称性的二体振动问题时, 取质心系是最常用也是最有效的办法. 将质心系中的运动与质心本身的运动叠加即可得到物体在绝对参考系中的运动. 处理过程中要注意弹簧劲度系数的变化.

例 4 如图 5-10 所示, 质量为 M 的物体放置在两个完全相同的、质量均为 m 的薄壁中空圆筒上. 物体两侧系着两个完全相同的劲度系数均为 k 的弹簧, 两弹簧的另一端固定, 开始时两弹簧均为

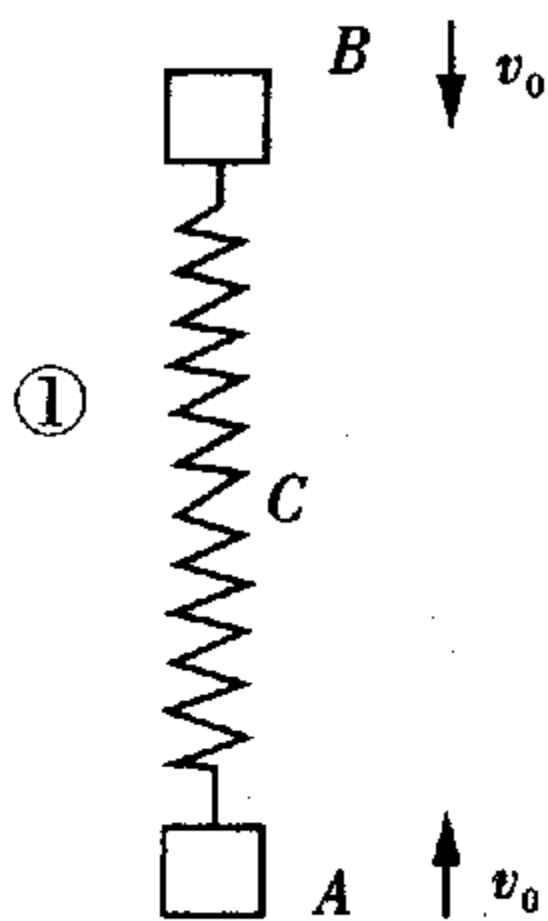


图 5-8

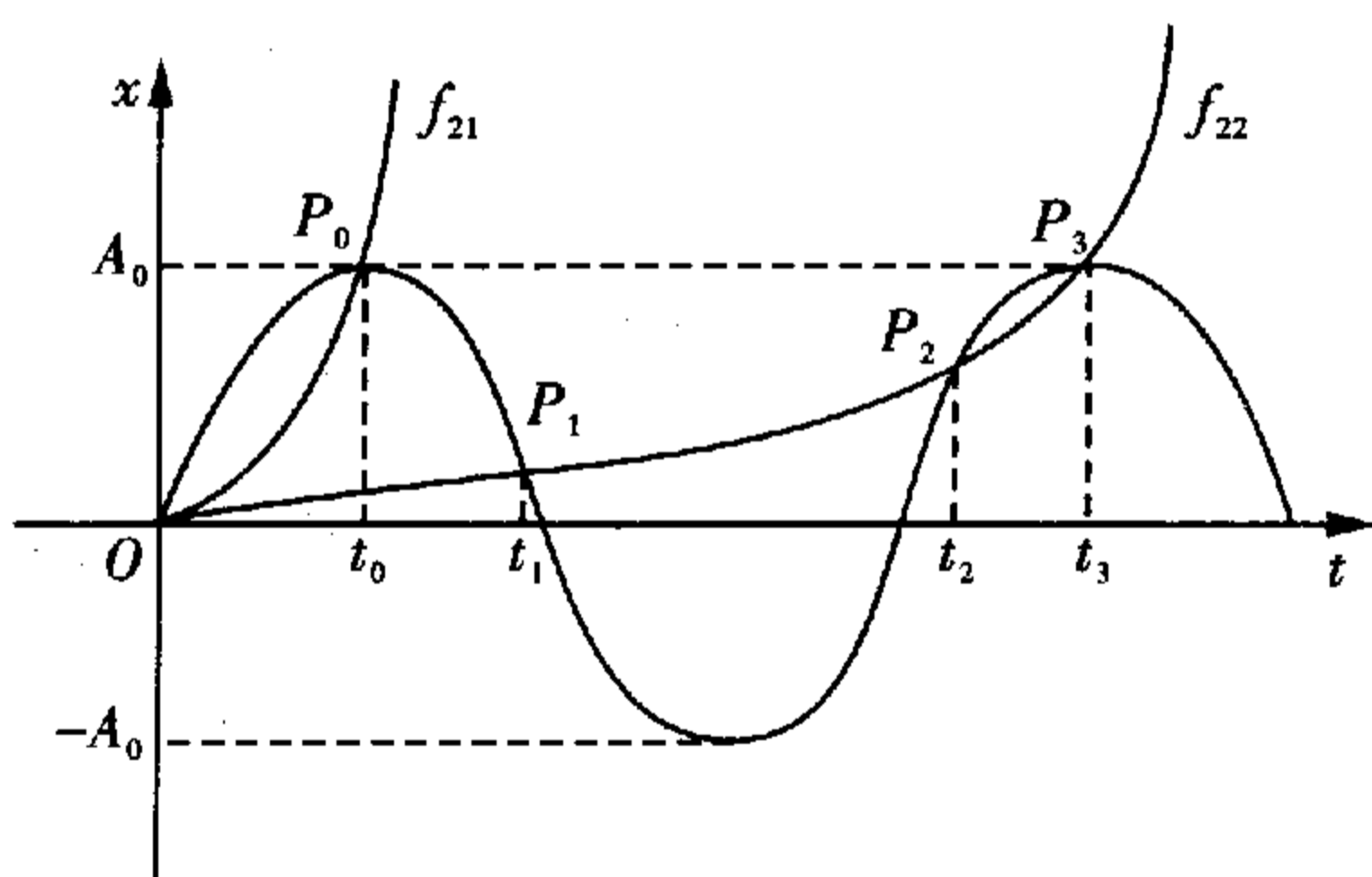


图 5-9

原长, 设物体在两薄圆筒上作纯滚动, 两薄圆筒则在地面上滚动, 试求 M 的振动周期.

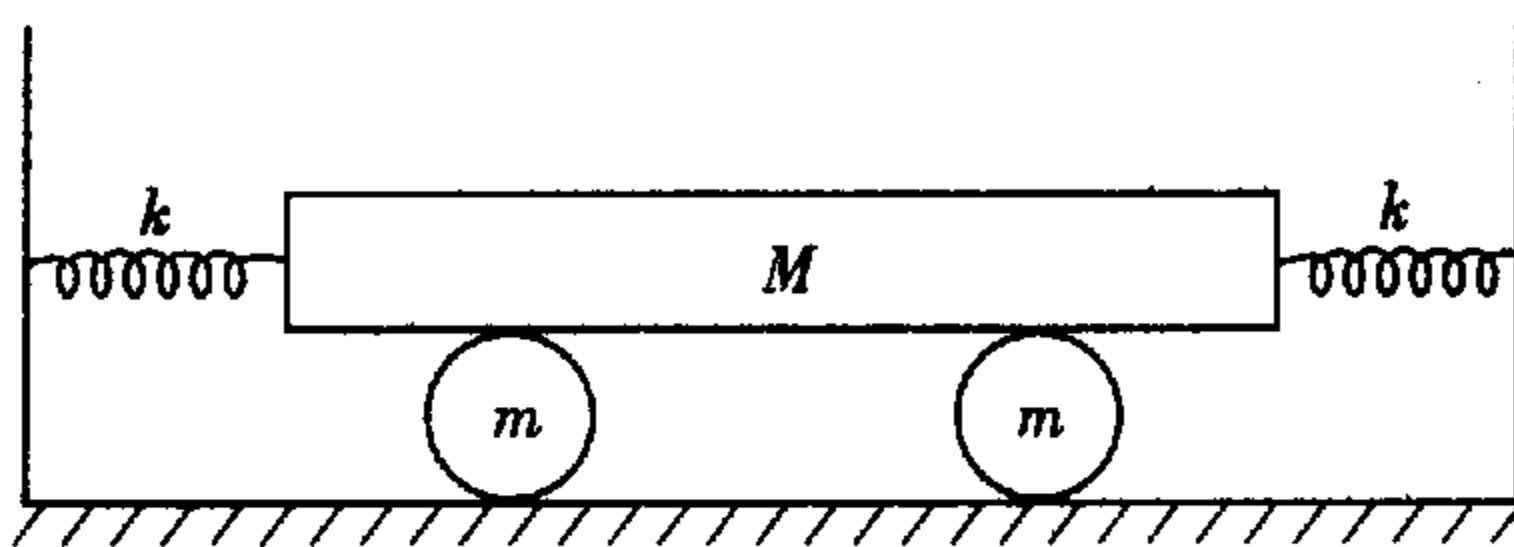


图 5-10

解析 设 M 偏离其平衡位置 x , 则弹簧给其的作用力为 $F = -2kx$.

下面分别分析 m 和 M 的运动, 设它们之间的摩擦力为 f , 取向右为正; 对于 m , 设其半径为 R , 质心加速度为 a_c , 角加速度为 α , 如图 5-11, 则有

$$ma_c = f$$

$$I_0 \cdot \alpha = fR, \text{ 其中 } I_0 = mR^2$$

由题意可知 A 点相对于 M 静止.

$$\therefore a_c + \alpha \cdot R = a_M, a_M \text{ 为 } M \text{ 的加速度.}$$

对于 M , 如图 5-12 所示, 则有

$$M \cdot a_M = 2f - 2kx$$

联立以上各式, 最终解得

$$a_M = -\frac{2k}{M+m}x$$

$$\text{即 } a_M + \frac{2k}{M+m}x = 0$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{2k}}$$

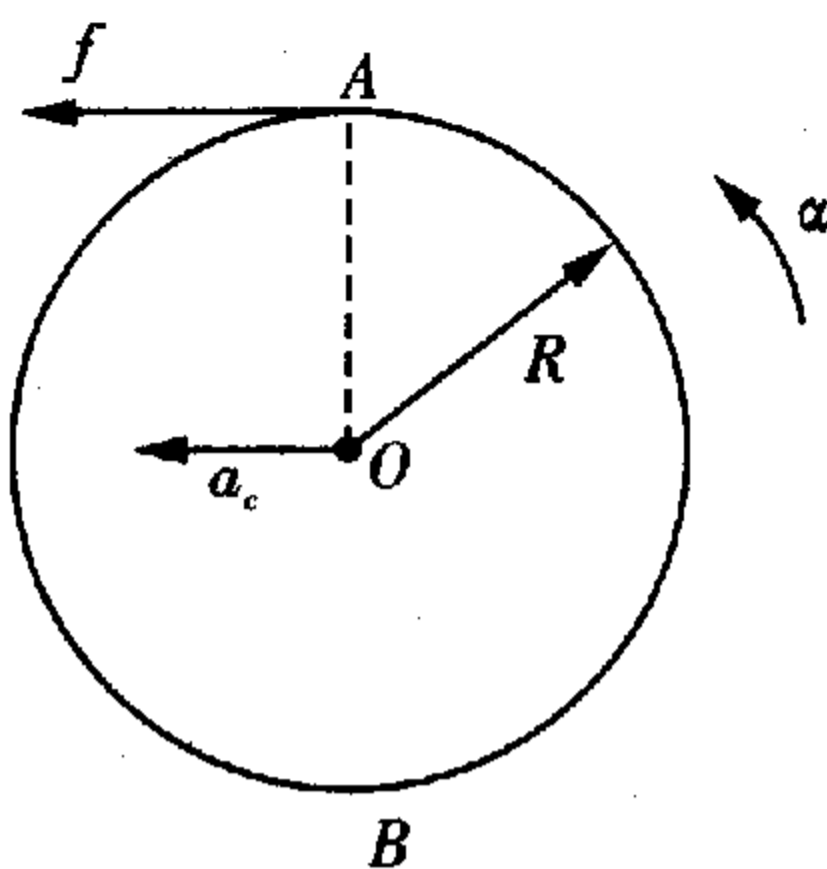


图 5-11

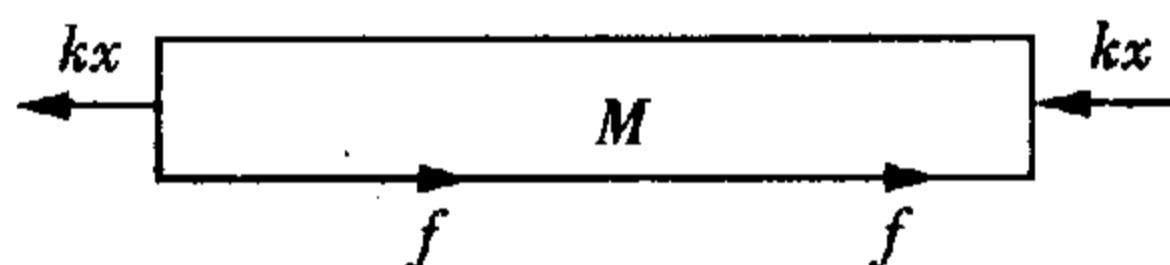


图 5-12

方法与技巧 对于这种互相牵连的振动系统, 作一定的动力学分析是必要的. 在选定了振动的描述对象(如本题中的 M)后, 再通过计算得出其加速度与位移的关系, 即可得到周期.

例 5 在两条柔软的弹性轻绳中间连着一个球, 而这两条绳的另一端分别固定于同一竖直线上的 O 、 O' 点, 如图 5-13 所示. 已知上、下绳的劲度系数分别为 $k_1 = 8.0 \text{ N/m}$ 和 $k_2 = 12.0 \text{ N/m}$, 小球静止不动时位于图中 C 点处, 这时上下绳相对于各自的自然长度分别伸长了 $l_1 = 0.080 \text{ m}$ 和 $l_2 = 0.030 \text{ m}$. 现将小球沿竖直方向下拉到与平衡位置 C 的距离为 $l_3 = 0.080 \text{ m}$ 处, 然后轻轻释放, 求小球从释放开始到第一次回到该释放点所需要的时间. (计算时取 $g = 10.0 \text{ m/s}^2$).

解析 如图 5-14, C_1 、 C_2 分别为 k_1 、 k_2 的原长点, 而 P_1 为小球的释放点. 设小球的质量为 m , 则有

$$mg = k_1 x_1 - k_2 x_2$$

$$\Rightarrow m = 0.028 \text{ kg}$$

下面对小球运动分过程进行讨论:

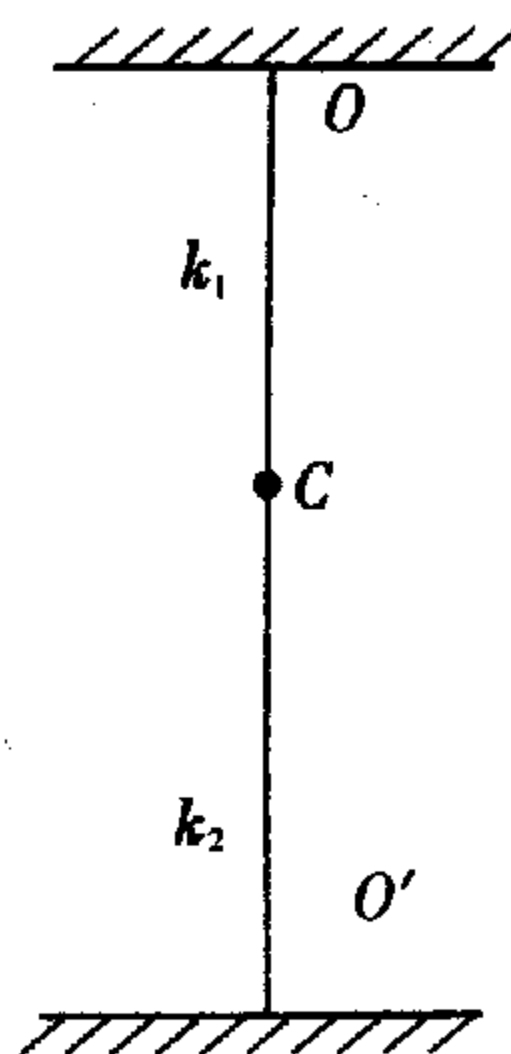


图 5-13

① $P_1 \rightarrow C_2$

此时小球仅受 k_1 的作用, 简谐振动的圆频率 ω_1 满足: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 16.9$

rad/s.

平衡位置与 C_1 的距离 x_{C_1} 满足: $x_{C_1} = \frac{mg}{k_1} = 0.035$ m.

\therefore 振幅 A_1 满足: $A_1 = (l_1 + l_3) - x_1 = 0.125$ m

而 C_2 点距平衡位置的距离为 $A_1 - |P_1 C_2|$.

\therefore 由 P_1 至 C_2 物体的运动时间 t_1 满足

$$A_1 - |P_1 C_2| = A_1 \cos \omega_1 t_1 \Rightarrow t_1 = 0.055$$
 s.

② 经过 C_2 后

经过 C_2 后, 小球可能会经过 C_1 , 也可能仅在 $C_1 C_2$ 间运动. 不妨设小球上升的最高点为 P_2 , 且 P_2 在 C_1 以下, $|P_2 C_1| = A_2$, 则由能量守恒, A_2 必满足:

$$\frac{1}{2} k_1 (l_1 + l_3)^2 = mg(l_3 + A_2) + \frac{1}{2} k_2 (l_2 + A_2)^2 + \frac{1}{2} k_1 (l_1 - A_2)^2$$

解得 $A_2 = 0.07$ m $< |CC_1| = 0.08$ m

即该假设是成立的, 且显然 A_2 为小球在 k_1, k_2 共同作用下的振幅, 而小球从 C_2 运动至 P_2 所用的时间 t_2 应有

$$t_2 = \frac{\frac{x}{2} + \sin^{-1} \frac{|C_2 C_1|}{A_2}}{\omega_2} = 0.075$$
 s

其中 ω_2 取 $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

由于小球的往复运动是完全对称的, 所以小球回到释放点 P_1 所需的时间为 $T = 2(t_1 + t_2) = 0.26$ s.

方法与技巧 解决这类相位问题最主要的是保持清醒的头脑和清晰的思路, 以及对振动方程的充分利用. 另外, 参考圆是理清思路的一种很好的工具.

例 6 如图 5-16 所示, 在半径为 45 m 的圆形跑道的 P 点和圆心 Q 点各有一个相同的扬声器, 发出的都是波长 10 m 的完全相同的声波, 一个人从直径 PH 的 H 点出发, 沿逆时针方向绕圆周走一圈, 问他离开 H 点后, 到达 P 点前共听到几次最弱的声音?

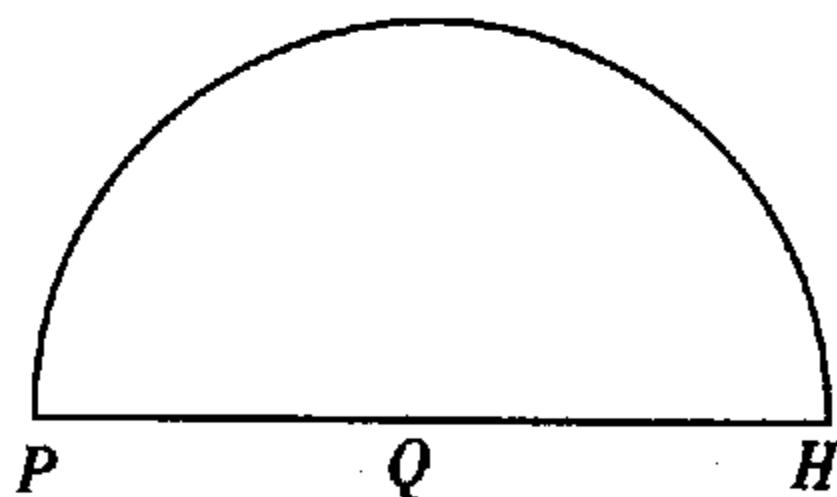


图 5-16

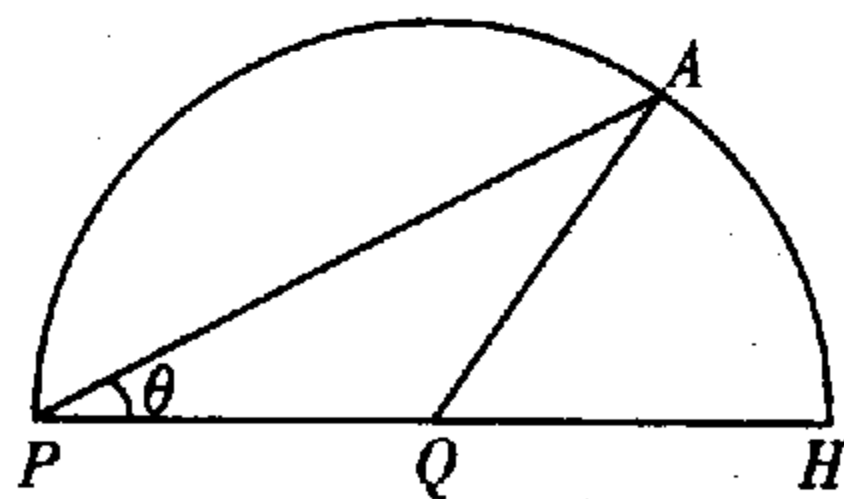


图 5-17

解析 如图 5-17 所示, 设人走到圆弧上的 A 点处, $\angle APH = \theta$, 则 P, Q 两点波源到 A 的路程差 ΔS 满足:

$$\Delta S = 2R \cos \theta - R$$

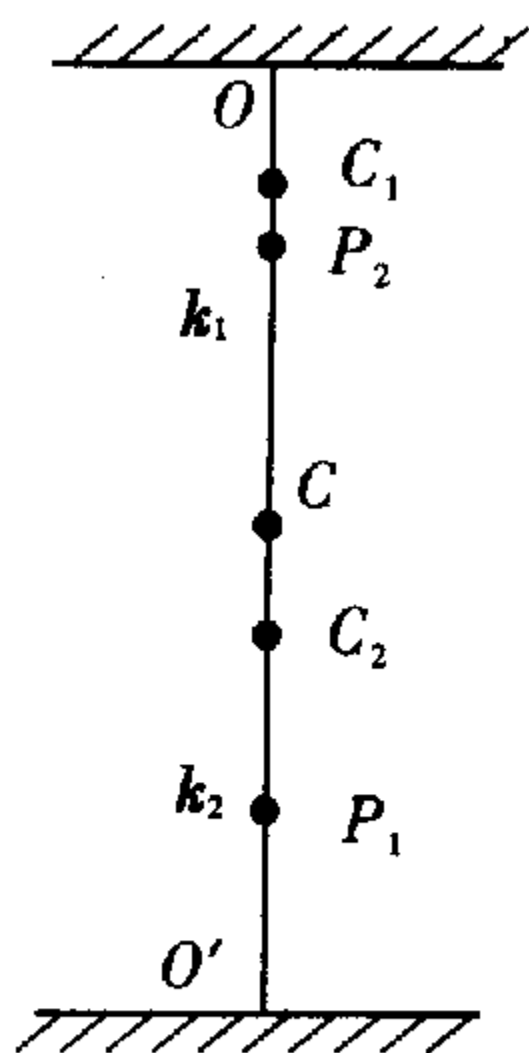


图 5-14

考虑人的运动范围,对于 θ , 有

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -R \leq \Delta S < R$$

为使人能听到最弱的声音, ΔS 又应满足:

$$\Delta S = \frac{\lambda}{2}(2n+1) \quad n \in \mathbf{N}$$

结合①②, 将 $R=45 \text{ m}$, $\lambda=10 \text{ m}$ 代入, 得到

$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, -5$ 时, 人能听到最弱的声音, 共 10 次.

方法与技巧 波动题大多简单但繁复, 建议读者在处理这类问题时, 先不急于代入数据, 文字运算有助于从物理意义角度思考问题.

例 7 图 5-18 中的实线和虚线分别表示沿 x 轴方向传播的正弦波 $t=0$ 和 $t=1 \text{ s}$ 时刻的波形.

(1) 求该波的频率和波速;

(2) 写出 $x=0$ 及 $x=1 \text{ m}$ 处的质点振动方程.

解析 (1) 由题给图象可知, 如果波向 x 正方向传播, 则两时间间隔内该机械波可能向前传播了 $(n + \frac{1}{4})\lambda$, 其中 $n=0, 1, 2, 3, \dots$

$$\therefore v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{(n + \frac{1}{4})\lambda}{\Delta t} = 2(n + \frac{1}{4}) \text{ m/s}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = (n + \frac{1}{4}) \text{ Hz}$$

同理, 如果波沿 x 轴负方向传播

$$v = \frac{(n + \frac{3}{4})\lambda}{\Delta t} = 2(n + \frac{3}{4}) \text{ m/s}$$

$$f = (n + \frac{3}{4}) \text{ Hz}$$

(2) 如果波向 x 轴正方向传播, 则有

$$x=0 \text{ 时, } y = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.01 \cos\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right] \text{ m}$$

$$x=1 \text{ 时, } y = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.01 \cos\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}t + \frac{3}{2}\pi\right] \text{ m}$$

同理, 如果波向 x 轴负方向传播, 则有

$$x=0 \text{ 时, } y = 0.01 \cos\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}t + \frac{3}{2}\pi\right] \text{ m}$$

$$x=1 \text{ 时, } y = 0.01 \cos\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right] \text{ m}$$

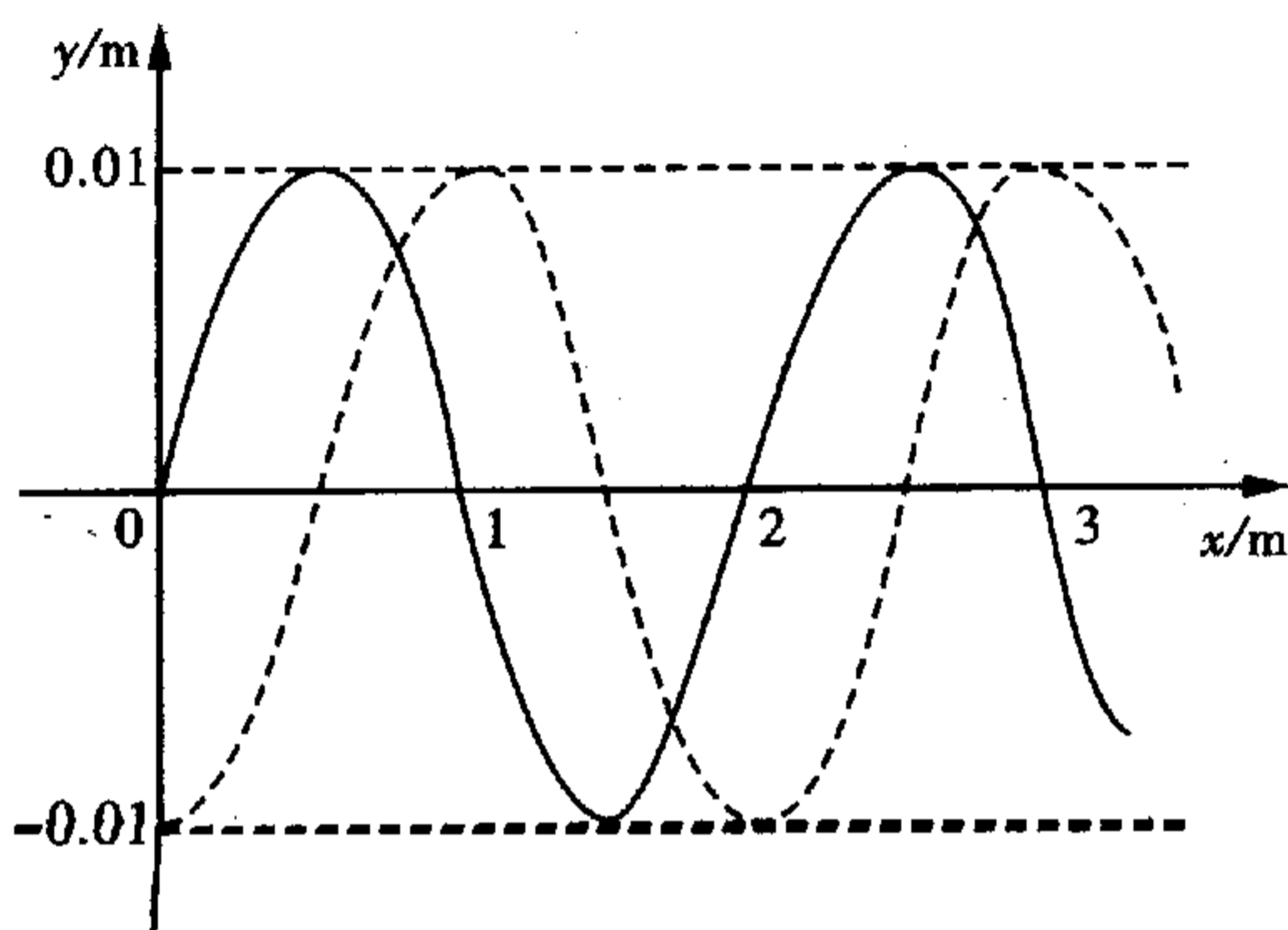


图 5-18

方法与技巧 波动问题的一大特征就是其多解性,包括速度的正负方向,距离相差整数倍波长时振动的完全等效,读者都应仔细考虑.

例 8 如图 5-19 所示,为一光滑足够长的圆柱,圆柱的半径为 R ,在柱面上方离中心竖直高为 A 的 P 点有一个质点,该质点只受一个力的作用,其大小与到圆柱中心 O 点的距离 r 成正比,即 $F = kr$,方向指向 O 点,现给质点一初速度 $v(v \geq 0)$,方向与柱面相切,且与 z 轴垂直,在 P 点正方向 $3A/2$ 处有一点 Q ,为使该质点在第一次经过 PQ 连线时就经过 Q 点,试求 v 的值. 质点质量为 m .

解析 将质点的受力 F 分解到 z 轴以及 xOy 平面上,则有

$$F_z = -k \cdot z$$

$$F_{xOy} = -k \cdot R$$

显然,质点在 z 轴方向作简谐振动. 又由于其在该方向上初速度为 0,平衡位置为 $z=0$ 处,所以该振动的振幅为 A . 这样质点的运动即可分解为 xOy 平面方向上的速度为 v 的匀速圆周运动,以及 z 轴方向上的简谐振动.

注意到质点在第一次经过 PQ 连线时就经过 Q 点,也即当质点在 xOy 平面内完成一个圆周运动时,其在 z 轴上的位移恰好为 $-\frac{1}{2}A$,则有

质点完成一个圆周运动所用时间为 t_1 .

$$t_1 = \frac{2\pi R}{v}$$

质点在 z 方向上位移为 $-\frac{A}{2}$ 时所需时间为 t_2 ,取如图 5-20 所示参考圆研究,质点 R 以 ω 绕其转动,则投影为 Q 点的有两个位置 M, N ,且 $\sin\varphi_0 = \frac{2}{A} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$,又 R 从 P 点出发, $\therefore t_2$ 满足:

$$t_2 = \begin{cases} (2n\pi + \frac{2}{3}\pi) \sqrt{\frac{m}{k}} & n=0,1,2,3,\dots \\ (2n\pi - \frac{2}{3}\pi) \sqrt{\frac{m}{k}} & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

显然,当 $t_1 = t_2$ 时,满足题给要求,由此解得

$$v = \begin{cases} \frac{3}{3n+1} \sqrt{\frac{kR^2}{m}} & n=0,1,2,\dots \\ \frac{3}{3n-1} \sqrt{\frac{kR^2}{m}} & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

同时注意到质点在 xOy 平面上受力为 kR ,所以应保证 v 不能过大而使得该力不足以提供向心力,即

$$m \frac{v^2}{R} \leq kR \Rightarrow v \leq \sqrt{\frac{kR^2}{m}}$$

\therefore 得到 v 的最终解为

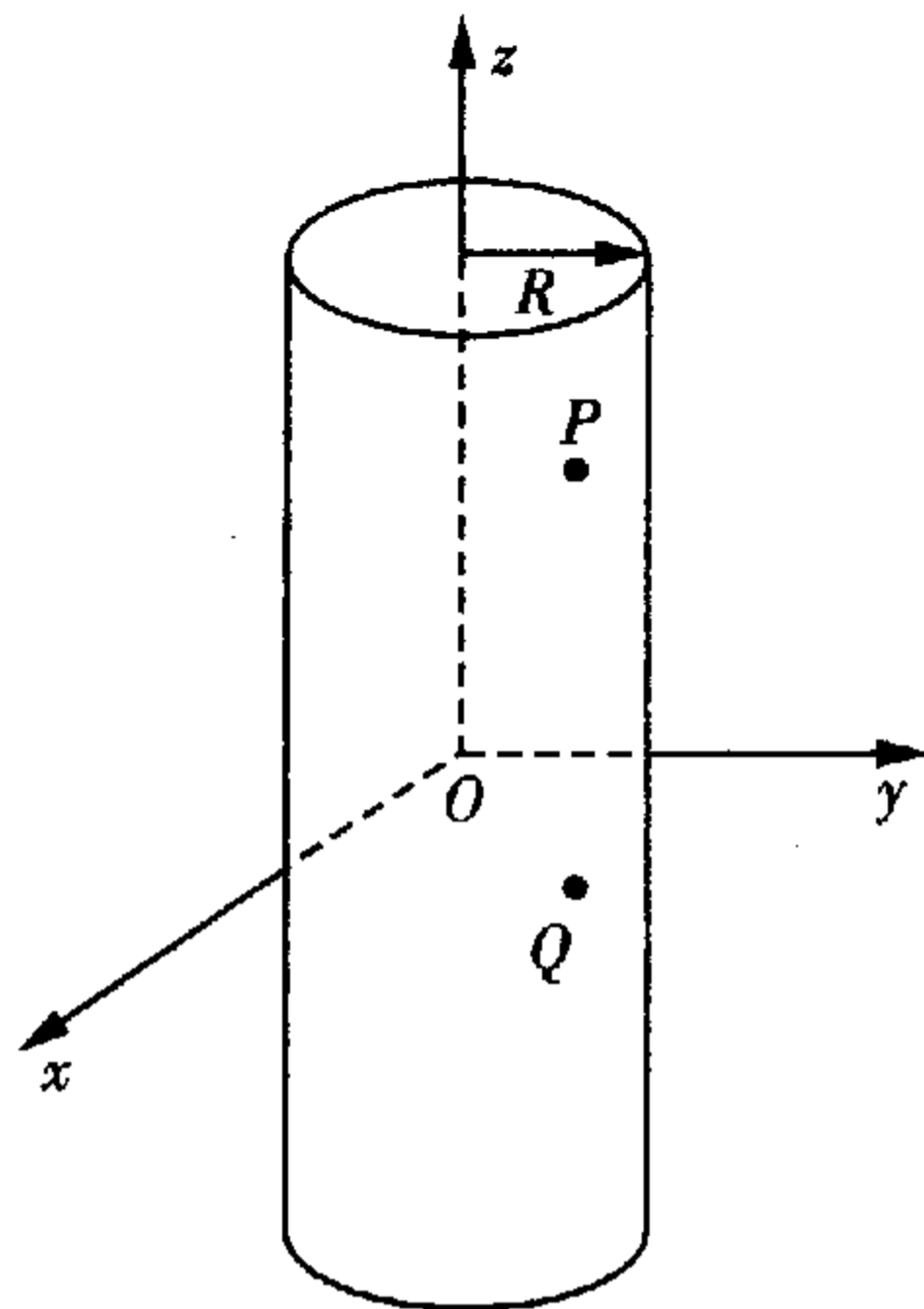


图 5-19

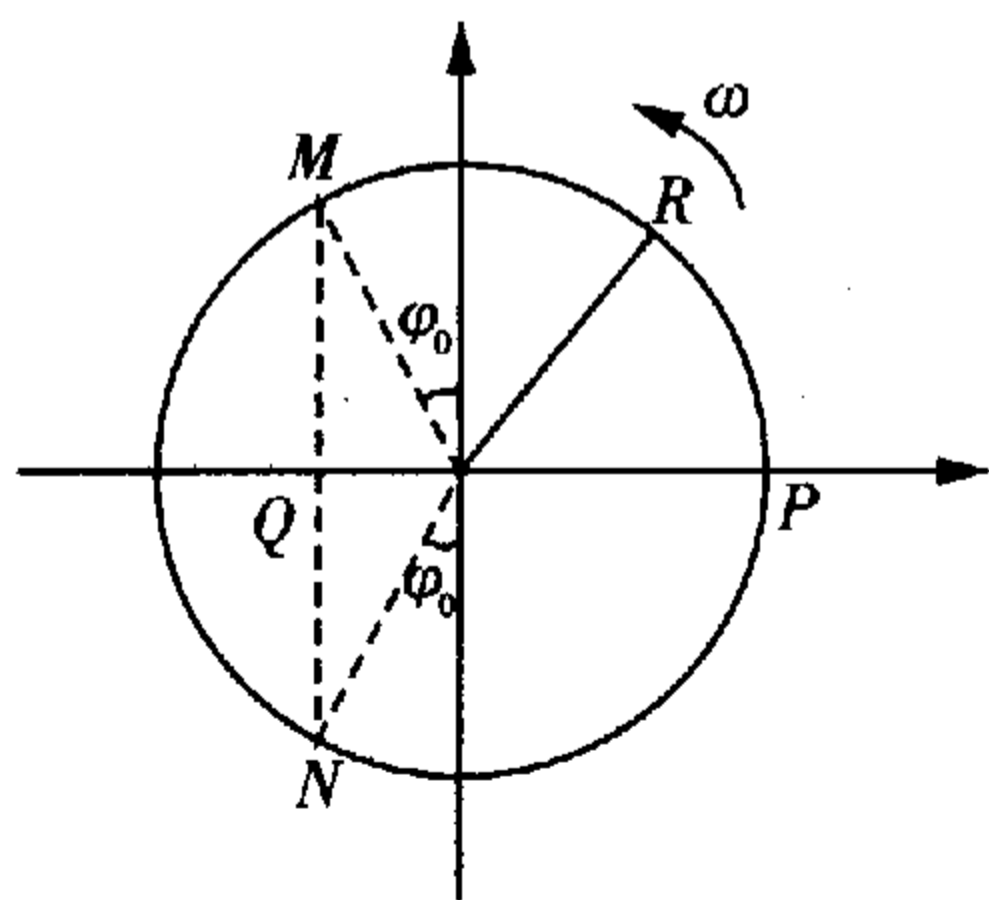


图 5-20

$$v = \begin{cases} \frac{3}{3n+1} \sqrt{\frac{kR^2}{m}} & n=1,2,3\dots \\ \frac{3}{3n-1} \sqrt{\frac{kR^2}{m}} & n=2,3,4\dots \end{cases}$$

方法与技巧 该题应注意两方面:一是质点运动的分解,将其视为一圆周运动与一简谐振动的合成大大简化了运算;二是对 V 的范围的限定,满足题设的同时还应考虑到隐含的限制,即向心力应小于 KR .

例 9 三线摆的模型如图 5-21 所示,水平面内固定一半径为 r 的圆盘,用三根系于该圆盘上的细线悬挂另一半径为 R 的大圆盘, A_1, B_1, C_1 和 A, B, C 分别是两圆盘对应的三等分点,现已知大圆盘质量为 M ,绕 OO' 轴的转动惯量为 I , OO' 距离为 H ,试求大圆盘绕 OO' 轴作微小扭转振动的周期.

解析 设圆盘偏转原位置 θ 角时,其绕 O 点转动的角速度为 ω . 如图 5-22,取 AA_1 绳研究, A 运动到 A' 位置处,质心升高了 h ,则 A' 点的坐标为 $(R \cdot \cos\theta, R \cdot \sin\theta \cdot h)$.

$$\text{绳 } AA_1 \text{ 的长度满足 } l = \sqrt{(R-r)^2 + H^2} \quad \textcircled{1}$$

又 A_1 点坐标为 $(r, 0, H)$,绳在整个运动过程中都是绷紧的,所以 l 又满足

$$l = |A_1A'| = \sqrt{(R \cdot \cos\theta - r)^2 + (R \cdot \sin\theta)^2 + (H-h)^2}$$

$$\text{注意到 } \theta \text{ 为小角,在 } \theta \rightarrow 0 \text{ 情况下有 } \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2,$$

$$\sin\theta = \theta$$

$$\therefore l = \sqrt{R^2 - 2Rr + r^2 + H^2 - 2Hh + R\theta^2 + h^2 + R^2 \frac{\theta^4}{4}}$$

$h^2, \frac{\theta^4}{4}$ 均为高阶无穷小量,这里可以约去.

$$\text{即 } l = \sqrt{R^2 - 2Rr + r^2 + H^2 - 2Hh + Rr\theta^2} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{联立 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 式最终得到 } h = \frac{Rr}{2H}\theta^2.$$

\therefore 圆盘在 θ 位置总机械能 E_0 可写成:

$$E_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mg \frac{Rr}{H} \cdot \theta^2$$

显然,系统机械能是守恒的,则由以上能量式可判断系统的扭转振动为一简谐振动.

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{IH}{mgRr}}$$

方法与技巧 该题不难,却易错,需要足够熟练的近似计算技巧的同时,还要有对几何关系的面面俱到的精细考虑.解题中应注意对 $h^2, \frac{1}{4}\theta^4 R$ 的高阶无穷小量的理解:式中已存在 $2Hh \cdot Rr\theta^2$,相对

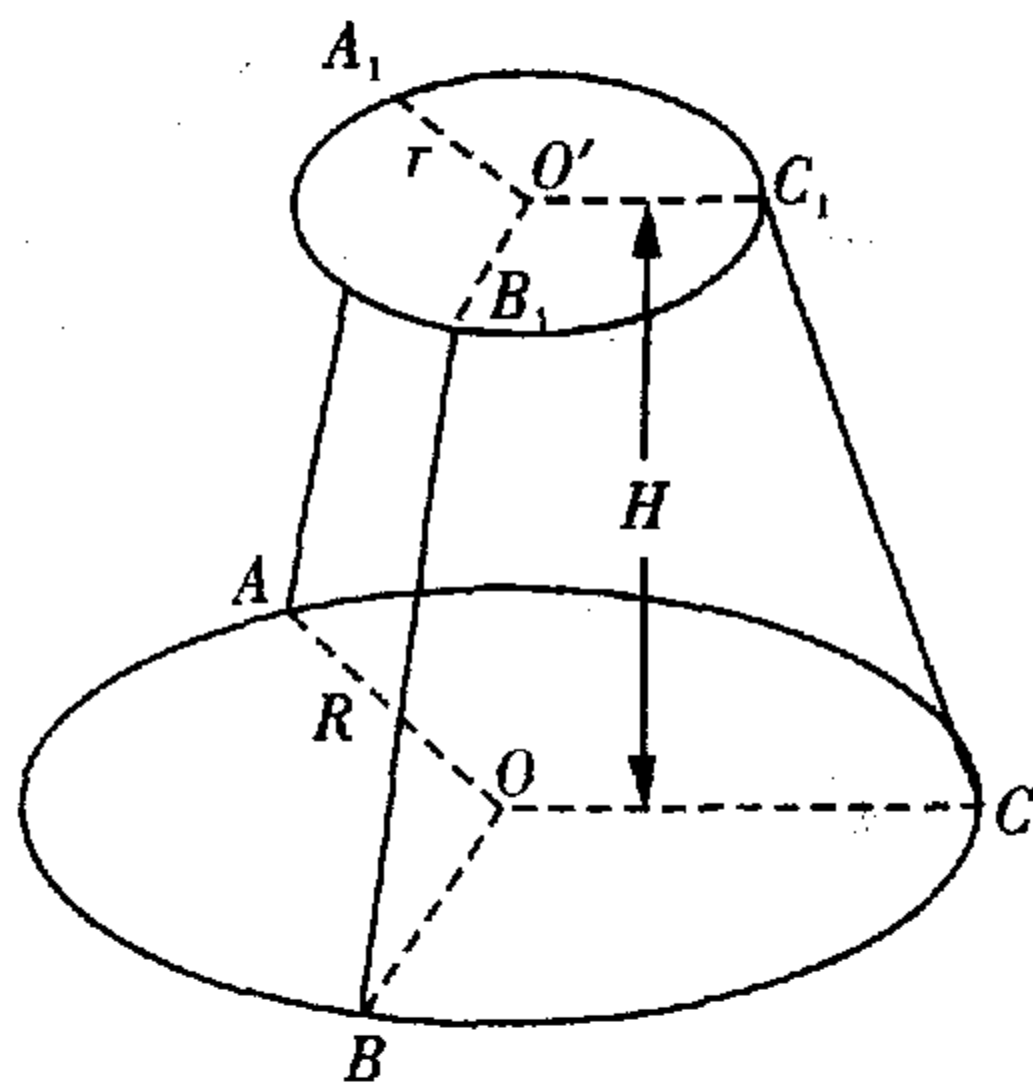


图 5-21

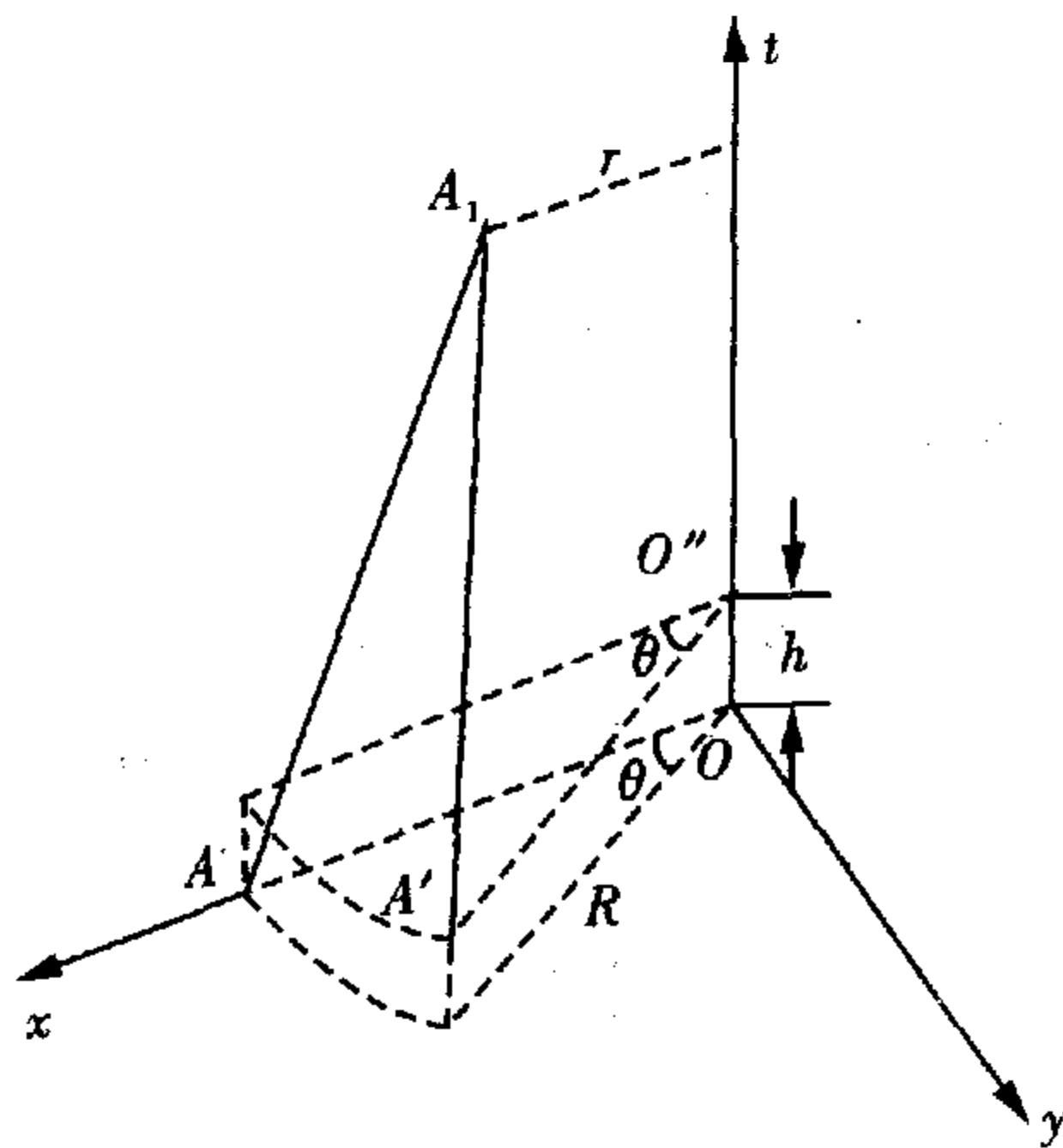


图 5-22

它们而言, h^2 和 $\frac{1}{4}R\theta^4$ 是“无穷小乘以无穷小”, 显然是不影响结果的.

例 10 如图 5-23 所示, 由匀质金属丝做成的等腰三角形可在图示平面内作小振幅振动, 在位置(a)和(b)的情形, 长边是水平的. 所有三种情形的振动周期均相等. 试求出该周期.

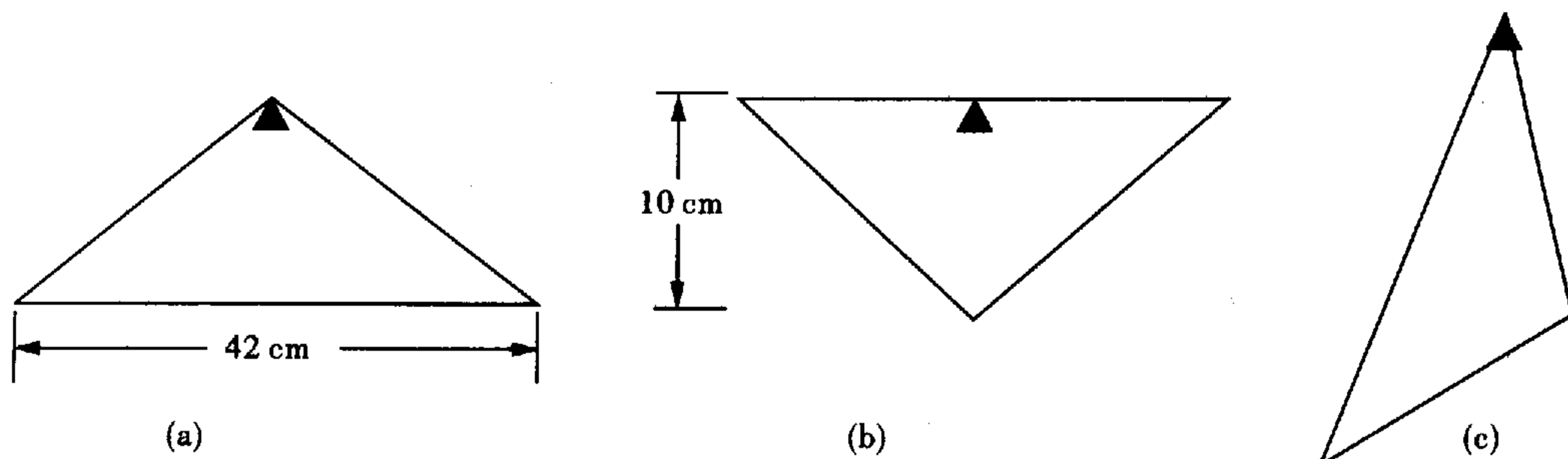


图 5-23

解析 如图 5-24, 设三个悬点分别距金属架 S_a 、 S_b 、 S_c , 对于悬挂点距质心为 S 的复摆的周期 T , 讨论如下:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + mS^2}{mgS}}$$

$$\Rightarrow S^2 - \sqrt{\frac{T^2 g}{4\pi^2}} \cdot S + \frac{I_0}{m} = 0$$

(*)

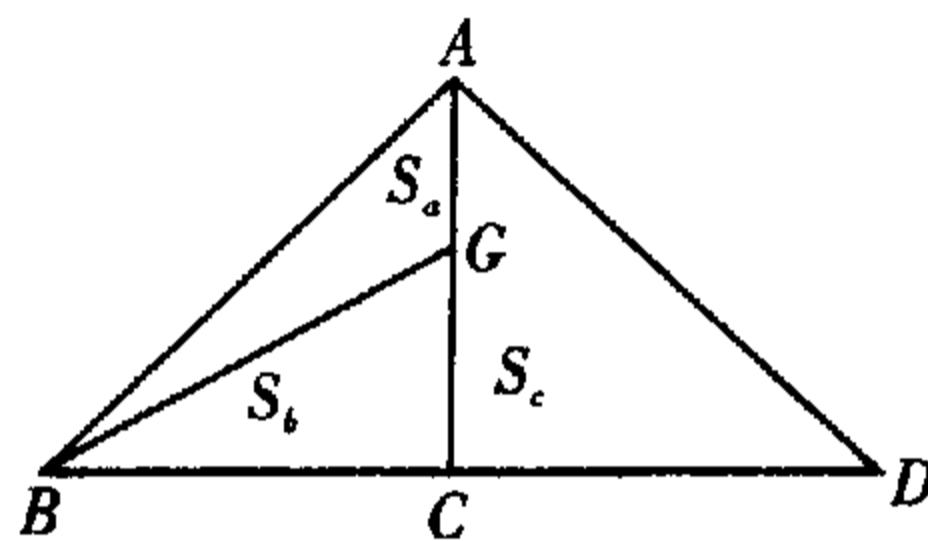


图 5-24

其中 I_0 为系统绕质心的转动惯量. 将 (*) 式视为一关于 S 的一元二次方程, 则当 T 为一确定值时, S 有两值, $\therefore S_a$ 、 S_b 、 S_c 中必有两值是相等的, 又注意到

$$21 \text{ cm} < S_b < |AB| = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 23.3 \text{ cm}$$

$$0 < S_a < 10 \text{ cm}$$

$$0 < S_c < 10 \text{ cm}$$

\therefore 只可能有 $S_a = S_c$, 即 G 位于 AC 的中点,

$$\therefore S_a = S_c = 5 \text{ cm}, S_b = \sqrt{S_c^2 + |BC|^2} = 21.6 \text{ cm}$$

(*) 式的两解为 $S_a = 5 \text{ cm}, S_b = 21.6 \text{ cm}$

$$\therefore S_a + S_b = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$\text{即 } T = 2\pi \sqrt{\frac{S_a + S_b}{g}} = 1.04 \text{ s}$$

方法与技巧 该题中, 悬挂的三角形架为一复摆, 而复摆的周期公式为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$, 对象是刚体, I 为刚体对悬点的转动惯量, h 为质心与悬点间的距离. 另外, 题中得出两位置相异、周期相同的置点与质心间的距离 S_1 、 S_2 满足 $S_1 + S_2 = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$, 与 m, I 无关, 这是一个非常重要的结论, 请读者注意.

例 11 如图 5-25 所示, 若在地球表面上 A 、 B 两点间打通一光滑对称折线隧道, 质点 m 由 A 静

止开始运动,运动至折点 C 时,该质点可通过弧形光滑轨道转入 CB 轨道,最后再从 B 点出来. 求 A 到 B 的最优折线和此时的最短时间. 角度 φ 已知,地球半径为 R ,重力加速度为 g ,最优意指所需时间最少.

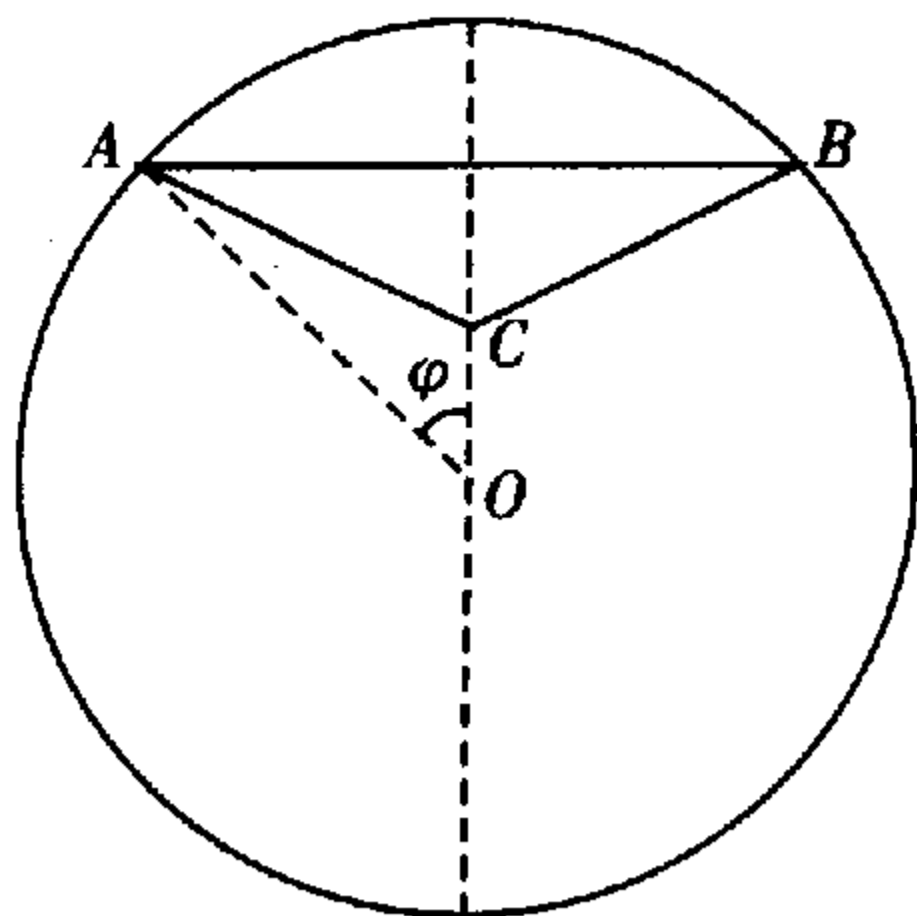


图 5-25

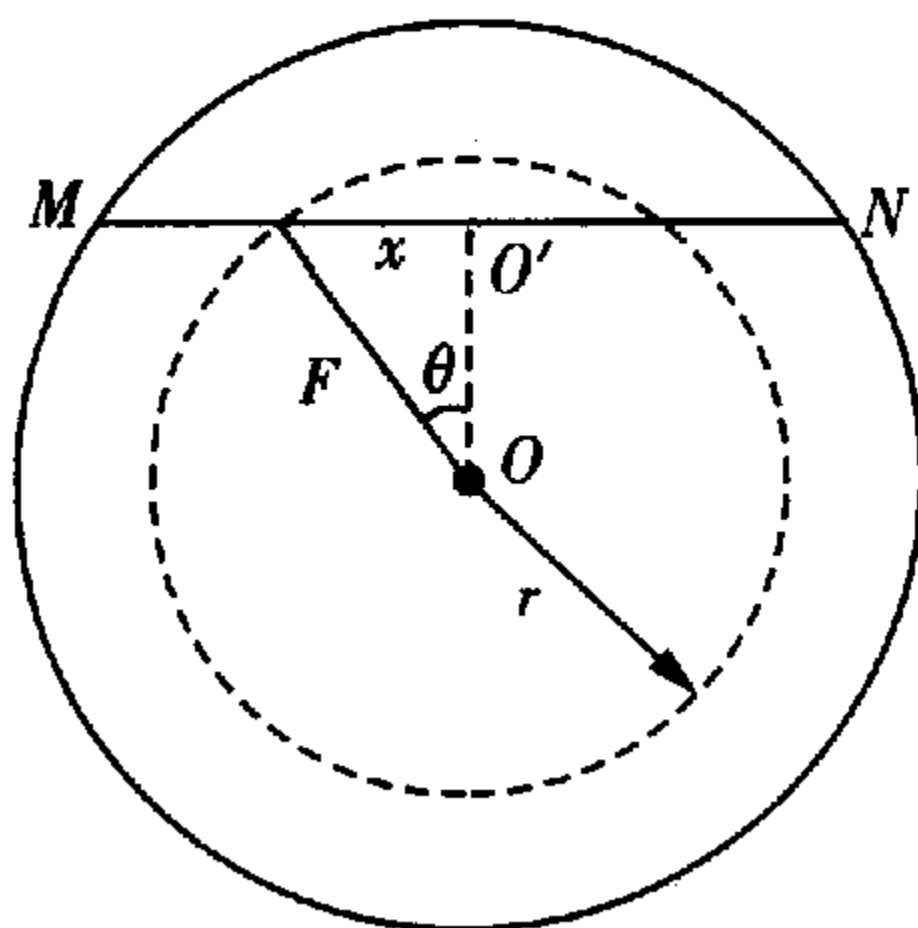


图 5-26

解析 如图 5-26 所示,先分析地球内任意一条直轨道 MN , O' 为 MN 的中点,取其为坐标原点,则质点 m 运动到 x 处时,其受到的地心引力为

$$F = -\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \cdot m}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho m \cdot r$$

F 沿 MN 方向的分量为

$$f = F \sin \theta, \text{ 又 } \sin \theta = \frac{x}{r}$$

$$\therefore f = -\frac{4}{3}\pi G \rho m x = -\frac{mg}{R}x$$

即无论 MN 怎样选取,质点均会在其间作简谐振动,且周期是相等的, $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

下面回到题给模型中来,如图 5-27 设 $\angle ACE = \alpha$,作 $OD \perp AC$ 于 D ,则 D 即为质点在 AC 中运动时的平衡位置

$$\angle AOD = \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{则质点振动的振幅 } |AD| = R \cdot \sin \angle AOD = R \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$

$$\text{在 } \triangle AOC \text{ 中, } \frac{\sin \theta}{R} = \frac{\sin \varphi}{|AC|}$$

$$\therefore |AC| = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} R$$

\therefore 取图 5-28 中的参考圆研究,则质点从 A 到 C ,走过的相位 Φ 满足:

$$\cos \Phi = \frac{|AD| - |AC|}{|AD|} = \frac{\cos(\varphi - \alpha) - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

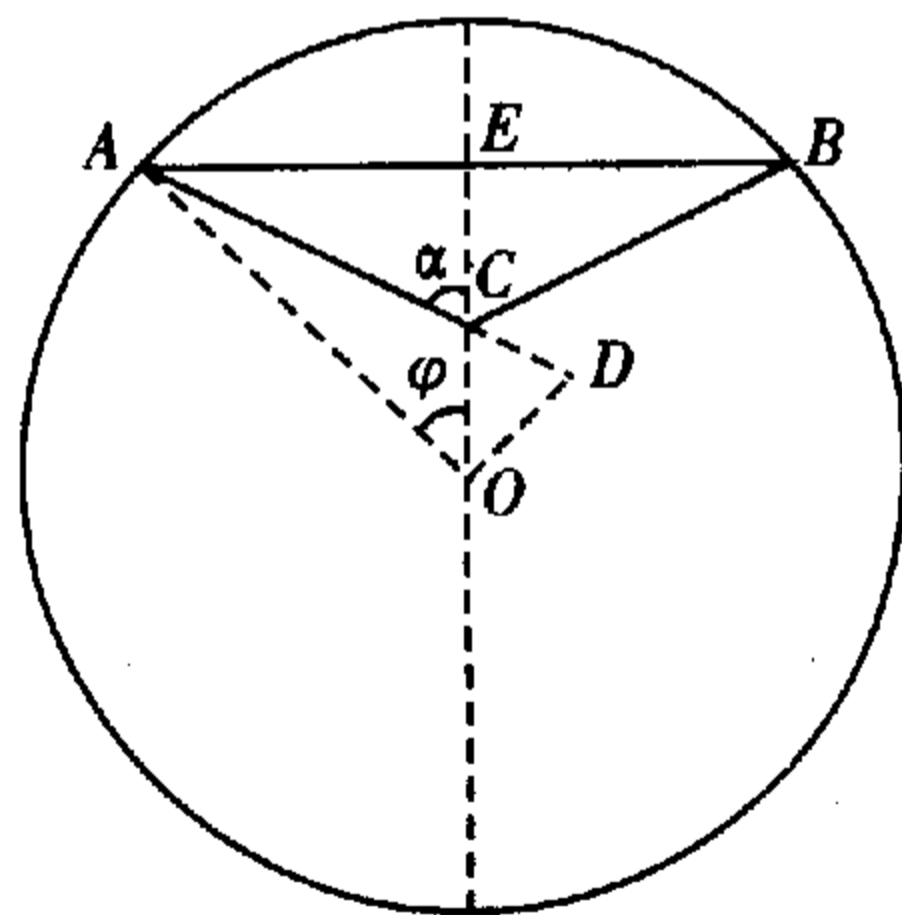


图 5-27

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)} \\
 &= 1 - \frac{\sin\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)\sin\varphi} \\
 &= 1 - \frac{2\sin\varphi}{\sin(2\alpha - \varphi) + \sin\varphi}
 \end{aligned}$$

当质点在 AC 中运动的时间最少时, Φ 值最小, 也即 $\cos\Phi$ 最大. 所以满足最优折线的 α_c 应有

$$2\alpha_c - \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_c = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

且 $\cos\Phi_{\min} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}$

∴ 由于 AC、BC 完全对称, 得到质点运动的最短时间为

$$T_{\min} = \frac{2\Phi_{\min}}{\omega} = 2\arccos \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

方法与技巧 该题的关键在于将质点在 ACB 中的运动与简谐振动联系起来, 利用简谐振动中的已有结论来解决实际的模型.

例 12 在水平放置的固定不动的圆柱形容器中有一质量为 M , 可无摩擦移动的活塞. 假设在容器中有两个具有相同质量 $m \ll M$ 的小球沿水平轴高速运动, 如图 5-29 所示. 当活塞刚好在容器中央的平衡位置时, 每个小球与活塞碰撞的频率为 f . 如果活塞被稍微推离平衡位置, 活塞将开始作简谐振动. 把小球与活塞及容器壁的碰撞看作完全弹性的, 试确定该振动的周期.

解析 如图 5-30, 先分析活塞的移动与小球碰撞活塞的频率 f_c 的关系. 由于 M 是作小幅振动, 而 m 在作高速运动, 则 M 移动的速度 u 和 m 运动的速度 v 满足 $u \ll v$. 设小球初速度为 v_0 , M 一侧圆筒原长为 l_0 , 分析球与活塞的第一次碰撞有

$$\begin{cases} l_0 + (l_0 - \Delta l_1) = v_0 \Delta t_1 \\ \Delta l_1 = u \Delta t_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{2u}{v_0 + u} l_0, \Delta t_1 = \frac{2l_0}{v_0 + u}$$

碰后 m 的速度为 $v_1 = v_0 + 2u$

$$\begin{aligned}
 \text{圆筒长度变为 } l_1 &= l_0 - \Delta l_1 = \frac{v_0 - u}{v_0 + u} l_0 \approx \frac{v_0 - u}{v_0} \left(1 - \frac{u}{v_0}\right) l_0 \\
 &= \left(1 - \frac{u}{v_0}\right)^2 l_0 \approx \left(1 - \frac{2u}{v_0}\right) l_0
 \end{aligned}$$

依此类推, 则有

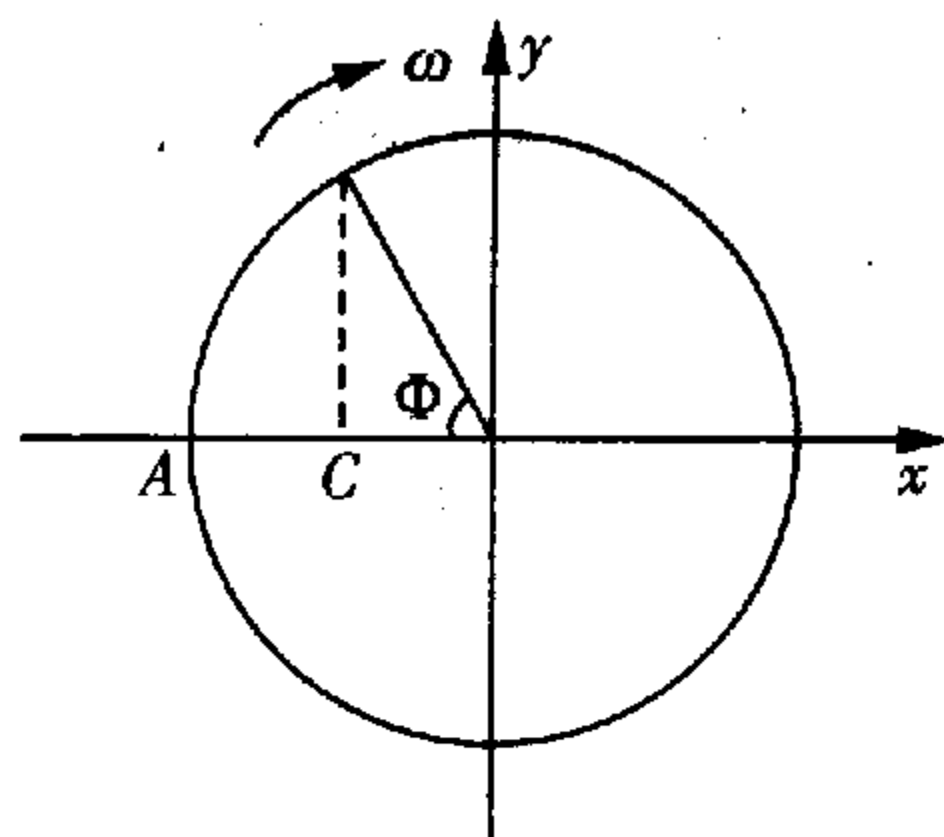


图 5-28

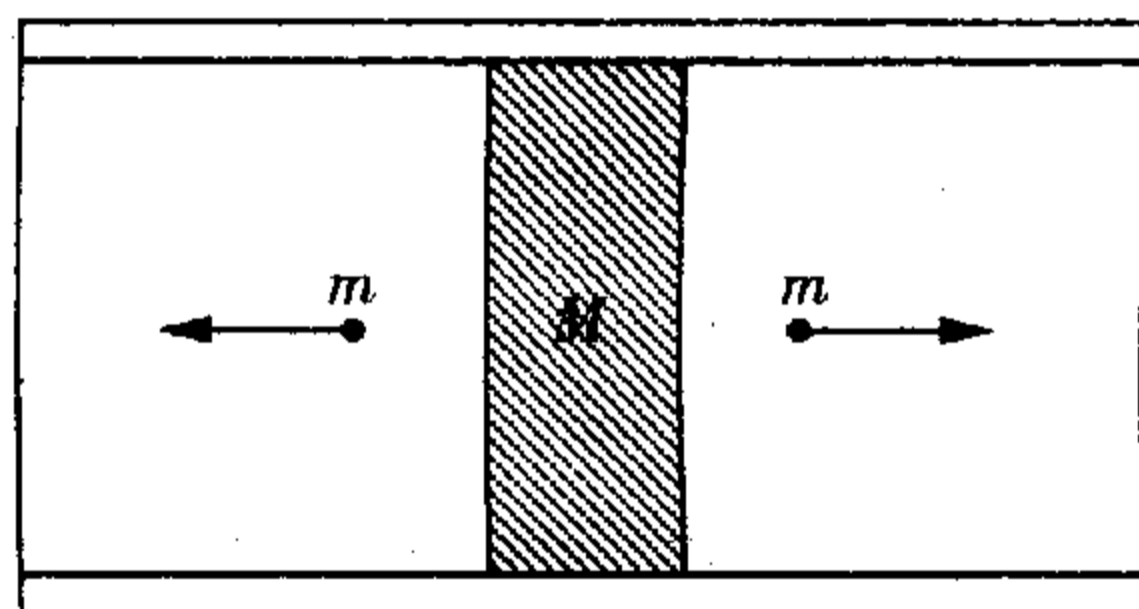


图 5-29

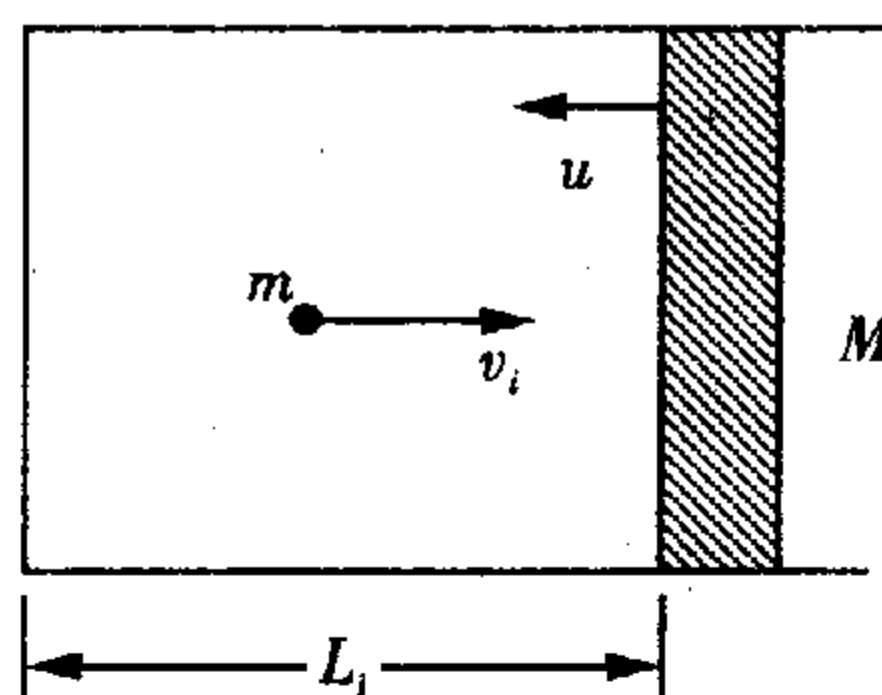


图 5-30

$$v_2 = v_1 + 2u = v_0 + 4u, l_2 = (1 - \frac{2u}{v_0})l_1 = (1 - \frac{4u}{v_0})l_0$$

$$v_3 = v_0 + 6u, l_3 = (1 - \frac{6u}{v_0})l_0$$

$$v_n = v_0 + 2nu, l_n = (1 - \frac{2nu}{v_0})l_0$$

$$\begin{aligned} \text{注意到 } v_n l_n &= v_0 l_0 (1 + \frac{2nu}{v_0})(1 - \frac{2nu}{v_0}) \\ &= v_0 l_0 (1 - \frac{4n^2 u^2}{v_0^2}) \end{aligned}$$

在 M 作小幅振动前提下有 $v_n l_n \approx v_0 l_0$
即 $vl = c, c$ 为常数.

$$\text{又 } f_c = \frac{v}{2l}, \therefore \text{有 } 2f_c l^2 = c$$

对于每个 m 对 M 的作用力,注意到在周期 T 时间内, m 与 M 碰一次,传递给 M 的动量为 $\Delta P = 2mv$

$$\therefore F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv}{T} = 2mf_c = 4mf_c^2 l$$

当 M 位于平衡位置时作用力为 $F_0 = 4mf^2 l_0$.

现将 M 向右移动 $\Delta l, \Delta l \ll l_0$, 则对右边圆筒内的 m , 有

$$f'^2 (l_0 - \Delta l) = f^2 l_0 \Rightarrow f' = f(1 + \frac{2\Delta l}{l_0})$$

$$f' = 4mf'^2 (l_0 - \Delta l) = 4mf^2 l_0 (1 + 2\frac{\Delta l}{l_0})^2 \cdot (1 - \frac{\Delta l}{l_0})$$

$$= 4mf^2 l_0 (1 + 4\frac{\Delta l}{l_0})(1 - \frac{\Delta l}{l_0})$$

$$= 4mf^2 l_0 [1 + 3\frac{\Delta l}{l_0} - 4\frac{(\Delta l)^2}{l_0^2}]$$

$$\approx 4mf^2 l_0 (1 + 3\frac{\Delta l}{l_0})$$

同理,对于左侧小球则有

$$F'' = 4mf^2 l_0 (1 - 3\frac{\Delta l}{l_0})$$

$\therefore M$ 所受的合力 f 满足:

$$f = F'' - f' = -24mf^2 \Delta l$$

如图 5-31 所示,即 M 的小幅振动为一简谐振动,其周期 T_0 为

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{24mf^2}} = \pi \sqrt{\frac{M}{6mf^2}}$$

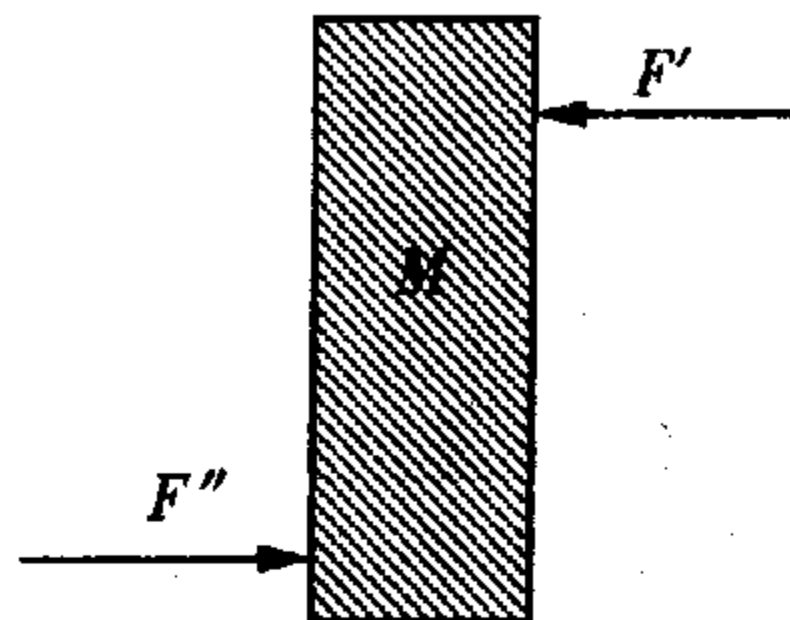


图 5-31

方法与技巧 在该题的解答过程中,应切记, M 的移动不仅会改变两侧小球来回运动的路程,还会改变它们来回运动的速度,由此而产生了两侧小球对 M 的作用力的变化,进而驱动 M 来回振动.

【解题尝试】

1. 如图 5-32 所示是一种记录地震装置的水平摆, 摆球 m 固定在边长为 l , 质量可忽略不计的等边三角形的顶点 A 上, 它的对边 BC 跟竖直线成不大的夹角 α , 摆球可绕固定边 BC 摆动, 求摆球作微小摆的周期.
2. 相距 $l = 100 \text{ m}$ 的两个波源沿着它们连线方向, 向两边发出平面简谐波, 两波源频率同为 $f = 50 \text{ Hz}$, 振幅同为 $A = 0.1 \text{ m}$, 波长同为 $\lambda = 2 \text{ m}$, 振动相位相反. 求两波源之间发生干涉相长和相消的各点的位置, 以及两波源外侧各点的振幅.
3. 如图 5-33 所示, 用一个小重球 A 和一根长为 l 的轻杆组成一个单摆, 杆的一端用铰链固定在天花板的 B 点上. 未发生形变时原长接近 0 的两根理想弹簧, 一端固定在小球上, 另一端分别固定在天花板的 O 点和 K 点, O, K 与 B 的距离均为 l . 已知弹簧和杆的运动都在同一个竖直平面内进行, 求单摆微小振动的周期.

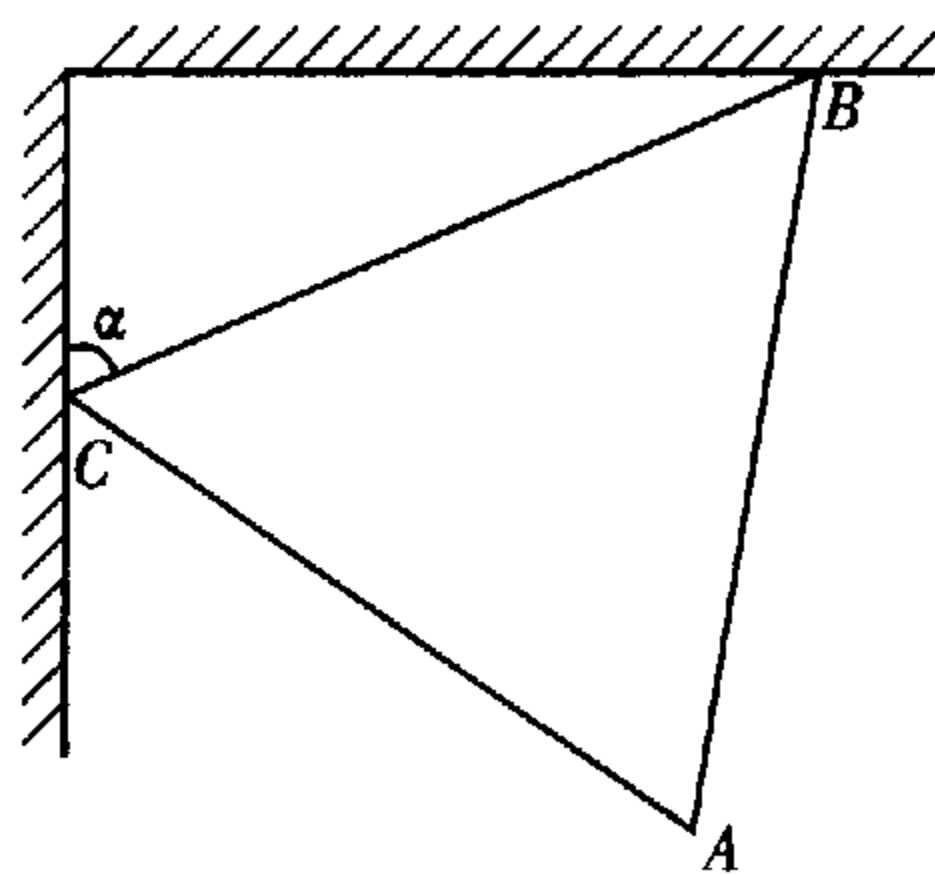


图 5-32

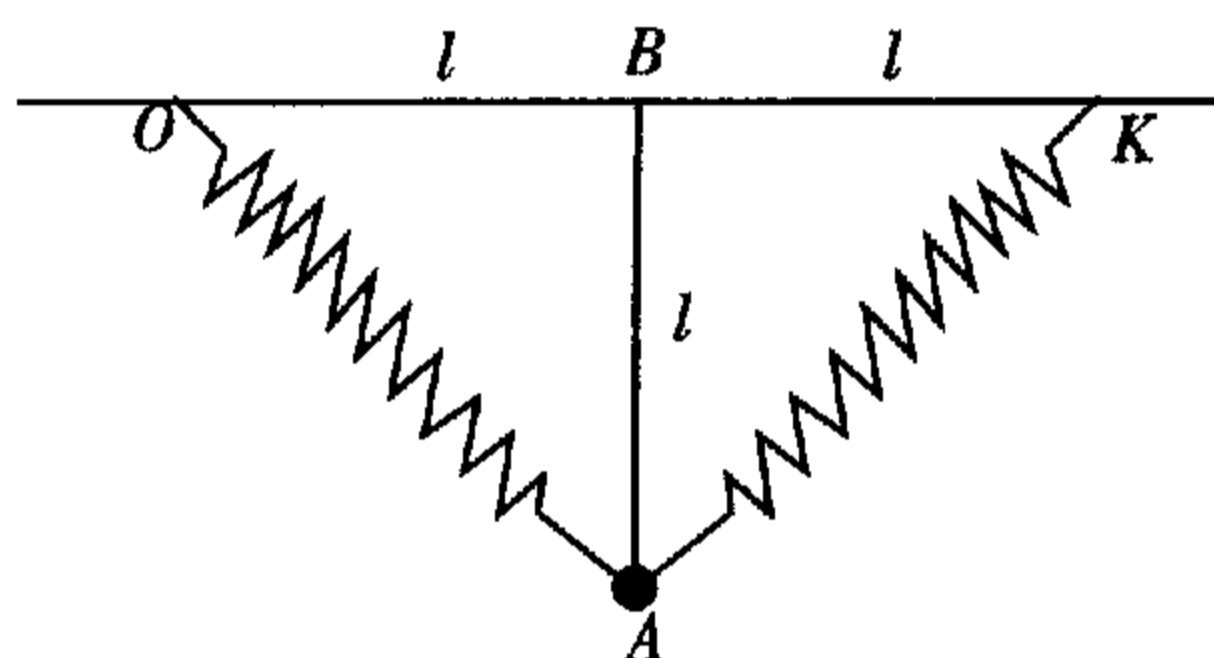


图 5-33

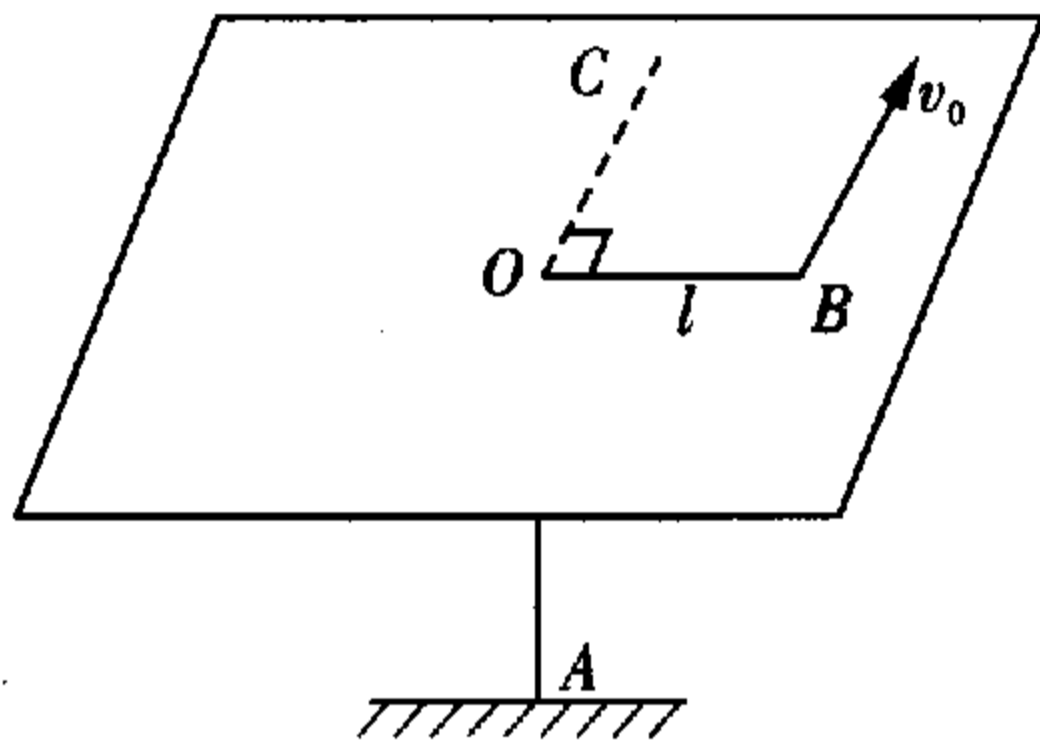


图 5-34

4. 如图 5-34 所示, 在水平光滑桌面上的中心有一光滑小孔 O . 一条劲度系数为 K 的轻而细的弹性绳穿过小孔 O , 绳的一端固定在 A 点 (A 点位于小孔正下方), 另一端系一质量为 m 的质点. 弹性绳自然长度等于 OA . 现将质点沿桌面拉至 B 处, $OB = l$, 并将质点沿垂直于 OB 方向以速度 v_0 沿桌面抛出. 试求:
 - (1) 质点绕 O 点转过 90° 至 C 点所需时间.
 - (2) 质点到达 C 点时的速度及 C 点至 O 点的距离.
5. 如图 5-35 所示, 弹簧与细绳质量可忽略, 不计摩擦. m_1, m_2 、滑轮质量 M 及弹簧劲度系数 K 均已知. 设细绳足够长, 能使滑轮上、下振动一段时间, 试求滑轮的振动周期.
6. 图 5-36 是放置在水平面上的两根完全相同的轻质弹簧与一个质量为 m 的物体组成的振子, 每根弹簧的劲度系数均为 K , 弹簧的一端固定在墙上, 另一端与物体相连, 物体与水平面间的动摩擦因数和静摩擦因数均为 μ . 当弹簧恰为原长时, 物体位于 O 点. 现将物体向右拉离 O 点至 x_0 处, 然后将物体由静止释放, 设弹簧在被压缩及拉长时其整体并不弯曲, 一直保持在一条直线上. 现规定物体从最右端运动至最左端, 或最左端至最右端为一个振动过程. 求:
 - (1) 从释放到物体停止运动, 物体共经历了多少个运动过程?

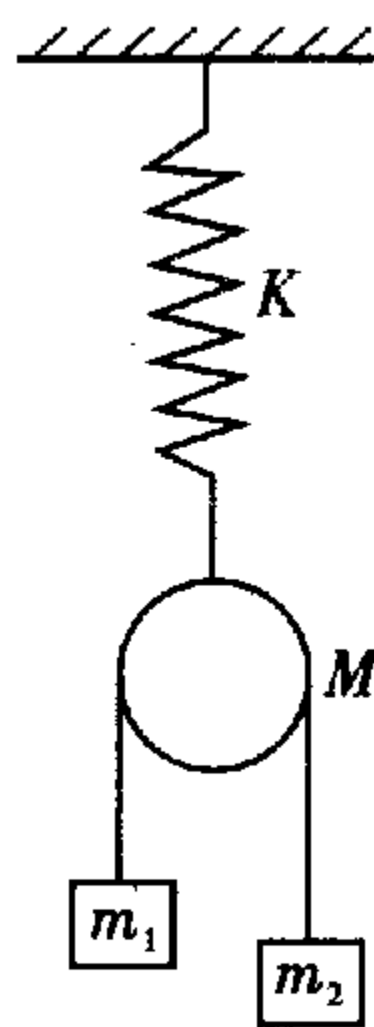


图 5-35

- (2) 从释放到物体停止运动, 物体共运动了多长时间?
 (3) 物体最后停在什么位置?
 (4) 整个过程中物体克服摩擦力做了多少功?

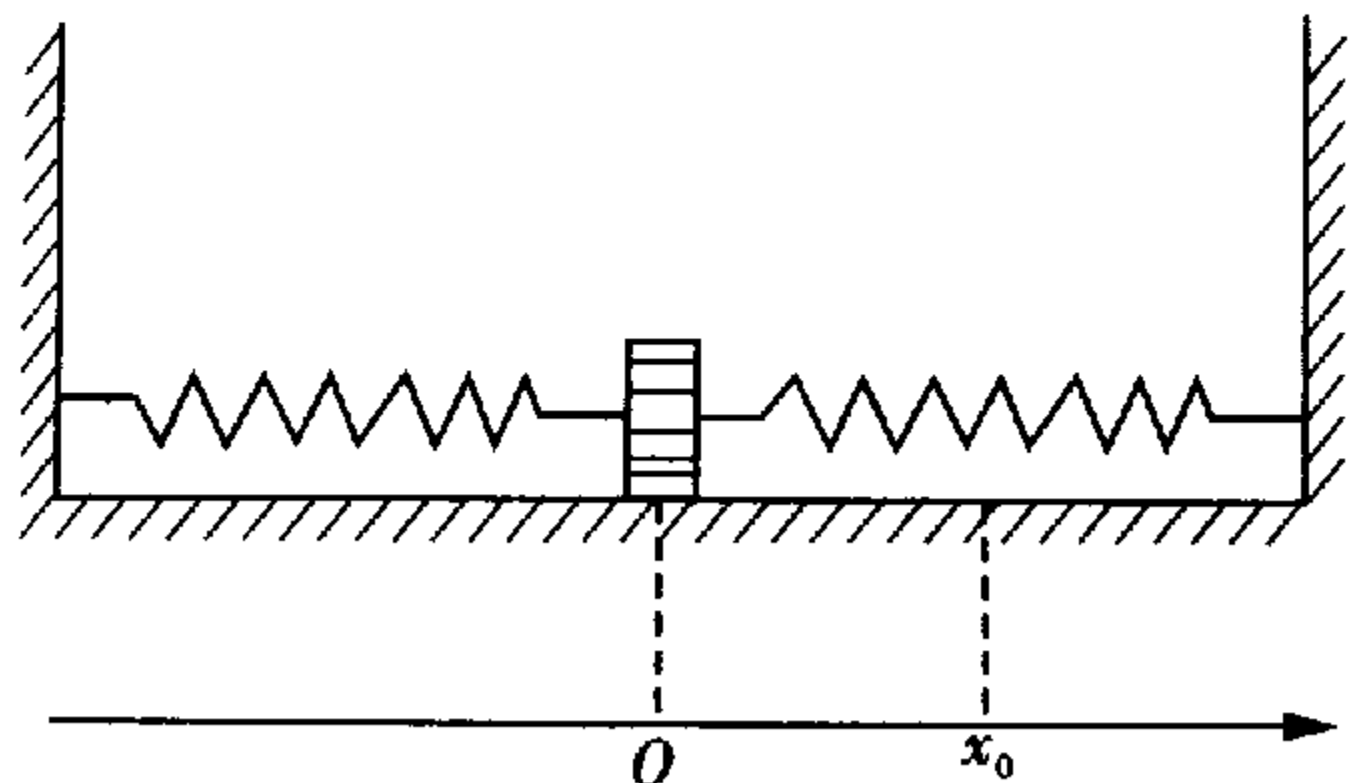


图 5-36

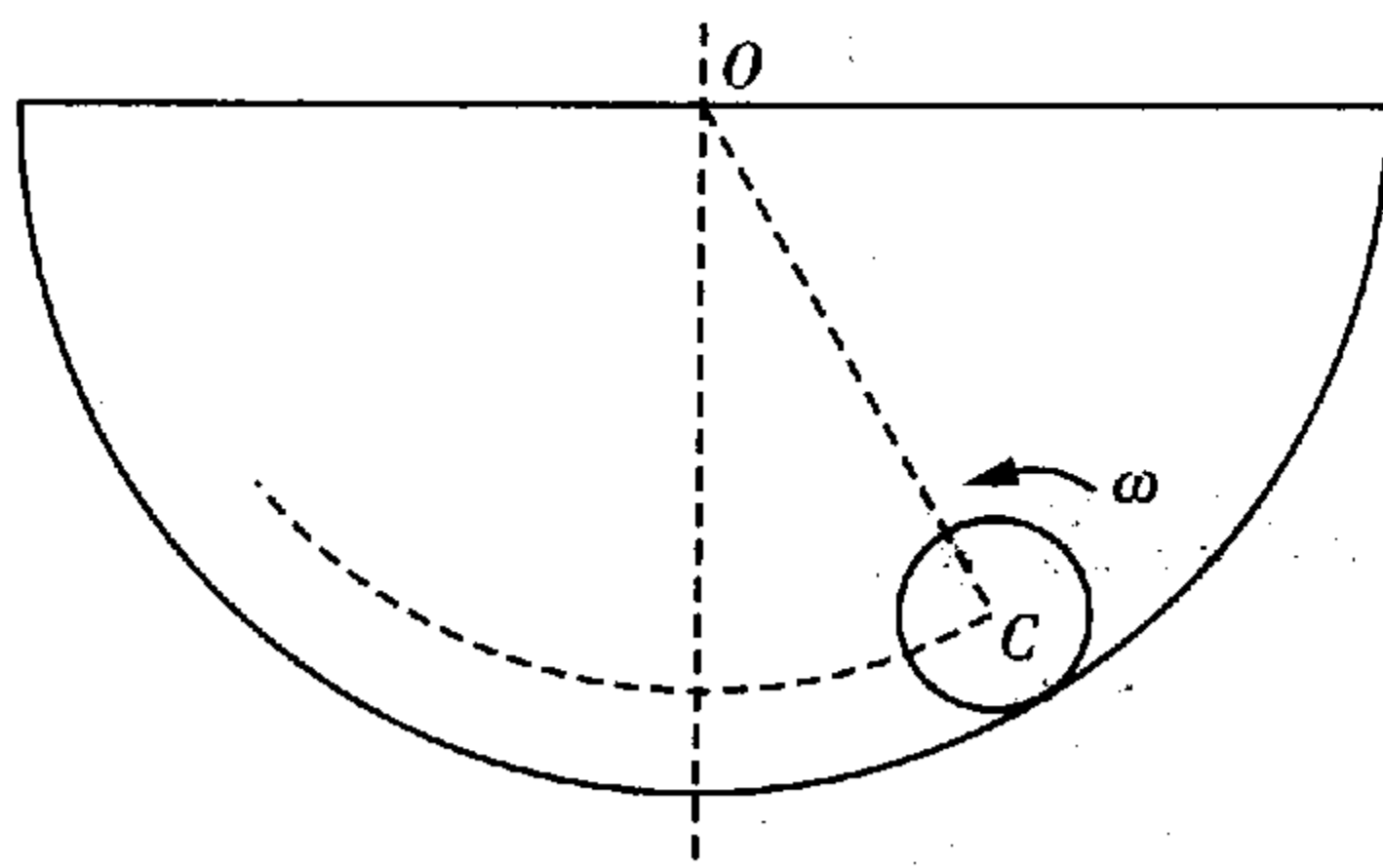


图 5-37

7. 如图 5-37, 半径为 r 的小球在半径为 R 的半球形大碗内来回作幅度很小的纯滚动, 试求其运动的周期.
8. 如图 5-38 所示, 质量为 m 、长为 L 的均匀长方形木板由劲度系数分别为 K_1 、 K_2 的两竖直弹簧在两端支撑, 平衡时木板位于水平面. 试求木板作小幅振动时的特征频率.
9. 一列简谐横波沿水平轴传播, 某刻, 轴上相距为 S 的 A 、 B 两点均处于平衡位置, 且此时 AB 间仅有一波峰. 历时 t 后, B 点位于波峰, 求此波的波速为多少.
10. 如图 5-39, 一根无限长弹簧振子链, 所有弹簧的劲度系数皆为 k , 自然长度为 $\frac{a}{2}$, 振子质量为 m 和 m' 相间.

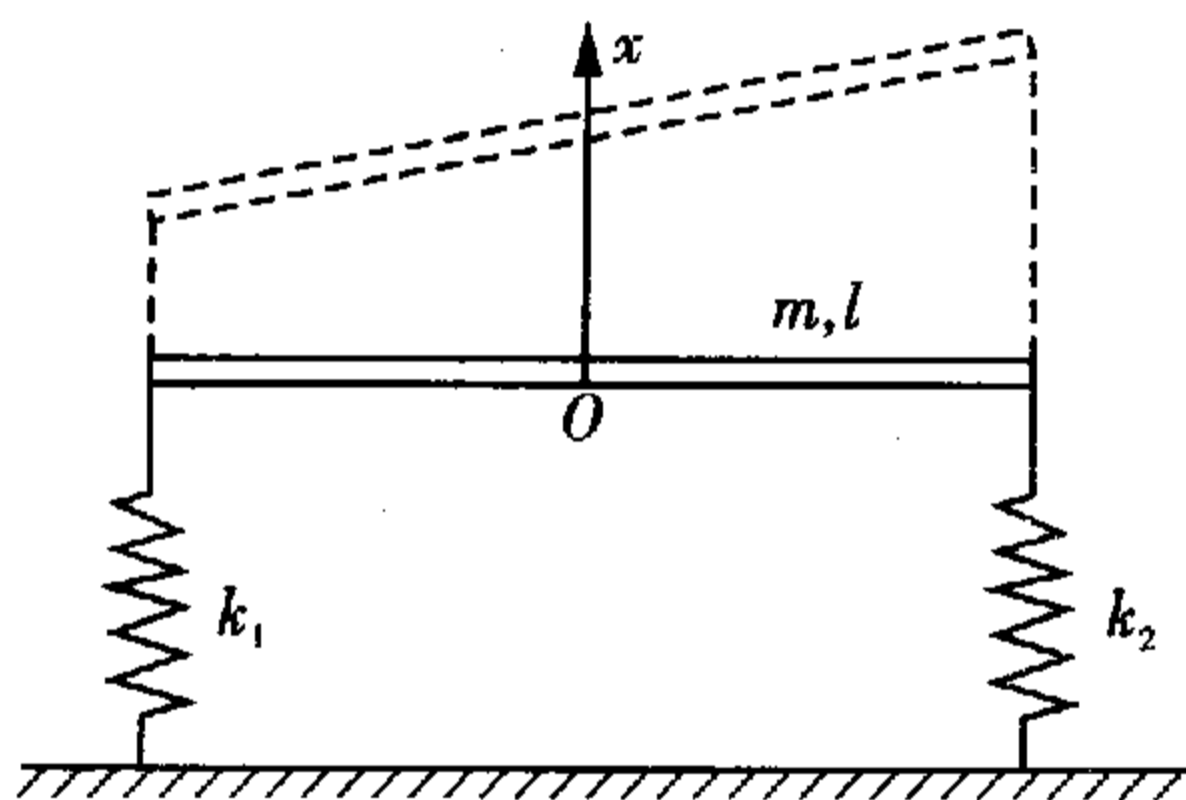


图 5-38

试证明: 此链有两个特征频率, 即对应每个波长 λ ($\lambda \gg a$) 有两个角频率 $\omega_1(\lambda)$ 和 $\omega_2(\lambda)$, 在 $m \gg m'$ 的情况下有:

$$\begin{cases} \omega_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2K}{m}} \sin \frac{a}{\lambda} \pi \\ \omega_2(\lambda) = \sqrt{\frac{2K}{m}} \end{cases}$$

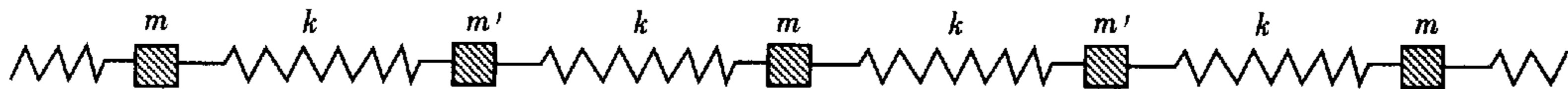


图 5-39

第六章 气体 液体 固体

【学习目标】

一、气体

1. 气体实验定律

(1) 玻意耳定律: m, T 一定, $P_1 V_1 = P_2 V_2$

(2) 查理定律: m, V 一定, $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

(3) 盖·吕萨克定律: m, P 一定, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

2. 理想气体状态方程

$$PV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

气体普适恒量 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} = 8.2 \times 10^{-2} \text{ atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K} = 2 \text{ Cal/mol} \cdot \text{K}$

由理想气体状态方程可以得到其他结果:

(1) 气体的密度:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}, \quad \frac{P_1}{T_1 \rho_1} = \frac{P_2}{T_2 \rho_2}$$

(2) 气体的分合关系: 将气体分成若干部分或将若干部分气体合在一起, 其间气体质量保持恒定, $m = \sum_i m_i$. 有

$$\frac{PV}{T} = \sum_i \frac{P_i V_i}{T_i}$$

(3) 气体的压强: 由于气体的物质的量 $\nu = m/\mu = N/N_A = PV/RT$, 因而

$$PV = (N/N_A) RT = NkT$$

$$P = nkT$$

式中分子数密度 $n = N/V$, 阿伏伽德罗常数 $N_A = 6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$, 玻耳兹曼常数 $k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. 可见, 气体的压强宏观上取决于气体的密度和温度.

3. 混合理想气体

(1) 道尔顿定律: 混合气体的压强等于各组分分压强的和, $P = \sum_i P_i$.

(2) 混合气体的平均摩尔质量:

$$\mu = m / \sum_i \nu_i = 1 / \sum_i \frac{1}{\mu_i} \frac{m_i}{m}$$

(3)混合理想气体状态方程:

$$PV = (\sum_i P_i)V = (\sum_i \frac{m_i}{\mu_i})RT = \frac{m}{\mu}RT$$

4. 理想气体的温度

$\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$ 是气体分子的平均平动动能,可以得到

$$\overline{\varepsilon_k} = \frac{3}{2}kT$$

气体的温度是分子热运动平均平动动能大小的标志. 进一步说,无论在固体、液体或气体中,温度都是其分子热运动平均动能的标志,是物体分子热运动激烈程度的宏观表现.

5. 理想气体的内能

由于理想气体分子间不存在分子力,也就没有分子力势能. 因此,理想气体的内能就是气体所有分子热运动动能的总和,即

$$E = N \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}PV = \frac{m}{\mu}(\frac{i}{2}R)T$$

式中 i 叫分子的自由度. 单原子分子可看作质点 $i=3$, 双原子分子是线状分子, $i=5$. 一定质量理想气体内能的改变量是

$$\Delta E = \frac{m}{\mu}(\frac{i}{2}R)\Delta T$$

二、液体

1. 液体的表面张力

存在于液体表面层能使液面相互收缩的拉力叫表面张力. 其方向与所取分界线段垂直、与液面相切. 其大小为

$$f = \sigma L$$

式中 σ 在数值上等于单位长度线段上的表面张力,叫表面张力系数,单位是 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. 它与液体的性质(种类、纯净度等)、温度有关,与液面大小无关. 同一种液体的表面张力系数随温度的升高而减小.

2. 浸润现象

液体表面层总有收缩趋势. 与固体相接触的液体薄层叫附着层. 液体的附着层有的有收缩趋势,有的有伸展趋势,这要由两接触物质的相对性质来决定. 附着层伸展,就说液体浸润该固体;若附着层收缩,就说液体不浸润该固体. 例如水能浸润玻璃,但水不浸润石蜡.

为了描述液体浸润固体的情况,引入接触角,即在固、液、气接触处,液体表面层的切线与附着层的切线之间夹液体的角. 能浸润固体的液体的接触角是锐角, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. 不能浸润固体的液体的接触角是钝角, $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

在细管内,若液体浸润管壁,管内液面呈凹的弯月面;若液体不浸润管壁,管内液面呈凸的弯月面. 液体完全浸润管壁($\theta=0$),弯月面是以管径为直径的凹半球面;液体完全不浸润管壁($\theta=\pi$),弯月面是以管径为直径的凸半球面.

3. 毛细现象

浸润液体在细管里上升,而不浸润液体在细管里下降的现象称为毛细现象. 能发生毛细现象的

细管称为毛细管. 毛细管内浸润液体的液面上升高度:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}$$

式中 r 是毛细管半径, θ 是接触角, ρ 是液体密度.

三、固体

1. 晶体与非晶体

固体常分晶体和非晶体. 晶体又有单晶体和多晶体之分. 单晶体是整个物质就是一个完整的晶体, 因此它有规则的几何外形, 是各向异性的(即不同方向上具有不同的物理性质). 多晶体是大量小单晶粒杂乱无章的聚集体, 如金属、岩石等, 因此它没有规则的外形, 是各向同性的.

非晶体(玻璃、橡胶、塑料、沥青等)也没有规则的几何外形, 也是各向同性的. 但晶体和非晶体的主要区别是晶体具有确定的熔点, 即晶体在熔解或凝固的过程中, 温度保持不变. 非晶体的温度升高时, 会由硬变软, 再变稠变稀而为液体, 无明显的熔点可言.

2. 空间点阵

从微观结构上看, 晶体是由大量物质微粒在空间周期性规则排列组成的. 其微粒质心所在的几何点叫结点. 结点在空间排列的总体叫空间点阵. 点阵结构具有周期性和对称性.

3. 物质分子热运动特点的比较

由于晶体中微粒间的作用力很强, 占主要地位. 微粒的热运动主要表现为以结点为平衡位置的微振动, 这称为热振动. 其振动的时间、方向、振幅、频率等都是杂乱无章的.

气体中分子间距大, 分子力往往可以忽略, 热运动占主要地位. 分子能在空间自由运动, 是完全无序的. 因此它充满能到达的空间, 没有一定的体积和形状, 容易被压缩, 具有流动性.

液体分子间距离小, 相互作用力较强, 其分子热运动主要表现为在平衡位置作微振动, 但它也能迁移到新的平衡位置振动. 因此宏观上表现出不易压缩, 具有一定体积的特点, 这像固体; 同时它具有流动性、没有固定形状, 这像气体. 可见液体的性质是介于气体与固体之间的.

【 解 题 钥 匙 】

例 1 一个装有进水孔 a 和排水孔 b 的铁质水箱, 其质量为 840 kg 、容积为 1 m^3 , 此箱不慎沉入湖底, 箱内充满了水, 湖面与 b 相距 10 m (图 6-1). 今采用充气法打捞水箱, 先将管子与 a 相接, 用压气机把空气打进箱内, 使箱内的水排出一部分. 试问要打进 1 atm 、 27°C 的空气多少体积后铁箱才开始上浮? 设湖底水温 7°C , 空气的重量和箱壳的体积可以忽略, 水的密度随湖深的变化也可忽略.

解析 设充气使水箱内空气体积为 V 时, 水箱刚好能上浮, 应有

$$\rho V g = m g$$

式中水的密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, 水箱质量 $m = 840 \text{ kg}$, 得

$$V = 0.84 \text{ m}^3$$

此体积小于水箱容积 1 m^3 , 表明充气使水箱上浮的做法是可行的. 湖底的压强为

$$P = P_0 + \rho g h = 2P_0$$

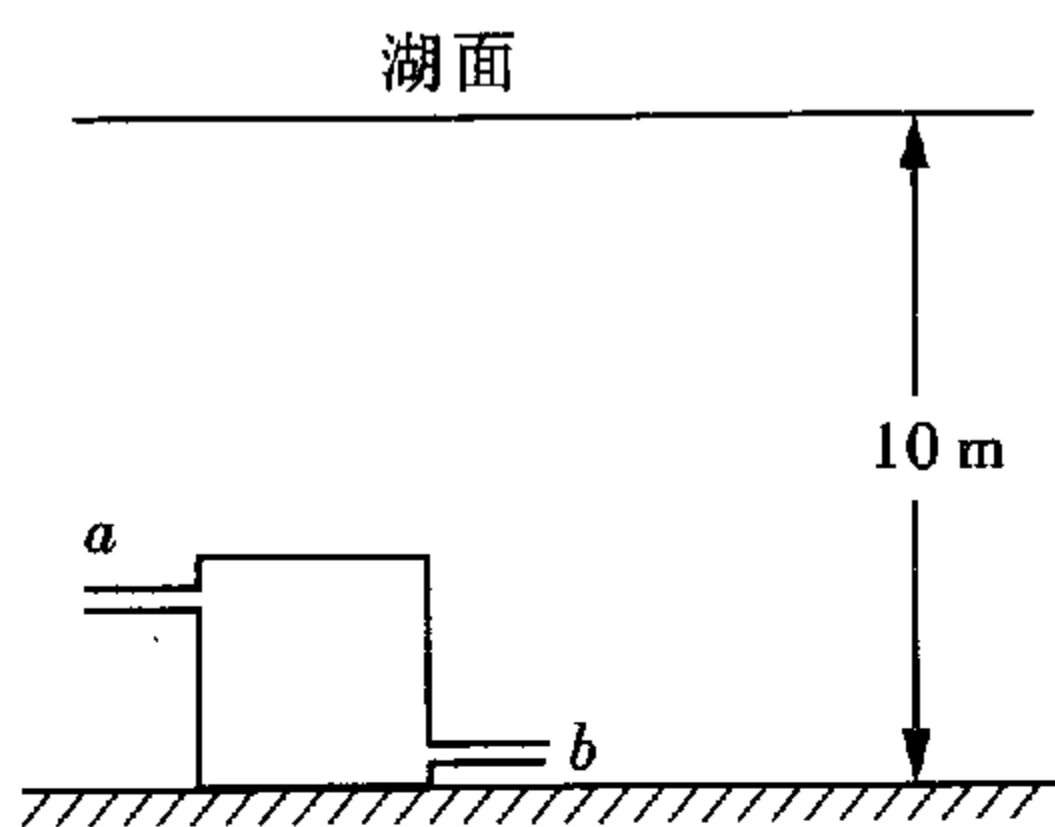


图 6-1

式中大气压强 $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 湖底深度 $h = 10 \text{ m}$.

由于 b 位于湖底, 与湖深 h 相比, 水箱高度可以忽略, 上述湖底压强 P 就是打入水箱空气的压强, 湖底温度亦为打入水箱空气的温度, 即

$$T = 273 + 7 = 280 \text{ K}$$

将湖面上方的空气打入水箱, 即将湖面 ($P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}, T_0 = 300 \text{ K}, V_0$) 的空气转变为水箱内 (P, V, T) 的空气, 设为理想气体, 则有

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

代入 P_0, T_0, P, V, T 之值, 可得需要打进的 $1 \text{ atm}, 27^\circ\text{C}$ 的空气体积为

$$V_0 = \frac{T_0}{P_0} \cdot \frac{PV}{T} = 1.8 \text{ m}^3$$

方法与技巧 随着空气不断打进水箱, 水箱所受湖水浮力逐渐增大到等于水箱重量, 就能上浮. 据此算出水箱开始上浮时, 箱内空气体积 V , 它的 P, T 就是湖底水的压强和温度, 把湖面上的空气 (P_0, V_0, T_0) 打入水箱, 就相当于将湖面上 (P_0, V_0, T_0) 的空气转变为水箱内 (P, V, T) 的空气, 利用理想气体状态方程可以建立两态之间的联系, 以求得 V_0 .

例 2 在一个横截面积为 S 的密闭容器中, 有一个质量为 m 的活塞把容器中的气体分成两部分. 活塞可在容器中无摩擦地滑动, 当活塞处于平衡时, 活塞两边气体的温度相同, 压强都是 P , 体积分别是 V_1 和 V_2 , 如图 6-2. 现用某种方法使活塞稍微偏离平衡位置, 然后放开, 活塞将在两边气体压力的作用下来回运动. 整个系统可看作是恒温的.

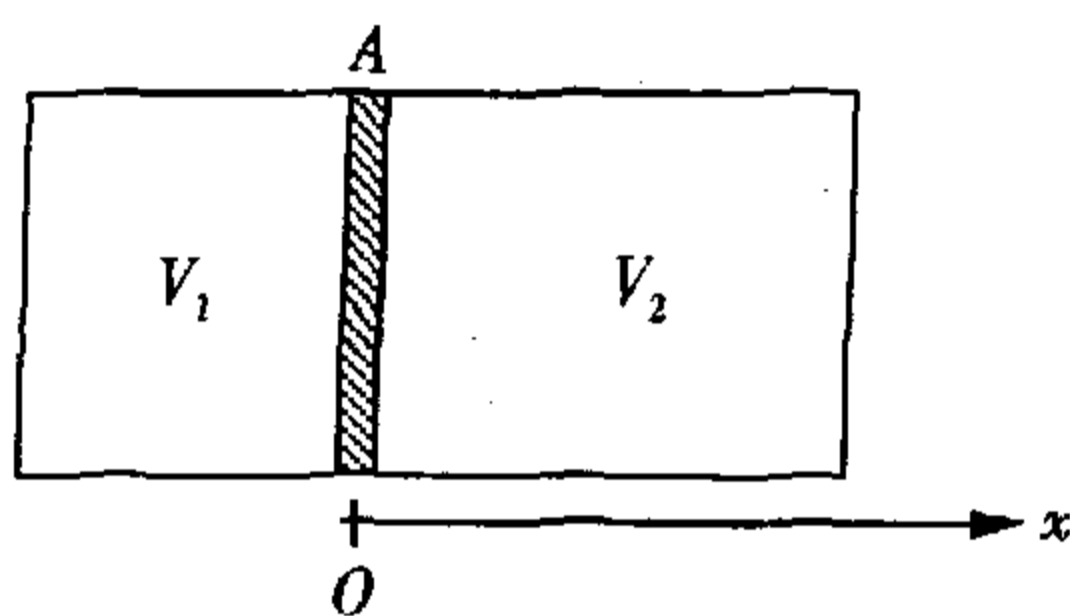


图 6-2

(1) 求活塞运动的周期. 结果用 P, V_1, V_2, m, S 表示.

(2) 求气体温度 $t = 0^\circ\text{C}$ 时的周期 τ 与气体温度 $t' = 30^\circ\text{C}$ 时的周期 τ' 之比.

解析 (1) 如图所示, 以活塞 A 处于平衡时的位置作为坐标原点 $x = 0$, 当活塞运动到 x 处时, 左边体积 V_1 变为 $(V_1 + Sx)$, 压强由 P 变为 P_1 ; 右边体积 V_2 变为 $(V_2 - Sx)$, 压强由 P 变为 P_2 . 因系统温度恒定, 根据玻意耳定律, 有

$$\begin{cases} P_1(V_1 + Sx) = PV_1 \\ P_2(V_2 - Sx) = PV_2 \end{cases}$$

由上式解出

$$\begin{cases} P_1 = P(1 - \frac{S}{V_1}x) \\ P_2 = P(1 + \frac{S}{V_2}x) \end{cases}$$

活塞所受合力

$$F = (P_1 - P_2)S = -PS^2(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})x = -PS^2 \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} x$$

上式表明, 活塞将作简谐振动, 振动周期是

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{PS^2(V_1+V_2)}}$$

(2) 设温度为 t 时活塞运动周期为 τ , 温度为 t' 时周期为 τ' , 由于 $P/T = P'/T'$

所以得出

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{P'S^2(V_1+V_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{PS^2(V_1+V_2)} \cdot \frac{T}{T'}} = \tau \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

可见有

$$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

以 $T = 273 \text{ K}$ 和 $T' = 303 \text{ K}$ 代入, 得出 0°C 时的周期 τ 与 30°C 时的周期 τ' 之比是

$$\frac{\tau'}{\tau} = 0.95$$

方法与技巧 本题是在气体等温条件下建立振体(活塞)的牛顿运动方程的, 得到 $F = -K_{eq}x$,

K_{eq} 为等效劲度系数. 其周期 $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \propto \frac{1}{\sqrt{P}}$, 容器中压强不同, 其活塞振动周期不同. 而在一定容器中, $P \propto T$, 温度不同, 周期也不同. 因而周期 $\tau \propto 1/\sqrt{T}$.

例 3 一根两端封闭、粗细均匀的石英管, 竖直放置, 内有一段水银柱, 将管隔成上下两部分. 下方为空气, 上方为一种可分解的双原子分子气体. 此种双原子分子气体的性质为: 当 $T > T_0$ 时, 其分子开始分解为单原子分子(仍为气体). 用 n_0 表示 T_0 时的双原子分子数, Δn 表示 $T_0 + \Delta T$ 时分解了的双原子分子数. 其分解规律为当 ΔT 很小时, 有如下的关系:

$$\Delta n/n_0 = \Delta T/T_0$$

已知初始温度为 T_0 , 此时, 下方的气柱长度为 $2L_0$, 上方气柱长度为 L_0 , 水银柱产生的压强为下方气体压强的 α 倍 ($0 < \alpha < 1$). 试讨论当温度由 T_0 开始缓慢上升时, 水银柱将上升还是下降? 忽略石英管和水银柱的体积随温度的变化.

解析 假设水银柱不动, 比较温度上升后上、下气体压力差的变化.

下部空气: $T_0 \rightarrow T_0 + \Delta T, P_0 \rightarrow P_1$, 则

$$P_1 = \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} P_0 = P_0 + \frac{\Delta T}{T_0} P_0$$

水银柱的压强为 αP_0 (不再变化).

上部可分解气体: $T_0 \rightarrow T_0 + \Delta T, (1 - \alpha)P_0 \rightarrow P_2$, 气体分子数由 $n_0 \rightarrow n_0 + \Delta n$, 因为有 Δn 个双原子分子分解成 $2\Delta n$ 个单原子分子. 升温前后, 有

$$\begin{cases} (1 - \alpha)P_0 L_0 S = \frac{n_0}{N_A} RT_0 \\ P_2 L_0 S = \frac{n_0 + \Delta n}{N_A} R(T_0 + \Delta T) \end{cases}$$

式中 S 为管之内横截面积, N_A 为阿伏伽德罗常数. 由上二式可得

$$P_2 = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 P_0$$

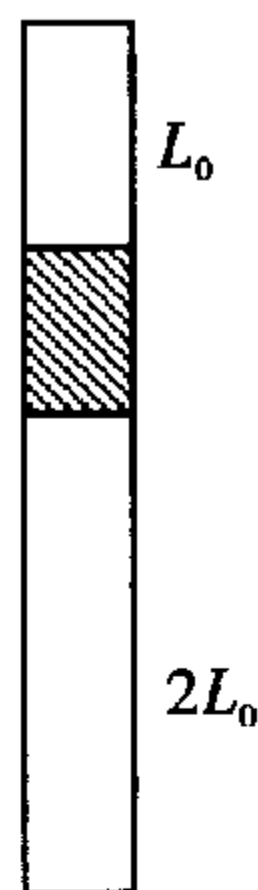


图 6-3

比较升温后下部气体与上部气体之压强差：

$$\Delta P = P_1 - P_2 - \alpha P_0 = (2\alpha - 1)P_0 \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right) - (1 - \alpha)P_0 \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2$$

若 $\Delta P > 0$, 则水银柱上升; $\Delta P < 0$, 水银柱应下降. 因 ΔT 甚小, 故 $(\Delta T/T_0)$ 项起主导作用, 而 $(\Delta T/T_0)^2$ 项之影响较之第一项要小得多. 考虑 α 的取值情况, 可得如下结果:

当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, $\Delta P > 0$, 水银柱上升;

当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时, $\Delta P < 0$, 水银柱下降;

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $\Delta P < 0$, 水银柱下降.

方法与技巧 求解此类问题的一种方法就是温度变化时假设水银柱不动, 比较上下方气体压强变化. 要正确理解“水银柱的压强为下方气体压强的 α 倍”. 水银柱的压强是由它自身的高度决定的, 既然石英管和水银柱的体积随温度的变化可以忽略, 那么它的压强也不会随温度变化. 升温前它的压强为 αP_0 , 升温后仍应为 αP_0 , 而不是 αP_1 . 这是一个隐含的信息.

例 4 长度为 L 的试管内充满压强为 P' 的氢气, 盖上可动的轻活塞, 浸入盛有水银的容器里, 其深度为 H (图 6-4). 试问此时氢气占据试管多长部分? H 为何值时此题有解? 水银密度为 ρ , 大气压强为 P_0 , 氢气温度保持不变.

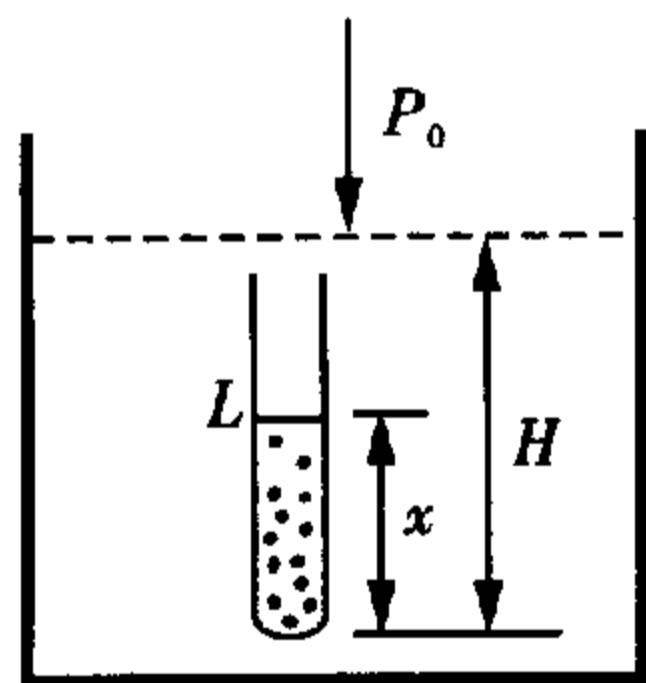


图 6-4

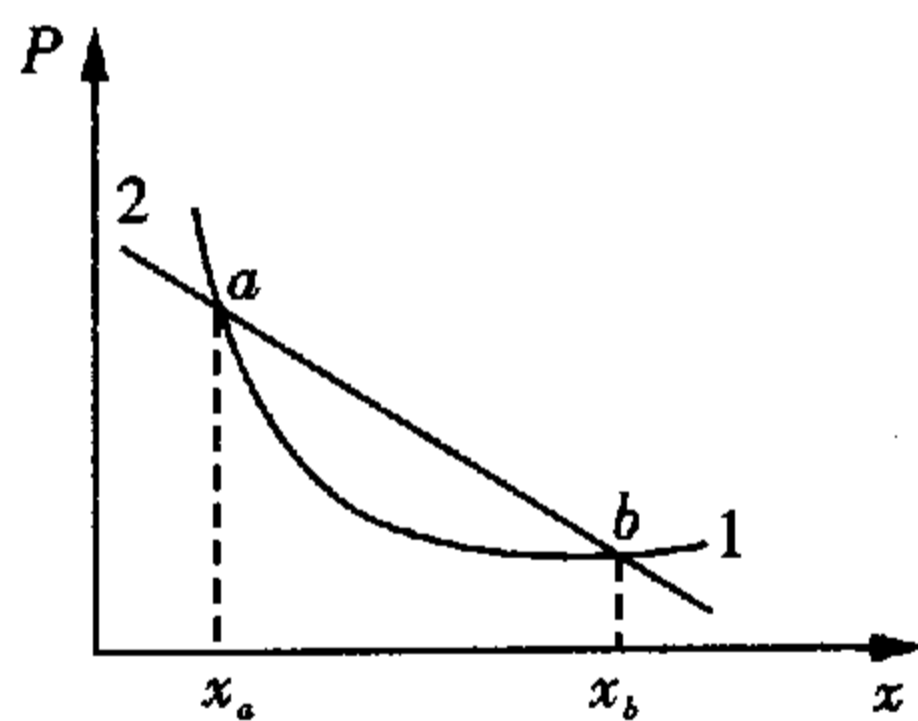


图 6-5

解析 由图 6-4 可知, 试管内气体压强等于 $P_0 + \rho g(H - x)$, 活塞处于平衡, 根据玻意耳定律:

$$P'LS = [P_0 + \rho g(H - x)]xS$$

$$\text{即 } x^2 - \left(H + \frac{P_0}{\rho g}\right)x + \frac{P'L}{\rho g} = 0$$

由此得到

$$x_{a,b} = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g}\right)^2 - \frac{P'L}{\rho g}}$$

下面讨论二次方程两根中哪一个根符合题意, 是正确的解呢? 为此, 作试管内气体的等温线 $Px = \text{恒量}$ (图 6-5 中曲线 1), 其外界压强 $P = P_0 + \rho g(H - x)$, 图像如图 6-5 中直线 2. 活塞的平衡条件对应曲线 1 和直线 2 的交点—— a 点和 b 点. 不难看出, 活塞在 b 点是不稳定平衡位置, 如果气体偶然膨胀一点, 气体压强大于外界压强, 气体可以推出活塞; 反之气体偶然收缩一点, 外界压强显著大于气体压强, 活塞会在管内下沉直至 x_a 处. 同样的分析可知: x_a 是稳定平衡位置. 因此, 应取稳定解即

$$x = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g}}$$

根号内的式子大于零本题有解,即要求

$$H > 2 \sqrt{\frac{P'L}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g}}$$

方法与技巧 解答物理问题,常要通过对物理方程的推导和运算,求得数学解,但必须讨论它的物理意义. 本题由平衡方程求得两解,系统是否存在两个平衡态,这些平衡态是否稳定都是需要讨论的. 如何确定平衡态是稳定平衡还是不稳定平衡呢? 这可以通过对它微扰来决定. 例如 a 态稍膨胀一点,外界压强大于气体压强,它会收缩回复到 a 态去; a 态稍压缩一点,气体压强大于外界压强,它也能膨胀回复到 a 态去,这样 a 态就是稳定平衡态. 而 b 态微扰后,无法回复到 b 态去, b 态就是不稳定平衡态. 因此 x_a 就是本题的物理答案.

例 5 两端开口的横截面积为 S 的直管固定在水平方向上,在管内有两个活塞. 开始左边活塞通过劲度系数为 k 的未形变的弹簧与固定的壁相连. 两个活塞之间的气体压强 P_0 等于外界大气压强. 右活塞到右管口的距离为 H ,它等于两活塞之间的距离(图 6-6). 将右活塞缓慢地拉向右管口,为了维持活塞在管口的平衡,问需用多大的力作用在此活塞上? 摩擦不计,温度恒定.

解析 随着右活塞被拉向管口,两活塞之间气体的体积将扩大,压强减小,于是左活塞也向右移动,弹簧拉长;力 F 作用在右活塞上,将它拉到管口处,列出此时两活塞的平衡条件:

$$\text{左活塞: } P_0 S - PS - kx = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{右活塞: } F + PS - P_0 S = 0 \quad \text{②}$$

式中 P 为后来两活塞之间气体压强. 可得:

$$F = P_0 S - PS = kx$$

可见, $x=0, F=0; k=0, F=0$.

因温度恒定,根据玻意耳定律有

$$P_0 HS = P(2H - x)S$$

由此,得

$$P = \frac{H}{2H - x} P_0 = \frac{kH}{2kH - F} P_0 \quad \text{③}$$

将③式代入②式,得到关于 F 的二次方程:

$$F^2 - (P_0 S + 2kH)F + P_0 S k H = 0$$

其解
$$F_{1,2} = \frac{P_0 S}{2} + kH \pm \sqrt{\frac{P_0^2 S^2}{4} + k^2 H^2}$$

既然 $k=0$ 时, $F=0$, 所以最终答案应为

$$F = \frac{P_0 S}{2} + kH - \sqrt{\frac{P_0^2 S^2}{4} + k^2 H^2}$$

方法与技巧 用数学方法解决物理问题时,必须符合物理概念和物理规律的要求,要注意物理公式的应用条件和物理量的取值范围,因而数学解不一定都具有物理意义. 本题从二次方程的两根中,根据物理量取值条件确定了最终答案.

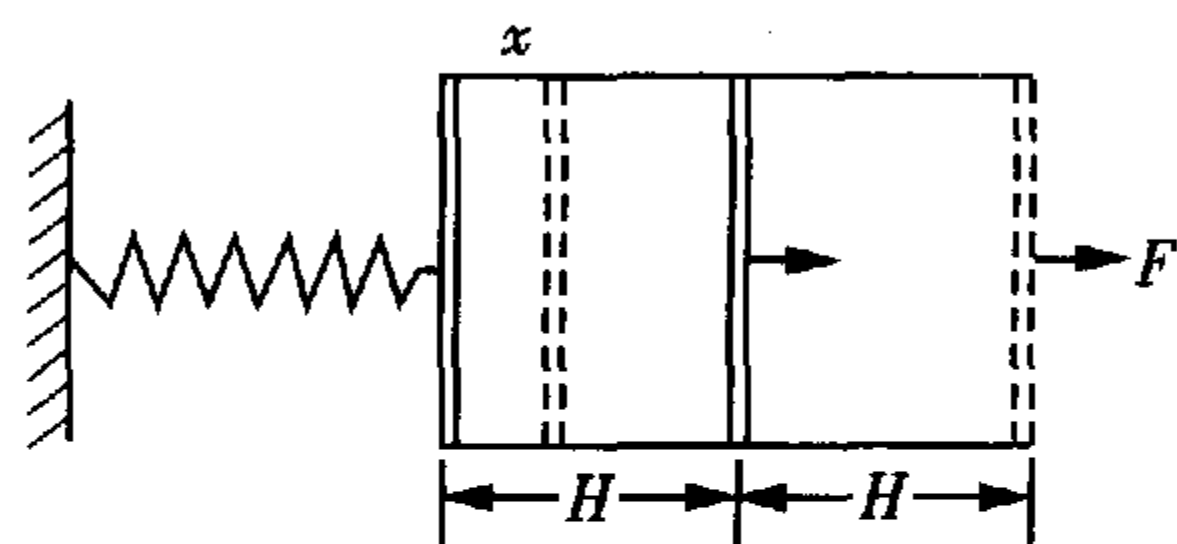


图 6-6

例6 一根均匀玻璃管长 96 cm, 一端封闭、一端开口, 竖直放置, 开口端向上. 管内有一段长 20 cm 的水银柱, 当温度为 27°C 时, 水银柱下方被封闭的空气柱长度为 60 cm, 外界的大气压强为 76 cm-Hg. 试问当温度升高到多少时, 水银柱刚好从管中全部溢出? 设玻璃管和水银因温度升高而产生的膨胀可忽略不计, 设外界大气压强始终保持不变, 设被封闭的空气可视为理想气体.

解析 如图 6-7 所示, 空气柱的初态: 长 $L_0 = 60$ cm、压强 $P_0 = 76 + 20 = 96$ cm-Hg、温度 $T_0 = 300$ K, 然后从 T_0 开始升温, 分阶段讨论如下:

第一阶段: 当温度从 T_0 升高时, 气体等压强膨胀, 保持 P_0 不变, 水银柱上升, 水银柱未外溢. 当温度升到 T_1 时, 水银柱刚好到达管口, 有

$$\frac{P_0 L_0}{T_0} = \frac{P_0 (L_0 + 16)}{T_1}$$

得到 $T_1 = 380$ K

第二阶段: 温度从 T_1 继续上升, 水银开始外溢. 若留在管内水银柱长度为 x ($x < 20$ cm), 仍能维持内、外压强平衡, 此时管内气体压强为 $(76 + x)$ cmHg、温度为 T_x , 则有

$$\frac{P_0 L_0}{T_0} = \frac{(76 + x)(96 - x)}{T_x}$$

将 P_0 、 L_0 、 T_0 值代入, 得到

$$x^2 - 20x - 96 \times (76 - \frac{T_x}{5}) = 0$$

这是 x 的二次方程, 有实数解的条件是其判别式大于、等于零, 即

$$\Delta = (20)^2 + 4 \times 96 \times (76 - \frac{T_x}{5}) \geq 0$$

要求为 $T_x \leq 385$ K

满足此条件, 可实现平衡的 x 有两个解, 为

$$x_{\text{大}} = [10 + \sqrt{100 + 96 \times (76 - \frac{T_x}{5})}] \text{ cm}$$

$$x_{\text{小}} = [10 - \sqrt{100 + 96 \times (76 - \frac{T_x}{5})}] \text{ cm}$$

第二阶段开始时, $T_x = T_1 = 380$ K, 代入可得: $x_{\text{大}} = 20$ cm、 $x_{\text{小}} = 0$. 显然, 实际情况是 $x_{\text{大}} = 20$ cm, 水银柱已处于未溢而要溢出的状态.

当 T_x 从 380 K 逐渐升高, $x_{\text{大}}$ 应从 20 cm 逐渐减小, 水银柱逐渐溢出. 至 $T_x = 385$ K 时, $x_{\text{大}} = 12$ cm. 当 $T_x > 385$ K 时, 判别式 $\Delta < 0$, x 无实数解, 即不存在平衡解. 因此 $T_x = 385$ K、 $x_{\text{大}} = 12$ cm, 是最后内外处于平衡的状态, 此时管内气体压强仍大于大气压强, 水银继续外溢, x 继续减小, 直至水银全部溢完. 但从 $x_{\text{大}} = 12$ cm 到 $x_{\text{大}} = 0$, 内外已无法保持平衡, 属于非静态过程. 这一结果不能从上述方程中反映出来, 因为方程成立的条件是内外平衡.

方法与技巧 此题应分阶段讨论. 从 300 K → 380 K 等压膨胀, 水银柱可上升到管口, 但未外溢. 从 380 K → 385 K, 水银逐渐外溢, 到 385 K 时管内水银柱长 $x = 12$ cm, 已溢出 8 cm, 这是最后的内外平衡状态. 当温度刚超过 385 K, 内外无法平衡, 水银柱将全部从管中迅速溢出; 从数学上看, $T_x > 385$ K, 判别式 $\Delta < 0$, x 无实数解, 即不存在平衡解.

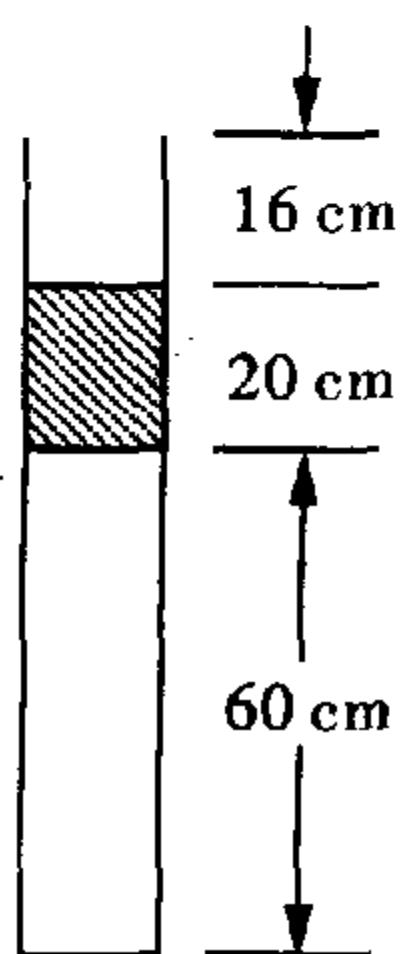


图 6-7

例7 U形管A、B和水平管C都是由内径均匀的细玻璃管做成的,它们的内径与管长相比都可忽略不计.已知三部分的截面积分别为 $S_A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ 、 $S_B = 3.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ 、 $S_C = 2.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$.在C管中有一段空气柱,两侧被水银封闭.当温度为 $t_1 = 27^\circ\text{C}$ 时,空气柱长为 $L = 30 \text{ cm}$,C中气柱两侧的水银柱长分别为 $a = 2.0 \text{ cm}$ 、 $b = 3.0 \text{ cm}$,A、B两支管都很长.其中水银柱高均为 $h = 12 \text{ cm}$,大气压强保持 $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ (合 76 cmHg)不变(图6-8).不考虑温度变化时管和水银的热膨胀.试求气柱中空气温度缓慢地升高到 $t = 97^\circ\text{C}$ 时空气的体积.

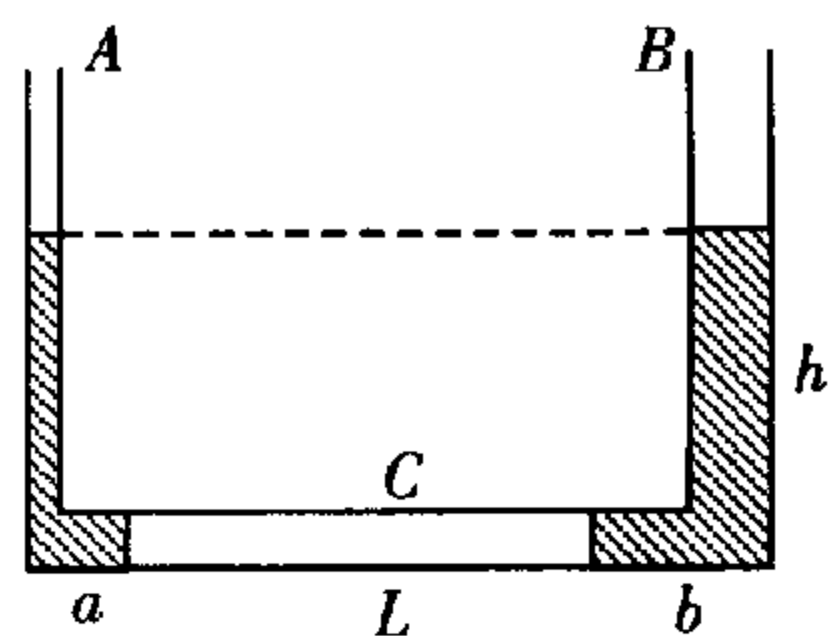


图6-8

解析 气柱中空气的初态:

$$T_1 = 300 \text{ K}, \quad V_1 = LS_C, \quad P_1 = P_0 + h$$

当温度升高时,气柱两侧水银被缓慢压入A管和B管,设升高到 T_2 时,右侧水银刚好先全部压入B管中(左侧的还未全压入A管中),B管水银高度增大

$$\Delta h = bS_C/S_B$$

因此造成空气柱中空气体积增大量为

$$\Delta V' = bS_C$$

与此同时,左侧水银也有一部分进入A管,进入A管中水银高度也应增大 Δh ,使两管压强平衡,由此造成气柱体积增大量为

$$\Delta V'' = S_A \Delta h$$

所以当温度为 T_2 时,空气的体积、压强变为

$$V_2 = V_1 + \Delta V' + \Delta V''$$

$$P_2 = P_1 + \Delta h$$

有状态方程

$$P_1 V_1 / T_1 = P_2 V_2 / T_2$$

由以上各式代入数据,可得

$$T_2 = 347.7 \text{ K}$$

此值小于题给最终温度 $T = 370 \text{ K}$,所以温度将继续升高,从这时起,气柱中空气作等压变化,当温度升到 T 时,气柱体积为

$$V = \frac{T}{T_2} V_2 = 0.72 \text{ cm}^3$$

方法与技巧 对本题设置的物理情境要分析清楚.由 $300 \text{ K} \rightarrow 347.7 \text{ K}$,b管的水银刚好全部进入B管,而a管的水银只有一部分进入A管,满足压强平衡.由 $347.7 \text{ K} \rightarrow 370 \text{ K}$,气体只会等压膨胀,A管中水银柱不会再升高,B管中水银柱可以随之升高,气体压强始终为 $P_2 = P_1 + \Delta h$ 不变.

例8 如图6-9(a)所示,有两个截面积为 S 的相同U形管1、2,其内分别装有高度为 h_1 和 h_2 、密度为 ρ 的液体.现用同样截面的导管将两者在大气中密接起来.导管中有一活塞D,它把管中气体分成长度皆为 L_0 的两部分,每部分中气体的压强皆为大气压强 P_0 ,活塞与管壁间的最大静摩擦力为 F .现向U形管1开口端缓慢注入一定量的同种液体,达到平衡时U形管2的左侧液面高度为 h_3 ,试求注入液体的体积.

解析 设加入U形管1中的液体体积为 V ,则这部分液体在U形管中长度为 x

$$V = xS$$

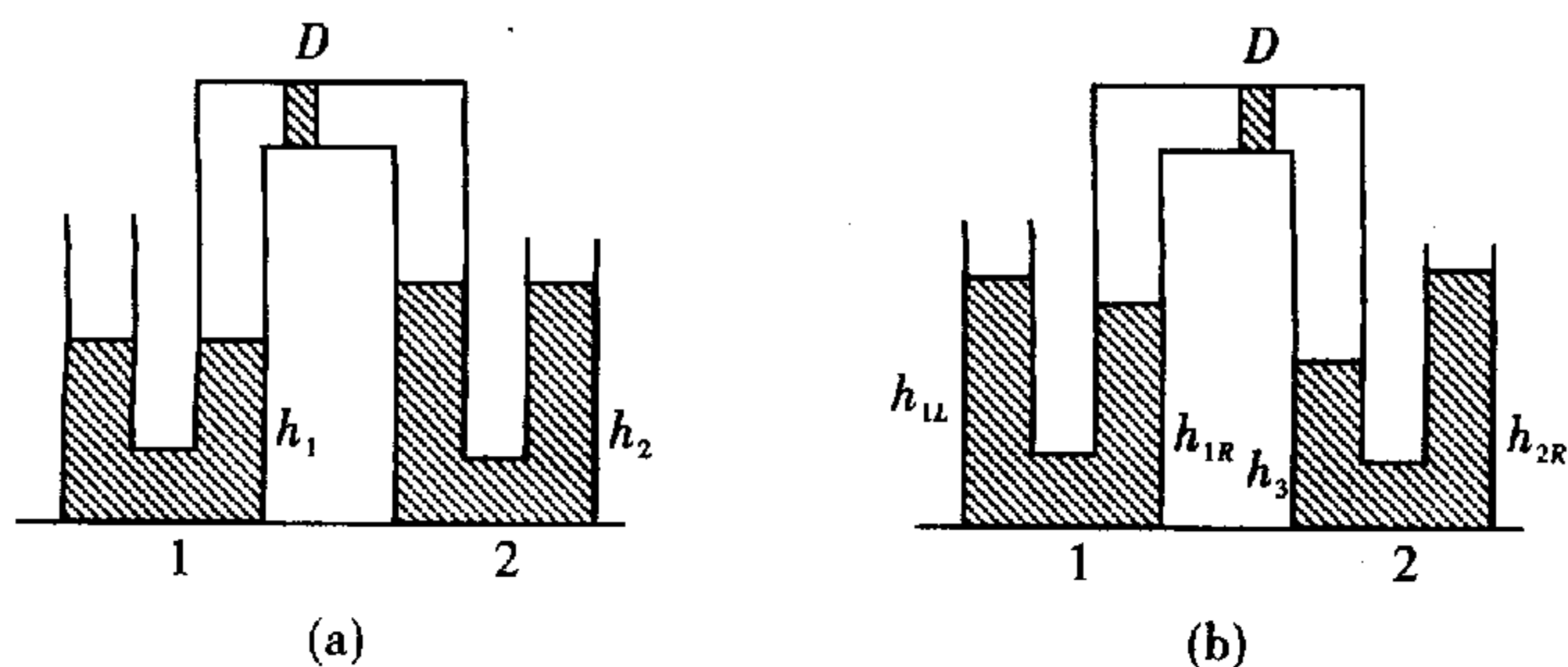


图 6-9

如图 6-9(b) 所示, 令 P_L 和 P_R 分别代表系统达到新平衡后活塞 D 左右两侧气体压强; L_L 和 L_R 分别代表系统达到新平衡后 D 左右两侧气柱长度. 将其间所密封气体视为理想气体, 在初、末态间运用玻 - 马定律有

$$P_0 L_0 = P_L L_L = P_R L_R$$

令 h_{1L} 、 h_{1R} 分别表示 U 形管 1 中左、右两侧液面高度, h_{2R} 表示 U 形管 2 右侧液面高度, 由压强平衡条件, 有

$$\begin{cases} P_0 + \rho g h_{1L} = P_L + \rho g h_{1R} \\ P_R + \rho g h_3 = P_0 + \rho g h_{2R} \\ P_L = P_R + F/S \end{cases}$$

根据液体的不可压缩性及管子尺寸关系, 有

$$\begin{cases} 2h_1 + x = h_{1L} + h_{1R} \\ 2h_2 = h_3 + h_{2R} \\ h_1 + h_2 + 2L_0 = h_{1R} + L_R + L_L + h_3 \end{cases}$$

最后解得注入液体体积应为

$$V = xS = 4(h_2 - h_3 + L_0)S + \frac{F}{\rho g} - \frac{2P_0 L_0 S}{P_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} - \frac{2P_0 L_0 S}{P_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + F/S}$$

方法与技巧 运用玻 - 马定律解题, 有时要酌情利用两类方程, 一类是压强的平衡条件, 一类是结构的几何尺寸关系.

例 9 对于均匀薄膜材料, 在一定温度下, 某种气体通过薄膜渗透过的气体分子数 $N = K \frac{\Delta P S t}{d}$, 其中 t 为渗透持续时间、 S 为薄膜的面积、 d 为薄膜厚度、 ΔP 为薄膜两侧气体的压强差、 K 称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数. 透气系数愈小, 材料的气密性能愈好.

图 6-10 为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图, $EFGI$ 为渗透室, U 形管左管上端与渗透室相通, 右管上端封闭, U 形管内横截面积 $A = 0.150 \text{ cm}^2$. 实验中, 首先测得薄膜的厚度 $d = 0.66 \text{ mm}$, 再将薄膜固定于图中 CC' 处, 从而把渗透室分为上下两部分, 上面部分容积 $V_0 = 25.00 \text{ cm}^3$, 下面部分连同 U 形管水面以上部分的总容积为 V_1 , 薄膜能够透气的面积 $S = 1.00 \text{ cm}^2$. 打开开关 K_1 、 K_2 与大气相通, 大气的压强 $P_1 = 1.00 \text{ atm}$, 此时 U 形管右管中气柱长度 $H = 20.00 \text{ cm}$, $V_1 = 5.00 \text{ cm}^3$. 关闭 K_1 、 K_2 后, 打开开关 K_3 , 对渗透室上部分迅速充气至气体压强 $P_0 = 2.00 \text{ atm}$, 关闭 K_3 并开始计时, 两小时后, U 形管左管中的水面高度下降 $\Delta H = 2.00 \text{ cm}$. 实验过程中, 始终保持温

度为 0°C , 求该薄膜材料在 0°C 时对空气的透气系数.

(本实验中由于薄膜两侧的压强差在实验过程中不能保持恒定, 在压强差变化不太大的情况下, 可用计时开始时的压强差和计时结束时的压强差的平均值 $\overline{\Delta P}$ 来代替公式中的 ΔP , $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{k})^{-1}$, $1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$).

解析 开始时 U 形管右管中空气的压强和体积分别为

$$P_2 = P_1, \quad V_2 = HA$$

经过两小时右管中空气的压强、体积分别为

$$P'_2 = \frac{P_2 V_2}{V'_2}, \quad V'_2 = (H - \Delta H)A$$

渗透室下部连同 U 形管水面以上气体的压强和体积为

$$P'_1 = P'_2 + 2\rho g \Delta H, \quad V'_1 = V_1 + A \Delta H$$

式中 ρ 为水的密度, g 为重力加速度. 经两小时后, 薄膜下部增加的空气的物质的量为

$$\Delta n = \frac{P'_1 V'_1}{RT} - \frac{P_1 V_1}{RT}$$

在 2 小时内, 通过薄膜渗透过去的分子数

$$N = N_A \Delta n$$

式中 N_A 为阿伏伽德罗常数.

渗透室上部空气的物质的量减少 Δn , 压强下降 $\Delta P_{\text{上}}$, 即有

$$\Delta P_{\text{上}} = RT \Delta n / V_0$$

经过 2 小时, 渗透室上部空气的压强为为

$$P'_0 = P_0 - \Delta P_{\text{上}}$$

测试过程的平均压强差

$$\overline{\Delta P} = \frac{1}{2} [(P_0 - P_1) + (P'_0 - P'_1)]$$

根据定义, 由以上各式和有关数据, 可求得该薄膜材料在 0°C 时对空气的透气系数为

$$k = \frac{Nd}{\Delta P S t} = 2.4 \times 10^{11} (\text{Pa} \cdot \text{m} \cdot \text{S})^{-1}$$

方法与技巧 为了求 $k = \frac{Nd}{\Delta P S t}$, 必须了解实验装置和测量过程及三处参量的变化: $P_2, V_2 \rightarrow P'_2,$

$V'_2, P_1, V_1 \rightarrow P'_1, V'_1, P_0, V_0 \rightarrow P'_0, V'_0$.

为了求得 N 和 ΔP , 可利用已知量确定 P'_0, P'_1 , 并由气态方程求得渗透室下部增加的气体的物质的量, 此即上部减少的气体的物质的量, 也就是通过薄膜渗透的气体的物质的量 Δn .

例 10 有一内径均匀、两支管等长且大于 78 cm 的、一端开口的 U 形管 $ACDB$. 用水银将一定质量的理想气体封闭在 A 端后, 将管竖直倒立. 平衡时两支管中液面高度差为 2 cm , 此时闭端气柱长度 $l_0 = 38 \text{ cm}$ (图 6-11). 已知大气压强 $h_0 = 76 \text{ cmHg}$. 若保持温度不变, 不考虑水银与管壁的摩擦, 当轻轻晃动一下 U 形管, 使左端液面上升 Δh ($\Delta h < 2 \text{ cm}$) 时, 将出现什么现象? 试加以讨论并说明理由.

解析 当 U 形管处在图示最初平衡位置时 A 端气体的压强:

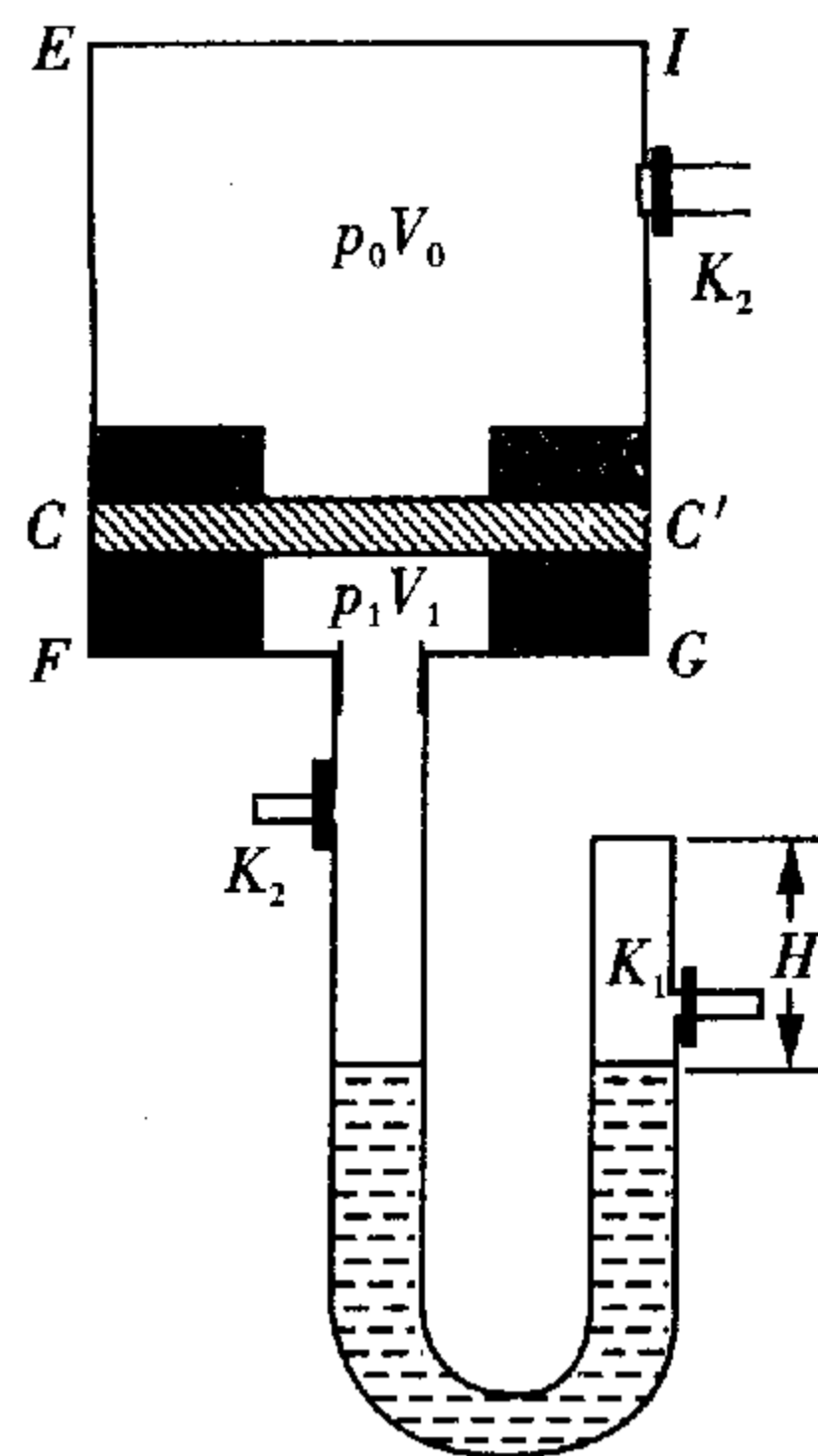


图 6-10

$$h = h_0 + 2 = 78 \text{ cmHg}$$

若左端液面上升或下降 Δh (上升 Δh 取正值, 下降 Δh 取负值). 设想水银柱静止不动, 根据玻 - 马定律可得 A 中气柱的压强:

$$P = \frac{hL_0}{L_0 + \Delta h}$$

在 U 形管的 CD 部分, 管内水银柱所受左、右两边的压强差是

$$\Delta P = P_C - P_D = P - h + 2\Delta h$$

将①、②两式代入③式, 得到

$$\Delta P = \frac{(2\Delta h + 2L_0 - h)\Delta h}{L_0 + \Delta h} = \frac{(2\Delta h - 2)\Delta h}{38 + \Delta h}$$

当 $\Delta h = 0$ 时, $\Delta P = 0$, 即最初的平衡状态(稳定平衡态).

当 $\Delta h = 1 \text{ cm}$ 时, $\Delta P = 0$, 为另一新平衡状态(不稳定平衡态).

若 $\Delta P > 0$, 则 CD 管水银柱所受合力向右, A 管液面上升.

若 $\Delta P < 0$, 则 CD 管水银柱所受合力向左, A 管液面下降.

讨论:(1) 当 $1 \text{ cm} > \Delta h > 0$ 、 $\Delta P < 0$: 由于晃动使左端液面上升, 幅度不超过 1 cm 时, 水银柱不能平衡, 左端会自动下降, 至最初平衡位置由于仍有向下速度, 会继续下降至某一位置速度变为零, 然后向上运动, 结果水银柱在最初平衡位置附近来回振动.

(2) 当 $\Delta h > 1 \text{ cm}$ 、 $\Delta P > 0$: 由于晃动使右端液面上升, 幅度超过 1 cm 时, 水银不能平衡, 左端液面会继续上升而不会自动回复到最初平衡位置. 且 Δh 越大、 ΔP 也越大, 水银柱将不断由 A 管流向 B 管, 由于两管长度和管中水银柱长度都大于 78 cm , 因此这种现象将继续下去, 直到有一部分水银从 B 端流出.

(3) 当 $\Delta h = 1 \text{ cm}$ 、 $\Delta P = 0$: CD 管中水银柱左右压强相等, 合力为零, 水银柱平衡, 但这是一种不稳定平衡, 因而这种状态实际上不能维持.

方法与技巧 根据④式, 由于晃动所引起的可变因素 Δh 值的不同, 从而会出现状态和过程多种可能性, 需要逐一地考察和讨论. 当 $\Delta h = 0$ 和 $\Delta h = 1 \text{ cm}$ 时, $\Delta P = 0$, $P_C = P_D$, 表明系统存在两个平衡位置. 当 $0 < \Delta h < 1 \text{ cm}$, $\Delta P < 0$ ($P_C < P_D$) 时, 水银柱会在初态附近来回振动, 可见 $\Delta h = 0$ 的初态是稳定平衡态. 当 $\Delta h > 1 \text{ cm}$, $\Delta P > 0$ ($P_C > P_D$) 时, 晃动使 A 液面上升幅度超过 1 cm , 水银柱不能平衡, 水银由 A 管流向 B 管, 直至有水银从 B 管流出, 这也表明 $\Delta h = 1 \text{ cm}$ 的平衡态是不稳定平衡态.

例 11 有一个用伸缩性极小且不漏气的布料制作的气球(布的质量可忽略不计). 直径 $d = 2.0 \text{ m}$, 球内充有压强 $P_0 = 1.005 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的气体. 该布料所能承受的最大不被撕破力为 $f_m = 8.5 \times 10^3 \text{ N/m}$ (即对于一块展平的一米宽的布料, 沿布面而垂直于布料宽度方向所施的力超过 $8.5 \times 10^3 \text{ N}$ 时, 布料将被撕破). 开始时, 气球被置于地面上, 该处的大气压强为 $P_{\infty} = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$, 温度 $T_0 = 300 \text{ K}$, 假设空气的压强和温度均随高度而线性地变化, 压强的变化为 $\alpha_p = -9.0 \text{ Pa/m}$, 温度的变化为 $\alpha_T = -3.0 \times 10^{-2} \text{ K/m}$. 问该气球上升到多高时将破裂?

假设气球上升很缓慢, 可以认为球内温度随时与周围空气的温度保持一致. 在考虑气球破裂时, 可忽略气球周围各处和底部之间空气压强的差别.

解析 当气球充满气体而球内压强大于球外时, 布料即被绷紧, 布料各部分之间产生张力, 正是这种张力可能使布料被撕破. 设想把气球分成上下两个半球, 它们的交线是一个直径为 d 的圆周, 周长为 πd , 所以要从这条交线处撕破气球, 至少需要的张力为 $\pi d f_m$. 另一方面, 考虑上半球(包括半球

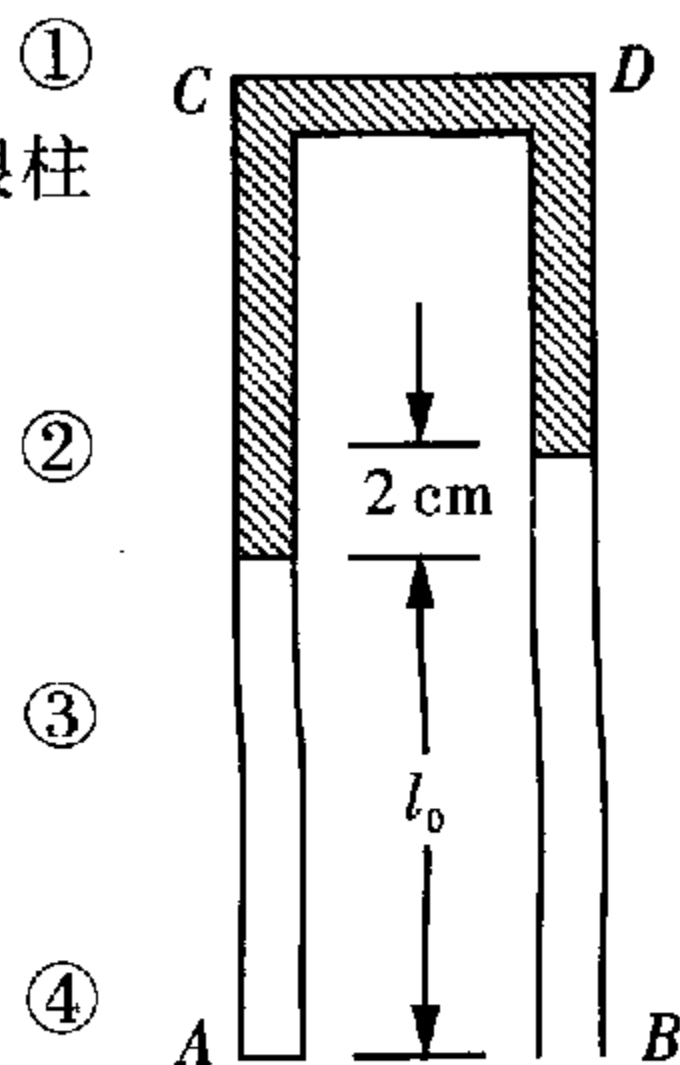


图 6-11

内的气体)受力的情况,它受三个力作用:

- (1) 下半球的球面布料所施加的张力 F ;
- (2) 上半球处空气对它压力的合力,其大小为 $P_h \pi d^2 / 4$, P_h 是气球所在高度处的大气压强;
- (3) 下半球内气体对它的压力 $P \pi d^2 / 4$, P 是气球内气体压强.

忽略浮力,上述三力平衡,即

$$P \pi d^2 / 4 = F + P_h \pi d^2 / 4$$

当张力 $F > f_m \pi d$ 时,布料即被撕裂,所以气球破裂的条件是

$$(P - P_h) \pi d^2 / 4 > \pi d f_m \quad \text{①}$$

设气球破裂发生在高度 h 处,则

$$\begin{cases} P_h = P_0 + \alpha_p h & \text{②} \\ T = T_0 + \alpha_T h & \text{③} \end{cases}$$

温度 T 也就是破裂时气球内气体温度. 又因为气球在上升过程中球内气体是定容变化,故有

$$P = (P_0 / T_0) T \quad \text{④}$$

将②、③、④式代入①式,得

$$h > \frac{(4f_m/d) - (P_0 - P_0)}{(P_0/T_0)\alpha_T - \alpha_p} = 2.1 \times 10^3 \text{ m}$$

即气球上升到 2100 m 高度以上就将破裂.

方法与技巧 先要确定从气球上、下半球交线处撕裂及其条件;再对上半球进行受力分析,当张力满足撕裂条件时,布料即被撕裂.

例 12 设热气球具有恒定容积 $V = 1.1 \text{ m}^3$,球壳本身体积可以略去不计,其质量 $m = 0.187 \text{ kg}$,在外界气温 $t_1 = 20^\circ\text{C}$ 、压强 $P_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的条件下升空,此时外界空气密度 $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

(1) 气球内热空气温度 t_2 应为多少,才使气球刚好自由飘浮?

(2) 先把气球用绳系牢在地上,并把内部空气加热到稳定温度 $t_3 = 110^\circ\text{C}$,试计算作用在绳上的张力等于多少(不考虑空气阻力).

(3) 将气球下端的孔用绳系住(球内空气密度保持不变),在球内空气保持温度 $t_3 = 110^\circ\text{C}$ 的情况下,气球升入地面压强 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度 20°C 的等温大气层中. 在这些条件下,气球能上升的高度是多少?

(4) 在上升到(3)问的高度 h 时,把气球拉离平衡位置 10 m,然后予以释放,试描述气球将作何种运动.

解析 (1) 飘浮条件: $F_{\text{浮}} = F_{\text{重}}$

$$\rho_1 V g = mg + \rho_2 V g \quad \text{①}$$

ρ_2 为球内温度为 t_2 时的空气密度. 由于热气球有开口,内外压强相同:

$$\rho_1 = \frac{P \mu}{RT_1}, \quad \rho_2 = \frac{P \mu}{RT_2}$$

因此 $\rho_1 / \rho_2 = T_2 / T_1$ \quad \text{②}

热气球能自由飘浮的温度:

$$T_2 = \frac{T_1}{1 - \frac{m}{\rho_1 V}} = 341 \text{ K} = 68^\circ\text{C}$$

(2) 气球用绳系牢在地上, 作用在绳上的力为

$$F = F_{\text{浮}} - F_{\text{重}} = \rho_1 Vg - (m + \rho_3)g \quad \text{③}$$

同前, 有 $\rho_1/\rho_3 = T_3/T_1$ ④

$$F = \left[\rho_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_3} \right) V - m \right] g = 1.2 \text{ N}$$

(3) 封闭气球开口后, 球内保持 $t_3 = 110^\circ\text{C}$, 让气球从地面升入 20°C 等温大气层中, 气球上升到 h 处, 有

$$\begin{cases} \rho_h Vg = mg + \rho_3 Vg \\ \rho_h = \rho_1 e^{-\frac{\rho_1 g h}{P_1}} \end{cases} \quad \text{⑤}$$

ρ_h 为高度 h 处球外空气密度. 由⑤、④式有

$$\rho_h = \frac{m + \rho_3 V}{V}, \quad \rho_3 = \frac{T_1}{T_3} \rho_1$$

于是对⑥式两边取对数, 得

$$h = \frac{P_1}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_1}{\rho_h} = \frac{P_1}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_1 V}{m + \rho_3 V} = \frac{P_1}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_1 V}{m + \frac{T_1}{T_3} \rho_1 V} = 843 \text{ m}$$

(4) 气球上升到 $h = 843 \text{ m}$ 处, 将它拉离平衡位置 $\Delta h = 10 \text{ m}$ 时, 则在 $(h + \Delta h)$ 处大气密度为

$$\rho_{h+\Delta h} = \rho_1 e^{-\rho_1 g(h+\Delta h)/P_1} = \rho_h e^{-\rho_1 g \Delta h/P_1} \approx \rho_h \left(1 - \frac{\rho_1 g \Delta h}{P_1} \right)$$

在 $(h + \Delta h)$ 处, 气球所受浮力为

$$F_{\text{浮}} = \rho_{h+\Delta h} Vg = \rho_h Vg - \frac{\rho_h \rho_1 Vg^2}{P_1} \Delta h$$

在 $(h + \Delta h)$ 处, 不计空气阻力, 气球所受重力与浮力的合力 F 为

$$F = -\frac{\rho_h \rho_1 Vg^2}{P_1} \Delta h$$

可见气球将以 h 处为平衡位置作简谐振动. 周期 τ 为

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m + \rho_3 V}{\rho_h \rho_1 Vg^2} P_1} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{P_1}{\rho_1}} = 186 \text{ s}$$

式中 $\rho_h V = m + \rho_3 V$, 如果考虑空气阻力, 气球将在竖直方向作阻尼振动, 振幅逐渐减小.

方法与技巧 本题涉及到等温大气压强和大气密度随高度变化的知识. 在重力场中, 热运动将使气体分子均匀分布到所能到达的空间, 重力则力图使气体分子聚集在地面上. 这两种作用达到平衡后, 气体在空间作上疏下密的非均匀分布. 在等温大气层中, 大气压强随高度增加而减小的规律为

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}} = P_0 e^{-\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)gh} = P_0 e^{-\sigma h}$$

其密度 $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}} = \rho_0 e^{-\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)gh} = \rho_0 e^{-\sigma h}$, 对等温大气: $\frac{\rho}{P} = \frac{\rho_0}{P_0} = C$

例 13 一薄壁钢筒竖直放在水平桌面上(图 6-12), 筒内有一与底面平行可上下移动的活塞 K , 它将圆筒隔成 A 、 B 两部分, 总体积 $V = 8.31 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, 活塞导热性能良好, 与筒壁无摩擦不漏气, 筒的顶部轻轻放上一质量与活塞 K 相等的铅盖, 盖与筒的上端边缘接触良好(无漏气缝隙). 当筒内温度 $t = 27^\circ\text{C}$ 时, 活塞上方 A 中盛有 $n_A = 3.00 \text{ mol}$ 的理想气体, 下方 B 中盛有 $n_B = 0.400 \text{ mol}$ 的理想气

体, B 中气体体积占总容积的 $\frac{1}{10}$, 现对筒内气体缓慢加热, 把一定热量传给气体达到平衡时, B 中气体体积变为占总容积的 $\frac{1}{9}$, 问筒内气体温度 t' 是多少? 已知筒外大气压强 $P_0 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$.

解析 (1) 本题的装置加热后 A 可能漏气. A 未漏而将漏气的临界条件:

$$P_A^* = P_0 + mg/S = P_0 + (P_B - P_A)$$

因 $T = 300 \text{ K}$ 、 $V_A = 0.9 V$ 、 $V_B = 0.1 V$, 有

$$\begin{cases} P_A = n_A RT/V_A = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa} \\ P_B = n_B RT/V_B = 1.20 \times 10^5 \text{ Pa} \end{cases}$$

$$P_A^* = P_0 + (P_B - P_A) = 1.24 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) B 的气体体积由 $V/10$ 变到 $V/9$, A 漏气吗? 为此, 假设铅盖未顶开、 A 未漏气, 则有

$$P'_B - P'_A = P_B - P_A$$

$$\begin{cases} P'_A V'_A = n_A RT' \\ P'_B V'_B = n_B RT' \end{cases}$$

由上三式求得: $P'_A = 3.00 \times 10^5 \text{ Pa} > P_A^*$. 可见温度为 T' 时 $V'_B = V/9$, 铅盖已顶开, A 在漏气, 此时 A 的气体压强应为 P_A^* .

(3) 当 $V'_B = V/9$ 时, 筒内气温 $T' = ?$ 这可由 B 的气体温度来确定.

$$\begin{cases} P'_B = P_A^* + (P'_B - P'_A) = P_A^* + (P_B - P_A) = 1.44 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V'_B = V/9 = \frac{1}{9} \times 8.31 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \\ T' = P'_B V'_B / n_B R = 400 \text{ K} = 127^\circ\text{C} \end{cases}$$

方法与技巧 解本题的关键是要判断 B 中气体体积由 $V/10$ 变到 $V/9$ 时 A 中气体是否漏出. 方法是假设 A 中气体不漏气并计算其压强 P'_A . 若 $P'_A < P_A^*$, A 不漏气, 其压强为 P'_A ; 若 $P'_A > P_A^*$, A 在漏气, 其压强为 P_A^* .

例 14 一质量 $m = 200.0 \text{ kg}$ 、长 $L_0 = 2.00 \text{ m}$ 的薄底大金属桶倒扣在宽阔的水池底部 (图 6-13), 桶内横截面积 $S = 0.500 \text{ m}^2$ (桶的容积为 SL_0), 桶本身 (桶壁与桶底) 的体积 $V_0 = 2.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 桶内封有高度 $L = 0.200 \text{ m}$ 的空气. 池深 $H_0 = 20.00 \text{ m}$, 大气压强 $P_0 = 10.00 \text{ m}$ 水柱高, 水的密度 $\rho = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度 $g = 10.00 \text{ m/s}^2$, 若用图中所示吊绳将桶上提, 使桶底能到达水面处, 则绳拉力所需做的功有一最小值, 试求从开始到绳拉力刚完成此功的过程中, 桶和水 (包括池水及桶内水) 的机械能改变了多少? 不计水的阻力, 设水温很低可不计其饱和蒸汽压的影响, 并设上下水温均匀且保持不变.

解析 在上提过程中, 桶内空气体积增大、压强减小, 从而对桶和桶内空气这一整体的浮力会增大. 若存在桶所受浮力等于重力的位置, 则此位置是桶的不稳定平衡点. 再稍上提, 浮力大于重力, 桶就上浮. 从这时起, 绳不必再拉桶, 桶会在浮力作用下, 上浮到桶底到达水面并冒出. 因此绳对桶的拉

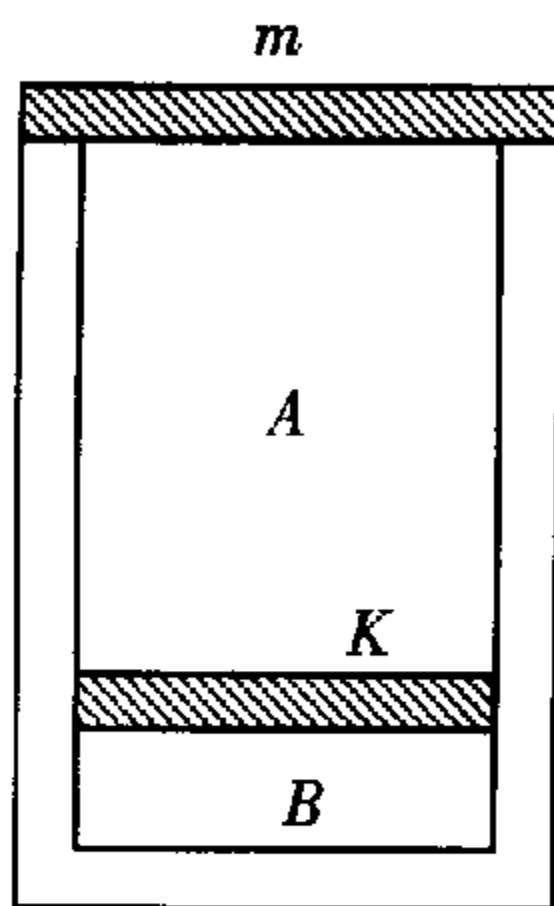


图 6-12

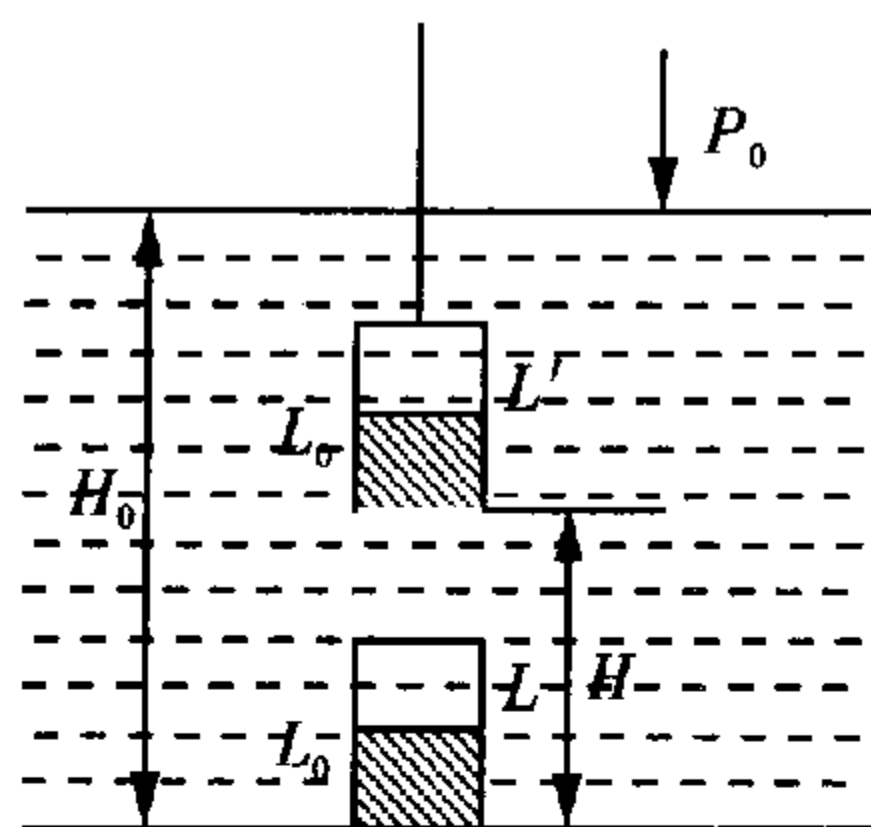


图 6-13

力所需做的最小功的过程,就是缓慢地将桶由池底提高至浮力等于重力的位置所经历的过程.

下面先看这一位置是否存在. 假设存在的话,如图 6-13 所示. 设此位置处桶内空气的高度为 L' , 因为浮力等于重力, 应有

$$mg = \rho(L'S + V_0)g$$

可得 $L' = 0.350 \text{ m}$

设此时桶的下方边缘距池底的高度为 H , 由玻意耳定律可知.

$$[P_0 + H_0 - (L_0 - L)]L = [P_0 + H_0 - H - (L_0 - L')]L'$$

可得 $H = 12.24 \text{ m}$

因为 $H < (H_0 - L_0)$, 即桶仍浸在水中, 可知存在上述浮力等于重力的位置.

现在再求将桶由池底缓慢地提高到 H 处, 桶和水的机械能的增量 ΔE . ΔE 包括三部分.

(1) 桶势能的增量: $\Delta E_1 = mgH$;

(2) 在高度 H 处桶本身排开的水, 可看作下降去填充在池底时桶本身所占的空间而引起水势能的增量: $\Delta E_2 = -\rho V_0 g H$;

(3) 在高度 H 时桶内空气所排开的水, 可看作一部分下降去填充在池底时空气所占的空间, 另一部分(由于空气膨胀)上升到水池表面. 由此引起水的势能的增量:

$$\Delta E_3 = \rho S L g \left(L_0 - \frac{L}{2} \right) + \rho S (L' - L) g H_0 - \rho S L' g \left(H + L_0 - \frac{L'}{2} \right)$$

综上所述从池底到 H 处桶和水的机械能的变化为

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = \rho S g \left[(L' - L)(H_0 - L_0) + \frac{L'^2 - L^2}{2} \right] = 1.37 \times 10^4 \text{ J}$$

方法与技巧 通过本题可加深对不稳定平衡态的认识. 在离池底高度 H 处, 重力等于浮力, 系统处于不稳定平衡. 从池底到 H 处, 绳的拉力做功最小, 此后浮力大于重力, 桶就上浮. 在上述过程中, 桶和水的重力势能发生变化. 由于绳的拉力做功, 系统的机械能会增大.

例 15 一球形肥皂泡, 其中充有空气(不计空气质量), 泡外为真空, 平衡时其半径为 r_0 , 由于受到扰动, 肥皂泡作微小的径向膨胀、收缩的振动, 求其振动周期. 已知肥皂泡质量为 m , 肥皂泡的表面张力系数为 σ , 且振动过程中泡内空气温度不变.

解析 (1) 取对球心 O 所张锥角为 2φ 的微圆肥皂膜为研究对象(图 6-14), 它四周所受表面张力的合力 f_n 沿 AO 方向, 其大小:

$$f_n = 2\sigma(2\pi r \sin\varphi) \sin\varphi \approx 4\pi r \sigma \varphi^2$$

式中 $\sin\varphi \approx \varphi$, 系数 2 是膜内外表面都有表面张力.

设泡内空气压强为 P , 对小圆膜的压力应沿 OA 方向, 其大小:

$$f_p = \pi(r \sin\varphi)^2 P \approx \pi r^2 \varphi^2 P$$

当膜平衡时, 有

$$\begin{cases} f_n = 4\pi r_0 \sigma \varphi^2 \\ f_p = \pi r_0^2 \varphi^2 P_0 \end{cases}$$

因为 $f_n = f_p$, 所以 $P_0 = 4\sigma/r_0$.

(2) 当膜微振动时, 取 $r = r_0 + x, x \ll r_0$, 有

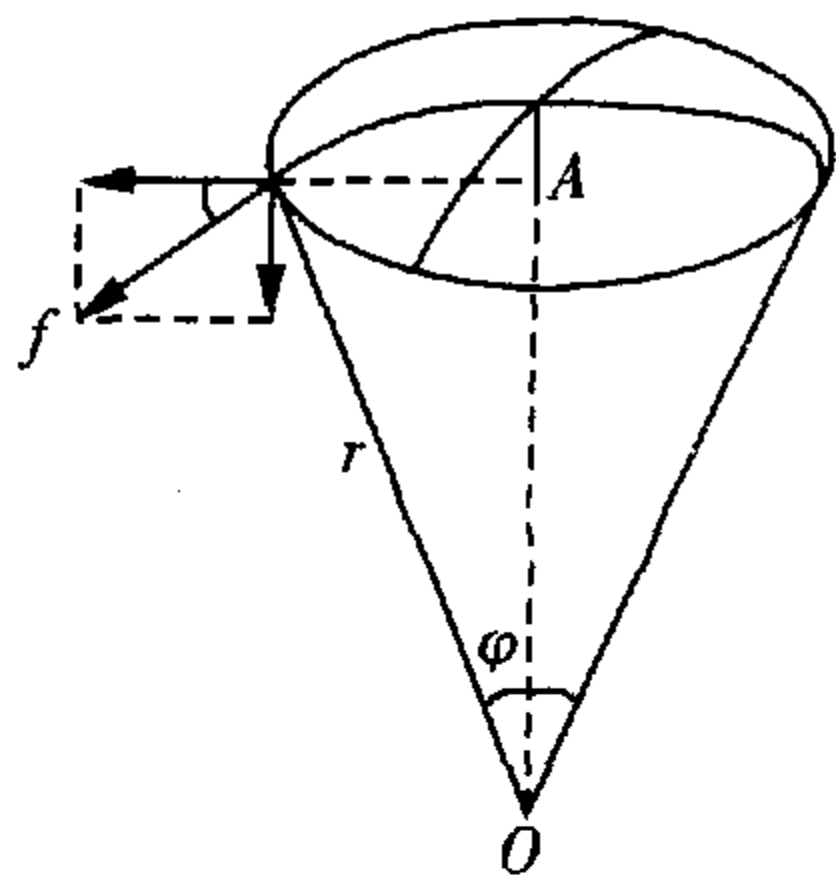


图 6-14

$$\begin{cases} f_n = 4\pi\sigma(r_0 + x)\varphi^2 = f_{n0}\left(1 + \frac{x}{r_0}\right) \\ f_p = P\pi(r_0 + x)^2\varphi^2 \end{cases}$$

泡内气体等温变化遵守玻意耳定律:

$$P_0 \frac{4\pi r_0^3}{3} = P \frac{4\pi}{3} (r_0 + x)^3$$

因此 $P \approx P_0 \left(1 - \frac{3x}{r_0}\right)$

$$f_p = P_0 \left(1 - \frac{3x}{r_0}\right) \pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^2 \varphi^2 \approx f_{p0} \left(1 - \frac{x}{r_0}\right)$$

微圆肥皂膜所受合力:

$$\Sigma F = f_p - f_n = f_{p0} \left(1 - \frac{x}{r_0}\right) - f_{n0} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right) = -f_{n0} \frac{2x}{r_0} = -8\pi\sigma\varphi^2 x$$

微圆膜的质量:

$$m' = \frac{\pi r_0^2 \varphi^2}{4\pi r_0^2} m = \frac{1}{4} m \varphi^2$$

其振动周期亦为肥皂泡微振动周期:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\varphi^2/4}{8\pi\sigma\varphi^2}} = \sqrt{\frac{\pi m}{8\sigma}}$$

方法与技巧 这是应用微元法解答的. 微元可以是线元、面元、体元. 微元法是应用化整为零、集零为整的微积分理念的. 选取微元是隔离法的一种方式, 本题它将表面张力变成微膜的外力而暴露出来. 微膜具代表性, 它的振动周期也就是泡的振动周期.

例 16 在水平放置的洁净玻璃板上倒些水银, 由于重力和表面张力的影响, 水银近似呈圆饼形状(侧面向外凸出), 过圆饼轴线的竖直截面如图 6-15 所示. 为计算方便, 水银和玻璃的接触角可按 180° 计算. 已知水银密度 $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 水银表面张力系数 $\sigma = 0.49 \text{ N/m}$, 当圆饼半径很大时, 试估算其厚度 h 的数值大约是多少. (取 1 位有效数字即可)

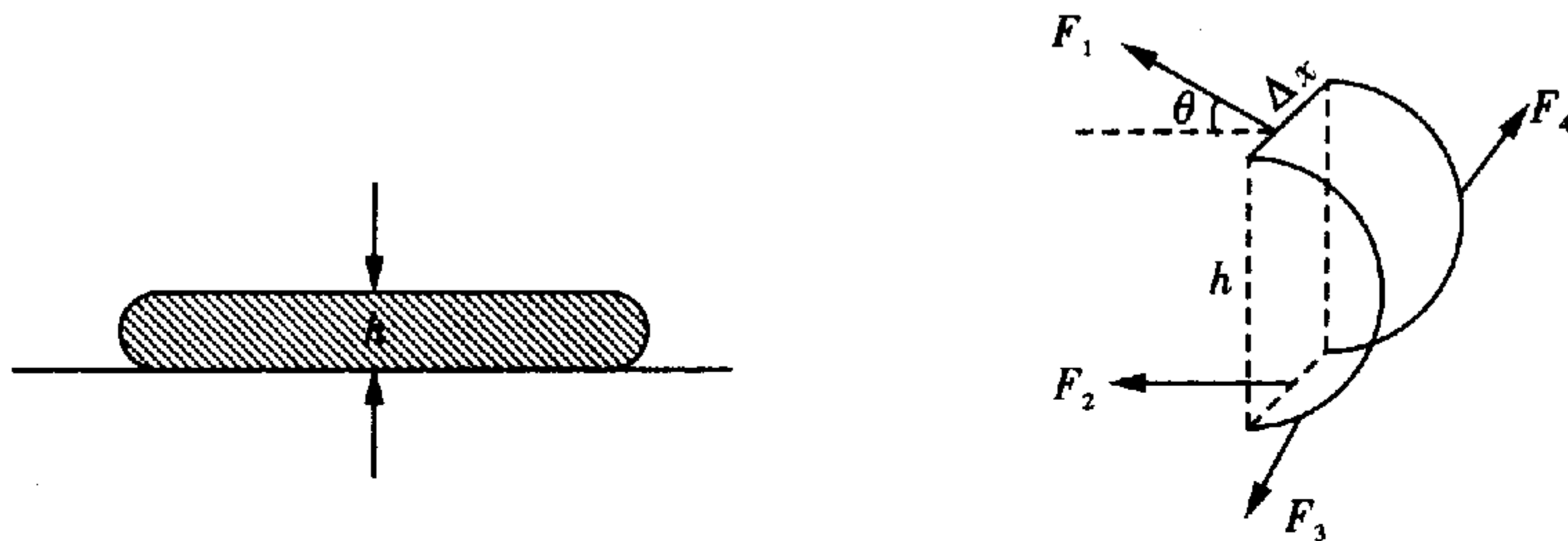


图 6-15

解析 如图所示, 在圆饼侧面处, 取宽 Δx 、高 h 的面积元 ΔS , 由于重力使水银对 ΔS 的侧压力为

$$F = \bar{P}\Delta S = \frac{1}{2}\rho gh \cdot h\Delta x = \frac{1}{2}\rho gh^2 \Delta x \quad \text{①}$$

由于压力 F 使圆饼侧面向外凸出, 因而使侧面积增大. 但是在水银与空气接触的表面层中, 由于表面张力的作用使水银表面有收缩到尽可能小的趋势. 上下两层表面张力 F_1 、 F_2 合力的水平分力 f'

是指向水银内部的,其方向与 F 的方向相反. 设上表面处的表面张力 F_1 与水平方向成 θ 角,则 f' 的大小为

$$f' = F_2 + F_1 \cos\theta = \sigma \Delta x + \sigma \Delta x \cos\theta = (1 + \cos\theta) \sigma \Delta x \quad ②$$

当水银的形状稳定时, $f' = F$. 由于圆饼半径很大, ΔS 两侧的表面张力 F_3, F_4 可认为方向相反而抵消,因而

$$(1 + \cos\theta) \sigma \Delta x = \frac{1}{2} \rho g h^2 \Delta x \quad ③$$

$$\text{可得 } h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 + \cos\theta)}{\rho g}} \approx 0.0027 \sqrt{1 + \cos\theta} \text{ m} \quad ④$$

由于 θ 的实际数值一定大于 0、小于 $\pi/2$, 所以, $1 < \sqrt{1 + \cos\theta} < \sqrt{2}$. ④ 式中 h 的取值范围是 $2.7 \times 10^{-3} < h < 1.4 \times 2.7 \times 10^{-3}$

所以水银层厚度的估算值可取 $3 \times 10^{-3} \text{ m}$ 或 $4 \times 10^{-3} \text{ m}$.

方法与技巧 这道估算题是采取微元法处理的. 估算题主要根据物理知识对某些物理量的数量级予以确定或对精度要求不高的问题近似计算. 本题由于水银上表面处的表面张力与水平方向的夹角 θ 未知, 只能给出它的取值范围, 从而得到水银厚度的估算值.

【解题尝试】

1. 在标准状态下, 1 cm^3 气体中的分子数约为多少?
2. 一直立气缸由截面积不同的两个圆筒连接而成(图 6-16). 活塞 A 和 B 用一长 $2l$ 不可伸长的细线连接, 它们可在筒内无摩擦地上下滑动. A 和 B 的截面积为 $S_A = 20 \text{ cm}^2, S_B = 10 \text{ cm}^2$, A、B 之间有一定质量的理想气体. A 上方和 B 下方都是大气, 大气压强保持为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$.
 - (1) 当缸内气温为 600 K. 压强为 $1.2 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, A、B 的平衡位置如图所示. 已知活塞 B 的质量 $m_B = 1 \text{ kg}$, 求活塞 A 的质量 $m_A = ?$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 - (2) 已知缸内气体温度由 600 K 缓慢降低时, A、B 之间距离保持不变, 并一起下移(可认为两活塞仍处于平衡状态), 直到活塞 A 移到两圆筒连接处, 此后气体继续降温, 直到 A、B 之间距离开始小于 $2l$ 为止. 试分析在降温的整个过程中, 缸内气体压强的变化情况, 并求出气体的最低温度.

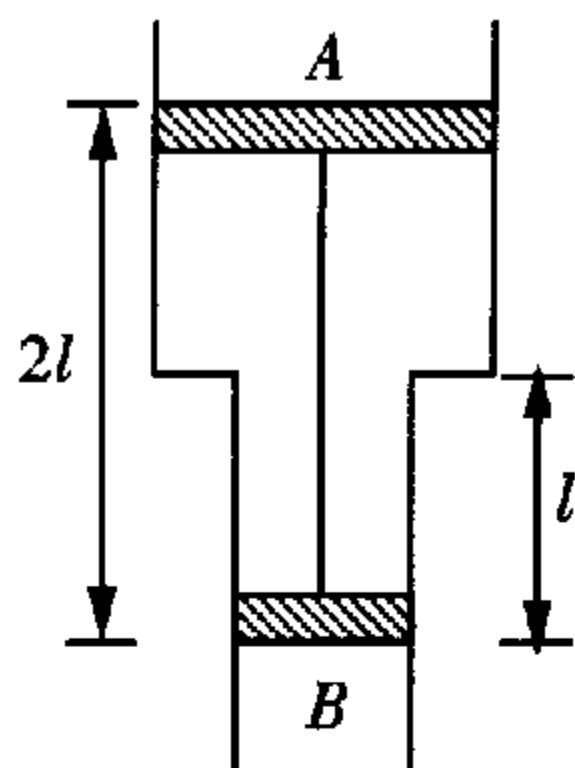


图 6-16

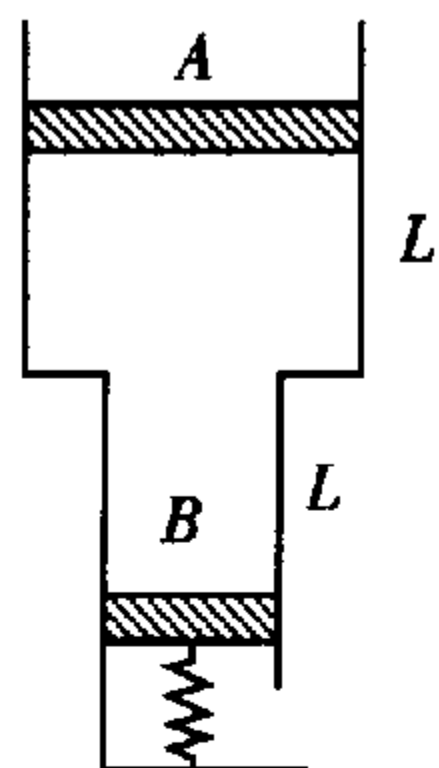


图 6-17

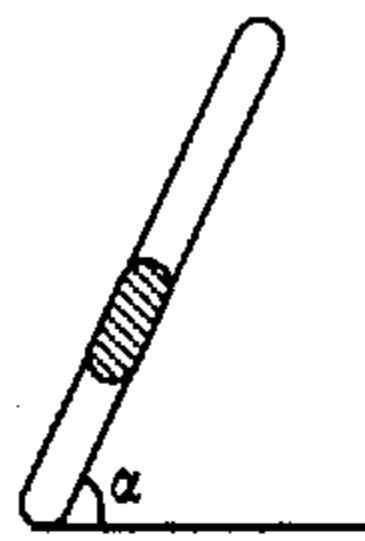


图 6-18

3. 一直立气缸由截面积不同的两个圆筒连接而成, 活塞 A 的质量 $2m$, 截面积 $2S$; 活塞 B 的质量 m , 截面积 S , 它们可在筒内无摩擦上下移动, 活塞 B 与劲度系数 k 的弹簧相连(图 6-17). A、B 间充有理想气体, A 上方和 B 下方都与压强 P_0 的大气相通, A、B 静止时离圆筒连接处距离均为 L . 若在 A 上再加质量 $4m$ 的砝码, 活塞 A 下降多少?

4. 两端封闭的均匀玻璃管内,有一段水银柱将管内气体分为两部分,玻璃管与水平面成 α 角(图 6-18),将玻璃管整体浸入较热的水中,重新达到平衡,试判断水银柱位置是否变化,如果变化,如何变?
5. 有一两端开口、粗细均匀的 U 形玻璃细管,放置在竖直平面内,处在压强 P_0 的大气中,两竖直支管高度均为 h ,水平管长 $2h$,细管半径为 $r(r \ll h)$. 今将水平管内灌满密度为 ρ 的水银.
 - (1) 若将两竖直支管的开口封闭起来,使管内气压为大气压强. 当 U 形管向右匀加速移动时,加速度多大才能使水平管内水银柱长度稳定为 $5h/3$?
 - (2) 若将其中一竖直支管的开口封闭,使其管内压强为 1 atm,令 U 形管绕另一开口支管为轴作匀速转动,求转速 n 多大才能使水平管内水银柱长度稳定为 $5h/3$.
6. 一球形热气球,其隔热很好的球皮连同吊篮等装载总质量为 300 kg,经加热后,气球膨胀到最大体积,此时它的直径为 18 m,球内外气体成分相同,而球内气体压强稍稍高于大气压,试求出刚好能使热气球上升时球内空气的温度. 已知此时大气温度为 27°C ,压强为 1 atm,在标准状态下空气密度为 1.3 kg/m^3 .
7. 一容积为 $L/4$ 的抽气筒,每分钟可完成 8 次抽气动作,一容积为 1 L 的容器与此抽气筒相连通,问抽气筒工作多少时间才能使容器内气体压强由 760 mmHg 降为 1.9 mmHg(抽气过程中容器内温度保持不变)?
8. 如图 6-19 所示, C 为圆柱形容器, P 为活塞, P 的两边充有理想气体; P 与圆筒间无摩擦且不漏气, L 为固定在活塞上的细长直杆,细杆与圆筒间无摩擦且密封性好、不漏气; E 为跨过无摩擦的定滑轮并与悬盘相连的轻绳,两悬盘质量相等;整个系统放在恒温室中.

当温度 $T = 300 \text{ K}$,左盘上置砝码 $m_1 = 1.2 \text{ kg}$,且活塞平衡时,两部分气体体积相等,即 $V_1 : V_2 = 1 : 1$;当 $T' = 400 \text{ K}$,右盘上置砝码 $m_2 = 0.5 \text{ kg}$,活塞平衡时,两部分气体体积之比为 $V'_1 : V'_2 = 4 : 1$. 现欲使活塞不因温度变化而左右移动,问:①应如何在盘内放置砝码? ②此时左右两部分气体的体积比是多大?

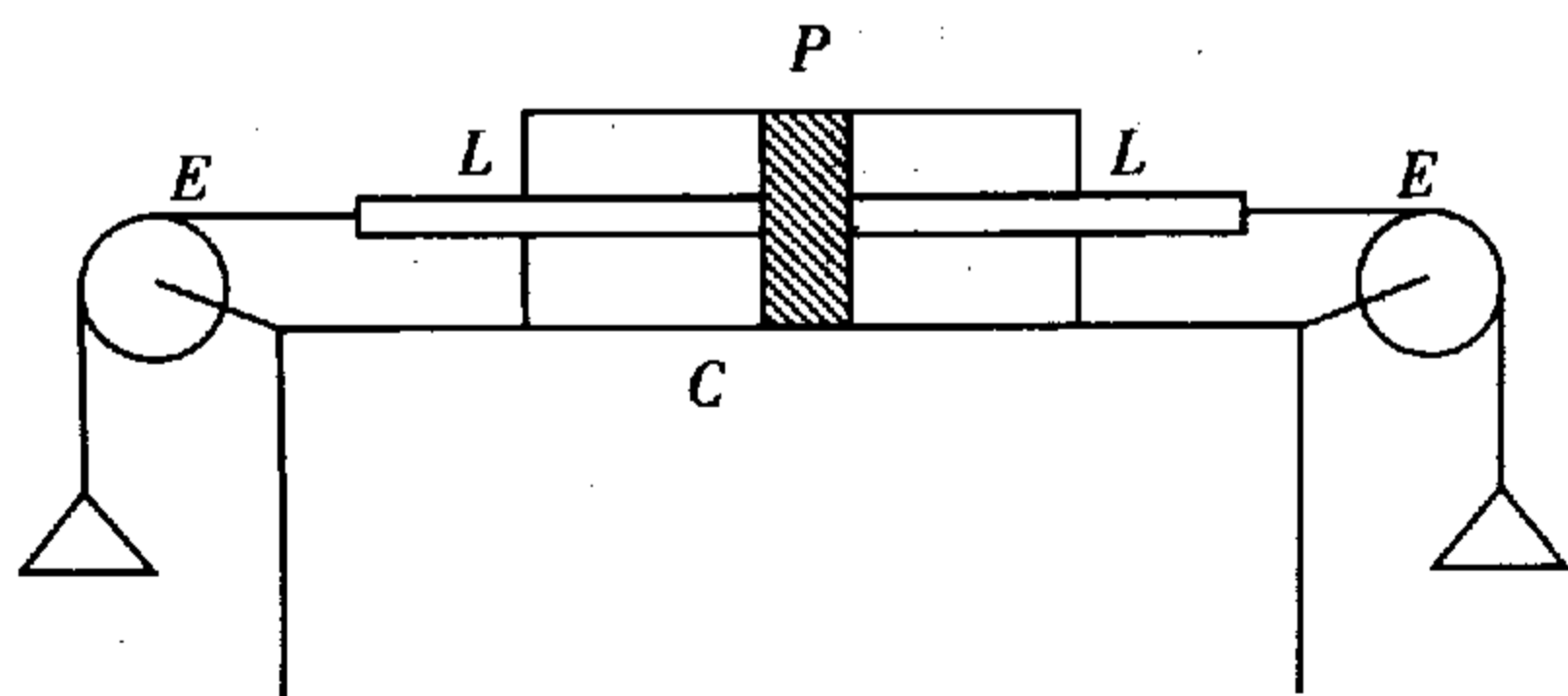


图 6-19

9. 先在干燥空气中测一块铝片质量,再在湿空气中测它的质量. 湿空气中水蒸气的分压强为 $0.02 \times 10^5 \text{ Pa}$,称重量用铜砝码,两次大气压强均为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$,温度均为 20°C . 如所用天平的灵敏度只能对 0.1 mg 的差别才有反应,问铝片质量至少多大才能在上述两种情况下表现出差别?(铝的密度为 $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,铜的密度为 $8.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 20°C 时空气密度为 1.2 kg/m^3 ,水蒸气密度为 0.75 kg/m^3).
10. 一粗细均匀的 U 形管在竖直平面内放置(图 6-20),U 形管左端封闭、右端通大气. 大气压强为 P_0 ,管内装入水银,两边水银面高度差为 h ,左管内空气柱长为 L ,如果让该管在原来竖直平面内

自由下落,求两边水银面的高度差:

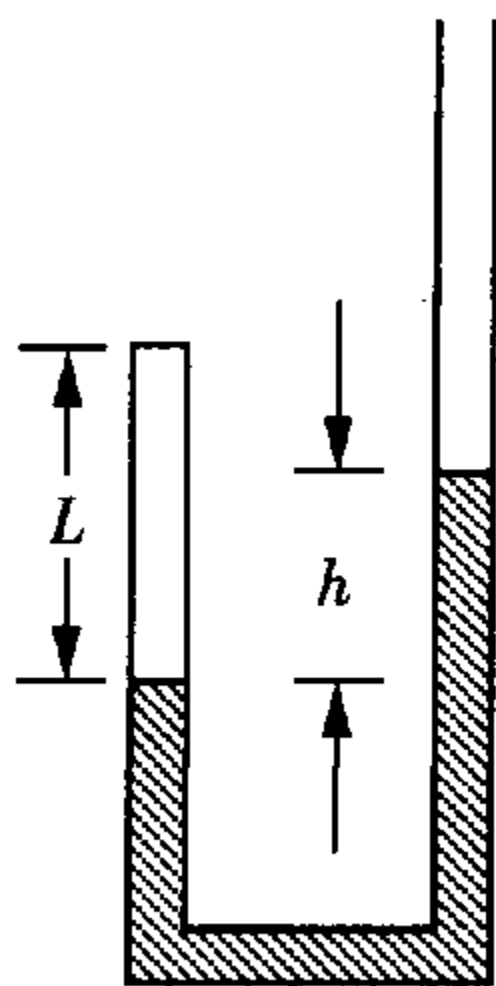


图 6-20

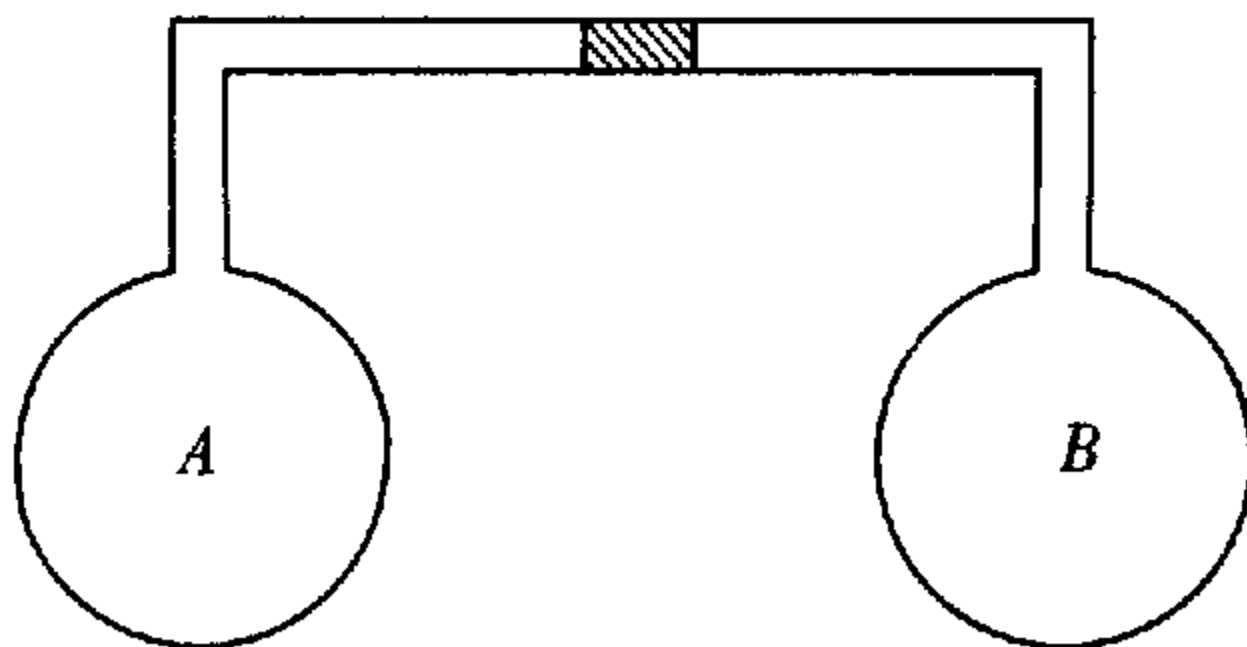


图 6-21

11. 放在可调恒温箱中的两个容器里装着氢气,用粗细均匀的 U 形管连通两容器,管中水银滴把两容器隔开(图 6-21). 当容器 A 的温度为 7°C , 容器 B 的温度为 27°C 时,水银滴恰在管的水平部分的中央保持平衡. 若调节恒温箱,使两容器温度同时升高 10°C 时,水银滴向何方移动? 移动距离是多少? 调温前容器 A、B 的体积(包括它们的 U 形管部分)均为 174 cm^3 , U 形管的横截面积 $S = 1\text{ cm}^2$.

第七章 热力学第一定律

【学习目标】

一、热力学第一定律

外界对系统做功 W 与系统从外界吸热 Q 之和等于系统内能的增量 ΔE , 即

$$\Delta E = Q + W$$

$$Q = \Delta E + W' \quad (W' \text{ 表示系统对外界做的功})$$

式中各量为代数量, 有正负之分. 系统吸热, $Q > 0$; 系统放热, $Q < 0$. 外界对系统做功, $W > 0$, $W' < 0$; 系统对外界做功, $W < 0$, $W' > 0$. 内能增加, $\Delta E > 0$; 内能减少, $\Delta E < 0$.

对于与外界隔绝的孤立系统, $Q = 0$, $W = 0$, 则 $\Delta E = 0$, 系统的内能守恒. 若系统内有几个温度不同的物体热接触, 高温物体放出的热量等于低温物体吸收的热量, 最后系统处于同一温度的热平衡状态. 热平衡方程为

$$Q_{\text{吸}} = Q_{\text{放}}$$

1. 气体的机械功(体积功)

(1) 气体微功的表达式: 气体对外界的微功

$$\Delta W' = P\Delta V$$

外界对气体的微功为 $\Delta W = -P\Delta V$. 气体的等压过程 $W = -P(V_2 - V_1)$.

(2) 气体体积功的图示

$$W = \pm |P - V \text{ 图中过程曲线下面积}|$$

压缩气体外界做功取“+”, 气体膨胀对外做功取“-”.

2. 热传递的方式

(1) 热传导: 不同温度的物体直接接触而出现的传热现象. 长度 L 、横截面积 S 的柱体, 两端温度恒定, 则热量沿柱体长度方向由高温 T_1 处向低温 T_2 处传递, Δt 时间通过截面 S 传递的热量为

$$Q = K \frac{T_1 - T_2}{L} S \Delta t$$

K 为热导率, 表征物质的导热能力.

(2) 热对流: 流体的各部分因温度不同而相对宏观运动引起的传热现象.

(3) 热辐射: 物体在任何温度下以电磁波形式向外界发射能量的现象. 热辐射是真空中传热的唯一方式. 能在任何温度下吸收外来所有电磁辐射而表面不反射的物体称为黑体. 太阳、地球常被看作黑体. 黑体单位表面积的辐射功率为

$$J = \sigma T^4 \quad (\sigma \text{ 为斯忒藩常数})$$

3. 物体温度变化所需热量

(1) 明确热容 C' 、摩尔热容 C 、比热容 c 的定义及其关系: $C' = mc = \nu C$

(2) 液体和固体不同过程的比热容、摩尔热容值差别很小, 可以笼统地称某某的比热容、摩尔热容. 其温度变化所需热量:

$$Q = C'(t_2 - t_1) = mc(t_2 - t_1)$$

(3) 气体的比热容、摩尔热容与过程有明显关系. 由于过程不同, 它们可有多种数值, 因此必须讲气体定容比热. 气体等压比热等等.

二、理想气体的几个过程

1. 定容过程($\Delta V = 0$)

因有 $W = 0, \Delta E = Q$. 可见在定容过程中, 气体吸收的热量全部用于增加内能, 反之气体放出的热量是以减少内能为代价的. 由于

$$\Delta E = \frac{m}{\mu} \left(\frac{i}{2} R \right) \Delta T$$

引入气体定容摩尔热容 C_v ——1 mol 气体定容升温 1 K 吸收的热量. C_v 也是 1 mol 气体升温 1 K 所增加的内能.

$$Q = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T = \Delta E$$

$$C_v = \frac{1}{\nu} \left(\frac{Q}{\Delta T} \right)_v = \frac{i}{2} R = \begin{cases} \frac{3}{2} R = 12.5 \text{ J/mol} \cdot \text{K} & (\text{单原子分子气体}) \\ \frac{5}{2} R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K} & (\text{双原子分子气体}) \end{cases}$$

2. 等温过程($\Delta T = 0$)

因有 $\Delta E = 0, Q = -W = W'$. 气体等温膨胀, 吸收的热量全部用来对外做功, 反之等温压缩气体, 外界的功全部以热量对外放出.

3. 等压过程($\Delta P = 0$)

根据 $Q = \Delta E - W$, 气体等压膨胀时, 吸收的热量一部分用来增加内能, 另一部分用来对外做功.

$$\Delta E = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = \frac{C_v}{R} P (V_2 - V_1)$$

$$W = -P(V_2 - V_1) = -\frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1)$$

引入等压摩尔热容 C_p ——1 mol 气体等压升温 1 K 所吸收的热量. 因此

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$$

代入热力学第一定律表达式后, 得到

$$C_p - C_v = R$$

4. 绝热过程($Q = 0$)

根据 $\Delta E = W$, 表明绝热压缩气体, 外界的功全部用来增加内能; 气体绝热膨胀, 气体对外做的功是以消耗内能为代价的.

(1) 理想气体在绝热过程中 (P, V, T) 三量同时变化, 它们服从气态方程

$$P_2 V_2 / T_2 = P_1 V_1 / T_1$$

但还要服从绝热过程方程, 它有几种形式, 如

$$\begin{cases} PV^\alpha = C_1, & P_1/P_2 = (V_2/V_1)^\alpha \\ TV^{\alpha-1} = C_2, & T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\alpha-1} \\ T^\alpha P^{1-\alpha} = C_3, & T_1/T_2 = (P_1/P_2)^{1-\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

式中 α 是热容比. 有

$$\alpha = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} = \begin{cases} 5/3 = 1.67 & (\text{单原子分子气体}) \\ 7/5 = 1.40 & (\text{双原子分子气体}) \end{cases}$$

(2) 在绝热过程中有 $\Delta E = W$, 理想气体绝热过程的功为 [注意: $C_v = R/(a-1)$]:

$$\begin{aligned} W = \Delta E &= \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = \frac{C_v}{R} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{1}{a-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{\nu R}{a-1} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{P_1 V_1}{a-1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{a-1}{a}} - 1 \right] = \frac{P_1 V_1}{a-1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{a-1} - 1 \right] \end{aligned}$$

5. 自由膨胀过程

气体向真空的膨胀过程叫气体的自由膨胀. 这是非静态过程. 由于没有外界阻力, 所以外界不对气体做功, $W=0$; 由于过程进行很快, 气体来不及与外界交换热量, 所以 $Q=0$. 这样根据热力学第一定律可知, 气体自由膨胀后其内能不变, 即 $E_2 = E_1$. 如果是理想气体自由膨胀, 其内能不变, 意味着气体的温度也不会变化, 即 $T_2 = T_1$.

6. 理想气体的循环过程

气体经过一系列变化又回到原来平衡态的过程叫循环过程, 简称循环. 在 $P-V$ 图上, 循环用一条闭合曲线表示, 按顺时针方向进行的称为正循环, 反之称为逆循环.

正循环反映了热机工作过程, 工质从高温热源吸热 Q_1 , 一部分用来对外界做功 W' , 另一部分向低温热源放热 Q_2 , 回到原态, 有 $\Delta E = 0$.

$$Q_1 - Q_2 = W'$$

气体经正循环对外界所做的功:

$$W' = |P-V \text{ 图中循环曲线包围的面积}|$$

三、热力学第二定律

开尔文表述: 不可能从单一热源吸热, 使它完全转变为有用的功而不产生其他影响.

克劳修斯表述: 不可能将热量从低温物体传向高温物体而不产生其他影响.

【解题钥匙】

例 1 在野外施工中, 需要使质量 $m = 4.20 \text{ kg}$ 的铝合金构件升温, 除了保温瓶中尚存有温度 $t = 90^\circ\text{C}$ 的 1.200 kg 的热水外, 无其他热源. 试提出一个操作方案, 能利用这些热水使构件从温度 $t_0 = 10.0^\circ\text{C}$ 升温到 66.0°C 以上 (含 66.0°C), 并通过计算验证你的方案. 已知铝合金的比热容 $c = 0.880 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$, 水的比热容 $c_0 = 4.20 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$, 不计向周围环境散失的热量.

解析 (1) 操作方案: 将保温瓶中 $t = 90.0^\circ\text{C}$ 的热水分若干次倒出来. 第一次先倒出一部分, 与温度为 $t_0 = 10.0^\circ\text{C}$ 的构件充分接触, 并达到热平衡, 构件温度已升高到 t_1 , 将这部分温度为 t_1 的水倒掉. 再从保温瓶倒出一部分热水, 再次与温度为 t_1 的构件充分接触, 并达到热平衡, 此时构件温度已升高到 t_2 , 再将这些温度为 t_2 的水倒掉. 然后再从保温瓶倒出一部分热水来使温度为 t_2 的构件升温……直到最后一次, 将剩余的热水全部倒出来与构件接触, 达到热平衡. 只要每部分水的质量足够

小,最终就可使构件的温度达到所要求的值.

(2) 验证计算:例如,将 1.200 kg 的热水分 5 次倒出来,每次倒出 $m_0 = 0.240$ kg,在第一次使热水与构件达到热平衡的过程中,水放热为

$$Q_1 = m_0 c_0 (t - t_1)$$

构件吸热为

$$Q'_1 = mc(t_1 - t_0)$$

由 $Q_1 = Q'_1$ 及题给数据,可得

$$t_1 = 27.1^\circ\text{C}$$

同理,第二次倒出 0.240 kg 热水后,可使构件升温到

$$t_2 = 40.6^\circ\text{C}$$

依次计算出 $t_1 \sim t_5$ 的数值,分别列在下表中.

倒水次数	1	2	3	4	5
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	27.1	40.6	51.2	59.5	66.0

可见, $t_5 = 66^\circ\text{C}$ 符合要求.

方法与技巧 若将 1.200 kg 的热水等分 4 次倒,每次倒出 $m_0 = 0.300$ kg,按上述操作方法,可以依次算出 $t_1 \sim t_4$ 的数值,如下表中的数据:

倒水次数	1	2	3	4
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	30.3	45.50	56.8	65.2

$t_4 = 65.2^\circ\text{C} < 66.0^\circ\text{C}$. 如果将热水等分后倒到构件上,则倒出的次数不能少于 5 次.

例 2 将一定量的理想气体从较大体积 A 态压缩到 B 态. 问以下两种情况中的哪一种外界对气体所做的功多? 设气体初、末温度相等.

(1) 开始在等压下进行,接着在和体积的平方成正比的温度下进行.

(2) 开始在和压强的平方成正比的温度下进行,接着在体积不变下进行.

解析 在情况(1)中的第二阶段 $T \propto V^2$, 和在情况 2 中的第一阶段 $T \propto P^2$, 都是 $P \propto V$. 其过程方程可以写成 $P = C_1 V$ 、 $P = C_2 V$, 在 $P - V$ 图中,其过程曲线都是过 O 点的直线,如图 7-1 所示.

在情况 1 中,外界对气体做的功:

$$W_1 = P_A(V_A - V') - \frac{1}{2}(P_A + P_B)(V_B - V')$$

在情况 2 中,外界对气体做的功:

$$W_2 = \frac{1}{2}(P_A + P')(V_A - V_B)$$

考虑到情况(1)的第二阶段和情况(2)的第一阶段都服从 $P \propto V$, 故

有

$$\frac{P_A}{V'_1} = \frac{P_B}{V_B}, \quad \frac{P_A}{V_A} = \frac{P'}{V_B}$$

由于 A、B 温度相等,有 $P_A V_A = P_B V_B$, 故得 $W_1 = W_2$

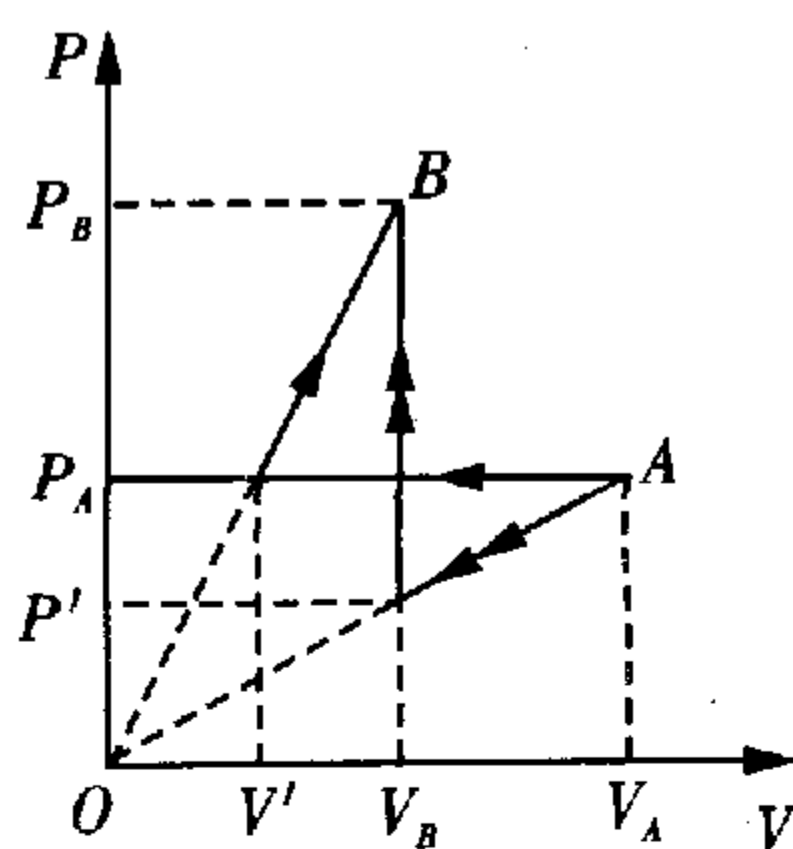


图 7-1

方法与技巧 理想气体状态方程是适用于理想气体的任一平衡态的. 理想气体过程方程仅适用于它特定过程的平衡态的, 例如等温过程 $PV = C$, 绝热过程 $PV^\gamma = C$ 等等. 由于过程方程把该过程中不同状态的参量联系起来, 本题利用它化简了结果. 由于末温等于初温. 因此 $W_1 = W_2$.

例 3 在一具有绝热壁的刚性圆柱形封闭气缸内, 有一装有小阀门 L 的绝热活塞. 在气缸的 A 端装有电热器 H , 可用于加热气体.

起初, 活塞紧贴气缸 B 端的内壁, 小阀门 L 关闭; 整个气缸内盛有一定质量的某种理想气体, 其温度为 T_0 , 活塞与气缸壁之间的摩擦可以忽略. 现设法把活塞压至气缸中央, 并用销钉 F 把活塞固定, 从而把气缸分成体积相等的左右两室 (图 7-2), 在上述压缩过程中, 设对气体做功 W , 气体的温度上升到 T .

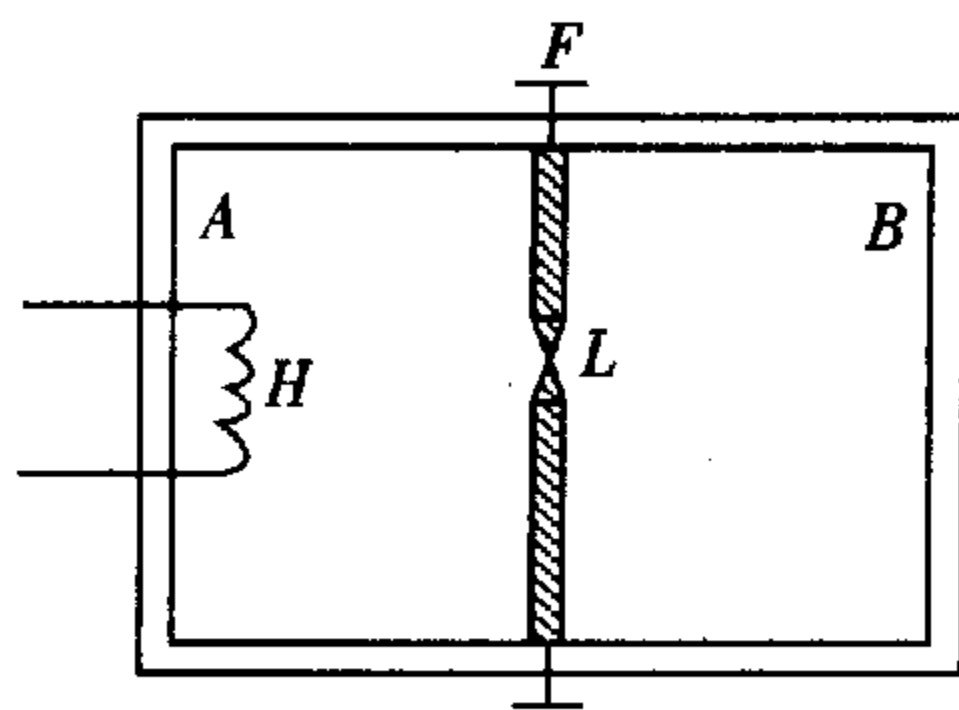


图 7-2

现开启小阀门, 经过足够长的时间, 将它关闭. 然后拔除销钉, 让活塞可自由移动, 并用电热器加热气体, 加热完毕并经过一定时间后, 得知左室内气体的压强变为加热前的 1.5 倍, 右室的体积变为原来的 0.75 倍. 求电热器传给气体的热量.

解析 设气缸内盛有 n mol 理想气体, 其定容摩尔热容为 C_V . 将活塞从气缸右端缓慢压至中央的过程为绝热压缩过程, 外界做功 W :

$$W = \Delta E = nC_V(T - T_0)$$

开启小阀门 L , 左边气体向右边真空自由膨胀, 气体不吸热不做功、内能不变, 温度仍为 T , 同时两室中气体的压强 P 、体积 V 亦相同.

关闭 L , 拔除销钉. 加热后, 左室气体由 $P \rightarrow \frac{3}{2}P, V \rightarrow V + \frac{1}{4}V, T \rightarrow T_A$, 有

$$\frac{PV}{T} = \frac{\frac{3}{2}P \cdot \frac{5}{4}V}{T_A}$$

右室气体由 $P \rightarrow \frac{3}{2}P, V \rightarrow \frac{3}{4}V, T \rightarrow T_B$, 有

$$\frac{PV}{T} = \frac{\frac{3}{2}P \cdot \frac{3}{4}V}{T_B}$$

由上二式得

$$T_A = \frac{15}{8}T, \quad T_B = \frac{9}{8}T$$

由于电热器传给气体的热量等于整个气体内能的改变量, 即

$$Q = \Delta E_A + \Delta E_B = \frac{n}{2}C_V(T_A - T) + \frac{n}{2}C_V(T_B - T) = \frac{7}{16} \cdot \frac{WT}{T - T_0} + \frac{1}{16} \cdot \frac{WT}{T - T_0} = \frac{WT}{2(T - T_0)}$$

方法与技巧 解答本题时首先要理清整个物理过程, 它由相继性关联的三个分过程组成: 绝热压缩气体 \rightarrow 气体自由膨胀 \rightarrow 加热左室气体 (平衡时两室压强相等但体积、温度不相等). 再根据各个分过程的特点, 考察气体状态参量的变化与关联情况, 考察其热量、功与内能变化的转换关系.

例 4 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 容积大很多的绝热容器 B 相连. 开始时阀门关闭, 两容器中盛有同种理想气体, 温度均为 30°C , B 中气体的压强是 A 中的两倍. 现将阀门缓慢打开, 直

至压强相等时关闭,问此时容器 A 中气体的温度为多少? 假设在打开到关闭阀门的过程中,处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换. 已知每摩尔该气体的内能为 $U = \frac{5}{2}RT$.

解析 设气体的摩尔质量为 μ , 容器 A 的体积为 V . 阀门打开前,其中气体的质量为 M 、压强为 P 、温度为 T ,由

$$PV = \frac{M}{\mu}RT, \text{ 得 } M = \frac{P\mu V}{RT} \quad ①$$

因为 B 容积很大,所以在题述的过程中, B 中气体的压强和温度皆可视为不变. 根据题意,打开阀门又关闭后, A 中气体的压强变为 $2P$, 若其温度为 T' 、质量为 M' , 则有

$$M' = \frac{2P\mu V}{RT'} \quad ②$$

由 B 进入 A 的气体的质量为

$$\Delta M = M' - M = \frac{P\mu V}{R} \left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) \quad ③$$

设这些气体处在容器 B 中时所占的体积为 ΔV , 则

$$\Delta V = \frac{RT}{2P\mu} \Delta M \quad ④$$

为把这些气体压入容器 A, 容器 B 中其他气体对这些气体将等压做功为

$$W = 2P\Delta V = PV \left(\frac{2T}{T'} - 1 \right) \quad ⑤$$

A 中气体内能的变化为

$$\Delta U = \frac{M'}{\mu} \cdot \frac{5}{2}R(T' - T) \quad ⑥$$

因为 A 与外界没有热交换, 根据热力学第一定律, 有

$$W = \Delta U \quad ⑦$$

结果为 $T' = 353 \text{ K}$

方法与技巧 气体 B 比 A 的容积大很多, 这表明 B 是一个相当大的热力学系统, 当小系统 A 与它发生能量交换时, 它所受到的影响极小, 可以忽略不计, 以致可以认为它的状态参量不会改变. 因此将 B 与 A 之间的阀门打开后关闭, 容器 A 中的压强也是 $2P$.

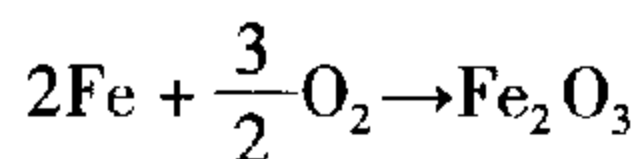
例 5 空气是混合气体, 其质量的百分比是: 氮气约 76.9%, 氧气约 23.1%, 其他忽略不计.

现有一气缸, 缸内充有空气, 并装有一些由极细钢丝组成的钢丝棉; 气缸内的活塞能无摩擦地活动, 使缸内气压恒定为 1 atm ; 缸内有非常缓慢的化学反应, 假定反应生成 1 mol 的 Fe_2O_3 后, 氧气耗尽. 已知这个过程是在 1 atm 、 300 K 的条件下进行, 系统放出热量 $8.24 \times 10^5 \text{ J}$. 试求在此过程中:

- (1) 整个系统内能的改变量;
- (2) 缸内气体内能的改变量;
- (3) 缸内氮气密度的改变量.

计算时, 缸内气体作理想气体处理; 1 mol 氧气和 1 mol 氮气的内能均认为是 $\frac{5}{2}RT$; 缸内钢丝棉等固态物质与缸内气体相比, 所占体积很小, 可忽略不计.

解析 (1) 缸内的化学反应是



可见为了生成 1 mol 的 Fe_2O_3 需要 1.5 mol 的 O_2 和 2 mol 的 Fe. 反应完毕后, 缸内气体的物质的量减少, $\Delta n = -1.5 \text{ mol}$, 反应是在等温等压下进行, 缸内气体体积随之减少 ΔV , 由理想气体状态方程, 得

$$\Delta V = \frac{RT}{P} \Delta n$$

因此在化学反应过程中外界对系统所做的功为

$$W = -P\Delta V = -RT\Delta n = 3739.5 \text{ J}$$

已知在此过程中, 系统放热, 即

$$Q = -8.24 \times 10^5 \text{ J}$$

由热力学第一定律, 系统内能的改变量为

$$\Delta E = Q + W = -8.203 \times 10^5 \text{ J}$$

即系统的内能减少了.

(2) 缸内气体包括氧气和氮气, 氮气因温度不变, 未参加反应, 物质的量也不变, 故氮气的内能不变. 氧气参加反应已耗尽, 物质的量减少, 内能相应减少. 因此缸内气体在此过程中内能的改变量:

$$\Delta E' = \left(\frac{5}{2}RT\right) \Delta n = -9349 \text{ J}$$

(3) 化学反应开始时, 缸内氧气质量 M_1 和氮气质量 M_2 分别为

$$\begin{cases} M_1 = 1.5 \times 32 \times 10^{-3} = 48 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ M_2 = \frac{76.9}{23.1} M_1 = 159.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \end{cases}$$

用 P_0 表示 1 atm, 反应前氮气的分压强为 P ; V_0 表示反应前缸内空气的体积, V 表示反应后氮气的体积(反应后, 压强仍为 P_0), 用 μ_1 和 μ_2 分别表示氧和氮的摩尔质量, 则反应前有

$$\begin{cases} PV_0 = \frac{M_2}{\mu_2} RT \\ (P_0 - P)V_0 = \frac{M_1}{\mu_1} RT \end{cases}$$

反应后对氮气有

$$P_0 V = \frac{M_2}{\mu_2} RT$$

因此反应前后, 缸内氮气密度的改变量为

$$\Delta \rho = \rho_{\text{后}} - \rho_{\text{前}} = \frac{M_2}{V} - \frac{M_2}{V_0}$$

把上面的结果代入, 可得

$$\Delta \rho = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} P_0 M_1}{\left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right) RT} = 0.236 \text{ kg/m}^3$$

方法与技巧 本题讨论化学反应过程中的热力学问题. 反应是在等温等压下去进行的. 反应前系统中包含铁、氧气、氮气; 反应后系统中有 Fe_2O_3 、铁、氮气, 且体积减少. 因此系统的内能、缸内气体的

内能、缸内氮气的密度都同时发生变化。

例 6 如图 7-3 所示,水平放置的横截面积为 S 的带有活塞的圆筒形绝热容器中,盛有 1 mol 的理想气体,其内能 $U = CT$, C 为已知常量, T 为热力学温度. 器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦,最大的静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为 F . 图中 r 为电阻丝,通电时可对气体缓慢加热,起始时,气体压强与外界大气压强 p_0 相等,气体的温度为 T_0 . 现开始对 r 通电,已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收. 若用 Q 表示气体从电阻丝吸收的热量, T 表示气体的温度,试以 T 为纵坐标, Q 为横坐标,画出在 Q 不断增加的过程中 T 和 Q 的关系图线,并在图中用题给的已知量及普适气体常量 R 标出反映图线特征的各项。

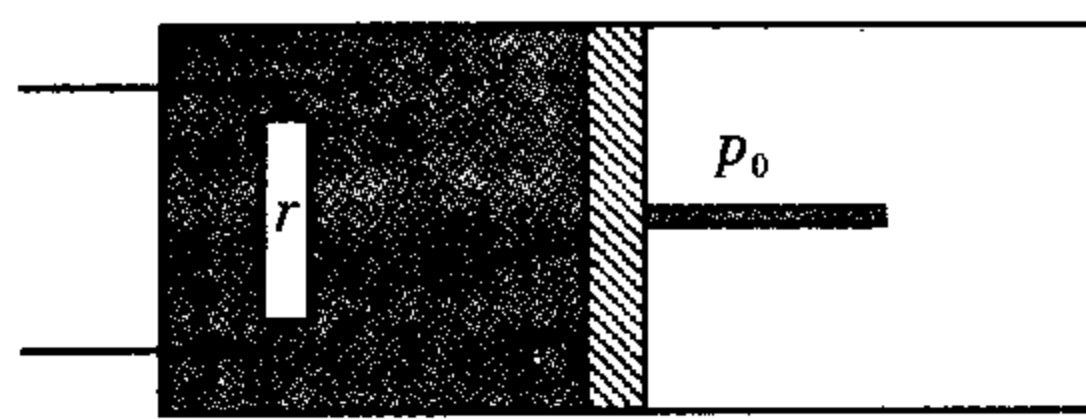


图 7-3

解析 (1) 电阻通电后对气体缓慢加热,气体的温度升高,压强增大,活塞开始有向外运动的趋势,但在气体对活塞的作用力尚未达到外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦力之和以前,活塞不动,即该过程为等容过程. 因气体对外不做功,根据热力学第一定律可知,在气体温度从 T_0 升高到 T 的过程中,气体从电阻丝吸收的热量为

$$Q = C(T - T_0) \quad ①$$

此过程将持续到气体对活塞的作用力等于外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦力之和. 若用 T_1 表示此过程达到末态的温度, p 表示末态的压强, Q_1 表示此过程中气体从电阻丝吸收的热量,由等容过程方程有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_1}{T_0} \quad ②$$

$$\text{由力的平衡可知 } pS = p_0S + F \quad ③$$

$$\text{由②、③两式可得 } T_1 = \frac{(p_0S + F)T_0}{p_0S} \quad ④$$

$$\text{代入①式得 } Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S} \quad ⑤$$

由以上讨论可知,当 $Q \leq Q_1$ 时, T 与 Q 的关系为

$$T = \frac{Q}{C} + T_0 \quad ⑥$$

在 $T-Q$ 图中为一直线如图中 ab 所示,其斜率为

$$K_{ab} = \frac{1}{C} \quad ⑦$$

直线在 T 轴上的截距等于 T_0 , 直线 ab 的终点 b 的坐标为 (T_1, Q_1) .

(2) 当电阻丝继续加热,活塞开始向外运动以后,因为过程是缓慢的,外界大气压强及摩擦力皆不变,所以气体的压强不变,仍是 p , 气体经历的过程为等压过程. 在气体的体积从初始体积 V_0 增大到 V , 温度由 T_1 升高到 T 的过程中,设气体从电阻丝吸收的热量为 Q' , 活塞运动过程中与器壁摩擦生热的一半热量为 q , 由热力学第一定律可知

$$Q' + q = C(T - T_1) + p(V - V_0) \quad ⑧$$

q 可由摩擦力做功求得,即

$$q = \frac{F}{2} \left(\frac{V - V_0}{S} \right) \quad ⑨$$

代入⑧式得

$$Q' + \frac{F(V - V_0)}{2S} = C(T - T_1) + p(V - V_0) \quad (10)$$

由状态方程式可知

$$p(V - V_0) = R(T - T_1) \quad (11)$$

将⑪式和④式代入⑩式,得

$$Q' = \left[C + R - \frac{FR}{2(p_0S + F)} \right] (T - T_1)$$

$$\text{即 } T = \frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} Q' + T_1 \quad (12)$$

从开始对气体加热到气体温度升高到 $T (> T_1)$ 的过程中,气体从电阻丝吸收的总热量为

$$Q = Q_1 + Q' \quad (13)$$

把⑬式代入到⑫式,并注意到④式和⑤式,得

$$T = \frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} \left(Q - \frac{CFT_0}{p_0S} \right) + \frac{(p_0S + F)T_0}{p_0S}, \quad (Q \geq Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S}) \quad (14)$$

由此可知,当 $Q \geq Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S}$ 时, T 与 Q 的关系仍为一直线,此直线起点的坐标为 $Q = Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S}$,

$T = T_1$; 斜率为

$$\frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} \quad (15)$$

在 $T-Q$ 图中,就是直线 bd ,当热量 Q 从零开始逐渐增大,气体温度 T 将从起始温度 T_0 沿着斜率为 K_{ab} 的直线 ab 上升到温度为 T_1 的 b 点,然后沿着斜率为 K_{bd} 的直线 bd 上升,如图 7-4 所示.

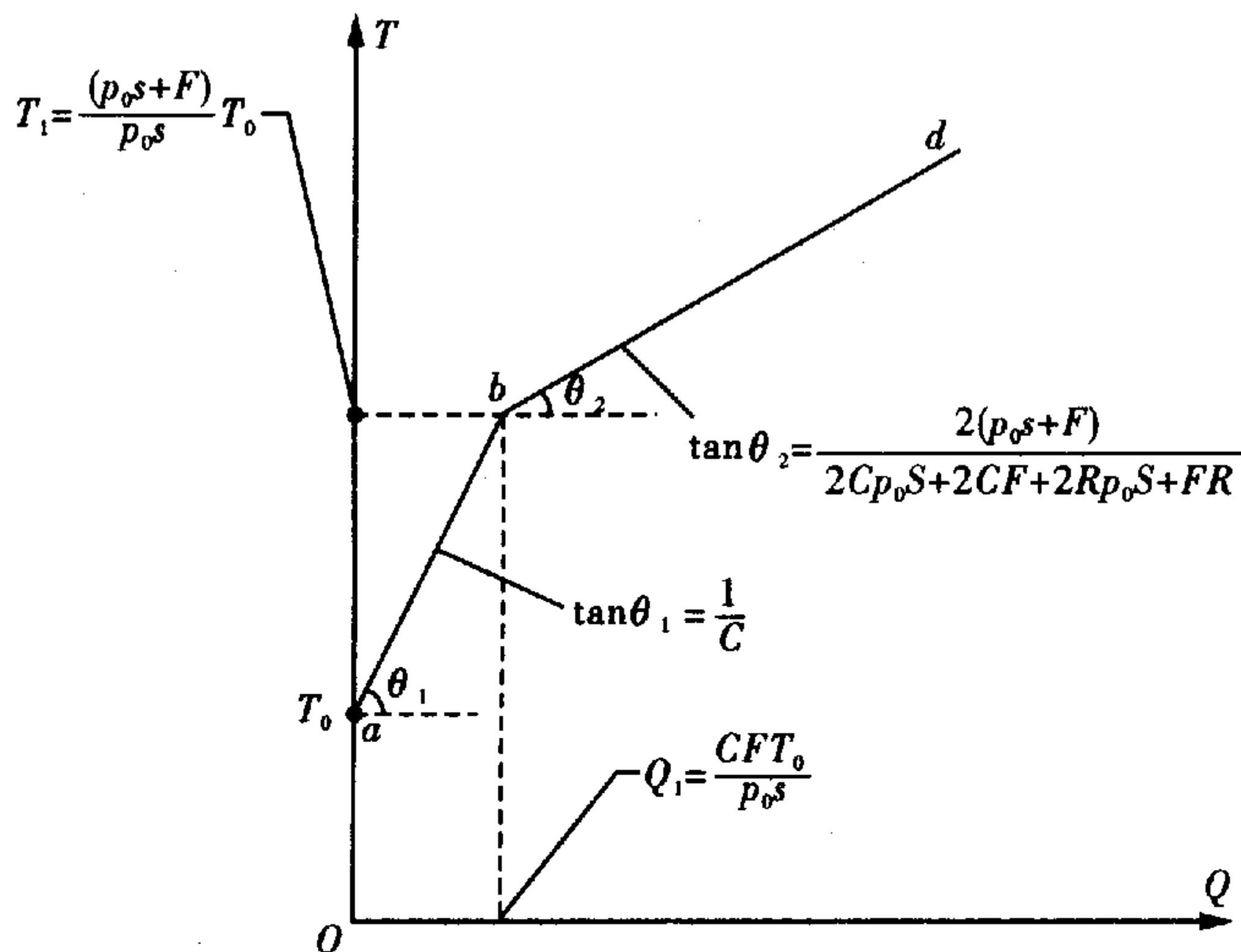


图 7-4

方法与技巧 先要分析清楚题给过程,先是等容过程后是等压过程,然后求出各过程中 T 与 Q

的函数关系式,再去作 $T-Q$ 图线,并标出图线的各特征量.

例 7 如图 7-5,在一大水银槽中竖直插入一根玻璃管,管上端封闭,下端开口,已知槽中水银面以上的那部分玻璃管的长度 $L=76\text{ cm}$,管内封闭有 $n=1.0 \times 10^{-3}\text{ mol}$ 的空气,保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低 10°C ,问在此过程中管内空气放出的热量为多少? 已知管外大气压强为 76 cmHg ,空气的摩尔内能 $U=C_v T$, $C_v=20.5\text{ J/mol}\cdot\text{K}$.

解析 设管内空气柱长度为 h ,大气压强为 P_0 ,管内空气压强为 P ,水银密度为 ρ ,由图可知

$$P_0 = P + \rho g(L-h) \quad \text{①}$$

根据题给数据可知 $P_0 = \rho gL$,管内空气压强为

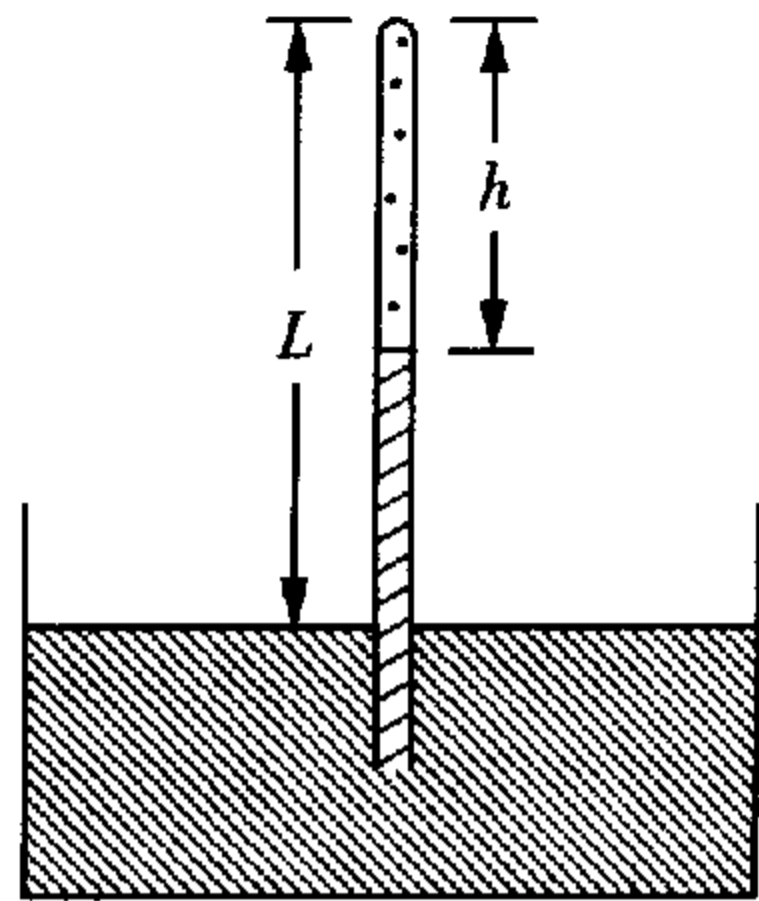


图 7-5

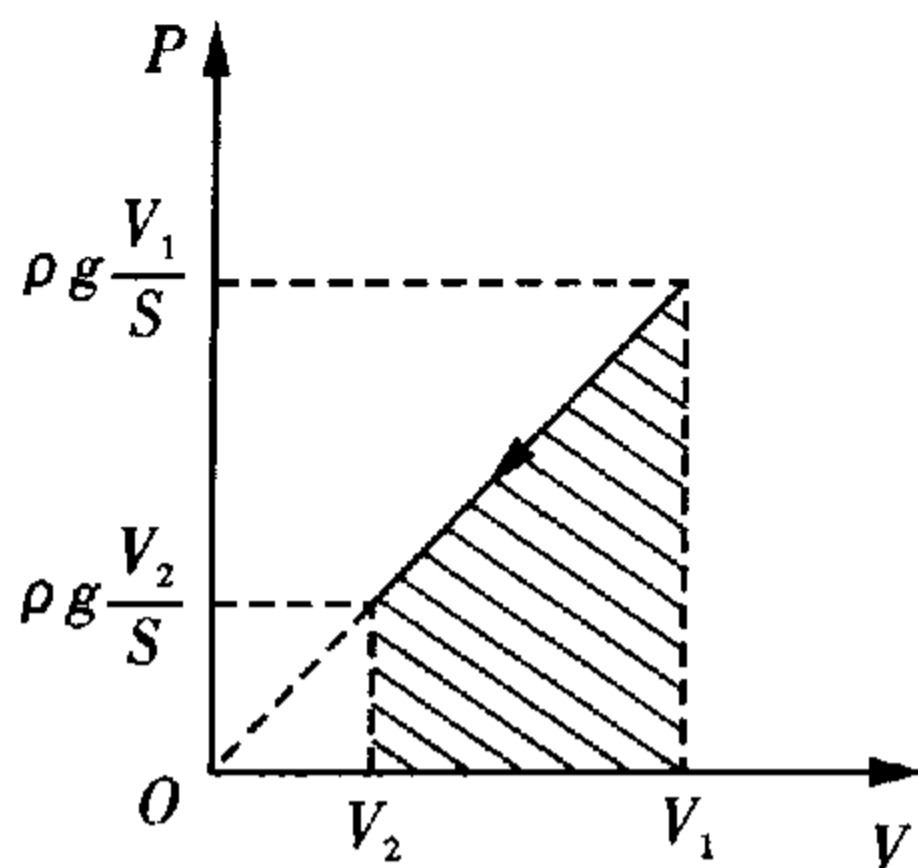


图 7-6

$$P = \rho gh = \rho g \frac{V}{S} \quad \text{②}$$

S 为玻璃管横截面积, V 为管内空气体积,由②式可知,管内空气压强与其体积成正比. 由克拉珀龙方程 $PV = nRT$,得

$$\frac{\rho g}{S} V^2 = nRT \quad \text{③}$$

由③式可知,随着温度降低,管内空气体积变小,由②式知管内空气压强也变小. 压强随体积变化关系为 $P-V$ 图中过原点的直线,如图 7-6 所示.

在管内气温由 T_1 降到 T_2 的过程中,气体体积由 V_1 减小到 V_2 ,外界对气体做正功,其值可用图 7-6 中划有斜线的梯形面积来表示,即有

$$W = \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{V_1}{S} + \frac{V_2}{S} \right) (V_1 - V_2) = \frac{\rho g}{2S} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} nR(T_1 - T_2) \quad \text{④}$$

管内空气内能的变化为

$$\Delta U = nC_v(T_2 - T_1) \quad \text{⑤}$$

设 Q 为外界传给气体的热量,根据热力学第一定律,有

$$Q = \Delta U - W = n \left(C_v + \frac{R}{2} \right) (T_2 - T_1) \quad \text{⑥}$$

代入有关数据后得: $Q = -0.247\text{ J}$,负号表示空气放出热量.

方法与技巧 要找出管内空气降温的过程方程②、③式: $P = \frac{\rho g}{S} V$ 或 $\frac{\rho g}{S} V^2 = nRT$,可知在管内气体降温过程中,体积和压强均减小. 再在 $P-V$ 图中作过程曲线——过原点的直线,然后利用其过程曲线下的面积来计算功的大小. 这是应用整体法处理的.

例8 图7-7中A、B是两个圆筒绝热容器,中间用一非常细的短管相连通,短管中有导热性能良好的阀门K,短管及阀门对外界也是绝热的.F为一带柄的绝热活塞,它与容器A的内表面紧密接触(不漏气),但摩擦可忽略不计.

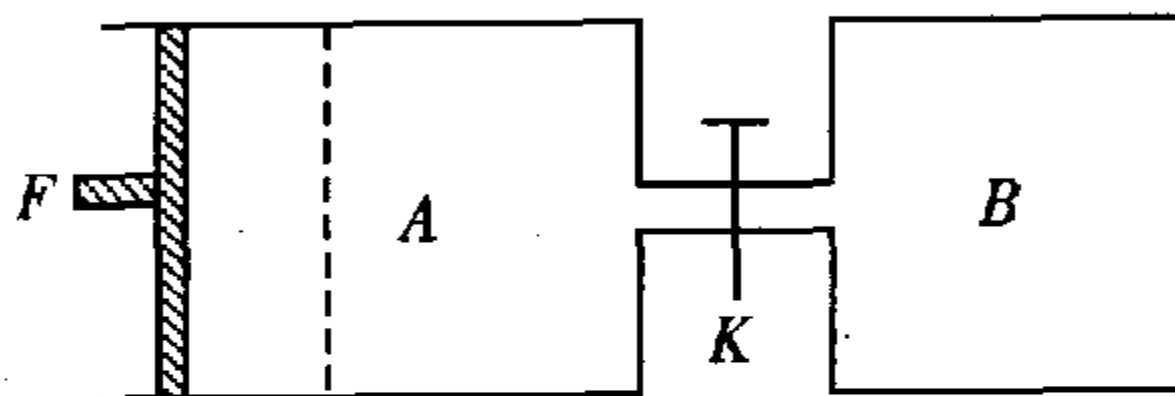


图7-7

开始时K关闭,F处于A的左端,A中有 n mol理想气体,温度为 T_0 ,B为真空.现在向右推动F,直到A中气体体积和B的容积相等,在此过程中,已知对气体做功为 W ,气体温度为 T_1 .这时将K稍稍打开一点,使A中的气体缓慢地向B中扩散,同时让活塞缓慢地前进,并保持A中活塞附近的压强近似不变.在此过程中,气体最后的温度是多少?设活塞、阀门、容器的热容量皆可不计.

解析 在K被打开前,推动F的过程是绝热过程,对气体所做的功等于气体内能的增加量.因为理想气体内能只与温度有关,用 C 表示每1 mol理想气体温度升降1 K所增减的内能,则可知

$$C = \frac{\Delta E}{n(T_1 - T_0)} = \frac{W}{n(T_1 - T_0)}$$

打开K后所进行的过程,实际上只能将活塞推进一段距离,而不可能把它推到A的右端,这是因为在此绝热过程中,外力对气体做功,气体内能增加、温度升高.假如将气体全部压缩到容器B中,这时气体体积和这一过程的初态相同,压强也相同,而温度升高,这是不可能的.因而,实际上此过程最后只能进行到这样的状态,即在容器A中还有体积为某值 V' 的气体.用 P, T_2 表示此时气体的压强和温度, V 表示容器B的容积,对初态和终态分别有

$$\begin{cases} PV = nRT_1 \\ P(V + V') = nRT_2 \end{cases}$$

由于绝热过程 $W = \Delta E$,则有

$$P(V - V') = nC(T_2 - T_1)$$

由以上四式可得气体最后温度 T_2 为

$$T_2 = \frac{2nC(T_1 - T_0) + W}{nC} T_1$$

方法与技巧 本题推动活塞做功可分两个阶段:先是关闭K推动F,是外界绝热压缩气体的做功过程,做的功为 W ,气体温度由 T_0 升到 T_1 ;接着是打开K推动F,虽然只是“A中活塞附近的压强近似不变”,外界对气体做的功为 $P(V - V')$.

例9 1964年制成了世界上第一盏用海水发电的航标灯,它的气室示意图如图7-8所示.利用海浪上下起伏的力量,空气被吸进来,压缩后再推入工作室,推动涡轮机带动发电机发电.当海水下降时,阀门 K_1 关闭, K_2 打开,设每次吸入压强为 1.0×10^5 Pa,温度为 7°C 的空气 0.233 m^3 (空气可视为理想气体).当海水上升时, K_2 关闭,海水推动活塞绝热压缩空气,空气压强达到 $\sqrt{32} \times 10^5$ Pa时,阀门 K_1 才打开. K_1 打开后,活塞继续推动空气,直到气体全部被推入工作室为止,同时工作室的空气推动涡轮机工作.设打开 K_1 后,活塞附近的压强近似保持不变,活塞的质量及活塞与筒壁间摩擦忽略不计.问海水每次上升时所做的功是多少?已知空气从状态 (P_1, V_1) 绝热地改变到状态 (P_2, V_2) 的过程中,近似

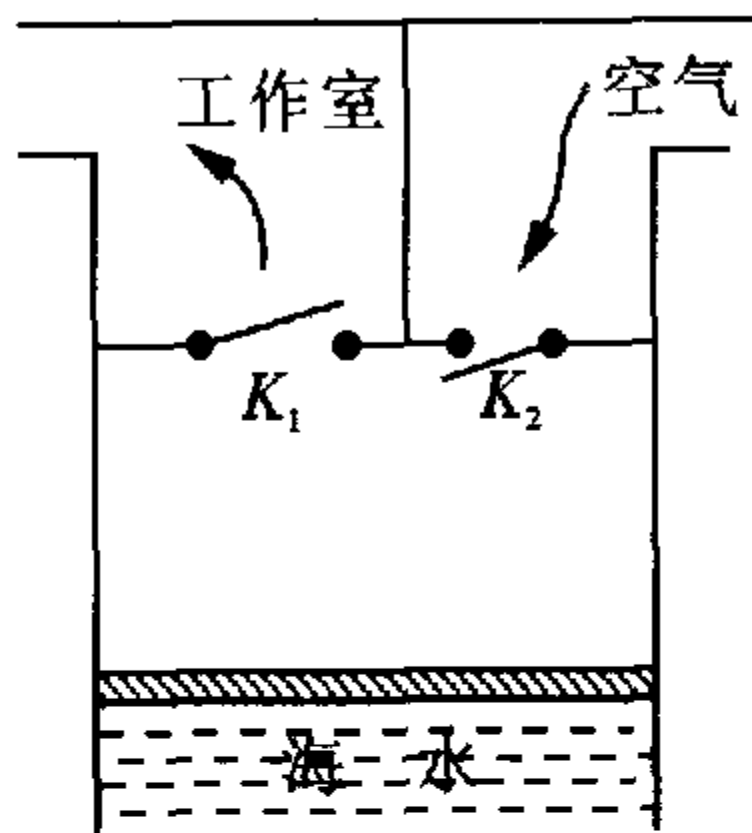


图7-8

地遵循关系式 $P_1/P_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$, 1 mol 理想气体温度升高 1 K 时, 内能改变为 $3R/2$.

解析 海水做功可分为两个阶段来讨论:

(1) 绝热压缩空气阶段: 在绝热过程中海水对气体所做的功等于气体内能的增量, 即

$$W_1 = \Delta U = n \left(\frac{3}{2} R \right) (T_2 - T_1)$$

在绝热过程中, 压强和体积变化遵循关系式

$$P_1/P_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$$

以及理想气体状态方程 $PV = nRT$, 得到

$$T_2/T_1 = (P_2/P_1)^{2/5}$$

所以 $T_2 = (P_2/P_1)^{2/5} T_1 = (\sqrt{32})^{2/5} \times 280 = 560 \text{ K}$

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{1.0 \times 10^5 \times 0.233}{8.31 \times 280} \approx 10 \text{ mol}$$

可得 $W_1 = 10 \times (3/2) \times 8.31 \times (560 - 280) = 3.49 \times 10^4 \text{ J}$

(2) 根据题设把空气推入工作室时活塞附近压力不变, 故

$$W_2 = P_2 S \cdot \Delta L = P_2 V_2$$

其中 S 为活塞面积, ΔL 为活塞由气体体积是 V_2 时之位置到筒之上端的距离, 而

$$V_2 = V_1 (P_1/P_2)^{3/5}$$

可得 $W_2 = P_2 V_1 (P_1/P_2)^{3/5} = \sqrt{32} \times 0.233 \times (1/\sqrt{32})^{3/5} \times 10^5 = 4.66 \times 10^4 \text{ J}$

所以海水做的总功为

$$W = W_1 + W_2 = 8.15 \times 10^4 \text{ J}$$

方法与技巧 怎么算海水的功? 第一阶段海水绝热压缩空气做的功, 可由缸内空气内能的改变量来算, 第二阶段“活塞附近的压强近似不变”, 应视为海水等压压缩空气做功的过程.

例 10 长度为 $2L$ 的水平圆柱形容器, 被不导热的薄活塞分成相等的两部分, 每部分内盛有温度为 T_0 的 $n \text{ mol}$ 单原子理想气体. 用两根劲度系数均为 k 的未形变弹簧将活塞与容器的两端相连(图 7-9). 右边部分气体吸收了热量 Q , 结果使活塞向左移动距离 $x = L/2$. 左边部分气体与恒温器始终保持接触, 试求在温度 T_0 下传递给恒温器的热量 Q' .

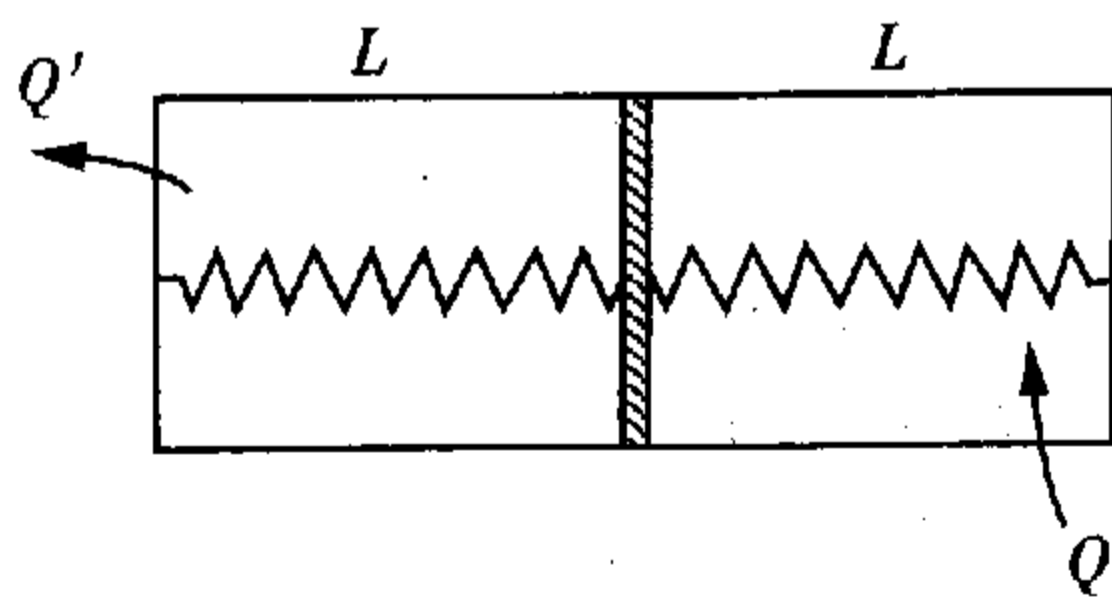


图 7-9

解析 将两部分气体作一个系统来考虑:

气体对弹簧做的总功应等于两根弹簧获得的弹性势能之和, 即

$$W' = 2 \times \frac{k}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} kL^2 \tag{1}$$

系统内能的改变量 $\Delta E = \Delta E_{\text{左}} + \Delta E_{\text{右}}$ ②

$$\text{依题意有} \begin{cases} \Delta E_{\text{左}} = 0 \\ \Delta E_{\text{右}} = \frac{3}{2} nR\Delta T \end{cases} \tag{3}$$

因此整个气体内能的改变取决于右边气体上升的温度 ΔT . 根据克拉珀龙方程, 右边气体的压强为 ④

$$P = \frac{nR(T_0 + \Delta T)}{\frac{3}{2}L \cdot S} \quad (5)$$

左边气体的压强 P' 和弹簧产生的压强 P'' 分别为

$$\left\{ \begin{aligned} P' &= \frac{nRT_0}{\frac{1}{2}L \cdot S} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P'' &= 2 \times \frac{k \frac{L}{2}}{S} = \frac{kL}{S} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

S 为活塞面积. 它们满足平衡条件

$$P = P' + P'' \quad (8)$$

由上面的式子, 可以得到

$$\Delta T = 2T_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{kL^2}{nR} \quad (9)$$

如果供给右边气体的热量为 Q , 而左边气体传递给恒温器的热量为 Q' , 那么系统吸收的总热量为 $Q - |Q'|$, 根据热力学第一定律, 有

$$Q - |Q'| = \Delta E + W' = \Delta E_{右} + W' \quad (10)$$

于是在温度 T_0 下传递给恒温器的热量为

$$|Q'| = Q - W' - \Delta E_{左} = Q - \frac{1}{4}kL^2 - \frac{3}{2}nR\Delta T = Q - \frac{5}{2}kL^2 - 3nRT_0$$

方法与技巧 弹簧的弹力是变力也是有势力. 因此计算外界克服弹力拉伸和压缩弹簧做的功, 可以用弹簧势能的改变量来计算. 弹簧未变形时为零势能状态.

例 11 如图 7-10 所示圆柱形容器, 其截面积 $S = 1.70 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, 器壁绝热, 圆筒内有两个以弹簧相连接的绝热活塞, 弹簧的劲度系数为 $k = 1.50 \times 10^4 \text{ N/m}$, 筒中有一带孔的固定隔板, 筒壁上有开口, 与大气相通. 整个装置的结构及尺寸如图. 容器左、右端气室中分别盛有同种的理想气体, 左室中有一电加热器. 已知: 大气压强 $P_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$, 电加热器未加热前, 两室气体均处于平衡态, 温度均为 $T_0 = 300 \text{ K}$ 、压强均为 P_0 , 活塞位置如图所示, $l_0 = 1.00 \times 10^{-1} \text{ m}$; 如果通过加热器对左室气体不断地徐徐加热, 弹簧长度的最大改变量 $l_m = 7.40 \times 10^{-2} \text{ m}$; 理想气体的绝热过程遵循规律 $PV^\alpha = \text{恒量}$; 筒内每摩尔气体内能与温度的关系为 $E_0 = \frac{RT}{\alpha - 1}$. 求当左室气体吸热 $Q = 1000 \text{ J}$ 时, 左、右两室气体的温度和压强. 设活塞与筒壁的摩擦可忽略不计, 且不漏气, 计算时各量均取三位有效数字.

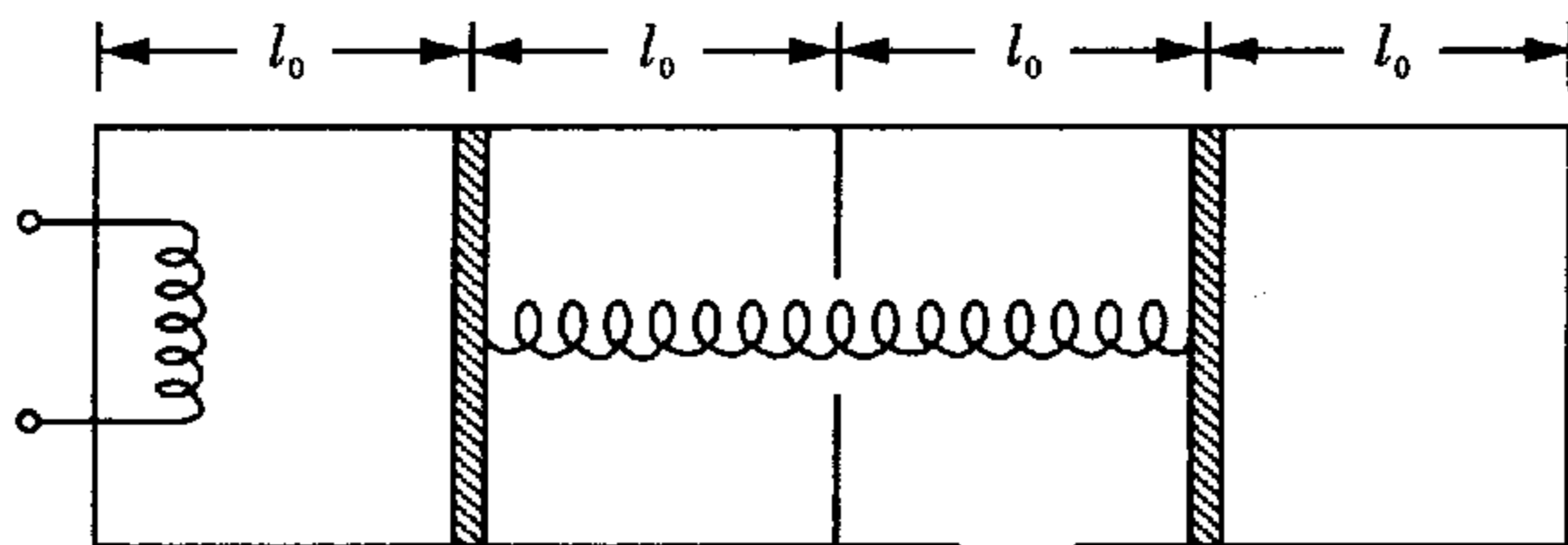


图 7-10

解析 (1) 对加热过程分析

开始时弹簧处于自然长度, 弹力为零. 左右两室气体体积、压强、温度均相同, 物质的量也相等, 为

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = 0.0682 \text{ mol}$$

开始加热后, 左室气体吸热膨胀, 右室气体绝热压缩, 弹簧被压缩, 活塞对大气做功, 部分大气被排出筒外, 此过程进行至左活塞右移距离 l_0 后情况发生变化. 此时左活塞与隔板相接触, 左室气体压强再升高时左活塞不能右移, 弹簧不再被进一步压缩, 弹簧的压缩量达最大值, 而右室气体状态此后不再发生变化(图 7-11).

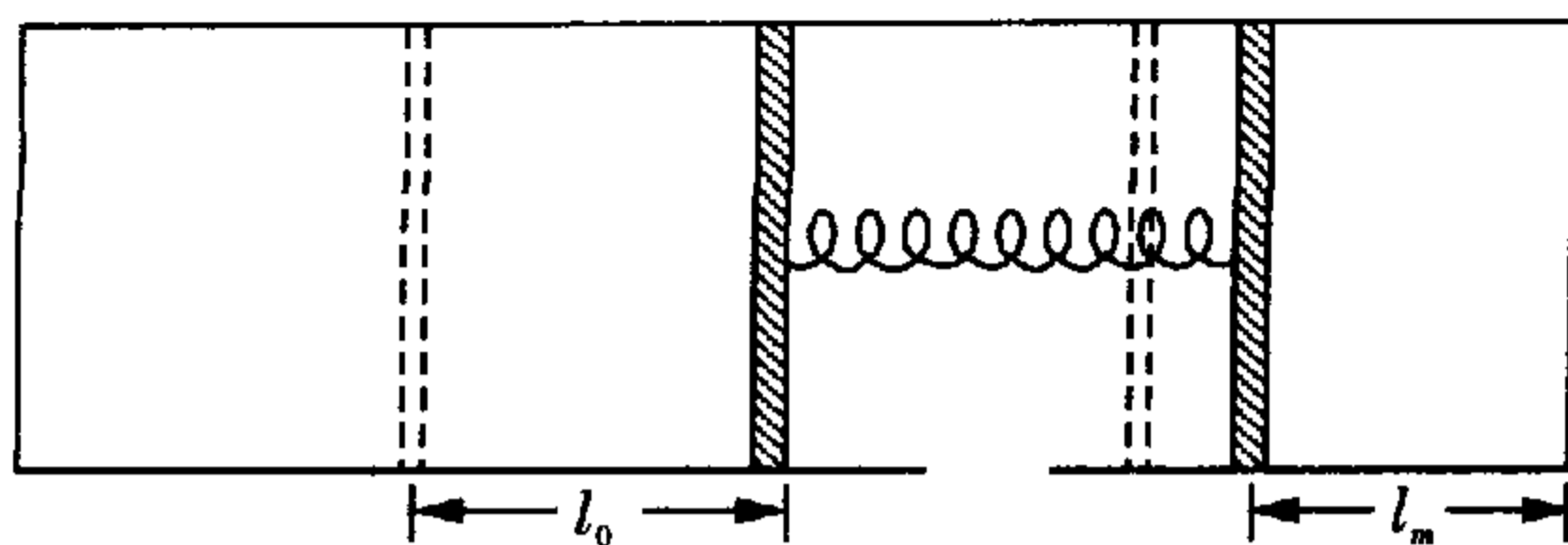


图 7-11

(2) 左活塞右移是等于 l_0 , 还是小于 l_0 呢? 可以假设左活塞右移距离刚达到 l_0 时, 左室加热器提供的热量 Q_0 与 Q 比较, 就能作出判断.

(a) 左、右室气体的压强为

$$P_1 = P_2 = P_0 + \frac{kl_m}{S} = 1.65 \times 10^5 \text{ Pa}$$

左、右室气体体积分别为

$$\begin{cases} V_1 = 2l_0 S = 3.40 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ V_2 = l_m S = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$$

左、右室气体的温度分别为

$$\begin{cases} T_1 = (P_1 V_1 / P_0 V_0) T_0 = 990 \text{ K} \\ T_2 = (P_2 V_2 / P_0 V_0) T_0 = 367 \text{ K} \end{cases}$$

右室气体遵从绝热过程方程: $P_0 V_0^\alpha = P_2 V_2^\alpha$, 有

$$a = \frac{\lg(P_2/P_0)}{\lg(V_0/V_2)} = \frac{\lg(P_2/P_0)}{\lg(l_0/l_m)} = 1.67$$

(b) 以左、右两室气体、活塞、弹簧为一个系统, 大气为外界. 根据热力学第一定律有

$$Q_0 = \Delta E_{\text{内}} + \Delta E_{\text{弹}} + W'$$

式中 $\Delta E_{\text{内}}$ 表示气体内能增量, $\Delta E_{\text{弹}}$ 为弹簧弹性势能增量, W' 为两个活塞对大气做的功, 其值分别为

$$\Delta E_{\text{内}} = \frac{nR}{a-1} [(T_1 - T_0) + (T_2 - T_0)] = 640 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{弹}} = \frac{1}{2} kl_m^2 = 41 \text{ J}$$

$$W' = P_0 (2l_0 - l_0) S + P_0 (l_m - l_0) S = P_0 l_m S = 126 \text{ J}$$

所以 $Q_0 = 640 + 41 + 126 = 807 \text{ J} < Q$, 可见左活塞能移到隔板处, 右移距离 l_0 .

(3) $Q = 1000 \text{ J}$ 时, 左、右两室气体的温度与压强

如前所述, 当加热器提供 807 J 的热量时, 左活塞就与隔板相接触, 此后右室气体状态不再改变. 故当 $Q = 1000 \text{ J}$ 时, 右室气体的温度、压强仍为

$$\begin{cases} T'_2 = 367 \text{ K} \\ P'_2 = 1.65 \times 10^5 \text{ Pa} \end{cases}$$

此后提供的热量全部用于增加左室内能, 即

$$\Delta Q = 1000 - 807 = \frac{nR}{a-1}(T'_1 - T_1)$$

得到 $T'_1 = 1.22 \times 10^3 \text{ K}$

左室气体的压强, 根据查理定律可得

$$P'_1 = (T'_1/T_1)P_1 = 2.03 \times 10^5 \text{ Pa}$$

方法与技巧 本题是假设法解题, 其解题方案是先根据题意分析提出假设 (假设左活塞右移距离刚达到 l_0), 再论证假设是否成立 ($Q_0 \leq Q$ 成立, $Q_0 > Q$ 不成立), 假设成立后方可回答本题的问题.

例 12 如图 7-12 所示, 长为 $2L$ 的长方形绝热容器, 被一个可以无摩擦地自由滑动的活塞分为容积相等的两部分 A、B, 且各装有相同物质的量的单原子分子理想气体, 温度相同, 压强均为 1 atm . 今将活塞缓慢地向左推移 $\frac{L}{2}$ 时便停住, 再将活塞上的阀门打开, 使两边气体混合, 试求容器内气体的最终压强.

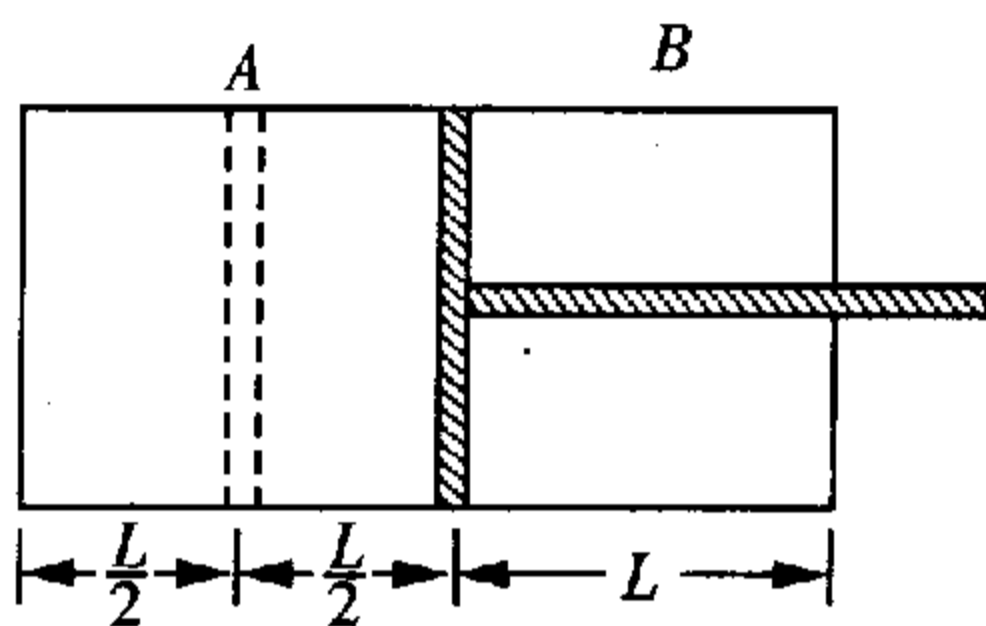


图 7-12

解析 当活塞从中央左移 $\frac{L}{2}$ 时, A 中气体绝热压缩, 体积由 V_0 减为 $V_0/2$, 温度升高; B 中气体绝热膨胀, 体积由 V_0 增至 $\frac{3}{2}V_0$, 温度降低.

$$\text{有 } T_0 V_0^{a-1} = T_A \left(\frac{V_0}{2}\right)^{a-1}, \quad T_0 V_0^{a-1} = T_B \left(\frac{3}{2}V_0\right)^{a-1}$$

由于 $a = 5/3$, 由上二式可得

$$T_A = 2^{2/3} T_0, \quad T_B = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} T_0$$

接着打开阀门, 冷热气体混合, 由于它们的物质的量相同, 又是同种气体, 根据热平衡方程, 可知混合后气体最终温度 T 为

$$T = \frac{1}{2}(T_A + T_B) = \frac{1}{2} \left[2^{2/3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \right] T_0$$

对于初态和终态分别有

$$P_0(2V_0) = \frac{m}{\mu} RT_0, \quad P(2V_0) = \frac{m}{\mu} RT$$

因此终态压强 P 为

$$P = \frac{T}{T_0} P_0 = \frac{1}{2} \left[2^{2/3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \right] P_0 = 1.18 \text{ atm}$$

方法与技巧 当活塞左移 $L/2$, 打开阀门, 左右方气体在混合过程中, 既不吸热, 又不做功, 内能

是没有变化的. 达到平衡态, 终态的压强和温度都大于初态的压强 P_0 和温度 T_0 , 这是因为活塞在左移的过程中外力做了功, 导致内能增加、温度升高、压强增大.

例 13 直立气缸内装有一定质量理想气体, 这种气体的摩尔内能是 $E = (3/2)RT$. 质量 $M = 7.00 \text{ kg}$ 的活塞与一劲度系数 $k = 300 \text{ N/m}$ 的轻质弹簧相连, 弹簧下端固定在气缸底部(图 7-13). 活塞与气缸壁间摩擦及弹簧体积均可忽略不计. 平衡时, 测得缸内气温 $T_1 = 300 \text{ K}$ 、压强 $P_1 = 1.40 \times 10^5 \text{ Pa}$, 气柱长 $L_1 = 50.0 \text{ cm}$. 而活塞上方大气压强 $P_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$, 活塞截面积 $S = 25.0 \text{ cm}^2$. 现有一质量 $m = 3.00 \text{ kg}$ 的铅柱自活塞正上方 $H = 80.0 \text{ cm}$ 高处自由落下, 与活塞发生完全非弹性碰撞, 碰撞时间极短而可忽略. 已知碰后铅柱在运动过程中某一时刻又与活塞分开, 此时缸内气体温度 $T_2 = 290 \text{ K}$, 铅柱最终上升到活塞初始位置上方 $h = 7.80 \text{ cm}$ 处. 试求自铅柱与活塞开始一起向下运动到铅柱刚离开活塞的整个过程中, 外界传给气缸内气体的热量. 计算中取 $g = 10.0 \text{ m/s}^2$, 并假设活塞是绝热的、气缸壁可以导热, 弹簧始终处于弹性限度范围之内.

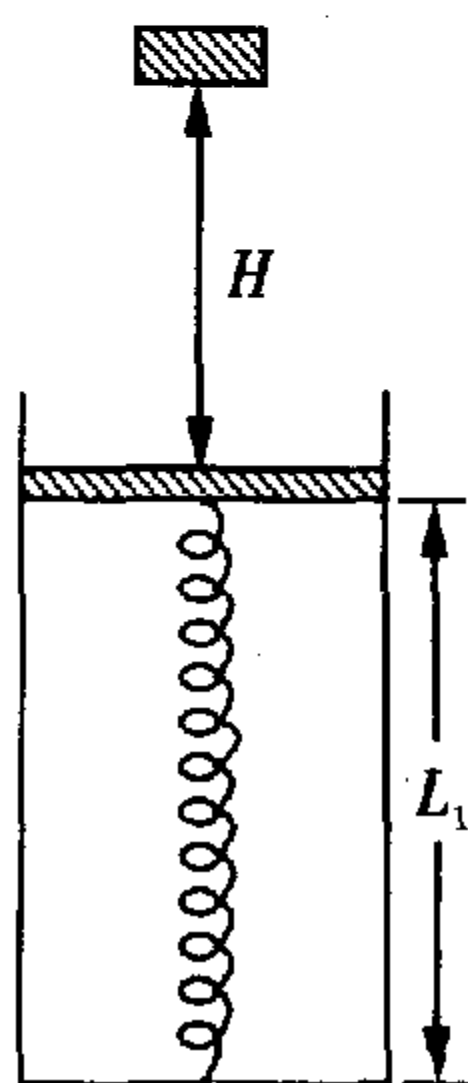


图 7-13

解析 (1) 以铅柱碰撞活塞以同一速度向下运动的时刻为初态. 设弹簧原长为 L_0 , 碰前活塞平衡有

$$P_1 S = P_0 S + Mg + k(L_1 - L_0)$$

代入数据后得 $L_0 = 0.400 \text{ m}$

铅柱与活塞碰后的共同速度 $v_1 = \frac{m}{M+m} \sqrt{2gH} = 1.20 \text{ m/s}$

(2) 以铅柱上升离开活塞的时刻为末态. 碰后铅柱与活塞一起向下运动, 经过平衡位置, 直到速度变为 0, 这时弹簧最短、缸内气体体积最小. 接着两者一起向上加速运动, 再次到达平衡位置, 加速度为 0、向上速度最大. 此后两者向上作减速运动, 即加速度向下的竖直向上运动. 当加速度值增大到 g 时, 铅柱与活塞分离. 设这时气柱长度为 L_2 , 有

$$P_2 S - P_0 S - (M+m)g - k(L_2 - L_0) = (M+m)(-g)$$

和 $P_2 L_2 S / T_2 = P_1 L_1 S / T_1$

由二式可得 $L_2 = 0.565 \text{ m}$

铅柱与活塞分离时速度, 可由铅柱上升高度求得, 即

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = mg[h - (L_2 - L_1)], \quad v_2 = 0.510 \text{ m/s}$$

(3) 推广热力学第一定律的应用: 以气体、活塞、铅柱、弹簧组成的系统为对象, 以大气、地球(重力视为外力)为外界. 则系统能量的变化为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{3}{2} n R (T_2 - T_1) + \frac{M+m}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{k}{2} [(L_2 - L_0)^2 - (L_1 - L_0)^2] \\ &= \frac{3}{2} P_1 L_1 S \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} + \frac{M+m}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{k}{2} [(L_2 - L_0)^2 - (L_1 - L_0)^2] \end{aligned}$$

W' 表示系统对外界做的功:

$$W' = P_0 S (L_2 - L_1) + (M+m)g(L_2 - L_1)$$

从初态到末态, 气体从外界吸收的热量为 $Q = \Delta E + W' = 10.7 \text{ J}$

方法与技巧 这是一道力、热结合的题目, 信息量多、过程较复杂. 由于在初态到末态的过程中,

涉及到多个物体的内能和机械能的变化,其基本方法就是推广热力学第一定律的应用.为此要根据题意确定系统和外界, ΔE 就包括系统内各种能量的改变量, W' 就是系统内各个物体对外界做功的代数和.在具体求解时,先求出与初态和末态相关的力学和热学参量,再去运用热力学第一定律进行计算.这样可使解题思路清晰,避免混乱.

例 14 1 mol 的理想气体经历了一个在 $T-V$ 图上标为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的循环过程(图 7-14),其中过程 $1 \rightarrow 2$ 的方程为 $T = 2T_1(1 - \frac{1}{2}\beta V)\beta V$,过程 $2 \rightarrow 3$ 为经过原点的直线上的一段,过程 $3 \rightarrow 1$ 的方程为 $T = T_1\beta^2 V^2$,式中 β 是常量.状态 1 和 2 的热力学温度已知分别为 T_1 和 $\frac{3}{4}T_1$,求该气体在此循环过程中对外界所做的功.

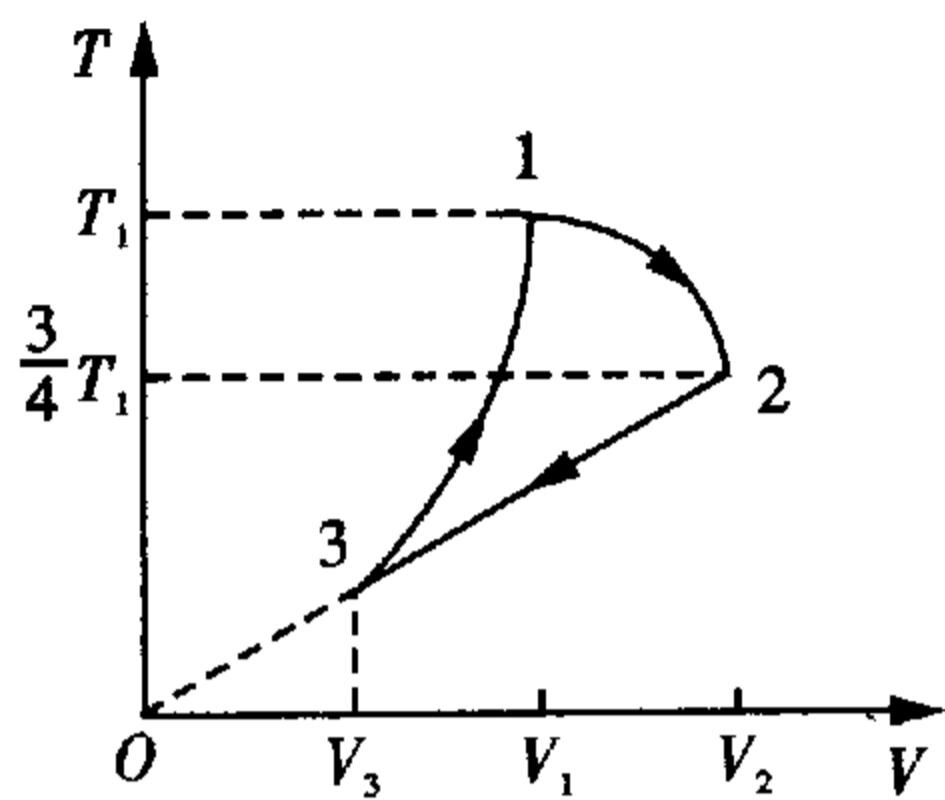


图 7-14

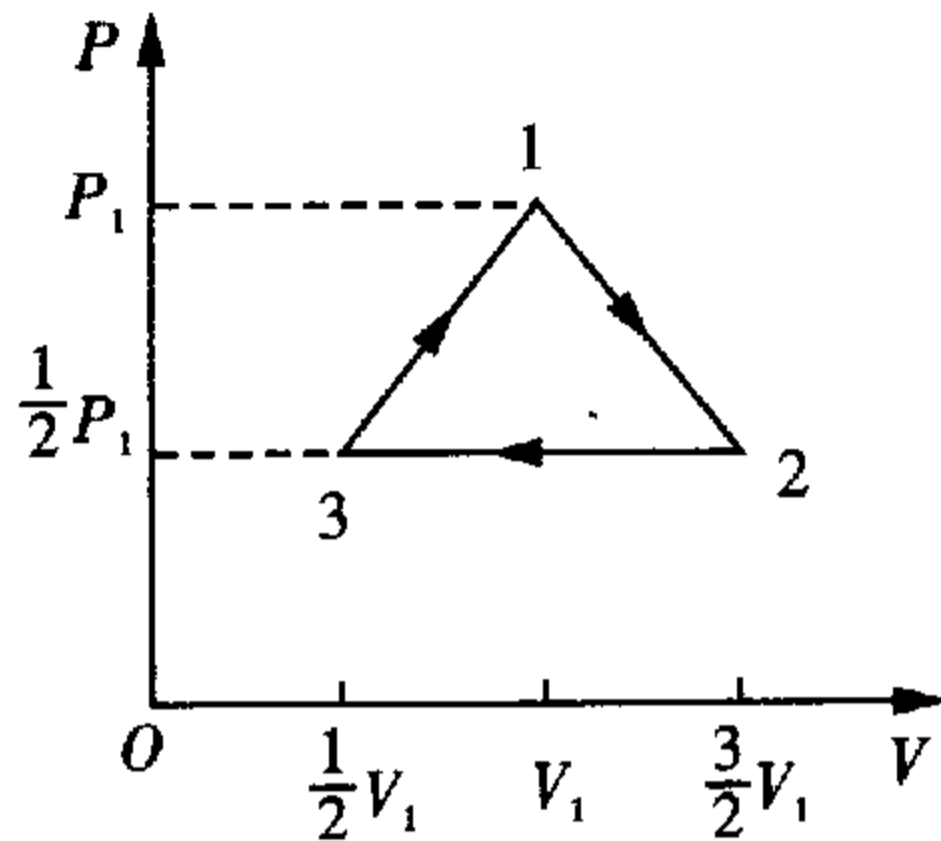


图 7-15

解析 (1)利用气态方程将此循环的各分过程用参量 P, V 表示,并画出其 $P-V$ 图线.过程 $1 \rightarrow 2$ 的方程为

$$P = 2R\beta T_1 - R\beta^2 T_1 V \quad (1)$$

此过程在 $P-V$ 图上为一具负斜率的直线.

过程 $2 \rightarrow 3$ 中 T 与 V 成正比,为一等压过程.在 $P-V$ 图上为一条平行于 V 轴、过状态 2 的直线段,其过程方程为 $P = P_2 = P_3$. (2)

过程 $3 \rightarrow 1$ 的方程为

$$P = RT_1\beta^2 V \quad (3)$$

此过程在 $P-V$ 图上为一条其延长线过原点、具正斜率的直线段.

(2)确定 $T-V$ 图中状态 1、2、3 在 $P-V$ 图中对应点的坐标,分别用 $(P_1, V_1), (P_2, V_2), (P_3, V_3)$ 表示状态 1、2、3 的参量.

由题给 $1 \rightarrow 2$ 的过程方程,可以求得

$$V_1 = \frac{1}{\beta}, \quad V_2 = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2}V_1 \quad (4)$$

利用气态方程可得

$$P_1 = \beta RT_1, \quad P_2 = \frac{1}{2}\beta RT_1 = \frac{1}{2}P_1 \quad (5)$$

由②、③、⑤式可求出

$$V_3 = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}V_1 \quad (6)$$

(3) 综合以上所得结果,可画出该循环过程的 $P-V$ 图线,它是等腰三角形(图 7-15). 由循环过程的方向可知,气体在循环过程中对外界做正功,其值 W' 等于此三角形的面积,即

$$W' = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)(V_2 - V_3) = 0.25RT_1$$

方法与技巧 为了研究问题的需要,例如要考察气体温度变化的情况,往往要将 $P-V$ 图中的过程曲线转换成 $T-V$ 图中的过程曲线;为了计算某过程中气体对外界做的功,往往要将 $T-V$ 图中的过程曲线转换为 $P-V$ 图中的过程曲线. 图线的转换依赖于过程方程的转换,而过程方程的转换则要借助于气体状态方程. 例如本题中 $3 \rightarrow 1$ 的方程为 $T = T_1 \beta^2 V^2 = PV/R$, 即变成 $P = RT_1 \beta^2 V$, 它在 $T-V$ 图中是条曲线,在 $P-V$ 图中对应着一条直线.

例 15 1 mol 理想气体缓慢地经历了一个循环过程,在 $P-V$ 图中这过程是一个椭圆,如图 7-16 所示. 已知此气体若处在与椭圆中 O' 点所对应的状态时,其温度为 $T_0 = 300$ K. 问在整个循环过程中气体的最高温度 T_1 和最低温度 T_2 各是多少?

解析 在 $P-V$ 图中,描写该气体循环过程的椭圆方程为

$$\left(\frac{V}{V_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{P}{P_0} - 1\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (1)$$

气体的等温线有

$$PV = RT, \quad (P_0 V_0 = RT_0) \quad (2)$$

一般来说,给定温度的等温线与椭圆有两个交点,而与椭圆相切的等温线,它所对应的温度即为循环过程中的最高温度或最低温度. 为此,令

$$x = \frac{V}{V_0}, \quad y = \frac{P}{P_0}, \quad C = \frac{T}{T_0}$$

于是上两式可改写成

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} & (3) \\ xy = c & (4) \end{cases}$$

③式可以改写成

$$(x+y-1)^2 - 2xy + 1 = \frac{1}{4} \quad (5)$$

因 $y = c/x$, 上式变成

$$x + \frac{c}{x} - 1 = \pm \sqrt{2C - \frac{3}{4}} \quad (6)$$

由于此循环过程: $x = \frac{V}{V_0} \geq \frac{1}{2}, y = \frac{P}{P_0} \geq \frac{1}{2}$, 故有 $x+y-1 > 0$, 因此上式右边应取“+”号. 上式有

$$x^2 - \left[1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right]x + C = 0 \quad (7)$$

这是 x 的二次方程,对于一定的 C 值,它的两个根就是对应的等温线与椭圆的两个交点. 所求最高、最低温度相当于使曲线相切时的 C 值,这时上式应有等根,即

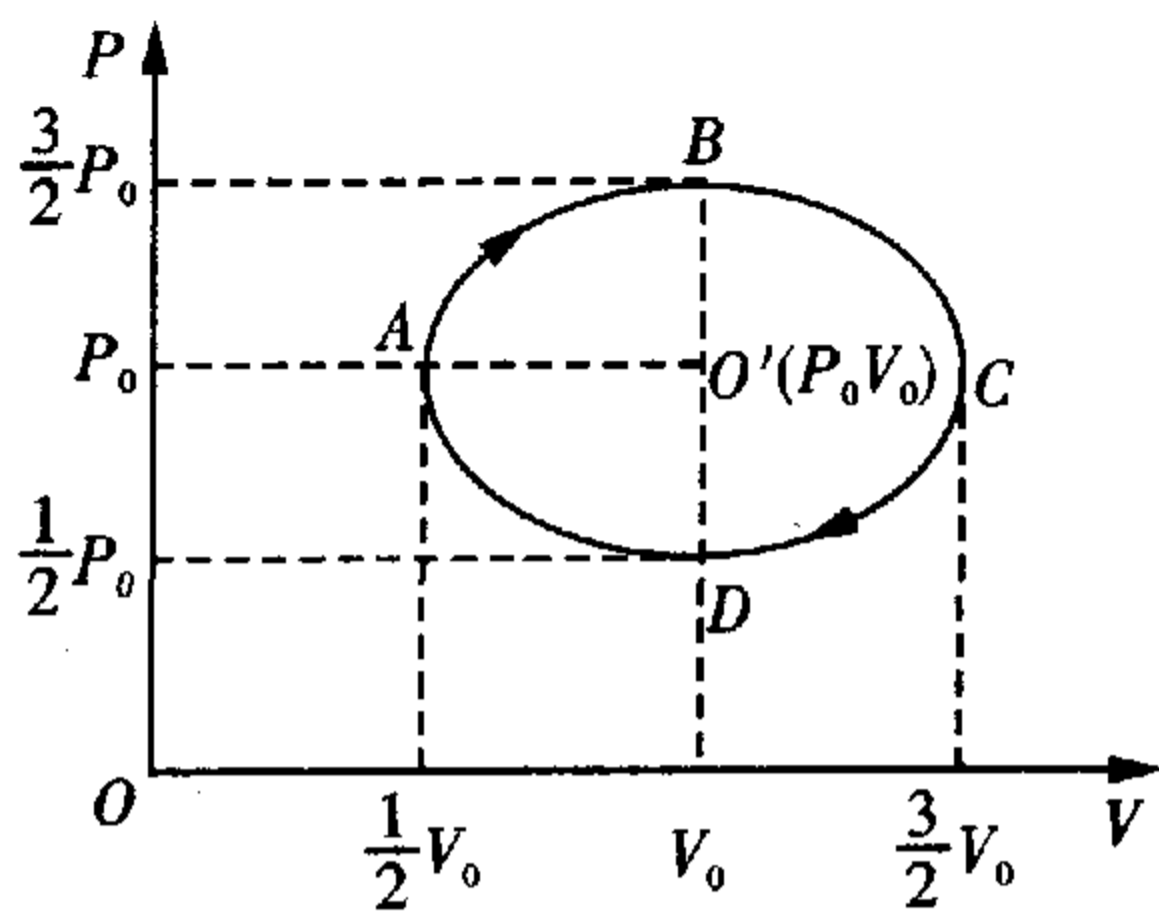


图 7-16

$$\left[1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right]^2 - 4C = 0 \quad (8)$$

$$\text{亦即 } 4C^2 - 9C + \frac{49}{16} = 0 \quad (9)$$

解得两曲线相切时的两个 C 值对应着两个切点温度为

$$\begin{cases} C_1 = \frac{9 + \sqrt{32}}{8} = 1.83, & T_1 = C_1 T_0 = 549 \text{ K} \\ C_2 = \frac{9 - \sqrt{32}}{8} = 0.418, & T_2 = C_2 T_0 = 125 \text{ K} \end{cases}$$

方法与技巧 由于 P 、 V 的单位不同,在 P - V 图中的椭圆过程方程该如何写,才符合几何学的知识呢? 为此,就要使 P 、 V 轴的标度无量纲化. 本题用 $\frac{P}{P_0}$ 取代 P , 用 $\frac{V}{V_0}$ 取代 V , 这样纵横坐标都是纯数 ($1/2$ 、 1 、 $3/2$ 等) 就可写出①式.

【解题尝试】

1. 已知太阳表面温度 $T_{\text{日}} = 6000 \text{ K}$, 太阳的半径 $R_{\text{日}} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, 太阳、地球之间的距离 $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. 地球卫星在阳光中升到某温度值时, 卫星的辐射功率等于它对阳光的吸收功率. 试求此时卫星热平衡的温度值.
2. 如图 7-17 所示, 两根位于同一水平面内的平行的直长金属导轨, 处于恒定磁场中, 磁场方向与导轨所在平面垂直. 一质量为 m 的均匀导体细杆, 放在导轨上, 并与导轨垂直, 可沿导轨无摩擦地滑动, 细杆与导轨的电阻均可忽略不计. 导轨的左端与一根阻值为 R_0 的电阻丝相连, 电阻丝置于一绝热容器中, 电阻丝的热容量不计. 容器与一水平放置的开口细管相通, 细管内有一截面积为 S 的小液柱 (质量不计), 液柱将 1 mol 气体 (可视为理想气体) 封闭在容器中. 已知温度升高 1 K 时, 该气体的内能的增加量为 $5R/2$ (R 为普适气体常量), 大气压强为 p_0 , 现令细杆沿导轨方向以初速 v_0 向右运动, 试求达到平衡时细管中液柱的位移.
3. 如图 7-18 所示, A 、 B 是两个管状容器, 除了较粗的部分高低不同之外, 其余一切全同. 将此两容器抽成真空, 再同时分别插入两个水银池中, 当水银柱停止运动时, 问两管中水银温度是否相同? 为什么? 设水银与外界没有热交换.
4. 一个高的隔热汽缸, 被固定的导热隔板分为两部分 (图 7-19), 上部分在活塞下装有 $n_1 = 1.00 \text{ mol}$ 、 $T_1 = 420 \text{ K}$ 的氦气; 下部分装有 $n_2 = 1.5 \text{ mol}$ 、 $T_2 = 400 \text{ K}$ 的氦气, 活塞质量 $M = 100 \text{ kg}$, 可以无摩擦移动. 问此汽缸达到热平衡时, 活塞下移了多少? 这时气体温度多少? 外界压力不计.
5. 如图 7-20 所示, 两个截面积相同的圆柱形容器, 右边容器高为 H , 上端封闭, 左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞, 两容器由装有阀门的极细管道相连通, 容器、活塞和细管都是绝热的. 开始时, 阀门关闭, 左边容器中装有热力学温度为 T_0 的单原子理想气体, 平衡时活塞到容器底的距离为 H , 右边容器内为真空. 现将阀门缓慢打开, 活塞便缓慢下降, 直到系统达到平衡. 求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度.

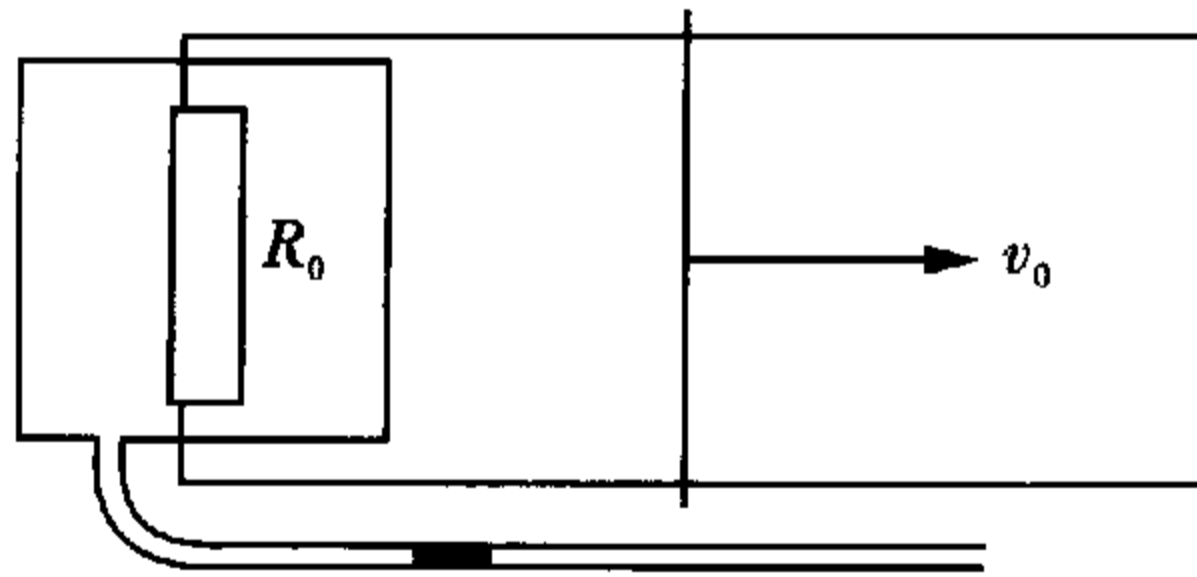


图 7-17

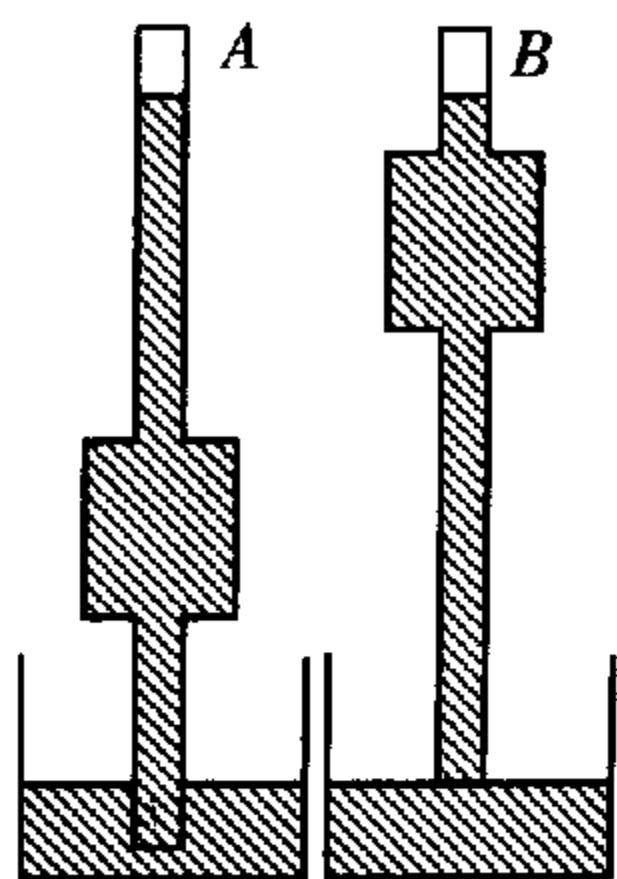


图 7-18

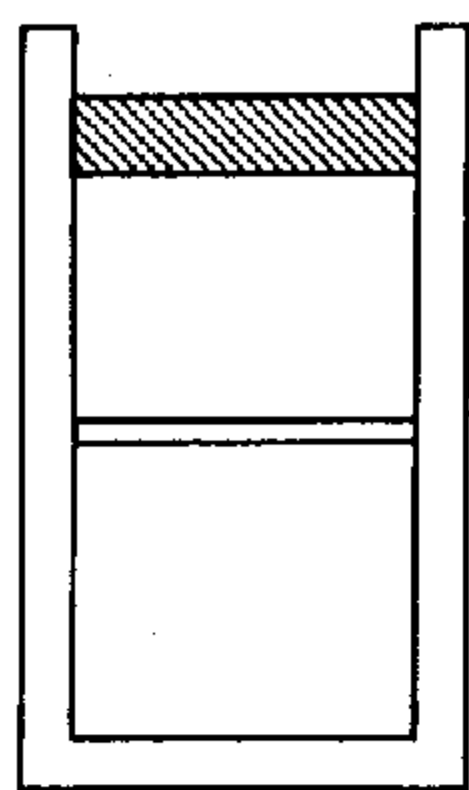


图 7-19

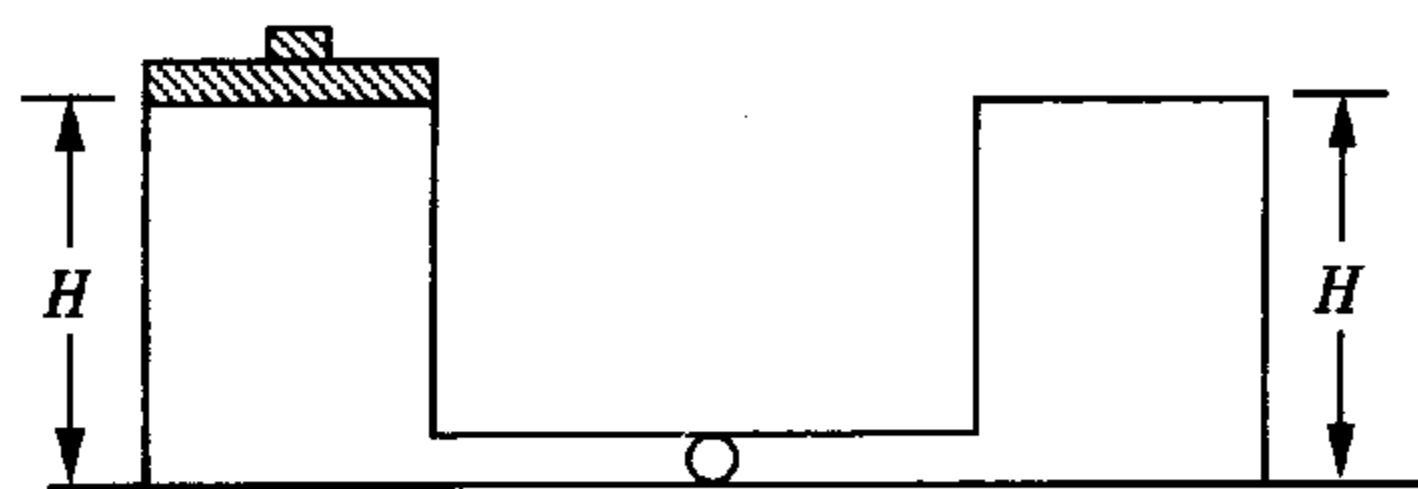


图 7-20

6. 如图 7-21 所示,三个绝热的、容积相同的球状容器 A、B、C,用带有阀门 K_1 、 K_2 的绝热细管连通,相邻两球球心的高度差 $h = 1.00 \text{ m}$. 初始时,阀门是关闭的,A 中装有 1 mol 的氦(He)、B 中装有 1 mol 的氪(Kr)、C 中装有 1 mol 的氙(Xe),三者的温度和压强都相同,气体均可视为理想气体. 现打开阀门 K_1 、 K_2 ,三种气体相互混合,最终每一种气体在整个容器中均匀分布,三个容器中气体温度相同. 求气体温度的改变量. 已知三种气体的摩尔质量分别为

$$\mu_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

在体积不变时,这三种气体中任何一种每摩尔温度升高 1 K 所吸收的热量均为 $3R/2$, R 为普适气体常量.

7. 2 mol 温度为 27°C 的氦气,以 100 m/s 的定向速度注入体积为 15 L 的真空容器中,容器四周绝热,求平衡后的气体压强为多大.
8. 真空中有一绝热筒状容器,最初活塞 A 由支架托住,其下体积为 10 L ,隔板 B 将它均分为二,上部抽空,下部有 1 mol 氧气,温度为 27°C (图 7-22),抽开隔板 B 后,气体充满活塞 A 下全部体积,平衡后气体对活塞的压力,刚好与活塞重量平衡;然后经电阻 R 通电加热,使气体等压膨胀到最后体积为 20 L . 设活塞无摩擦地平移. 求从抽开隔板开始的整个膨胀过程中,气体对外界所做的功和吸收的热量.

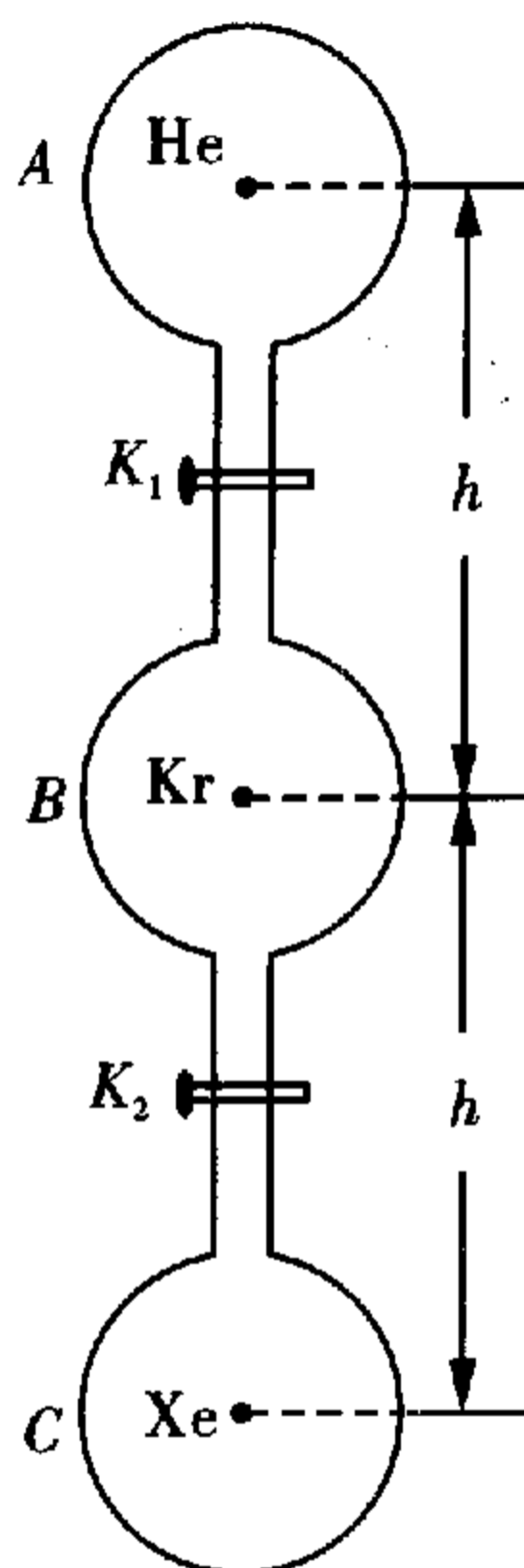


图 7-21

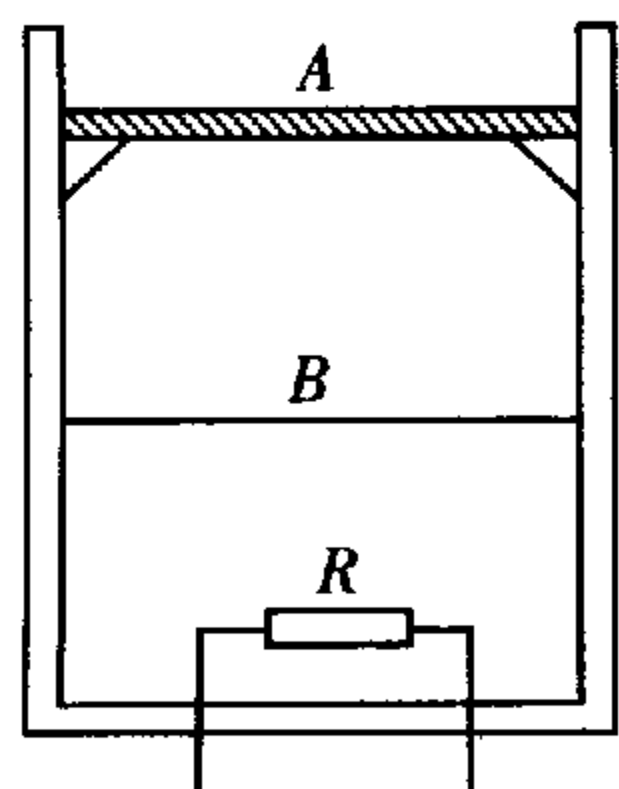


图 7-22

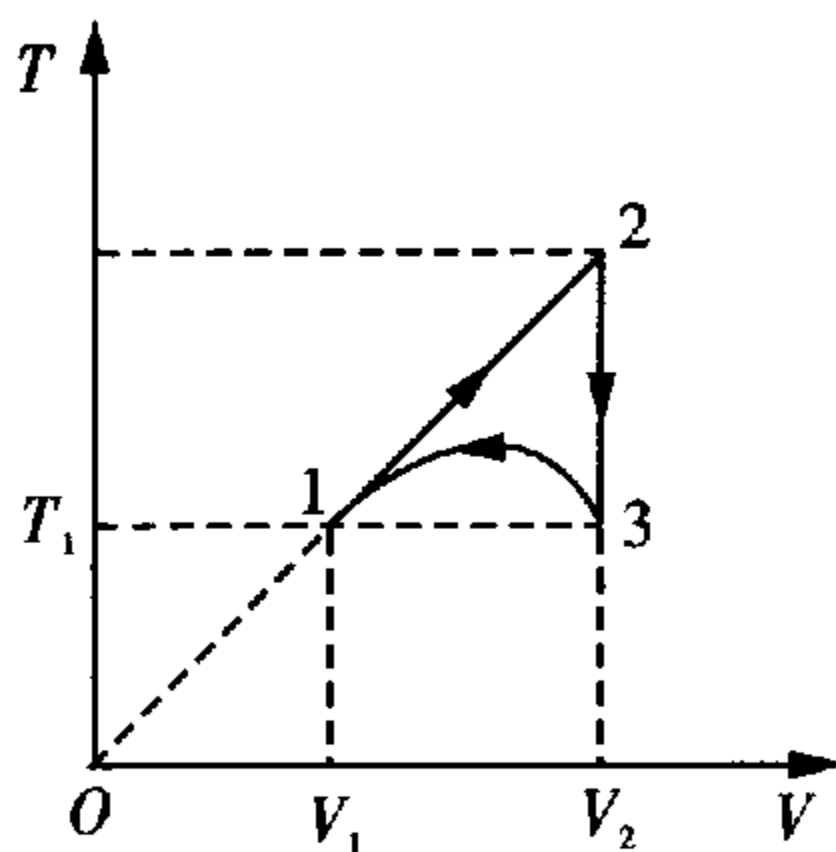


图 7-23

9. $n \text{ mol}$ 理想气体作为热机工作物质,完成图 7-23 所示的循环 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$,过程 $3 \rightarrow 1$ 可表达为 $T =$

$0.5T_1(3 - BV)BV$, 式中 B 是未知常数. 求气体在一次循环中对外界所做的功.

10. 一直立的气缸中装有 n mol 单原子理想气体, 气缸为一质量为 M 、面积为 A 的活塞所密封, 整个气缸和活塞都是绝热的, 且位于真空室内. 起初活塞被销钉夹持在某个位置, 使气缸中气体体积为 V_0 、温度为 T_0 ; 拔去销钉后活塞下落, 最终活塞停在某平衡位置, 这时气缸中气体体积为 V 、温度为 T . 已知单原子理想气体的定容摩尔热容为 $3R/2$, 忽略活塞和气缸的热容量以及它们之间的摩擦, 试计算气体的最终温度 T 和体积 V , 将结果用 T_0 、 V_0 、 M 、 n 、 A 、 R 、 g 等表示.
11. 3 mol 的理想气体完成一个由两个定容过程、两个等压过程组成的循环. 两等压过程的压强比 $\alpha = 5/4$, 两定容过程的体积比 $\beta = 6/5$. 已知循环过程中最高温度与最低温度之差是 $\Delta T = 100$ K, 普适气体恒量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$, 求这个循环过程中气体所做的功.
12. 使装着单原子理想气体的箱子骤然以速度 v 运动起来, 求气体温度的变化. 已知气体一个原子质量为 m_0 , 且箱子的热容量和导热性均可忽略不计.
13. 一定量的单原子理想气体在一密闭容器中等压膨胀到体积为原来的 1.5 倍, 然后又被压缩, 体积和压强均减为 $1/3$, 且此过程中压强与体积始终成正比, 比例系数不变, 在此压缩过程中气体向外放热 Q_0 ; 压缩后气体重新等压膨胀到原体积(气体在第一次膨胀前的体积). 为使气体定容回到上面提到的原状态(第一次膨胀前的状态), 需要传递给气体的热量 Q_1 是多少?
14. 一绝热密封的圆柱形容器, 水平放置, 容器中间有一质量为 m 的绝热活塞. 当活塞处于正中央时, 两边气体的压强为 P_0 , 容器两边长度为 L 、活塞面积为 S . 若不计摩擦, 试求活塞作微振动的周期. 设气体在绝热过程中服从 $PV^\gamma = \text{恒量}$.

第八章 物态变化 热膨胀

【学习目标】

一、物态变化

1. 物态变化的特点

在一定压强下,物态变化是在一定的温度下发生的.物态变化时体积发生改变.例如在 1 atm、100℃ 时水沸腾而变成饱和水汽体积增大 10^3 倍,在 1 atm、0℃ 时水凝固成冰后体积增大约 0.1 倍.

物态变化时总伴随着吸放一定的热量.例如 1 atm、100℃ 水的汽化热,1 atm、0℃ 时冰的熔解热分别是

$$L = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg} = 4.07 \times 10^4 \text{ J/mol} = 539 \text{ Cal/g}$$

$$\lambda = 3.35 \times 10^5 \text{ J/kg} = 6.0 \times 10^3 \text{ J/mol} = 80 \text{ Cal/g}$$

2. 汽化和液化

(1) 饱和汽的性质:在一定温度下能与液体处于动态平衡的蒸汽称为饱和汽.在同一温度下不同液体的饱和汽压一般不同.温度一定时,同种液体的饱和汽压和汽的体积无关,也与液面上方有无其他气体无关.同种液体的饱和汽压随着温度的升高而迅速增大.

(2) 液体的沸腾:当液体的饱和汽压等于外界压强时液体就沸腾.液体沸腾时的温度称为沸点.液体的沸点随外界压强的增大而升高.

(3) 气体的液化:如果能将未饱和汽变成饱和汽,就能使它液化.常用的方法:一是将未饱和汽等温压缩,减小体积,增加汽的密度,这样可使它达到该温度下的饱和汽.二是将未饱和汽定容降温,当温度降到未饱和汽密度等于该温度下的饱和汽密度时,未饱和汽就成了饱和汽.研究表明:各种气体都是有一个特殊温度,在这个温度以上,无论怎样增大压强也不能使气体液化,这个温度称为临界温度.

(4) 空气的湿度:表示空气干湿程度的物理量叫湿度.绝对湿度用空气中实际含有的水蒸气的分压强来表示.相对湿度是用某温度时的绝对湿度跟该温度下的饱和水汽压的百分比值表示.即

$$B = \frac{P}{P_s} \times 100\% \leq 1$$

它反映了空气中水汽离饱和的远近程度. $B = 100\%$ 表示空气中水汽已达饱和,因此在一定温度下空气中所含水汽是有限度的.人体感到舒适的相对湿度为 60% ~ 70%.

空气里的水蒸气通常处于未饱和状态,随着温度降低使空气里水蒸气刚好达到饱和时的温度称为露点.绝对湿度一定,不论温度高低,其露点一定.

3. 熔解和凝固

晶体物质由固态变成液态叫熔解,其逆过程称为凝固或结晶.晶体有一定的熔解温度叫熔点.给晶体加热,当温度升到熔点时,一部分微粒才有足够动能离开平衡位置.点阵结构逐渐被破坏,晶体开始熔解,在熔解过程中温度保持不变,直到全部熔解后,温度才继续上升.其逆过程是液体温度降

低到熔点时开始凝固,在凝固过程中温度不变,直到全部凝固后,温度才继续下降.

大多数物质熔解时体积膨胀,凝固时体积收缩,其熔点随外界压强增大而升高.少数物质如冰、灰铸铁、锑等熔解时体积收缩、凝固时体积膨胀,其熔点随外界压强增大而降低.纯物质中掺进另一种物质熔点会降低,例如盐水的凝固点即熔点可以降到 -20°C 以下.

4. 升华和凝华

物质从固态直接转变为气态的过程称为升华,其逆过程为凝华.在常温常压下,干冰、硫、磷、樟脑等物质有显著的升华现象.地面附近空气中水蒸气遇冷(0°C 以下)直接凝华成冰晶常叫结霜.

单位质量物质升华时所吸收的热量称为升华热.在三相点处,升华热等于汽化热和熔解热之和.

5. 三相图

三相图是将同一物质的汽化曲线 OK 、熔解曲线 OL 、升华曲线 OS 同时画在 $P-T$ 图上,三线有一个交点 O ,它是固、液、气三态平衡共存的状态叫三相点.图 8-1 是水的三相图,水的三相点是惟一确定的,其 $T=273.16\text{ K}=0.01^{\circ}\text{C}$, $P=4.58\text{ mmHg}$.

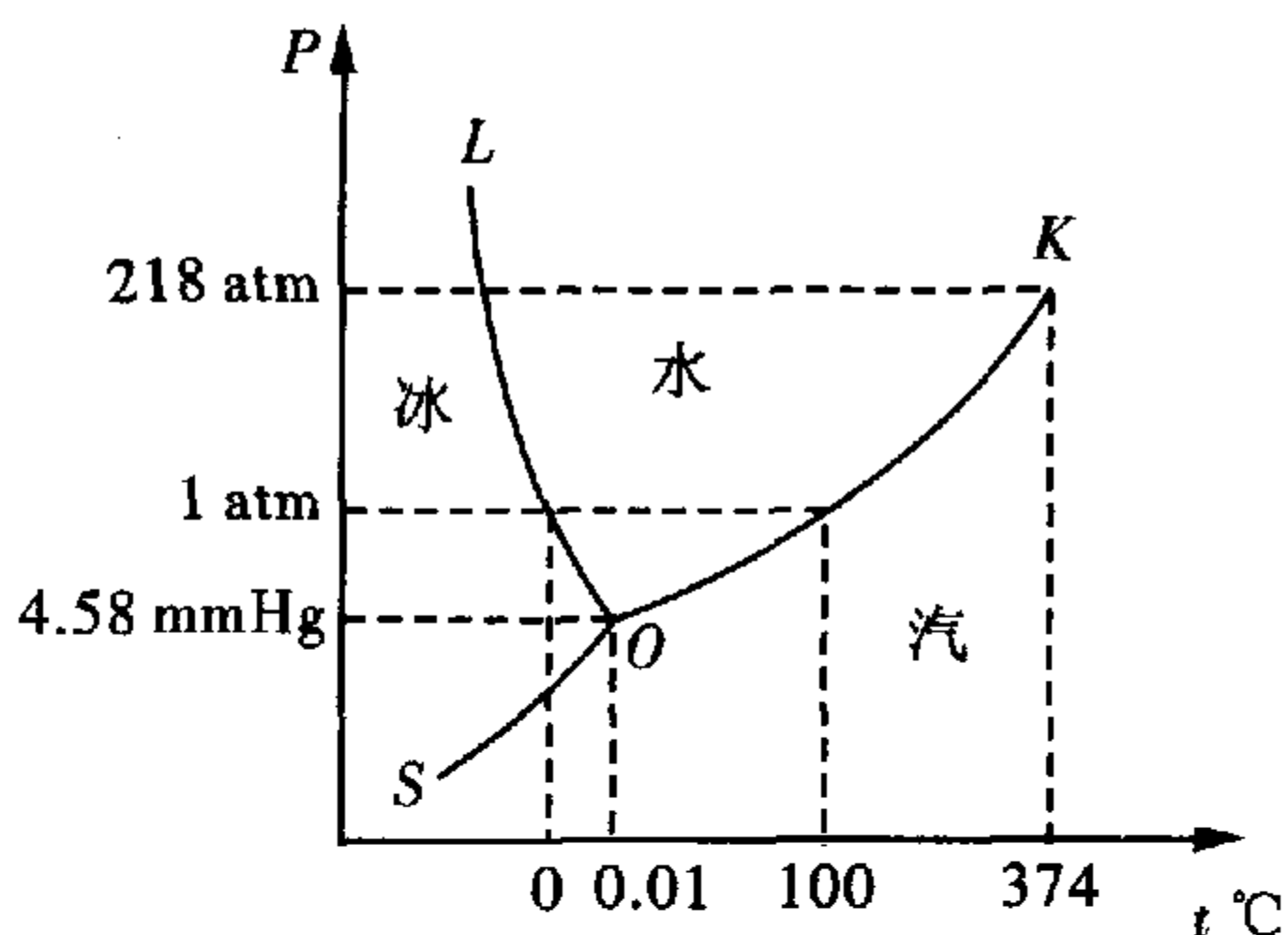


图 8-1

二、热膨胀

1. 固体的线膨胀

大多数物质是热胀冷缩的.设 0°C 时杆长 l_0 ,加热到 $t^{\circ}\text{C}$,杆长为 l ,则有

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

α 称为固体线膨胀率,即单位杆长升高 1°C 的增加量.

一般金属的线膨胀率约为 $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ 的数量级.

2. 固体和液体的体膨胀

如果 0°C 时物体体积为 V_0 ,加热到 $t^{\circ}\text{C}$ 时体积为 V ,则有

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

β 为体膨胀率.对于各向同性的固体有 $\beta = 3\alpha$.

少数物质在一定温度范围内,例如水在 0°C 到 4°C 之间,温度升高体积反而减少,这种现象称为反常膨胀.铸铁、锑、铋等也有这种性质.

【解题钥匙】

例 1 在一密封容器里有温度 $T_0 = 100^{\circ}\text{C}$ 的饱和水蒸气和少量的水,水汽质量 $M = 0.1\text{ kg}$,水的质量 $m = 0.001\text{ kg}$,继续对容器加热,问水刚好蒸发完时,容器内的温度是多少?所需热量是多少?已知每升高 1°C 饱和水汽压增加 $3.7 \times 10^3\text{ Pa}$,水的汽化热 $L = 2.25 \times 10^6\text{ J/kg}$,水汽的定容比热 $c_v = 1.38 \times 10^3\text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.

解析 容器内始终为饱和水汽,水的体积可略去,因此汽的体积一定.其初态 (M, P_s, V, T_0) ,末态 $(M + m, P_s + \Delta P, T_0 + \Delta T, V)$,故有

$$\begin{cases} P_s V = \frac{M}{\mu} R T_0 \\ (P_s + \Delta P) V = \frac{M + m}{\mu} R (T_0 + \Delta T) \end{cases}$$

根据题给条件有

$$\Delta P = \alpha \Delta T, \quad \alpha = 3.7 \times 10^3 \text{ Pa/K}$$

由上三式可得

$$\Delta T = \frac{mP_s T_0}{\alpha M T_0 - MP_s - mP_s}$$

$$T = T_0 + \Delta T = 373.29 \text{ K}$$

所需热量包括两部分, 一是 $m \text{ kg}$ 、 100°C 的水变成 100°C 的蒸汽所需热量; 二是 $(M + m) \text{ kg}$ 、 100°C 的汽定容升温 ΔT 所需热量. 有

$$Q = mL + (M + m)c_v \Delta T = 2290 \text{ J}$$

方法与技巧 在很小的温度区间内, 可近似地认为饱和汽压的变化与温度的变化成正比, 即 $\Delta P_s = \alpha \Delta T$, $\alpha = \Delta P_s / \Delta T$ 表示温度每升高 1 K 所增加的饱和汽压值.

例 2 在一个横截面积为 S 的密闭容器中, 有一质量为 M 的活塞把容器隔成 I、II 两室, I 室有饱和水汽, II 室有质量为 m 的氮气, 活塞可在容器中无摩擦地滑动. 原来容器被水平地放置在桌面上, 活塞处于平衡, 两室气体温度均为 $T_0 = 373 \text{ K}$ 、压强同为 P_0 , 今将整个容器缓慢地转到直立位置 (图 8-2), 两室温度仍是 T_0 , 并有少量水蒸气液化成水. 已知水的汽化热为 L , 水汽和氮气的摩尔质量分别为 μ_1 和 μ_2 , 求整个过程中 I 室内系统与外界交换的热量.

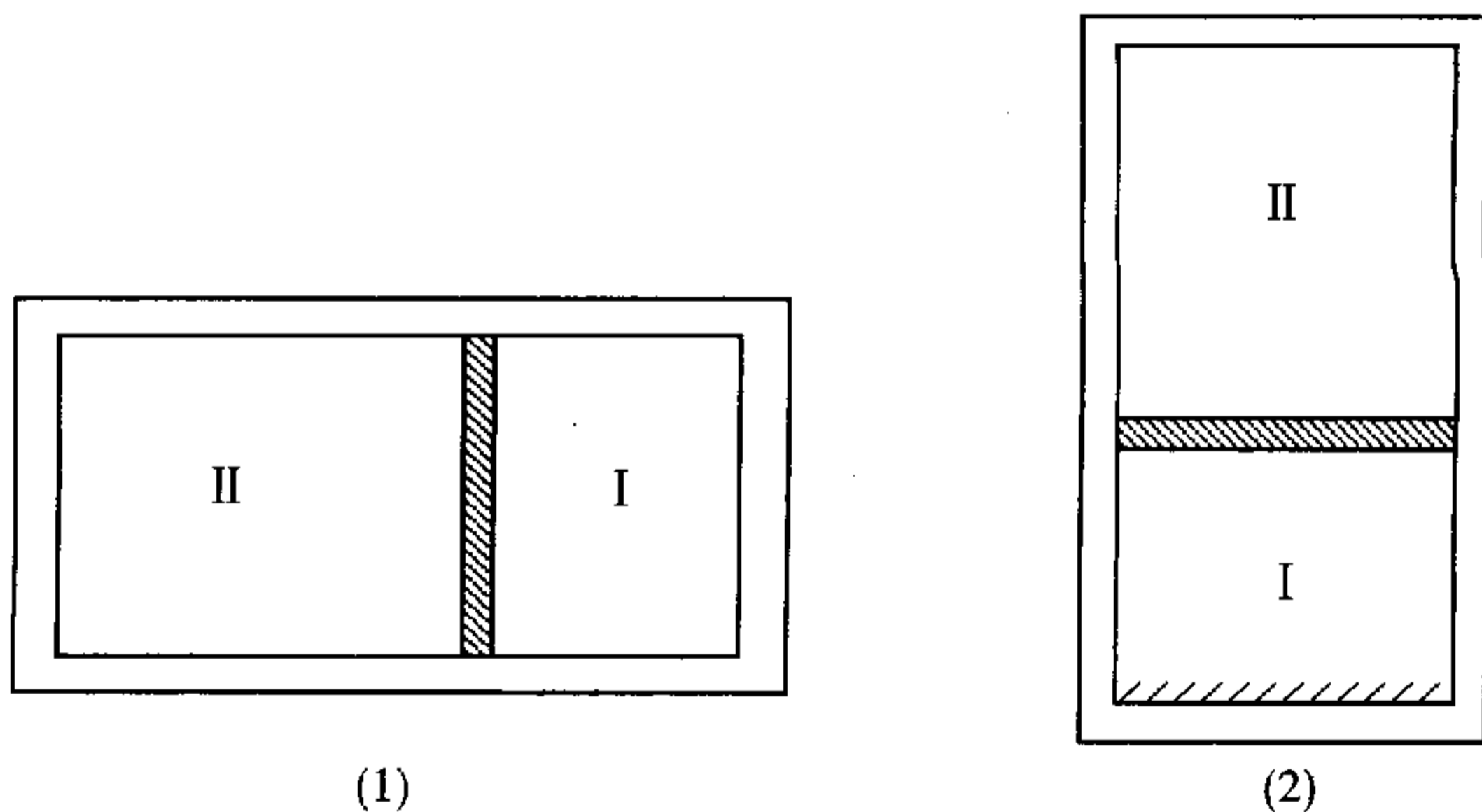


图 8-2

解析 当容器处于初始位置时, 设水蒸气体积为 V_1 , 氮气体积为 V_2 . 当容器处于直立位置时, 水蒸气体积为 $(V_1 - \Delta V)$ 、压强仍为 P_0 ; 氮气体积为 $(V_2 + \Delta V)$, 压强为 P , 有

$$\begin{cases} P = P_0 - Mg/S \\ P_0 V_2 = (m/\mu_2) RT_0 \\ P(V_2 + \Delta V) = (\frac{m}{\mu_2}) RT_0 \end{cases}$$

解之得

$$\Delta V = \frac{Mg}{P_0 S - Mg} V_2$$

设液化成水的质量为 Δm , 但因只有少量水蒸气液化为水, 水的体积可以不计, 于是

$$\Delta m = \frac{P_0 \mu_1}{RT_0} V_1 - \frac{P_0 \mu_1}{RT_0} (V_1 - \Delta V) = \frac{P_0 \mu_1}{RT_0} \Delta V = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{Mg}{P_0 S - Mg} m$$

I 室内系统向外界放出的热量为

$$Q = \Delta mL = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{Mg}{P_0 S - Mg} mL$$

方法与技巧 水蒸气液化放出汽化热,其来源一是系统所减少的内能,另一是外界对系统所做的功.因此本题不能再将外界对水蒸气的功 $P_0 \Delta V$ 加到 Q 中计算.

例 3 在两个用不导热细管连接的相同容器里,有压强 $P_0 = 1 \text{ atm}$ 、相对湿度 $B = 50\%$ 、温度 100°C 的湿空气.现将一个容器浸没在 0°C 的冰水中,问系统的压强变为多少?每一容器中空气的相对湿度变为多少?已知 0°C 时水的饱和蒸气压为 4.6 mmHg .

解析 (1)对于初态,湿空气压强 P_0 等于干空气压强 $P_{\text{干}1}$ 和水蒸气压强 $P_{\text{蒸}1}$ 之和,即

$$P_0 = P_{\text{干}1} + P_{\text{蒸}1} = P_{\text{干}1} + BP_{\text{饱}1}$$

已知 100°C 饱和水汽压 $P_{\text{饱}1} = 760 \text{ mmHg}$, $B = 50\%$, 因此有

$$\begin{cases} P_{\text{蒸}1} = BP_{\text{饱}1} = 380 \text{ mmHg} \\ P_{\text{干}1} = P_0 - 380 = 380 \text{ mmHg} \end{cases}$$

(2)对于末态,将其中一个容器冷却到 0°C ,无论干空气还是水蒸气都有一部分要转移到温度较低容器中去,混合气体的总压强和各组分的分压强都会下降,但每个容器中同一组分的分压强却是相等的.先算干空气的分压强 $P_{\text{干}2}$.设每个容器体积为 V ,在 $T_1 = 273 \text{ K}$ 和 $T_2 = 373 \text{ K}$ 的两容器内干空气质量分别为

$$m_1 = \frac{P_{\text{干}1} \mu}{RT_1} V, \quad m_2 = \frac{P_{\text{干}2} \mu}{RT_2} V$$

μ 为空气平均摩尔质量.则干空气质量为

$$m = m_1 + m_2 = \frac{P_{\text{干}1} \mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) V$$

它应等于初态 ($T_1 = 373 \text{ K}$) 时干空气质量

$$m = \frac{P_{\text{干}1} \mu}{RT_1} (2V)$$

由上二式可得末态时干空气分压强为

$$P_{\text{干}2} = \frac{2P_{\text{干}1}}{1 + \frac{T_1}{T_2}} = 321 \text{ mmHg}$$

假设末态中水蒸气并未凝结,将水蒸气也按理想气体状态方程计算,这样

$$P_{\text{蒸}2} = 321 \text{ mmHg}$$

但这个值大大超过 0°C 时的饱和水汽压 4.6 mmHg ,表明水蒸气已大量凝结为水,因而两容器中水蒸气分压强只能是 0°C 的饱和水汽压,即

$$P'_{\text{蒸}2} = P_{\text{饱}}(0^\circ\text{C}) = 4.6 \text{ mmHg}$$

根据道尔顿定律,容器内气体总压强为

$$P_2 = P_{\text{干}2} + P'_{\text{蒸}2} = 325.6 \text{ mmHg}$$

(3)由上可知,冷容器中空气的相对湿度 $B' = 100\%$,水蒸气处于饱和,有水凝结.热容器中空气

的相对湿度为

$$B'' = \frac{P_{\text{蒸}2}}{P_{\text{饱}}(100^{\circ}\text{C})} = \frac{4.6}{760} \times 100\% = 0.6\%$$

方法与技巧 将冷的和热的两个容器连通以后,它们的总压强是相同的.在两容器内混合气中同一组分的分压强也是相同的.任何温度下水蒸气分压强不可能大于该温度下水的饱和汽压.讨论这类干空气与水蒸气的混合气体问题时,一般都应先分别处理,然后综合之.

例 4 图 8-3 表示在 $10^{\circ}\text{C} \sim 30^{\circ}\text{C}$ 范围内水的饱和蒸气压曲线.现将温度 27°C , 压强 760 mmHg 、相对湿度 80% 的空气封闭在容器中,将它逐渐冷却,试问:

(1) 冷却到 12°C 时,容器内空气压强是多少?

(2) 温度降到多少摄氏度开始有水凝结? 这时纯空气和水蒸气的压强各为多少?

解析 (1) 由图可查 27°C 时饱和水汽压 $P_s(27^{\circ}\text{C}) = 27 \text{ mmHg}$, 此时容器中水蒸气分压强 P_w 为

$$P_w = BP_s(27^{\circ}) = 21.6 \text{ mmHg}$$

纯空气的分压强 P_A 为

$$P_A = 760 - 21.6 = 738.4 \text{ mmHg}$$

将容器冷却到 12°C , 假设没有水蒸气凝结, 由查理定律可求出 12°C 时水蒸气分压强 P'_w 为

$$\frac{21.6}{300} = \frac{P'_w}{285}$$

$$P'_w = 20.5 \text{ mmHg} > P_s(12^{\circ})$$

由图查得 12°C 时水的饱和汽压为 10.3 mmHg , 表明 12°C 时容器内已有水蒸气凝结, 容器内水蒸气是饱和的, 此时水蒸气的分压强只能是

$$P_s(12^{\circ}) = 10.3 \text{ mmHg}$$

容器内 12°C 时纯空气的分压强 P'_A

$$\frac{738.4}{300} = \frac{P'_A}{285}$$

$$P'_A = 701.5 \text{ mmHg}$$

可知冷却到 12°C 时容器内气体压强 P' 为

$$P' = P_s(12^{\circ}) + P'_A = 711.8 \text{ mmHg}$$

(2) 利用图像法可以找到容器内水蒸气的凝结点. 对于未饱和水蒸气, 其压强随温度线性变化, 假设全部水蒸气由初态 $P(27^{\circ}\text{C}, 21.6 \text{ mmHg})$ 变化到末态 $Q(12^{\circ}\text{C}, 20.5 \text{ mmHg})$, 服从查理定律变化, 就可在图 8-3 中将 PQ 连成一直线. 直线 PQ 与水的饱和汽压曲线的交点 K , 就是水蒸气开始饱和时的状态. 此后继续降温水蒸气不能再沿直线 KQ 变化, 而是沿曲线 KJ 变化. 由此可知 K 点就是水蒸气开始凝结点, 由图可知, 温度降到 23°C 开始有水凝结, 此时水蒸气的压强即为饱和汽压 21.3 mmHg .

23°C 时纯空气的压强, 由查理定律可得

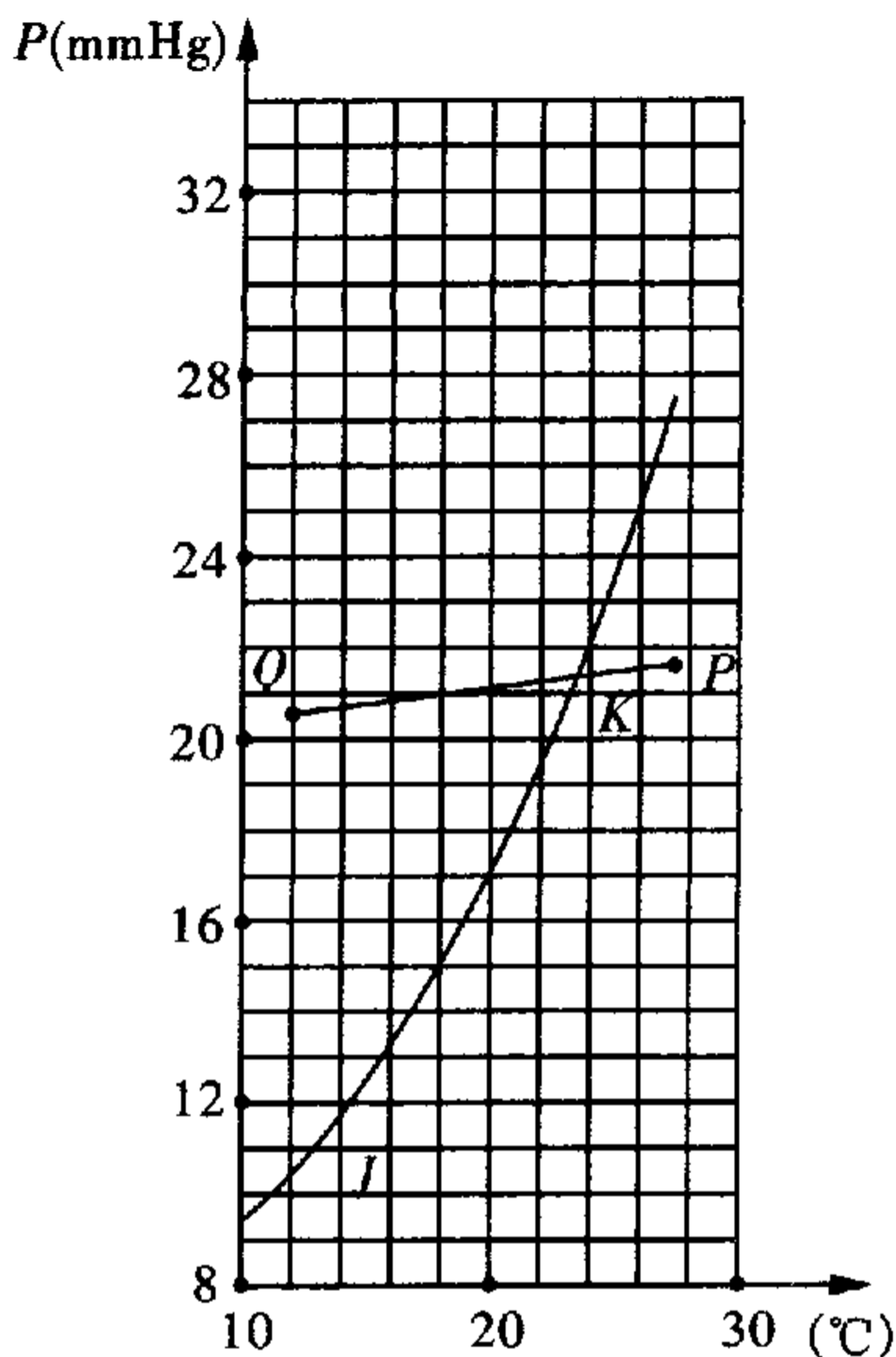


图 8-3

$$\frac{738.4}{300} = \frac{P''_A}{296}$$

$$P''_A = 728.1 \text{ mmHg}$$

容器内气体的总压强为

$$P'' = 728.1 + 21.3 = 749.4 \text{ mmHg}$$

方法与技巧 本题是图解法. 在 $P-T$ 或 $P-t$ 图中将描述某液体的饱和汽压随温度变化的关系用图线表示, 常称它为汽化曲线, 或叫饱和汽压曲线. 水的汽化曲线就是饱和水汽压随温度变化的关系的曲线, 曲线上方表示液态存在区域, 下方表示未饱和水蒸气存在区域, 汽化曲线就是它的液态和汽态的分界线, 又反映汽液平衡共存的条件. 本题利用水的汽化曲线来确定容器内未饱和水蒸气降温到达凝结点的问题, 值得注意.

例 5 在容积 $V=2 \text{ L}$ 的容器里, 盛有质量 $m_{\text{H}_2} = 2 \text{ g}$ 的氢气和少量的水, 开始时容器内压强 $P_1 = 17 \times 10^5 \text{ Pa}$, 加热后增加到 $P_2 = 26 \times 10^5 \text{ Pa}$, 有部分水蒸发. 水蒸气的摩尔质量 $\mu = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$. 求水的初温、末温及已蒸发的水的质量 Δm .

提示: 利用下面饱和水汽压与温度的关系

$t(^{\circ}\text{C})$	100	120	133	152	170	180
$P_s(10^5 \text{ Pa})$	1	2	3	5	8	10

解析 (1) 利用图像法求解最简便. 容器内总压强 P 是水的饱和汽压 $P_{\text{饱}}$ 与氢气的压强 P_{H_2} 之和. 氢气的压强可由克拉珀龙方程确定, 即

$$P_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{H}_2} V} RT = \frac{2 \times 10^{-3} \times 8.3}{2 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}} T = 4.15 \times 10^3 T$$

式中 P_{H_2} 以 Pa 为单位. $P_{\text{H}_2}(T)$ 是线性关系, 只要计算出两个温度所对应的 P_{H_2} 值, 例如

$$\begin{cases} T_1 = 373 \text{ K}, & P_{\text{H}_2} = 15.5 \times 10^5 \text{ Pa} \\ T_2 = 453 \text{ K}, & P_{\text{H}_2} = 18.8 \times 10^5 \text{ Pa} \end{cases}$$

我们可在 $P-T$ 图中作出 $P_{\text{H}_2}(T)$ 的图线——直线.

利用题给提示, 作水的饱和汽压曲线 $P_{\text{饱}}(T)$ 的图线. 将两根图线 $P_{\text{H}_2}(T)$ 和 $P_{\text{饱}}(T)$ “相加”, 得到容器内总压强与温度关系 $P(T)$ 的图线(图 8-4). 根据题目提供的初、末压强值, 可以从 $P(T)$ 的图线中, 查出容器内的初温 T_1 和末温 T_2 :

$$\begin{cases} P_1 = 17 \times 10^5 \text{ Pa}, & T_1 \approx 380 \text{ K} \\ P_2 = 26 \times 10^5 \text{ Pa}, & T_2 \approx 440 \text{ K} \end{cases}$$

(2) 求已蒸发水的质量 Δm . 可以把水蒸气看作理想气体. 利用已有的图线, 确定容器内氢气的初、末态压强值.

$$\text{当 } T_1 = 380 \text{ K}, \quad P'_{\text{H}_2} \approx 15.5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

于是水蒸气的初压强 $P_{\text{汽}1}$:

$$P_{\text{汽}1} = P_1 - P'_{\text{H}_2} \approx 1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

当 $T_2 = 440 \text{ K}$, $P''_{\text{H}_2} \approx 18.8 \times 10^5 \text{ Pa}$, 于是水蒸气的末压强 $P_{\text{汽}2}$:

$$P_{\text{汽}2} = P_2 - P''_{\text{H}_2} \approx 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

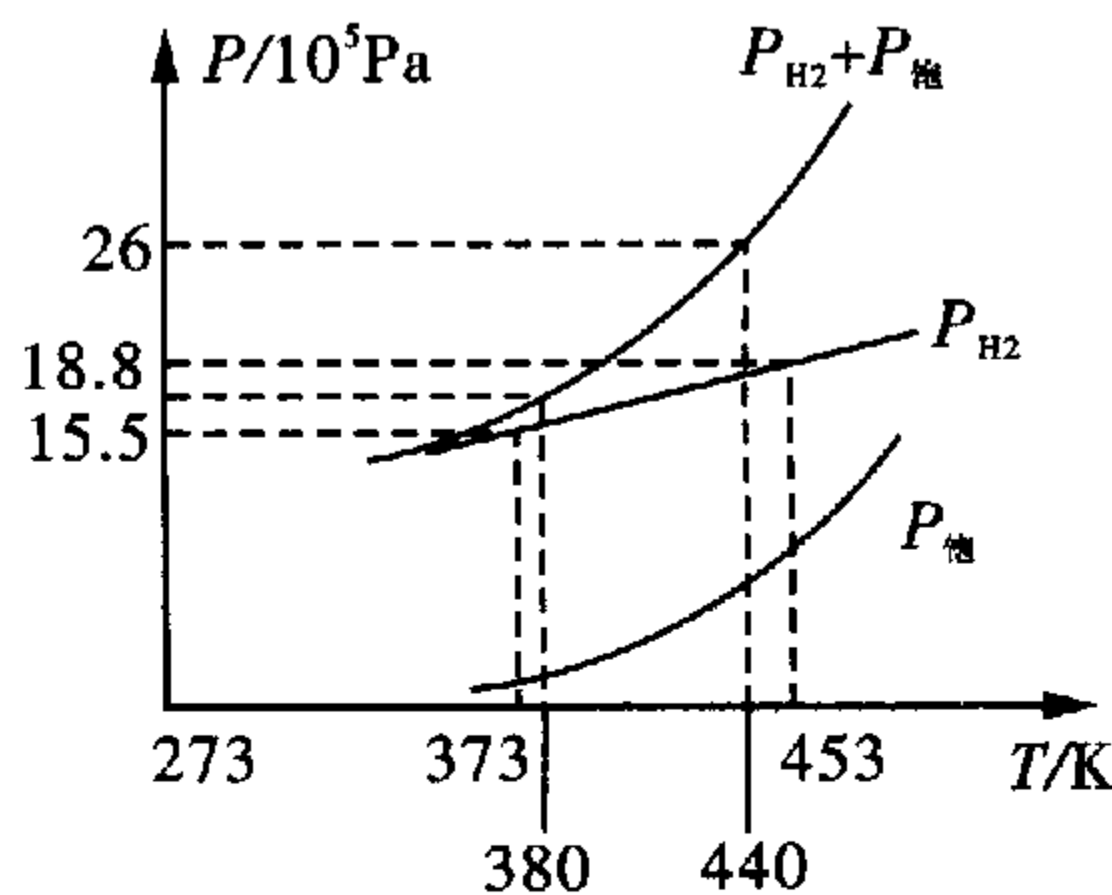


图 8-4

列出水蒸气在初、末态时的状态方程,并用 $m_{\text{汽}1}$ 、 $m_{\text{汽}2}$ 分别表示容器内水蒸气的初、末态的质量. 于是已蒸发水的质量 Δm 应是

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_{\text{汽}2} - m_{\text{汽}1} = \frac{\mu_{\text{汽}}}{R} \left(\frac{P_{\text{汽}2}}{T_2} - \frac{P_{\text{汽}1}}{T_1} \right) V = \frac{18 \times 10^{-3}}{8.31} \left(\frac{8}{440} - \frac{1.5}{380} \right) \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} \\ &= 6 \times 10^{-3} \text{ kg} = 6 \text{ g} \end{aligned}$$

方法与技巧 物理规律可以用公式、数据列表或者用图像等方式来定量描述. 本题要利用题给数据作出水的饱和汽压曲线,同时找出容器中氢气的分压强与温度的函数关系作出 $P_{\text{H}_2}(T)$ 图线,将两者叠加后来解题. 图像法解题由本题的解答可以看出,它具有形象、直观、一目了然的优点,也能省去一些繁琐的数学运算. 如果初装水少于 6 g, 本题将因条件不足而无解.

例 6 正确使用压力锅的方法是:将已盖好密封锅盖的压力锅加热(图 8-5),当锅内水沸腾时再加压力阀 S,此时可以认为锅内只有水的饱和蒸气,空气已全部排除. 然后继续加热,直到压力阀被锅内的水蒸气顶起时,锅内即已达到预期温度(即设计时希望达到的温度). 现有一压力锅,在海平面处加热能达到的预期温度为 120°C ,某人在海拔 5000 m 的高山上使用此压力锅,锅内有足量的水.

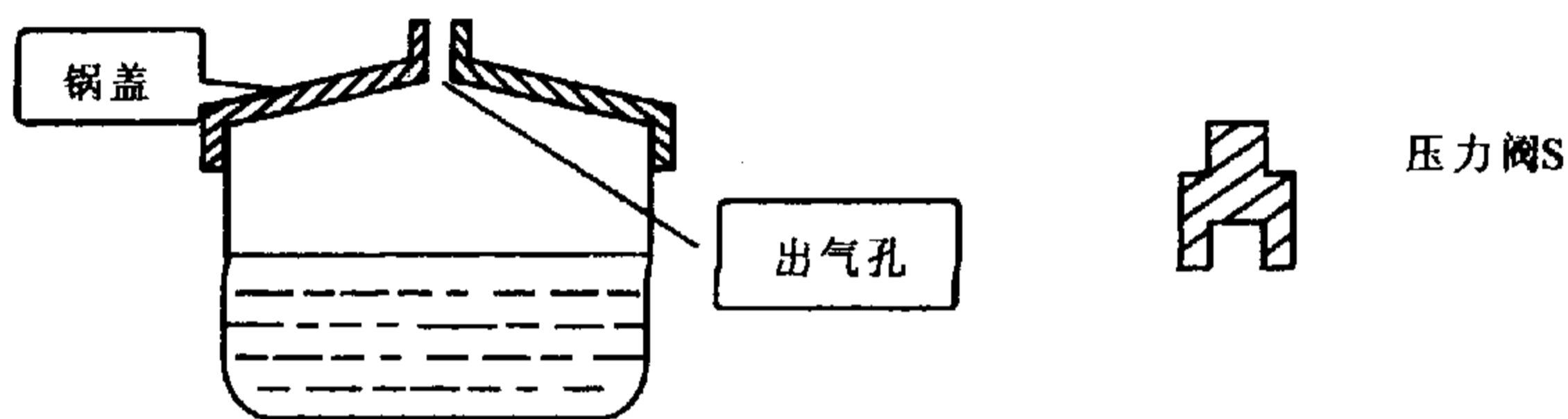


图 8-5

- (1) 若不加盖压力阀,锅内水的温度最高可达多少?
- (2) 若按正确方法使用压力锅,锅内水的温度最高可达多少?

(3) 若未按正确方法使用压力锅,即盖好密封锅盖一段时间后,在点火前就加上压力阀,此时水温为 27°C ,那么加热到压力阀刚被顶起时,锅内水的温度是多少? 若继续加热,锅内水的温度最高可达多少? 假设空气不溶于水.

已知:水的饱和蒸气压 $P_w(t)$ 与温度 t 的关系图线如图 8-6 所示. 大气压强 $P(Z)$ 与高度 Z 的关系的简化图线如图 8-7 所示. $t = 27^\circ\text{C}$ 时 $P_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{ Pa}$; $Z = 0$ 处 $P(0) = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

解析 (1) 已知在海平面处,大气压强 $P(0) = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa}$,在 $Z = 5000 \text{ m}$ 处,大气压强 $P(5000) = 53 \times 10^3 \text{ Pa} = P_w(t_1)$

水沸腾时的饱和蒸气压 P_w 应等于此值,由图 8-6 可知,对应的温度即沸点为 $t_1 = 82^\circ\text{C}$.

故在 5000 m 高山上,若不加盖压力阀,锅内温度最高可达 82°C .

(2) 由图 8-6 可知,有 $t = 120^\circ\text{C}$ 时,水的饱和蒸气压 $P_w(120^\circ) = 198 \times 10^3 \text{ Pa}$,而在海平面处,大气压强 $P(0) = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa}$,可见压力阀的附加压强为

$$P_s = P_w(120^\circ) - P(0) = (198 - 101.3) \times 10^3 \text{ Pa} = 96.7 \times 10^3 \text{ Pa}$$

在 5000 m 高山上,大气压强与压力阀的附加压强之和为

$$P' = P_s + P(5000) = (96.7 + 53) \times 10^3 \text{ Pa} = 149.7 \times 10^3 \text{ Pa}$$

若在 $t = t_2$ 时阀被顶起,则此时的 P_w 应等于 P' ,即

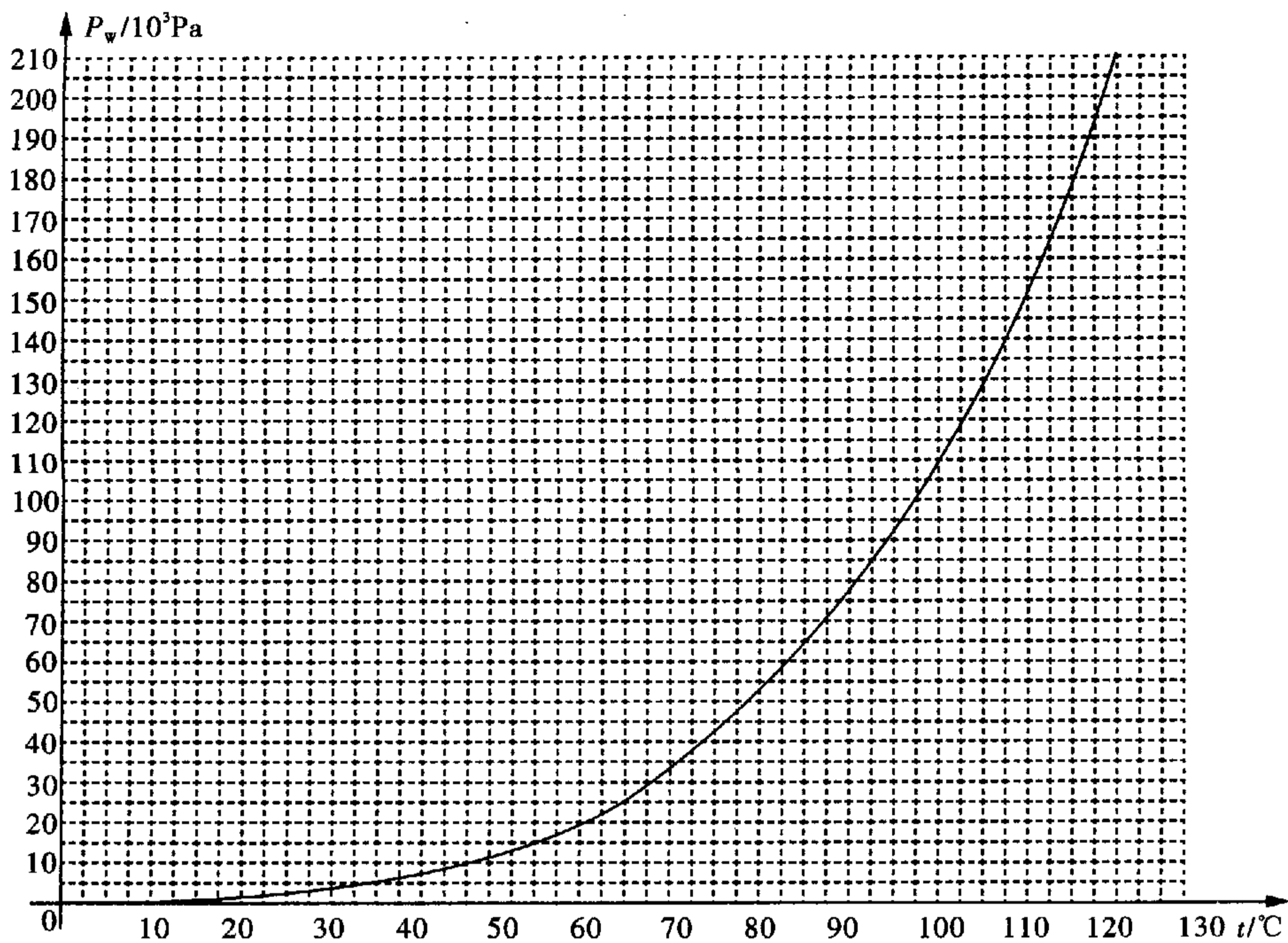


图 8-6

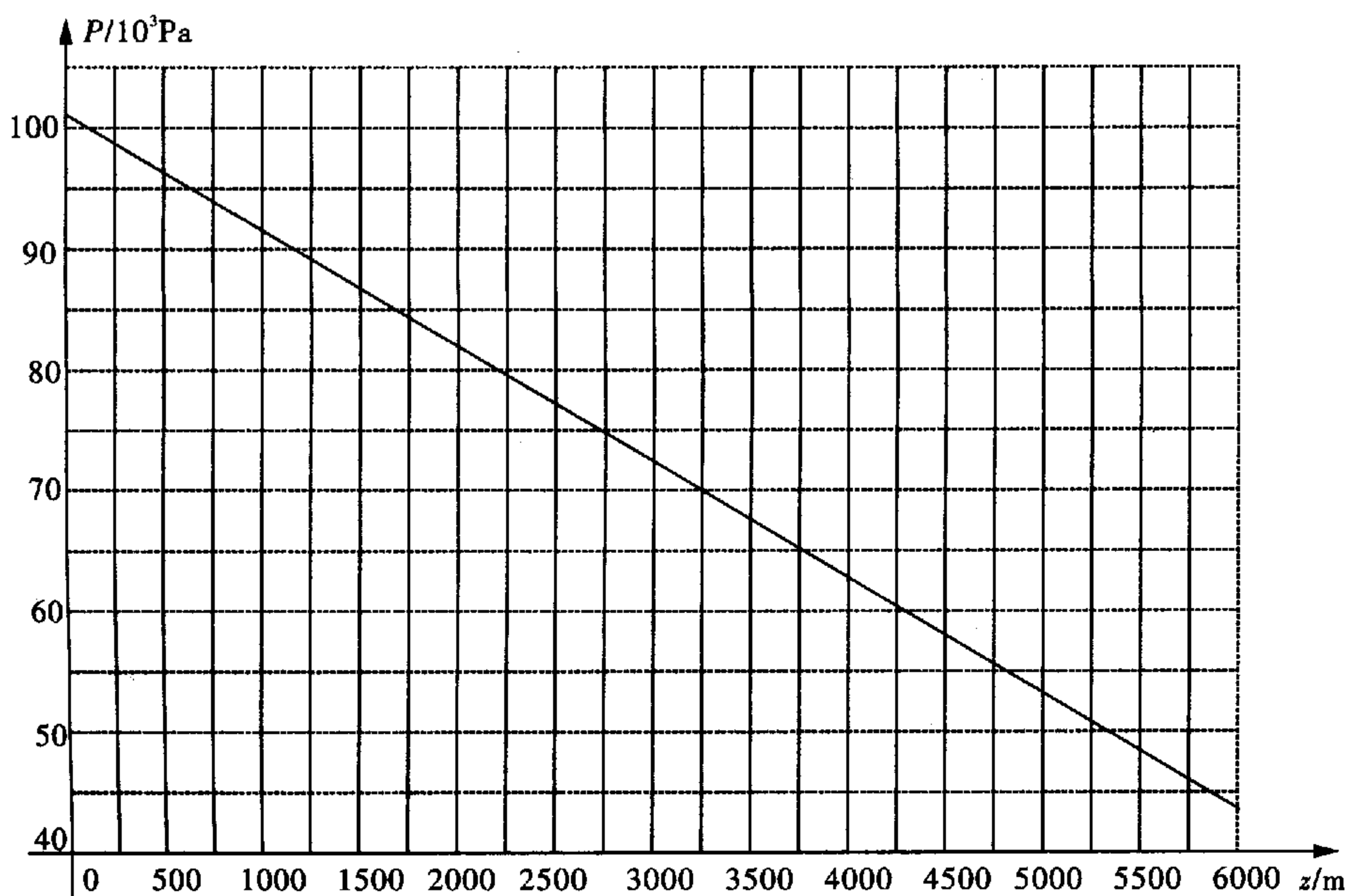


图 8-7

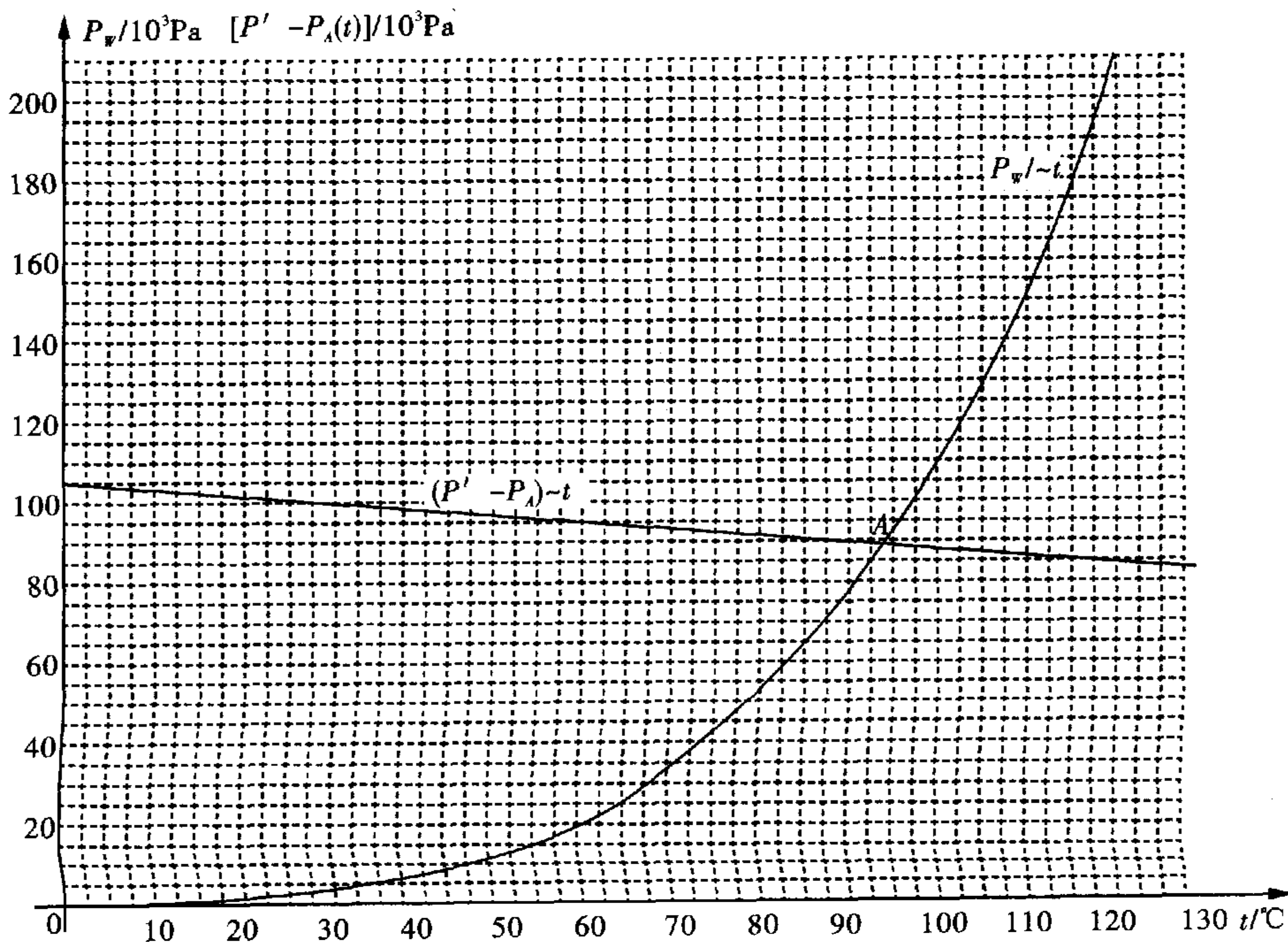


图 8-8

$$P_w(t_2) = P'$$

由图 8-6 可知 $t_2 = 112^\circ\text{C}$.

此时锅内水开始沸腾, 温度不再升高, 故按正确方法使用此压力锅, 在 5000 m 高山上锅内水的温度最高可达 112°C .

(3) 在未按正确方法使用压力锅时, 锅内有空气, 且设空气不溶于水. 设加压力阀时, 内部水蒸气已饱和. 由图 8-6 可知, 在 $t = 27^\circ\text{C}$ 时, 题中已给出水的饱和汽压 $P_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{ Pa}$, 这时锅内空气的压强 $P_A(27^\circ)$ 为

$$\begin{aligned} P_A(27^\circ) &= P(5000) - P_w(27^\circ) \\ &= (53 - 3.6) \times 10^3 \text{ Pa} = 49.4 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

当温度升高时, 锅内空气的压强也随之升高, 设在温度为 $t^\circ\text{C}$ 时, 锅内空气压强为 $P_A(t)$, 则有

$$\frac{P_A(t)}{273+t} = \frac{P_A(27^\circ)}{273+27}$$

$$P_A(t) = (164.7t + 45.0 \times 10^3) \text{ Pa}$$

若在 $t = t'$ 时压力阀刚好开始被顶起, 则有

$$P_w(t') = p' - P_A(t')$$

由此得

$$P_w(t') = (105 \times 10^3 - 164.7t') \text{ Pa}$$

画出函数 $P' - P_A(t')$ 的图线, 取

$$\begin{cases} t=0, & P' - P_A(0) = 105 \times 10^3 \text{ Pa} \\ t=100^\circ\text{C}, & P' - P_A(100^\circ) = 88.6 \times 10^3 \text{ Pa} \end{cases}$$

由此二点可在图 8-8 上画出直线. 此直线与该图中的 $P_w(t) \sim t$ 曲线的交点为 A, 由图可以看出与 A 点对应的温度为

$$t' = 97^\circ\text{C}$$

即在压力阀刚被顶起来, 锅内水的温度是 97°C , 若继续加热, 压力阀被顶起后, 锅内空气随水蒸气一起被排出, 最终排净, 锅内水温仍可达 112°C .

方法与技巧 本题是图解法求解, 它利用水的饱和蒸气压曲线, 解答压力锅三种不同的用法中锅内水温最高可达到的值. 在(2)、(3)问中要注意压力阀附加压强的计算和压力阀刚好顶起的条件的差别. 特别是对方程 $P_w(t') = P' - P_A(t')$ 利用两图线的交点求 t' 的方法.

例 7 把质量 $m_1 = 100 \text{ g}$ 的氮气与未知质量的氧气混合. 在 $T = 77.4 \text{ K}$ 的条件下, 让单位体积的混合气体等温压缩, 混合气体压强和体积的关系如图 8-9 所示.

(1) 确定氧气的质量 m_2 ;

(2) 计算 $T = 77.4 \text{ K}$ 时饱和氧气的压强 P_2 .

说明: $T = 77.4 \text{ K}$ 是标准大气压下液态氮的沸点, 液态氧的沸点更高.

解析 图线表明, 氧气和氮气是先后达到饱和状态的.

在该混合气等温压缩过程中, 设氧气先达到饱和. 在 A 点, 氧气压强为饱和汽压 P_2 , 氮气仍为未饱和汽, 压强为 P_0 . 在 A 到 B 的过程中, 氧气保持 P_2 不变, 但气体质量在减少; 氮气仍为未饱和汽. 到达 B 点, 氮气也达到饱和, 其饱和汽压为 P_1 . 利用气态方程和道尔顿分压定律, 有

$$\text{A 点: 氧气 } P_2 V_A = (m_2 / \mu_2) RT \quad \text{①}$$

$$\text{氮气 } P_0 V_A = (m_1 / \mu_1) RT \quad \text{②}$$

$$P_2 + P_0 = 4 \quad \text{③}$$

$$\text{AB: 氮气 } P_0 V_A = P_1 V_B \quad \text{④}$$

$$V_A = 2V_B \quad \text{⑤}$$

$$\text{B 点: } P_1 + P_2 = 7 \quad \text{⑥}$$

由诸式可以解出:

$$P_0 = 3, \quad P_1 = 6, \quad P_2 = 1$$

根据题给说明可知: 77.4 K 时氮气的饱和汽压 $P_1 = 1 \text{ atm}$, 因此 77.4 K 时氧气的饱和汽压

$$P_2 = P_1 / 6 = (1/6) \text{ atm}$$

这个结果符合题给说明. 原有氧气质量由①、②式可得

$$m_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{m_1}{3} \approx 38.1 \text{ g}$$

方法与技巧 这是一道将氧气与氮气混合后等温压缩液化的题. 首先要弄清楚题中混合气等温线的意义, A、B 应是氧气和氮气先后达到饱和时的态, 还要注意图线的 P 、 V 坐标并未标示单位, 其 P 或 V 的不同值只是一种比例关系. 第二要理解题给“说明”, 它隐含了这样的信息, 即 77.4 K 时氮气的饱和汽压是 1 atm , 而 77.4 K 时氧气的饱和汽压小于 1 atm . 这就为判断 77.4 K 时氧气的饱和汽压的计算结果是否正确提供了依据.

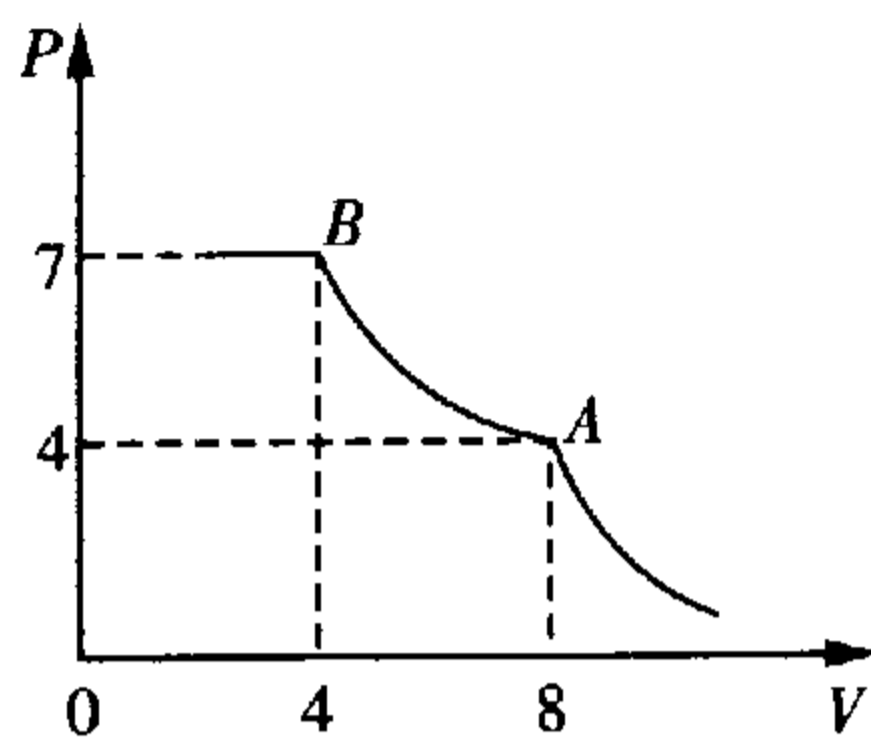


图 8-9

例 8 质量为 2.0 kg 、温度为 -13°C 、体积为 0.19 m^3 的氟利昂(其相对分子质量为 121),在保持温度不变的条件下被压缩,其体积变为 0.10 m^3 ,试问在此过程中有多少千克的氟利昂被液化?(已知在 -13°C 时,液态氟利昂的密度 $\rho_f = 1.44 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,其饱和汽压 $P_s = 2.08 \times 10^5 \text{ Pa}$,氟利昂的饱和蒸气可近似地看作理想气体.)

解析 (1)首先确定初态有无液态的氟利昂,为此假设初态全是气态的氟利昂,则其压强 P_i 可由气态方程求得,即

$$P_i = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V_i} = \frac{2 \times 8.31 \times 260}{121 \times 10^{-3} \times 0.19} = 1.87 \times 10^5 \text{ Pa} < P_s$$

可见压缩前氟利昂全部处于气态的假设成立.

(2)氟利昂被压缩后,其液态部分的质量为 m_1 、体积为 V_1 ,气态部分的质量为 m_2 、体积为 V_2 、其压强即为饱和蒸气压 P_s . 根据假设,气态服从理想气体状态方程,即

$$\begin{cases} P_s V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT \\ V_1 + V_2 = V \\ m_1 + m_2 = m \\ m_1 = \rho_f V_1 \end{cases}$$

式中 μ 为氟利昂的摩尔质量, m 为氟利昂的质量, V 为被压缩后的氟利昂的体积. 解以上四式,可以得到压缩后液态部分的氟利昂质量为

$$m_1 = \frac{\frac{m}{\mu} RT - P_s V}{\frac{RT}{\mu} - \frac{P_s}{\rho_f}} = 0.84 \text{ kg}$$

由于初态没有液态氟利昂,故在压缩过程中有 0.84 kg 氟利昂被液化.

方法与技巧 要确定容器内蒸气有没有凝结为液态的情况,可以先假设它全是气态,计算其压强. 如果压强小于其温度下的饱和汽压,即 $P < P_s$,表明它仍是未饱和蒸气,没有液化现象. 反之,如果 $P > P_s$,说明蒸气已有液化现象存在,蒸气的压强只能是其饱和汽压 P_s .

例 9 物理小组在寒冷的冬天做了一个这样的实验:把一个实心大铝球加热到某温度 t ,然后把它放在结冰的湖面上(冰层足够厚),铝球便逐渐陷入冰内. 当铝球不再下陷时,测出球的最低点陷入冰中的深度 h . 将铝球加热到不同的温度,重复上述实验 8 次,最终得到如下数据:

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球温度 $t/^\circ\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 h/cm	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

已知铝的密度约为冰密度的 3 倍,设实验时环境温度及湖面温度均为 0°C ,冰熔解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$.

- (1)试采用以上某些数据估算铝的比热容 c ;
- (2)对未被你采用的实验数据,试说明不采用的原因,并作出解释.

解析 1. 估算铝的比热容 c : 铝球放热使冰融化. 设铝球温度 t_0 时,能融化冰的最大体积恰等于半个铝球体积,则铝球最低点下陷深度 $h = R$ (球的半球). 当铝球温度 $t > t_0$ 时,则 $h > R$,冰被融化的体积等于一个圆柱体体积与半个铝球体积之和(图 8-10).

设铝的密度为 ρ_{Al} , 冰的密度为 ρ , 铝球从 $t^\circ\text{C}$ 降到 0°C 放热:

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{Al} (t - 0) c \quad \text{①}$$

融化的冰吸热:

$$Q_2 = \rho \left[\pi R^2 (h - R) + \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} R^3 \right] \lambda \quad \text{②}$$

不计铝球使冰融化时向外界散失的热量, 有 $Q_1 = Q_2$. 则

$$h = \frac{R}{3} + \frac{4Rc}{\lambda} t \quad \text{③}$$

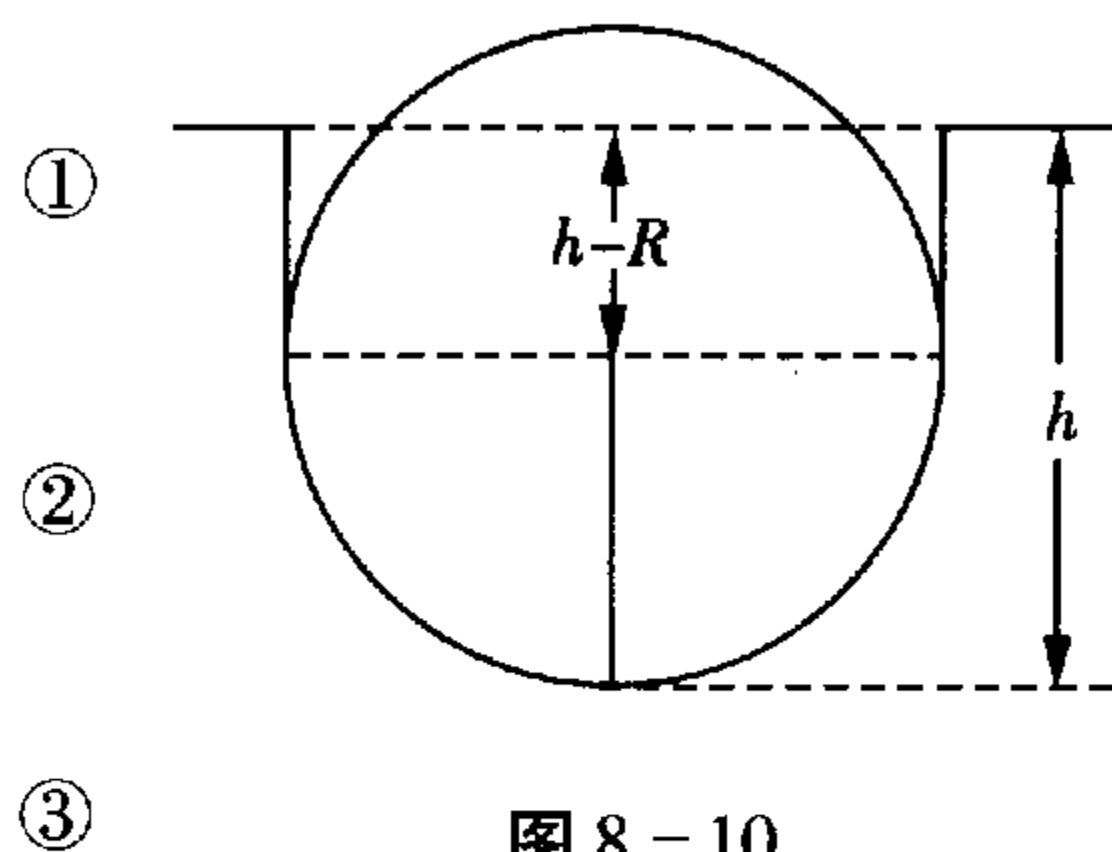


图 8-10

即 h 与 t 成线性关系, 此式只对 $t > t_0$ 时成立.

将 8 次实验数据画在 $h-t$ 图中, 依次得到 A、B、…、H 点, 如图 8-11 所示. B、C、D、E、F 五点可以拟成一直线, 此直线应与③式一致. 因此在此直线上任取两点的数值, 代入③式后解联立方程, 可得比热容 c .

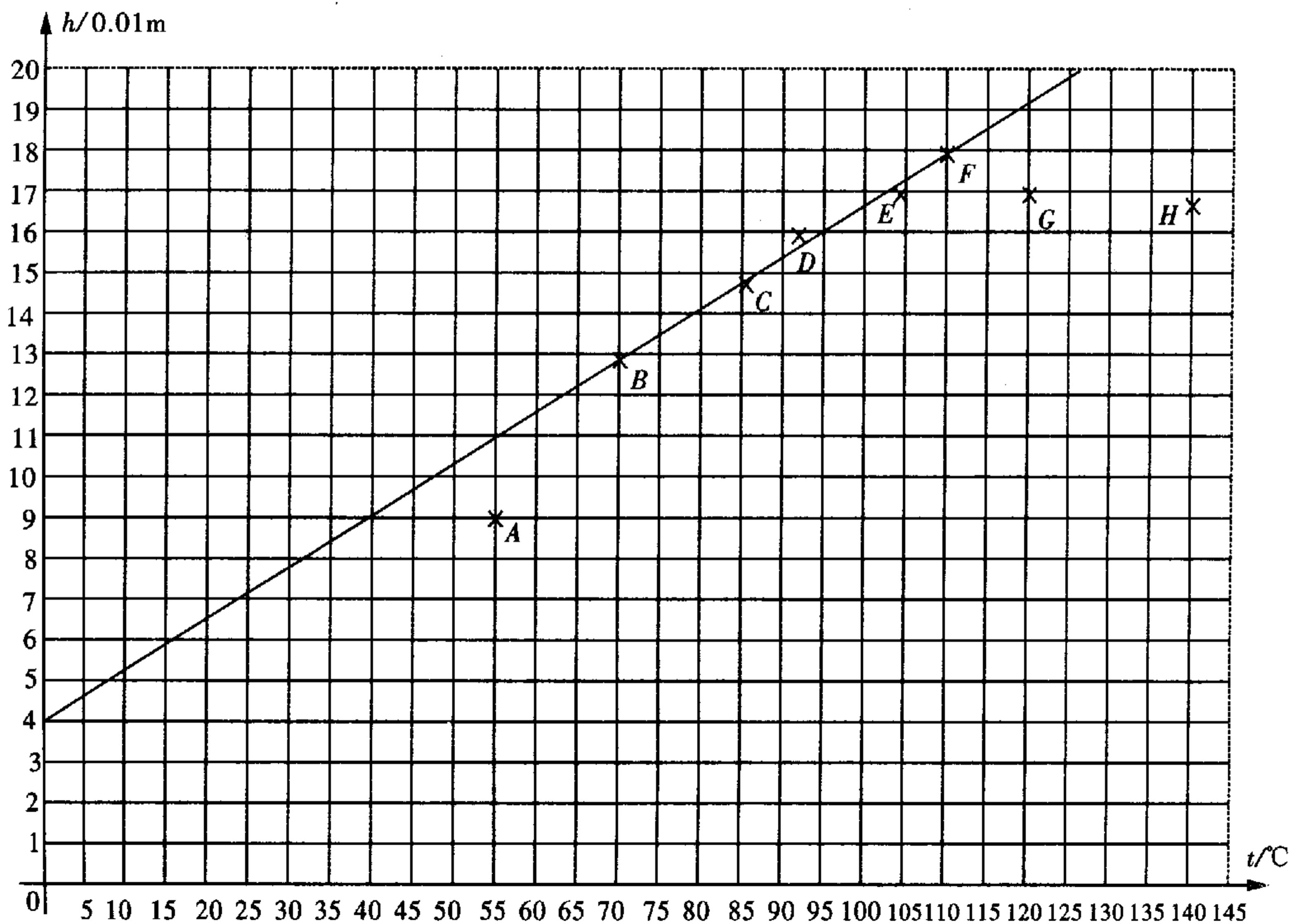


图 8-11

现取 X_1 、 X_2 两点, 由图读得:

$$X_1 (8.0^\circ\text{C}, 5.1 \text{ cm}), \quad X_2 (100^\circ\text{C}, 16.7 \text{ cm})$$

将数据代入③式, 可以解得

$$c = 8.6 \times 10^2 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

2. 第 1、7、8 次实验数据对应的点 A、G、H, 偏离直线太远, 未被采用.

A 点为什么偏离直线较远? 因为 $h = R$ 时对应的温度 $t_0 = 65^\circ\text{C}$, ③式是在 $t > t_0$ 的条件下成立. 第

一次铝球温度 $t_1 = 55^\circ\text{C} < t_0$, 融化的冰的体积小于半个球体积, ③式不成立.

G、H 点为什么偏离直线较远? 因为球温过高, 使得一部分升华成汽, 由于铝球与环境温差较大而散失热量较多, $Q_2 < Q_1$, 因而③式不成立.

方法与技巧 物理是一门以实验为基础的科学, 实验是研究和学习物理学最基本的方法. 本题是测定铝的比热容的实用性实验题. 一般来说, 它要根据已知理论导出测量公式如③式; 要制定实验步骤, 将通过正确操作所观测到的原始数据进行系统整理, 绘出必要的图线, 如图所示的 $h-t$ 图线; 然后在此基础上计算实验结果, 分析误差原因, 提出改进实验的设想等等.

例 10 两个同样的圆柱形绝热量热器, 第一个量热器装有预先注入的水冷却而结成的高 $h = 25$ cm 的冰, 第二个装有温度 $t_1 = 10^\circ\text{C}$ 的水, 水面高度 $h = 25$ cm. 现将第二个量热器中的水倒入第一个量热器内, 并立即标记出水面位置. 在达到热平衡后, 它们的高度增加了 $\Delta h = 0.5$ cm, 求第一个量热器内冰的初温是多少. 已知冰的密度 $\rho_{\text{冰}} = 900$ kg/m³, 冰的熔解热 $\lambda = 340$ kJ/kg, 冰的比热容 $c_{\text{冰}} = 2.1$ kJ/(kg·K), 水的比热容 $c_{\text{水}} = 4.2$ kJ/(kg·K).

解析 当第一个量热器建立热平衡后, 器内水面升高了, 这意味着有部分水结冰了, 结冰时体积增大. 然而并不是所有的水都结冰了, 否则它们的高度要增加 2.5 cm, 而按题意 $\Delta h = 0.5$ cm. 可见在量热器内稳定温度等于 0°C .

设稳定时冰、水新界面的高度为 h_1 , 根据质量守恒, 有

$$\rho_{\text{冰}} h + \rho_{\text{水}} h = \rho_{\text{冰}} h_1 + \rho_{\text{水}} (2h + \Delta h - h_1) \quad ①$$

得到器内冰的新高度 h_1

$$h_1 = h + \frac{\rho_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}} - \rho_{\text{冰}}} \Delta h \quad ②$$

故冰的质量增加 Δm , 设 S 为器的横截面积, 有

$$\Delta m = \rho_{\text{冰}} (h_1 - h) S = \frac{\rho_{\text{水}} \rho_{\text{冰}}}{\rho_{\text{水}} - \rho_{\text{冰}}} S \Delta h \quad ③$$

根据热平衡方程, 设 t_x 为冰的初温, 有

$$m_{\text{水}} c_{\text{水}} (t_1 - 0) + \lambda \Delta m = m_{\text{冰}} c_{\text{冰}} (0 - t_x) \quad ④$$

得到
$$t_x = -\frac{\lambda \rho_{\text{水}}}{c_{\text{冰}} (\rho_{\text{水}} - \rho_{\text{冰}})} \frac{\Delta h}{h} - \frac{c_{\text{水}} \rho_{\text{水}}}{c_{\text{冰}} \rho_{\text{冰}}} t_1 \approx -54.6^\circ\text{C}$$

方法与技巧 对于相同质量的水和冰而言, 它们的体积比为

$$\frac{V_{\text{冰}}}{V_{\text{水}}} = \frac{\rho_{\text{水}}}{\rho_{\text{冰}}} = \frac{1}{0.9} \approx 1.1, \quad V_{\text{冰}} - V_{\text{水}} = (1.1 - 1) V_{\text{水}} = 0.1 V_{\text{水}}$$

因此水凝固成冰后体积增大约 0.1 倍.

例 11 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有其他物质), 三态如能平衡共存, 则系统的温度、压强必定分别是 $t_1 = 0.01^\circ\text{C}$ 和 $P_1 = 4.58$ mmHg. 现在有冰、水和水蒸气各 1 g 处于上述平衡状态. 若保持总体积不变而对此系统缓缓加热, 输入的热量 $Q = 0.255$ kJ, 试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量. 已知在此条件下冰的升华热 $L_{\text{升}} = 2.83$ kJ/g, 水的汽化热 $L_{\text{汽}} = 2.49$ kJ/g.

解析 解决涉及物态变化的热平衡问题, 先要判断物态变化情况. 由题给数据可利用以下近似关系求得冰的熔解热:

$$L_{\text{熔}} = L_{\text{升}} - L_{\text{汽}} = 0.34 \text{ kJ/g} \quad ①$$

因为缓缓加给系统的热 $Q < L_{\text{熔}}$, 所以冰不能全部融化, 系统在物态变化过程中始终是三态共存

且接近平衡,因此系统的温度和压强均不变.

现在估算在题给温度、压强条件下水蒸气的密度 $\rho_{\text{汽}}$. 用理想气体状态方程可得 $\rho_{\text{汽}} = P_1 \mu / RT_1$, 代入数值 $\mu = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, $P_1 = 4.58 \text{ mmHg} = 610 \text{ Pa}$, $T_1 = 273 \text{ K}$, 粗算可得

$$\rho_{\text{汽}} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$$

在同样条件下,水、冰的密度分别为

$$\rho_{\text{水}} \approx 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{冰}} \approx 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

由此可知,在本题中水蒸气的体积远远大于水和冰的体积之和. 又由于冰融化为水时体积变化不大,在总体积保持不变的条件下,完全可以认为本题物态变化过程中水蒸气的体积不变,也就是再达到平衡时水蒸气的质量仍为 1 g , 本题的物态变化过程几乎完全是冰融为水的过程.

设加热后冰、水、水蒸气的质量分别为 x 、 y 、 z , 则有

$$\begin{cases} z = 1 \text{ g} \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \text{ g} \end{cases} \quad \text{③}$$

根据能量守恒,有

$$(1-x)L_{\text{熔}} = Q \quad \text{④}$$

由③、④式解出 x 、 y , 再加上②式可得

$$x = 0.25 \text{ g}, \quad y = 1.75 \text{ g}, \quad z = 1 \text{ g}$$

方法与技巧 要抓住加热后仍然三态共存,且水汽体积基本未变,几乎只是冰融解为水的过程来分析.

例 12 证明成分相同而体积、温度不相等的两杯液体,混合后总体积不变. 在混合过程中与外界绝热.

解析 系统绝热, $Q = 0$, 即有

$$m_1 c (t_0 - t_1) + m_2 c (t_0 - t_2) = 0,$$

混合后的平衡温度 t_0 为

$$t_0 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$$

设 0°C 时液体密度 ρ_0 , 则 $m_1 = \rho_0 V_{10}$, $m_2 = \rho_0 V_{20}$, 两杯液体混合前的体积分别为 V_1 、 V_2 , 即

$$\begin{cases} V_1 = V_{10} (1 + \beta t_1) \\ V_2 = V_{20} (1 + \beta t_2) \end{cases}$$

混合液体温度为 t_0 时, 它们的体积为 V'_1 、 V'_2 , 即

$$\begin{cases} V'_1 = V_{10} (1 + \beta t_0) \\ V'_2 = V_{20} (1 + \beta t_0) \end{cases}$$

$$\text{于是 } V = V'_1 + V'_2 = V_{10} + V_{20} + \beta (V_{10} + V_{20}) t_0 = V_{10} + V_{20} + \beta \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{\rho_0}$$

$$= V_{10} (1 + \beta t_1) + V_{20} (1 + \beta t_2) = V_1 + V_2, \text{ 得证.}$$

方法与技巧 这是关于液体热膨胀的一道证明题. 证明题一般要从基本的物理规律出发,去证明一些新的结论. 这里就是应用膨胀公式,计算初温 t_1 、 t_2 时两杯液体体积之和与末温 t_0 时两杯液体的体积之和相等,从而证明其结论的.

【解题尝试】

1. 为什么夏天湖泊中的水温总比周围的气温低呢?
2. 夏天,在运输大量冰块的卡车上,有时看到冰面上有淡乳白色的气体飘动,出现这种现象的原因是什么?
3. 如图 8-12 所示,上下容器和细长管都是用热容量很小的良导热体做成的,管长为 l 、阀门 K ,整个装置与外界绝热.开始时阀门关闭,两容器中各盛质量 m 、比热容 c 的某种液体,平衡时温度为 T_0 .由于该液体蒸汽分子受重力作用,所以平衡时在管内作非均匀分布,上疏下密.已知蒸汽压强按指数规律分布: $P_h = P_0 e^{-mgh/kT}$
 式中 h 是管内某点距下容器中液面高度, P_h 是该点蒸汽压强, m 是蒸汽相对分子质量.现在打开阀门,试论述系统状态将发生怎样的变化,并估算出变化最后的结果.
4. 一汽缸的初始体积为 V_0 ,其中盛有 2 mol 的空气和少量的水(水的体积可忽略).平衡时气体的总压强是 3.0 atm,经等温膨胀使其体积加倍,在膨胀结束时,其中的水刚好全部消失,此时的总压强为 2.0 atm.若让其继续做等温膨胀,使体积再次加倍.试计算此时
 (1)汽缸中气体的温度;(2)汽缸中水蒸气的物质的量;(3)汽缸中气体的总压强.
 假定空气和水蒸气均可当作理想气体处理.
5. 将一份潮湿空气的体积压缩为原来的 $1/4$,它的压强增至原来的 3 倍.若再把体积压缩 $1/2$,压强变为最初的 5 倍.以上一切过程都在温度不变的情况下进行.问在最初条件下相对湿度是多少?
6. 正确使用高压锅(图 8-13)的办法是:将已加上密封锅盖的高压锅加热,当锅内水沸腾时,加上一定重量的高压阀,此时可认为锅内空气已全部排除,只有水的饱和蒸汽,继续加热,水温将继续升高,到高压阀被蒸汽顶起时,锅内温度即达到预期温度.

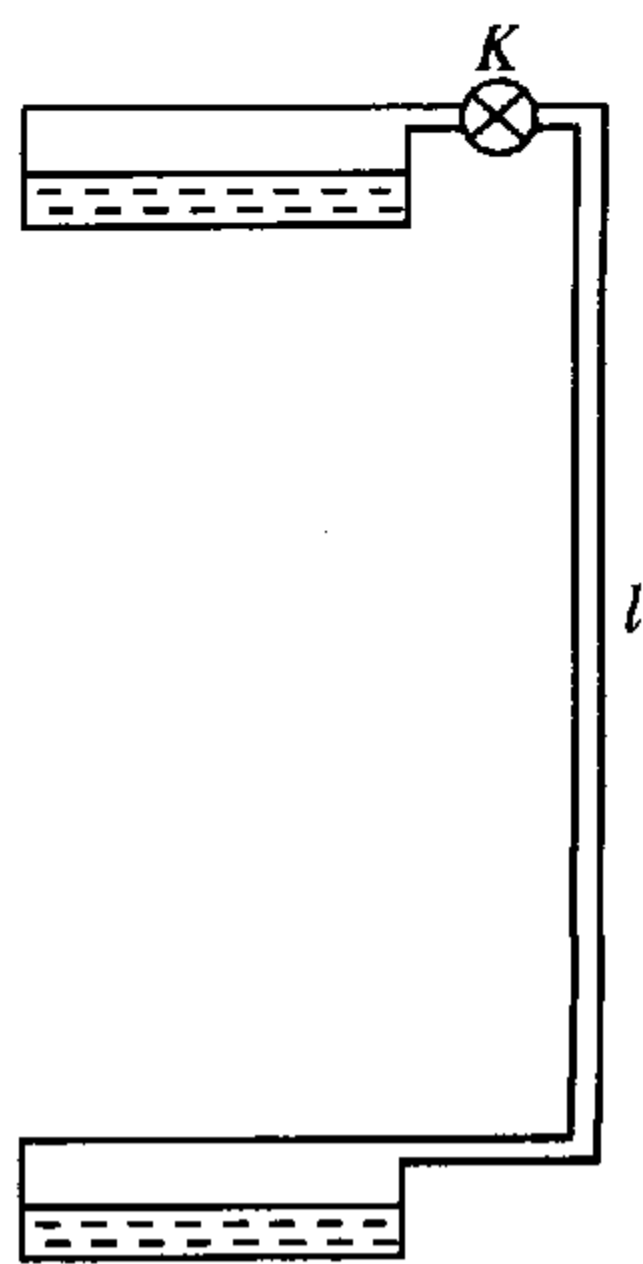


图 8-12

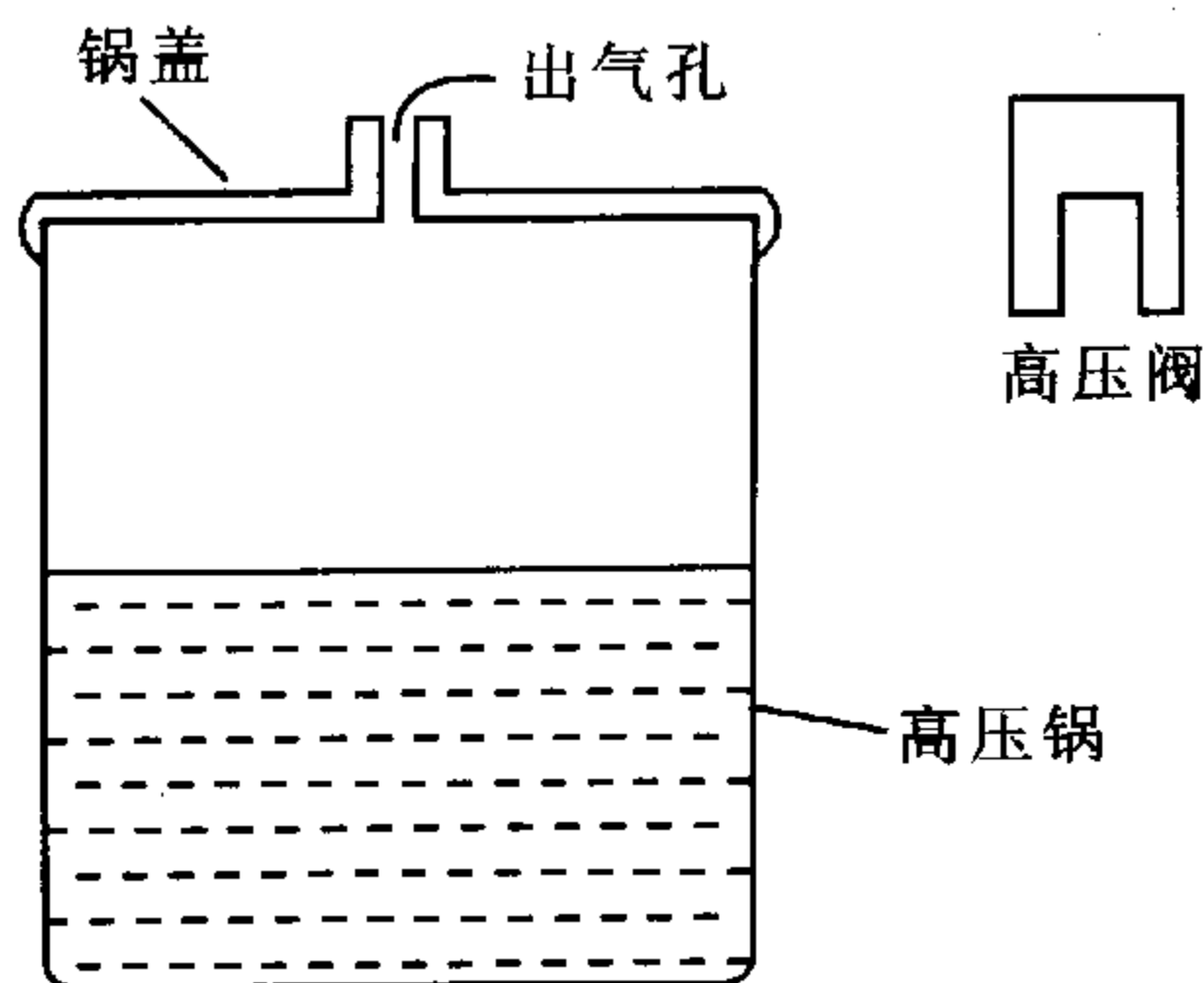


图 8-13

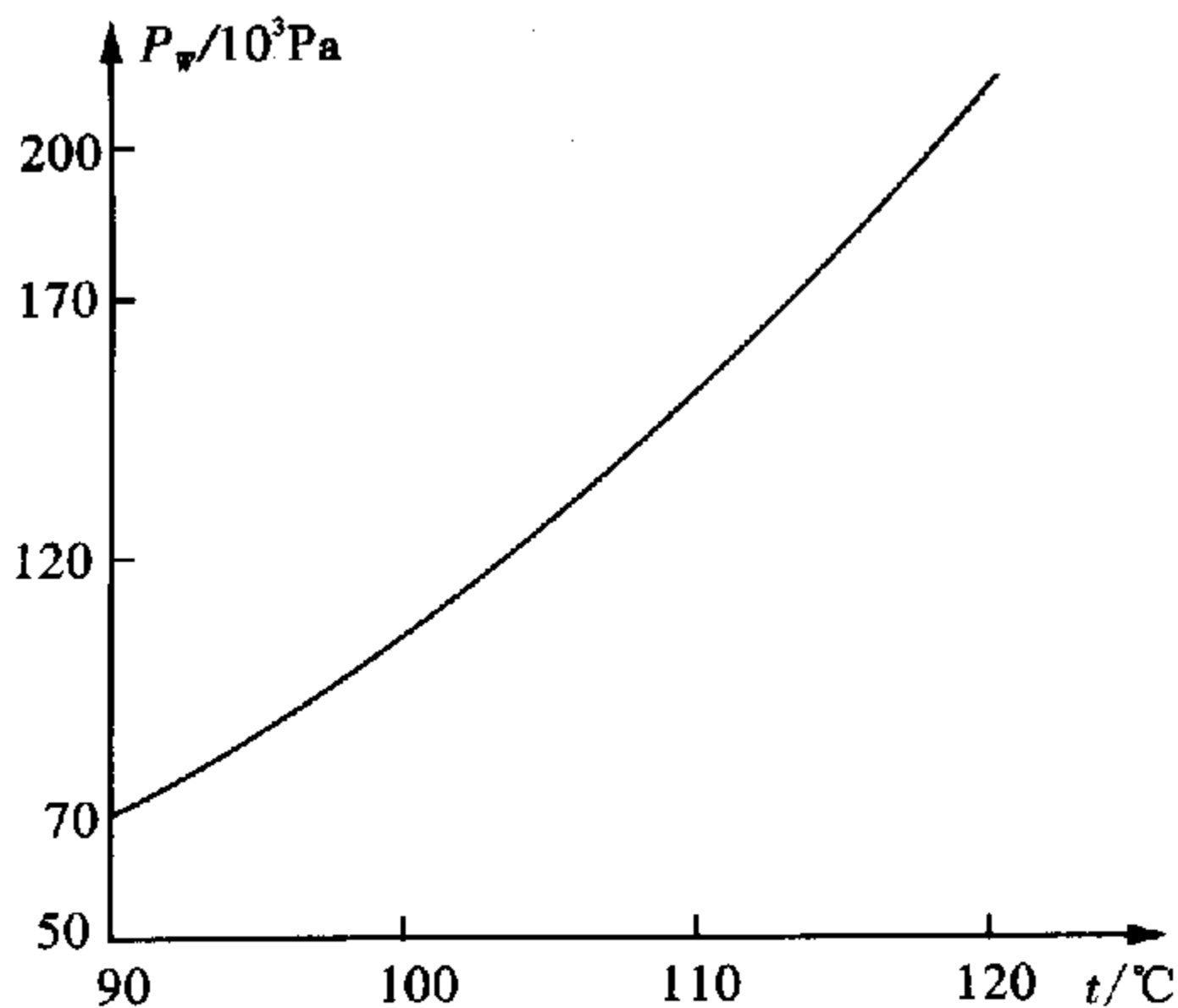


图 8-14

某一高压锅的预期温度为 120°C ,如果某人在使用此锅时,未按上述程序而水温被加热至 90°C 时

就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和汽),问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒气时,锅内温度为多少?

已知:大气压强 $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 90°C 时水的饱和汽压 $P_w(90^\circ\text{C}) = 7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$, 120°C 时水的饱和汽压 $P_w(120^\circ\text{C}) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa}$; 在 90°C 和 120°C 之间水的饱和汽压 P_w 和温度 $t(^\circ\text{C})$ 的函数关系 $P_w(t)$ 如图 8-14 所示.

7. 干燥的空气存放在体积 $V = 10 \text{ L}$ 的密封容器中,其压强 $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ 、温度 $t_0 = 20^\circ\text{C}$,若往容器内注入质量 $m = 3 \text{ g}$ 的水,并将它加热到温度 $t = 100^\circ\text{C}$,问加热后容器中的压强变为多少?可忽略容器的热膨胀.

8. 1 cm^3 、 50°C 的纯水在 1 atm 下加热,转变成 1671 cm^3 、 100°C 的水蒸气. 水的汽化热为 $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$, 水的比热容 $c = 4.18 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. 求 50°C 的水转变为汽后内能的改变量.

9. 有两根长度均为 50 cm 的金属丝 A 和 B 牢固地焊在一起,另两端固定在牢固的支架上(图 8-15). 其线膨胀率分别为 $\alpha_A = 1.1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, $\alpha_B = 1.9 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$; 劲度系数 $K_A = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$, $K_B = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$; 金属丝 A 受到 450 N 的拉力时就会被拉断,金属丝 B 受到 520 N 的拉力时才断. 假定支架的间距不随温度改变. 问当温度由 30°C 下降至 -20°C 时会出现什么情况?(A 、 B 丝都不断呢,还是 A 断 B 不断呢,还是 A 、 B 都断呢?) 不计金属丝的重量,在温度 30°C 时,它们被拉直但张力为零.

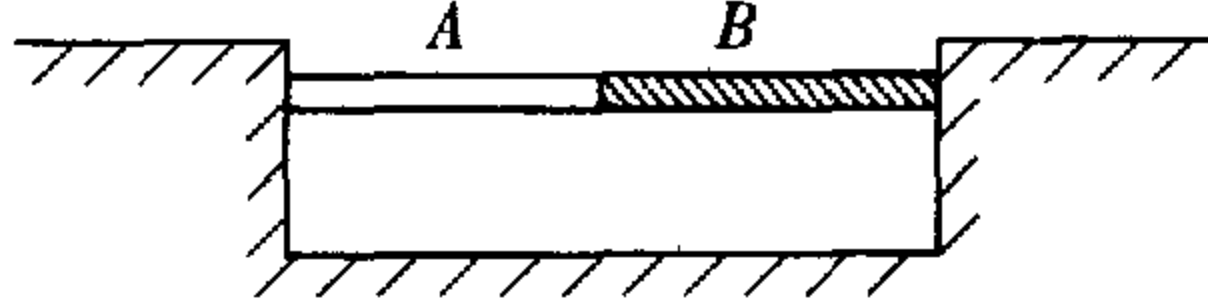


图 8-15

10. 如图 8-16 所示,装有气体的球形容器浸没在冰水混合物中. 容器上部是一个弯成直角的开口细管,其水平部分有一段水银将气体封闭在容器内. 设此时容器内气体体积 $V_0 = 2.24 \text{ L}$, 大气压强为 1 atm . 水的质量为 5 kg , 冰的质量为 0.5 kg . 问

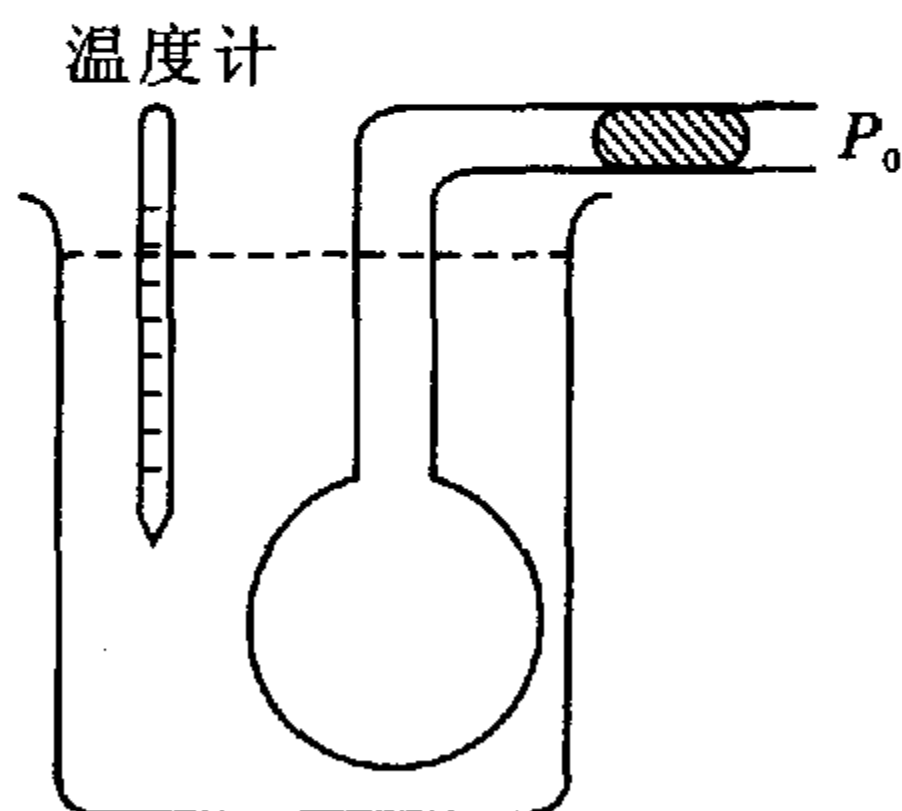


图 8-16

(1) 当通入 100°C 水蒸气 310 g 后,温度计读数是多少? 气体的状态如何?

(2) 在此过程中气体推动水银柱做功多少?

(3) 在此过程中气体吸收热量多少?

(4) 气体内能变化多少?

(水蒸气在 100°C 时汽化热为 $2.25 \times 10^6 \text{ J/kg}$, 冰的熔解热为 $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$. 在压强一定时,容器内气体温度升高 1°C , 每摩尔气体所吸收的热量为 29.3 J . 容器吸热和其他热量损失都忽略不计. 计算结果取两位有效数字.)

第九章 静电场

【学习目标】

一、库仑定律

库仑定律:真空中两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与两电荷电量的乘积成正比,与两电荷之间的距离的平方成反比;其作用力的方向沿着两电荷的连线,同号相斥,异号相吸. 即

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9-1)$$

式中 K 为比例常数,国际单位制中 $K = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. 有时我们令 $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, 那库仑定律又写为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9-2)$$

ϵ_0 称为真空介电常数, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

库仑定律是电磁学中最基本的定律之一.

使用时应注意:(1) q_1 、 q_2 是点电荷,二者为点电荷时 r 才有确定的值;(2) 两点电荷是静止的;(3) 上式只适用于真空;(4) 是一实验定律,小到原子核内,大到天体之间均适用.

二、电场 电场强度

1. 电场强度

电荷之间的相互作用是通过电场实现的. 为了从力的角度描绘电场,我们引入电场强度这个物理量.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (9-3)$$

当产生电场的电荷确定后,空间的电场就确定了,那各点的电场强度就确定了. 电场强度是矢量,它的方向即为该点正电荷受力的方向,它的大小等于单位电荷所受到的力. 当空间有两个或两个以上点电荷时,空间某点的场强等于各个点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和. 这叫做场强的叠加原理. 下面我们给出一些带电系所产生的电场强度的大小:

$$\text{点电荷} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (9-4)$$

$$\text{半径为 } R \text{ 的均匀带电球壳} \quad E = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} & (r > R) \end{cases} \quad (9-5)$$

$$\text{半径为 } R \text{ 的均匀带电球体 } E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & (r \leq R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > R) \end{cases} \quad (9-6)$$

$$\text{无限大均匀带电平面 } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9-7)$$

$$\text{均匀带正负电荷的平行板电容器 } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (9-8)$$

$$\text{无限长均匀带电直线 } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (9-9)$$

公式中的 ρ 、 σ 、 λ 分别为电荷的体密度、面密度和线密度。

平行板电容器内各点电场强度的大小和方向都相同,这样的电场称为匀强电场。

2. 电场线

为了形象地描绘电场,我们在电场中引入一系列曲线,曲线上任一点的切线方向表示该点电场强度的方向;任一点附近曲线的疏密程度表示电场强度的大小,这些曲线称为电场线. 电场线是起于正电荷、止于负电荷的不封闭曲线;电场线在无电荷处不相交、不中断。

三、电势

当我们在静电场中把点电荷 q 从 a 点移到 b 点时,静电力所做的功与重力做功相似,是只与起点与终点的位置有关,而与路径无关的,静电力是保守力,因而对应有电势能的概念. 静电力做的功等于电势能的减少,即

$$W_a - W_b = A_{ab}$$

这还只定义电势能的减少,要定义点电荷 q 在电场中某点的电势能,还有待电势能参考点的选取. 若电荷是分布在有限区域,我们一般把无限远处定为电势能的零点,若 b 点在无限远处,并规定 $W_b = 0$,那就有

$$W_a = A_{a\infty} \quad (9-10)$$

即点电荷 q 在电场 a 点所具有的电势能等于把点电荷 q 从 a 点移到无限远处时静电力做的功. 也可表述为点电荷 q 在电场 a 点所具有的电势能等于把点电荷 q 从无穷远处移到电场 a 点时外力所做的功. 外力的功转换为电荷 q 与静电场之间的相互作用能。

不能用电势能描绘电场,因它除与电场有关外,还与 q 有关,而 W_a 与 q 的比值仅与电场有关,我们称这个比值为电势. 当空间电场确定后,各点的电势也就确定了。

$$U = \frac{W}{q} \quad (9-11)$$

$$\text{点电荷电场的电势 } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (9-12)$$

对于点电荷组 $Q_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$, 空间任一点的电势 U 等于各点电荷单独存在时在该点的电势 U_i 的代数和。

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \quad (9-13)$$

电势相等的点组成的曲面称为等势面. 等势面有以下性质:(1)沿等势面移动电荷时,电场力做的功为零;(2)电场线和等势面正交,电场线指向电势降落的方向;(3)若规定相邻等势面的电势差

均相等,则等势面密集处电场强,等势面稀疏处电场弱.所以也可用等势面形象描绘电场.

匀强电场中,若沿电力线取相距 Δl 的两点,则这两点间的电势差 ΔU 与场强 E 在数值上有关系:

$$E = \frac{\Delta U}{\Delta l} \quad (9-14)$$

四、静电场中的导体和电介质

1. 静电场中的导体

导体内部有能自由移动的电荷,置于外电场时,导体内部自由电荷移动,当电荷分布、电场分布不随时间变化时,我们则称达到静电平衡.

静电平衡的条件是:导体内部场强处处为零.

导体静电平衡时:(1)导体是等势体,导体表面是等势面;(2)净电荷分布在导体表面,孤立导体表面曲率大处表面电荷面密度也大;(3)导体表面附近场强与表面垂直,其大小与导体表面对应点的

电荷面密度 σ 的关系为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. (9-15)

2. 静电场中的电介质

电介质就是绝缘体,其中没有能自由移动的电荷,无外电场时对外不显电性.当有外电场存在时,电介质分子的正负电荷都会顺着和逆着电场线发生偏移,从而使介质表面甚至内部出现电荷,这种现象称为电介质的极化,出现的电荷称为极化电荷.极化电荷也要产生电场.在介质内部,极化电荷产生的电场与外电场方向相反,从而削弱原电场,削弱的程度与电介质本身的性质有关.为描绘电介质的这一性质,引入电介质的相对介电常数 ϵ_r .设真空中电场的场强为 E_0 ,而各向同性均匀介质

充满整个电场时,其场强为 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \epsilon_r = \frac{E_0}{E}$.

点电荷 Q 在各向同性均匀无限大的电介质中

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}$$

平行板电容器充满均匀介质

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r\epsilon_0}$$

五、电容 静电场的能量

1. 孤立导体的电容

若孤立导体带有电荷 q ,其电势为 U ,则其电容为

$$C = \frac{q}{U} \quad (9-16)$$

孤立导体的电容只与导体本身的大小、形状以及周围的介质有关.真空中半径为 R 的导体球壳的电容为 $4\pi\epsilon_0 R$.

2. 电容器的电容

若电容器充有电荷 q ,两极间的电势差为 ΔU ,则其电容为

$$C = \frac{q}{\Delta U} \quad (9-17)$$

电容器的电容仅由其大小、形状以及两极板间的电介质决定.

平行板电容器的电容 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

$$(9-18)$$

球形电容器的电容 $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ (9-19)

柱形电容器的电容 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ (9-20)

(9-19)式中 R_1 和 R_2 分别为球形电容器内、外金属球壳的半径;(9-20)中的 R_1 、 R_2 和 l 分别为柱形电容器内外柱面的半径和长度.

当电容分别 C_1 、 C_2 、 C_3 、 \dots 、 C_n 的 n 个电容串联时,其等值电容 C 与各电容器的关系为

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (9-21)$$

当电容分别为 C_1 、 C_2 、 C_3 、 \dots 、 C_n 的 n 个电容并联时,其等值电容 C 与各电容器的关系为

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (9-22)$$

2. 静电场的能量

两个点电荷间的相互作用能为

$$W = q_1 U_1 = q_2 U_2 = \frac{1}{2}(q_1 U_1 + q_2 U_2) \quad (9-23)$$

其中 U_1 、 U_2 分别为电荷 q_1 、 q_2 处的电势.

n 个点电荷组成的点电荷系的相互作用能为

$$W = \frac{1}{2}(q_1 U_1 + q_2 U_2 + \dots + q_n U_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i \quad (9-24)$$

式中 U_i 为除 q_i 外其他点电荷在 i 点的电势之和. W 在数值上等于把 n 个点电荷从各自的无限远处移到给定位置时外力做的功. 对于电荷连续分布体只需将 q 改为电荷之 Δq_i , U_i 为移动 Δq_i 时带电体所具有的电势. 求和遍于整个带电体, 这就是带电体所带电形成过程中外力所需做的功, 这能量称为系统的自能.

电容器储存的能量 $W = \frac{Q^2}{2C}$ (9-25)

也可写为 $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$

从公式(9-25)可看出, 能量是与电荷 Q 联系在一起的. 在静电场里确实这样, 有电荷才能有能量. 但后面我们可看到, 无电荷但有可变化的磁场时, 也会产生电场, 电场具有能量, 电场中单位体积所具有的能量称为电场的能量密度, 用 w_e 表示,

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (9-26)$$

【解题钥匙】

例 1 如图 9-1 所示, 把半径为 R 的球体分为 8 等份, 取其中 1 份, 使之均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 试求此 1/8 带电球体在球心 O 处的电场强度的大小.

解析 先讨论半径为 r , 面密度为 σ 的半球面在球心 O 的电场强度, 由于对称性, 均匀带电球面在球心 O 的场强 \vec{E}_{O2} 必定沿 x 轴方向. 在半球面取面元 ΔS , 其上电量为 $\sigma \Delta S$, 其在 O 点产生的电场强度 $\Delta \vec{E}_{O2}$ 刚好在纸平面内, 令 $\Delta \vec{E}_{O2}$ 与 x 轴夹角为 Φ , 则

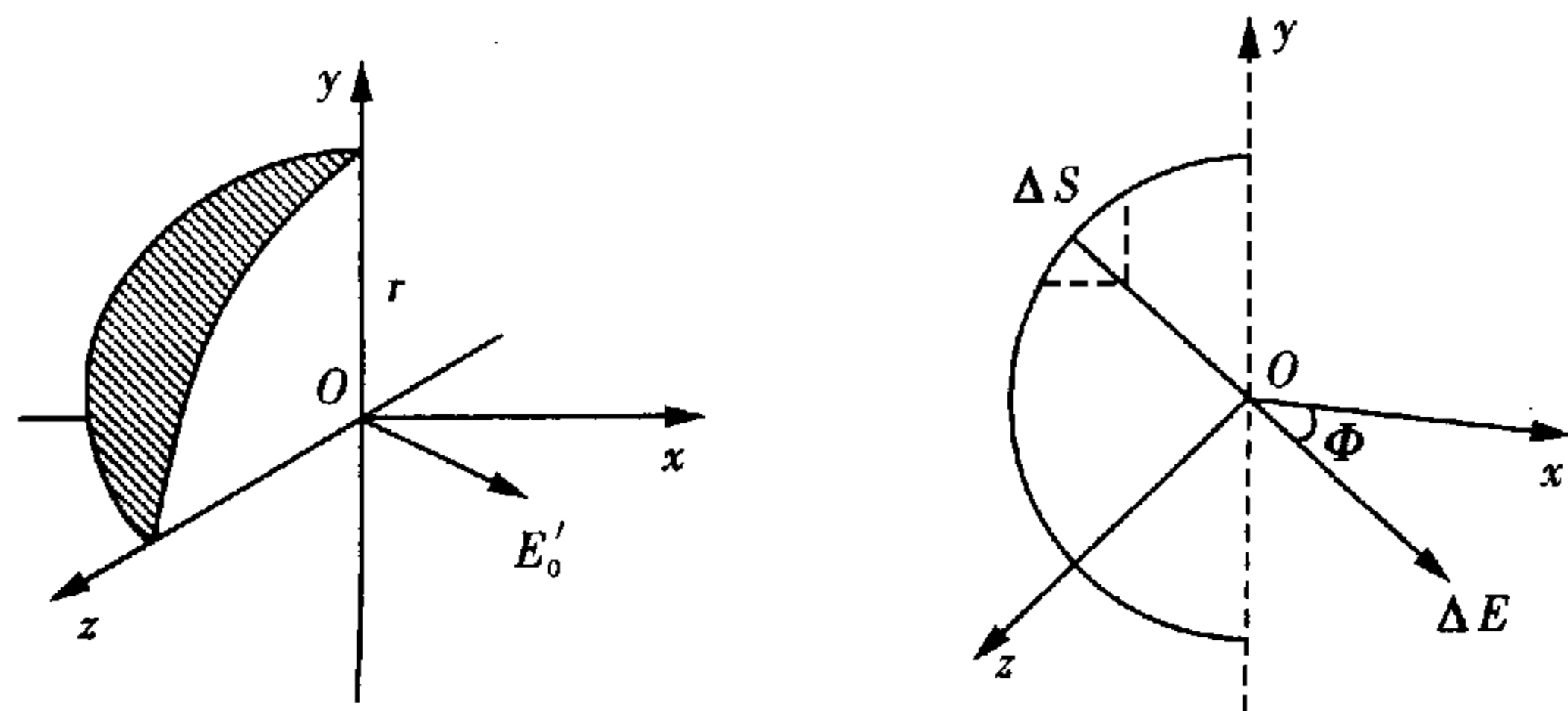


图 9-1

$$\Delta E_{02x} = \Delta E_{02x} \cos \Phi = \frac{\sigma \Delta S}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos \Phi$$

面元 ΔS 在 yOz 面上的投影 $\Delta S_{yz} = \Delta S \cos \Phi$

$$\Delta E_{02x} = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Delta S_{yz}$$

$$E_{02} = \sum \Delta E_{02x} = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sum \Delta S_{yz}$$

其中 $\sum \Delta S_{yz}$ 就是半球面在 yOz 面上的投影

$$\sum \Delta S_{yz} = \pi r^2$$

$$E_{02} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

E_{02} 与半径 r 大小无关. r 越大, 半球面上电荷距 O 点越远, 其在 O 点产生的场强与 r^2 成反比; 而 r 越大, 半球面越大, 其上所带电荷越多, 与 r^2 成正比, 故 E_{02} 与 r 无关.

半球面由四个 $1/8$ 球面组成, 每个 $1/8$ 球面在 O 点产生的场强 E_{01} 在 x 轴上分量相等, 其值为 E_{02} 的 $1/4$.

$$E_{01x} = \frac{E_{02}}{4} = \frac{\sigma}{16\epsilon_0}$$

x, y, z 三条坐标轴对 $1/8$ 球面, 地位相当, 故 $1/8$ 球面在 O 点产生的场强在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的分量应相等, 均为 $\frac{1}{16\epsilon_0}$, 这样就有

$$E_{01} = \sqrt{E_{01x}^2 + E_{01y}^2 + E_{01z}^2} = \sqrt{3E_{01x}^2} = \sqrt{3}E_{01x} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{16\epsilon_0}$$

最后, 半径为 R , 电荷体密度为 ρ 的 $1/8$ 球体可看作由一系列很薄的 $1/8$ 球面叠加而成, 设其中任一球面半径为 r , 厚度为 Δr , r 的变化范围从 0 到 R , 则面电荷密度 σ 与体电荷密度 ρ 有关系:

$$\sigma(r) = \rho \Delta r$$

那 $1/8$ 球面在球心的电场强度为

$$\Delta E_{01} = \frac{\sqrt{3}\rho}{16\epsilon_0} \Delta r$$

而 $1/8$ 球体在球心处场强为

$$E_0 = \sum \Delta E_{0i} = \sum \frac{\sqrt{3}\rho}{16\varepsilon_0} \Delta r = \frac{\sqrt{3}\rho}{16\varepsilon_0} \sum \Delta r = \frac{\sqrt{3}\rho R}{16\varepsilon_0}$$

E_0 与球半径 R 成正比.

方法与技巧 这是一道一而再,再而三用微元-叠加法求解的题目,1/8 均匀带电球体微分成一系列无限薄的 1/8 均匀带电球面;1/8 带电球面的场无法求,考虑一半带电球面在球心产生的场强;在求半球面产生的场强时再用到微元法,在面上任选一带电面元,并视为点电荷,求其在球心的场强后再叠加,电场强度是矢量,叠加时一定考虑到方向性,某些分量能抵消的,就先抵消掉以求简化.

例 2 如图 9-2 所示,一无限大接地导体平板,在平板上方 h 处有一点电荷 q ,求空间的电势分布,求导体平板上感应电荷面密度分布.

解析 导体板接地,上表面有感应电荷,设为 q' ,下表面无电荷且下半空间电势为零,设 P' 为 P 的关于平面的对称点,则 P 点、 P' 点电势应为 q 和 q' 所产生电势的和.

$$U_P = U_{qP} + U_{q'P}$$

$$U_{P'} = U_{qP'} + U_{q'P'}$$

$$\because U_{P'} = 0$$

$$\therefore U_{q'P'} = -U_{qP'}$$

$$\text{考虑到对称性 } U_{q'P} = U_{q'P'}$$

$$\text{故 } U_P = U_{qP} + U_{q'P} = U_{qP} + U_{q'P'} = U_{qP} - U_{qP'} = K \frac{q}{[x^2 + (y-h)^2 + z^2]^{1/2}} - K \frac{q}{[x^2 + (y+h)^2 + z^2]^{1/2}}$$

从结果可以看到,对板上部空间,感应电荷的作用与一置于 y 轴上 $-h$ 点,带电为 $-q$ 的点电荷完全等效,这就是所谓的电像法.

再求导体平板上感应电荷面密度分布.

在导体表面 a 点取一小面元 ΔS , a 点离 O 点距离为 r ,感应电荷面密度为 σ' . a 点紧靠导体板上方的电场强度 \vec{E} 的方向与板面垂直向下,大小为 $E = 4K\pi\sigma'$. 其 \vec{E} 应是 ΔS 面上电荷产生的场强 \vec{E}_1 和 q 在 a 点处场强 \vec{E}_2 在垂直平板方向上分量的叠加. 板上除 ΔS 面外的其他电荷在 a 点附近的场强只沿平板切向,与 \vec{E}_2 在板的切向分量相抵消.

$$E_1 = 2K\pi\sigma' \quad \text{方向垂直板面(因求紧靠板的点的场强.此时 } \Delta S \text{ 可看为无限大平面)}$$

$$E_{2n} = E_2 \cos\theta = -K \frac{q}{(r^2 + h^2)} \cdot \cos\theta = -K \frac{q}{(r^2 + h^2)} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}}$$

$$E_1 + E_{2n} = E$$

$$-K \frac{qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} + 2K\pi\sigma' = 4K\pi\sigma'$$

$$\sigma' = \frac{-qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

感应电荷面密度随 r 变化. r 变小,距 O 点近, σ' 变大. 可以计算出板上所有感应电荷的和为 $-q$.

方法与技巧 空间任一点 P 的电势是点电荷 q 和无限大接地导体上感应出来的电荷共同产生的. 导体板上电荷分布全板且不均匀,就是用积分法求其在 P 点的电势也是比较麻烦的. 我们用对

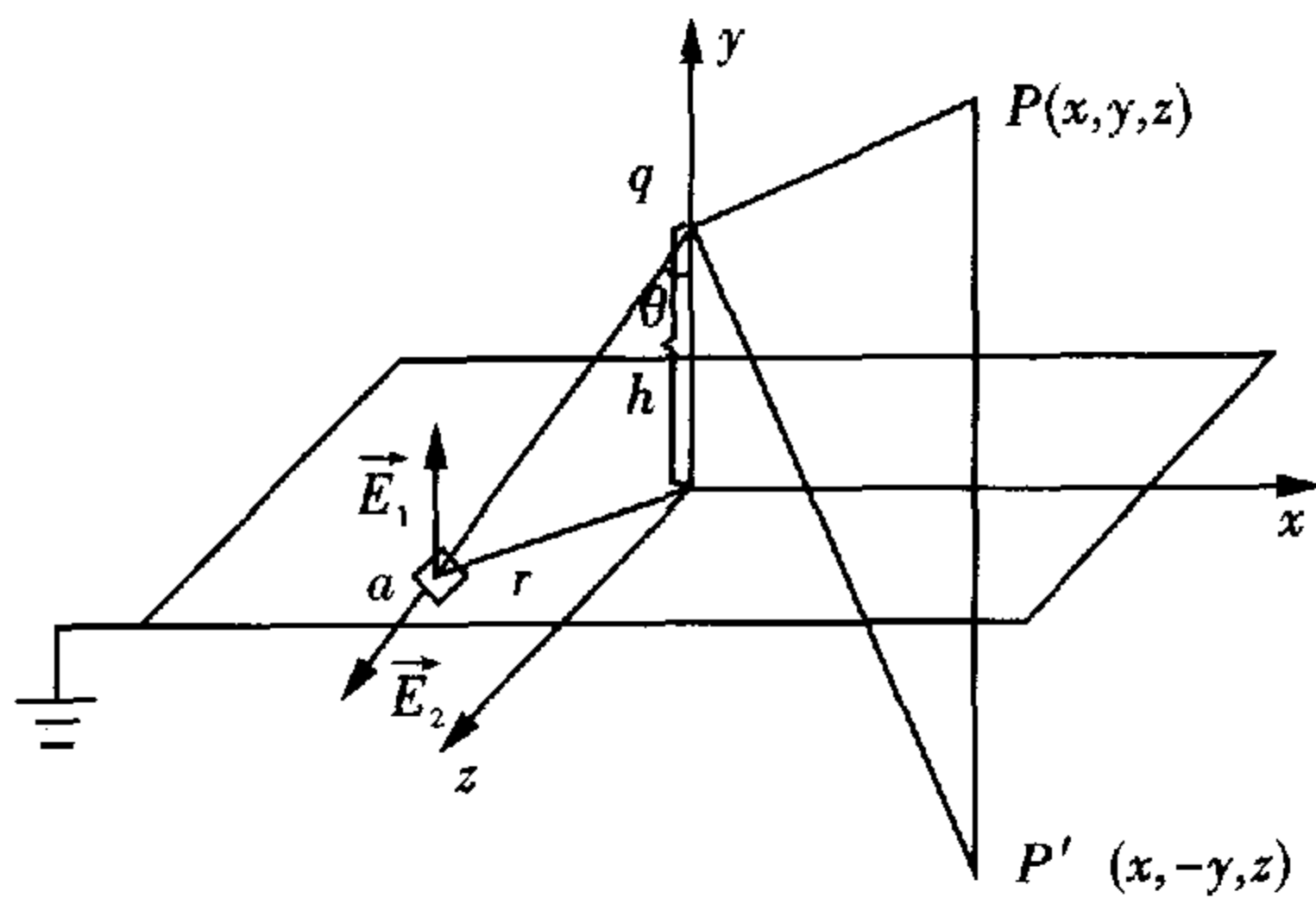


图 9-2

称法, P 点相对平面对称的 P' 点的电势也是上述两带电系统共同产生的. 且为零. 平面上电荷在 P' 点产生的电势与 q 在 P' 点产生的电势大小相等而符号相反, 这样求出平面上电荷在 P' 点产生的电势, 而 P 与 P' 点相对平面对称, 平面上电荷在 P 点产生的电势与在 P' 点产生电势相等, 从而使问题解决.

求电荷在平面上的分布时, 先求出各带电系统在平板外附近一点的场强, 而静电平衡后板外附近一点场强与板平面垂直, 并等于 $4K\pi\sigma'$, 列出等式很容易求出 σ' 来.

对称法是我们解题常用到的一种方法, 笔者曾统计第一届到第二十一届全国物理竞赛的决赛题共有 135 题, 其中电学题 41 道, 而解题涉及对称法的就有 13 道, 几乎占 1/3, 熟练掌握这方法是有益的.

例 3 如图 9-3(a) 所示, 有两个部分重叠的球体, 半径分别为 R_1 和 R_2 , 两球球心距离 $O_1O_2 = d$, $d < R_1 + R_2$, 两球重叠部分不带电, 不重叠部分均匀带电, 电荷体密度分别为 $+\rho$ 和 $-\rho$. 求两球重叠部分(即不带电部分)中的电场强度分布.

解析 如图 9-3(b) 所示, 在两球重叠部分中任取一点 P , 画出矢量 $\vec{O_1O_2} = \vec{d}$, $\vec{O_1P} = \vec{r_1}$, $\vec{O_2P} = \vec{r_2}$, 并假设重叠部分不带电的空间中, 同时带有电荷体密度 $+\rho$ 和 $-\rho$ (与不带电等效). 由此, P 点所在位置可以被认为同时在均匀带电 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的两个球体内. 直接写出 P 点电场强度的矢量表达式:

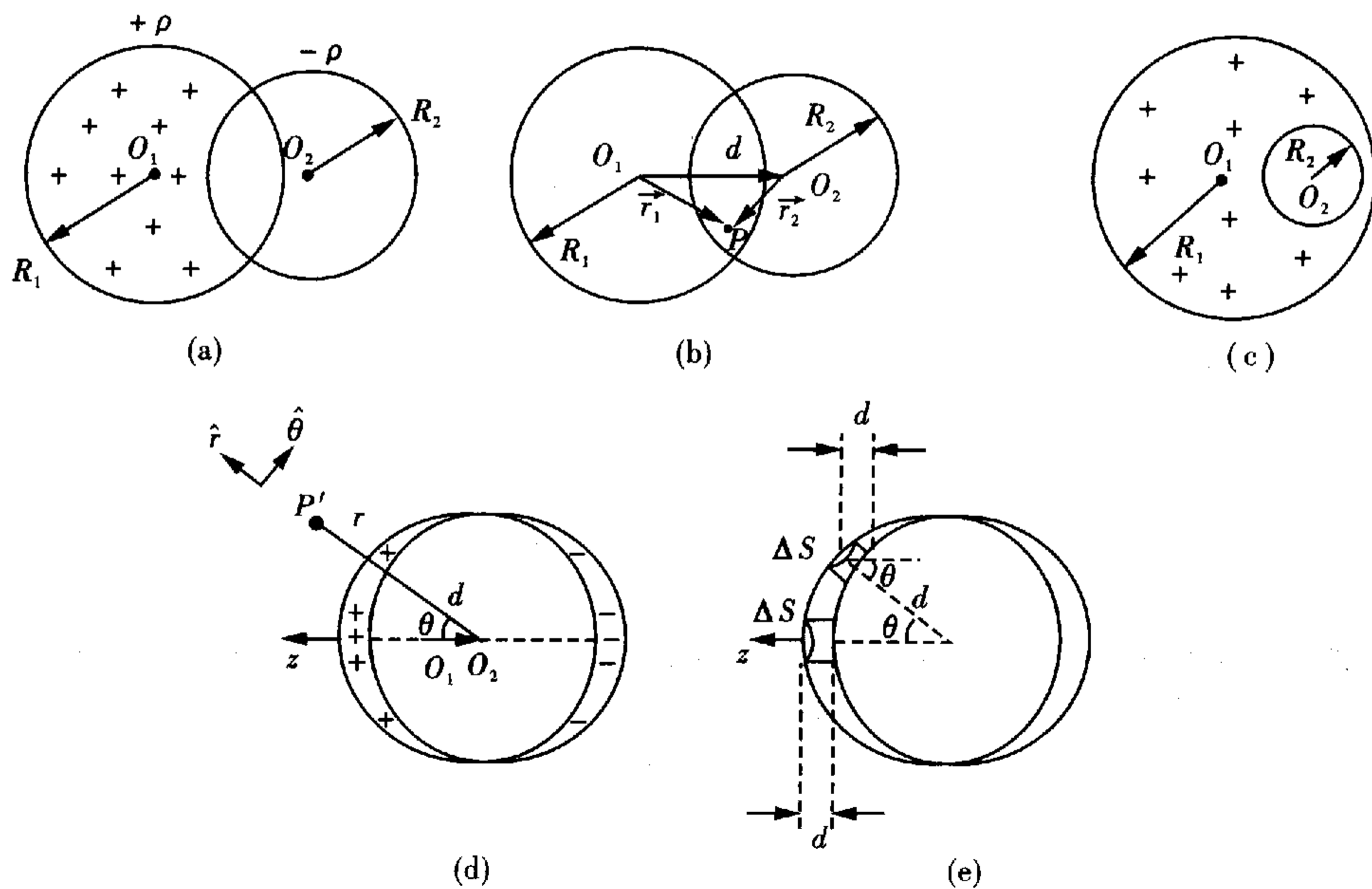


图 9-3

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_+(P) + \vec{E}_-(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_+}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_-}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

其中

$$Q_+ = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho, \quad Q_- = -\frac{4}{3}\pi r_2^3 \rho$$

代入得

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho d}{3\epsilon_0} \quad ①$$

方法与技巧 解题过程中首先用到填补法. 两球重叠部分本是无电荷, 但可认为其间充满电荷密度为 $\pm\rho$ 的电荷, 这样两个球均成为均匀带电球体, 而对于均匀带电球体, 我们是能熟练求出球内外的场强的, 解此题用到的第二个方法是矢量法, 在重叠区域任一点场强是两带电球在此点的场强的叠加, 一系列矢量的运算, 简洁明了地得到了解.

对这个题目, 我们还可进一步讨论.

讨论:

(i) 上述结论说明在两球重叠不带电区域中的电场是一个匀强电场(因 P 点是区域内任意一点), 其场强仅与电荷体密度大小以及两球心间距离有关, 与两球半径是否相等无关.

(ii) 当 $R_1 \neq R_2$ 时, 若在 d 满足 $d < R_1 + R_2$ 的条件下, d 又满足 $d < R_1 - R_2$, 此时半径为 R_2 的小球将处在半径为 R_1 的大球内, 如图 9-3(c) 所示. 根据本题结论, 小球内将是一个匀强电场, 其数值就是

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} O_1 O_2 \quad ②$$

(iii) 当 $R_1 = R_2, d \neq 0$ 时, 两个大小相同的球体部分重叠. 若 d 很小, 且满足 $d \ll R$, 除了重叠不带电区域内的匀强电场由题中结论给出外, 还可以给出球外空间中的电场强度分布.

此时两球所带电量相等, $q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$, 符号相反, 且相隔很近 $d \ll R$, 求两球外空间 $r > R \gg d$ 处场强时, 两球体可视为在球心处的两点电荷, 而这两点电荷恰好形成一电偶极子, 其电偶极矩大小 $P = qd$, 当如图 9-3(d) 所示, 求相对偶极子位置矢量 \vec{r} 处的电场强度, 我们可直接利用偶极子的场强公式而得到

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql\cos\theta}{r^3} = \frac{2\rho d}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos\theta \quad ③$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\sin\theta}{r^3} = \frac{\rho d}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin\theta \quad ④$$

(iv) 在 (iii) 中, 即 $R_1 = R_2 = R, d \ll R$, 电荷体密度为 $\pm\rho$ 的情况, 在宏观上似乎两球接近重合, 成为一个球体, 此球体似乎仅仅在表面带有电荷. 因此, 在这种情况下我们常常认为它是一个带有面电荷分布的球体. 下面推导电荷面密度的分布.

z 轴与 (iii) 中取法相同. 见图 9-3(e). 在 $\theta = 0$ 的表面上, 单位面积带电量(即 $\theta = 0$ 处的电荷面密度)为

$$\sigma_0 = \rho \cdot d \quad ⑤$$

在任意 θ 位置的表面上, 单位面积带电量为

$$\sigma(\theta) = \rho \cdot d\cos\theta$$

得到

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta \quad ⑥$$

这就是球面上电荷面密度的分布. 很容易得出, $\sigma(\pi/2) = 0, \sigma(\pi) = -\sigma_0$.

利用式⑤, 可把式①中电场强度大小写为

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \quad ⑦$$

(v)接(iv),整个面电荷分布中,一部分为正电荷,另一部分为负电荷.正电荷部分的总电量为 $Q_+ = \rho \cdot \pi R^2 d = \pi R^2 \sigma_0$

对题目结果的讨论与延伸是竞赛题的特点,搞好这方面的训练是必要的.

例4 如图9-4所示,接地的空心导体球壳内半径为 R ,在空腔内一直径上的 P_1 和 P_2 处,放置电量分别为 q_1 和 q_2 的点电荷, $q_1 = q_2 = q$,两点电荷到球心的距离均为 a .由静电感应与静电屏蔽可知:导体空腔内表面将出现感应电荷分布,感应电荷电量等于 $-2q$.空腔内部的电场是由 q_1 、 q_2 和两者在空腔内表面上的感应电荷共同产生的.由于我们尚不知道这些感应电荷是怎样分布的,所以很难用场强叠加原理直接求得腔内的电势或场强.但理论上可以证明,感应电荷对腔内电场的贡献,可用假想的位于腔外的(等效)点电荷来代替[在本题中假想(等效)点电荷应为两个],只要假想(等效)的点电荷的位置和电量能满足这样的条件,即:设想将整个导体壳去掉,由 q_1 在原空腔内表面的感应电荷的假想(等效)点电荷 q'_1 与 q_1 共同产生的电场,在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为0;由 q_2 在原空腔内表面的感应电荷的假想(等效)点电荷 q'_2 与 q_2 共同产生的电场,在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为0.这样确定的假想电荷叫做感应电荷的等效电荷,而且这样确定的等效电荷是惟一的.等效电荷取代感应电荷后,可用等效电荷 q'_1 、 q'_2 和 q_1 、 q_2 来计算原来导体存在时空腔内部任意点的电势或场强.

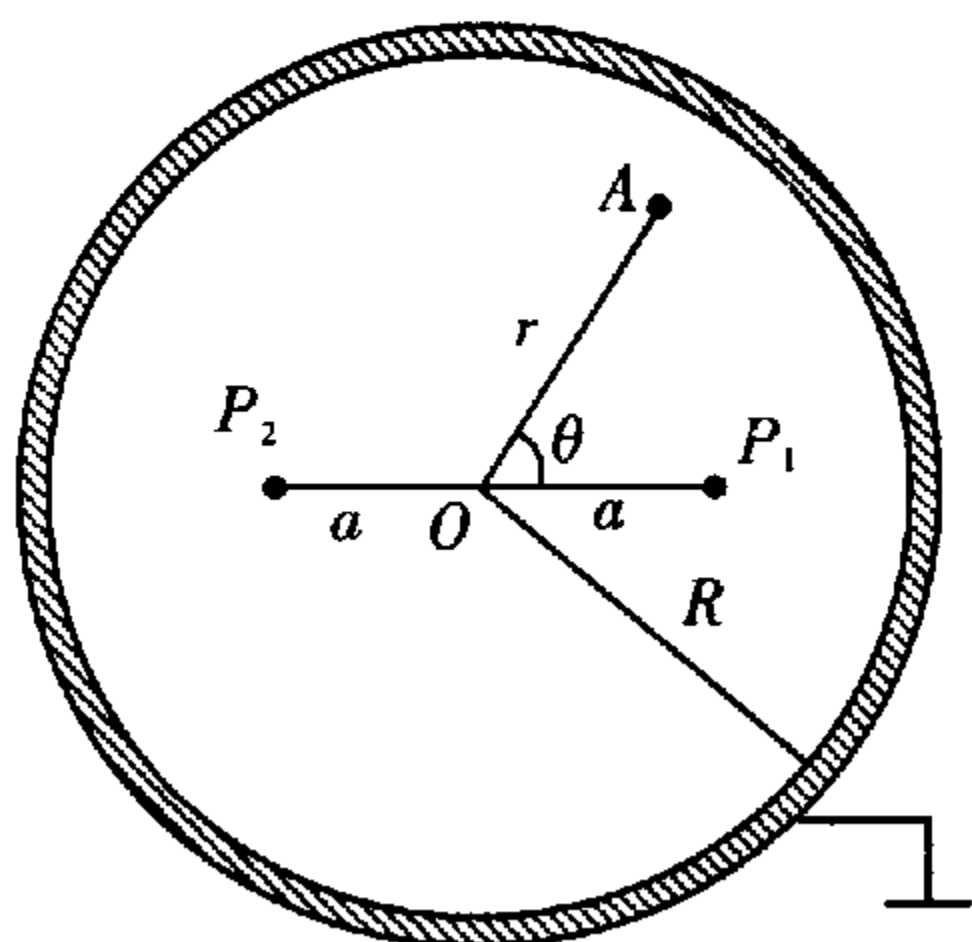


图9-4

(1) 试根据上述条件,确定假想等效电荷 q'_1 、 q'_2 的位置及电量.

(2) 求空腔内部任意点 A 的电势 U_A . 已知 A 点到球心 O 的距离为 r , OA 与 OP_1 的夹角为 θ .

解析 (1) 如图9-5所示, S 为原空腔内表面所在位置, q'_1 的位置应位于 OP_1 的延长线上的某点 B_1 处, q'_2 的位置应位于 OP_2 的延长线上的某点 B_2 处. 设 A_1 为 S 面上的任意一点, 根据题意有

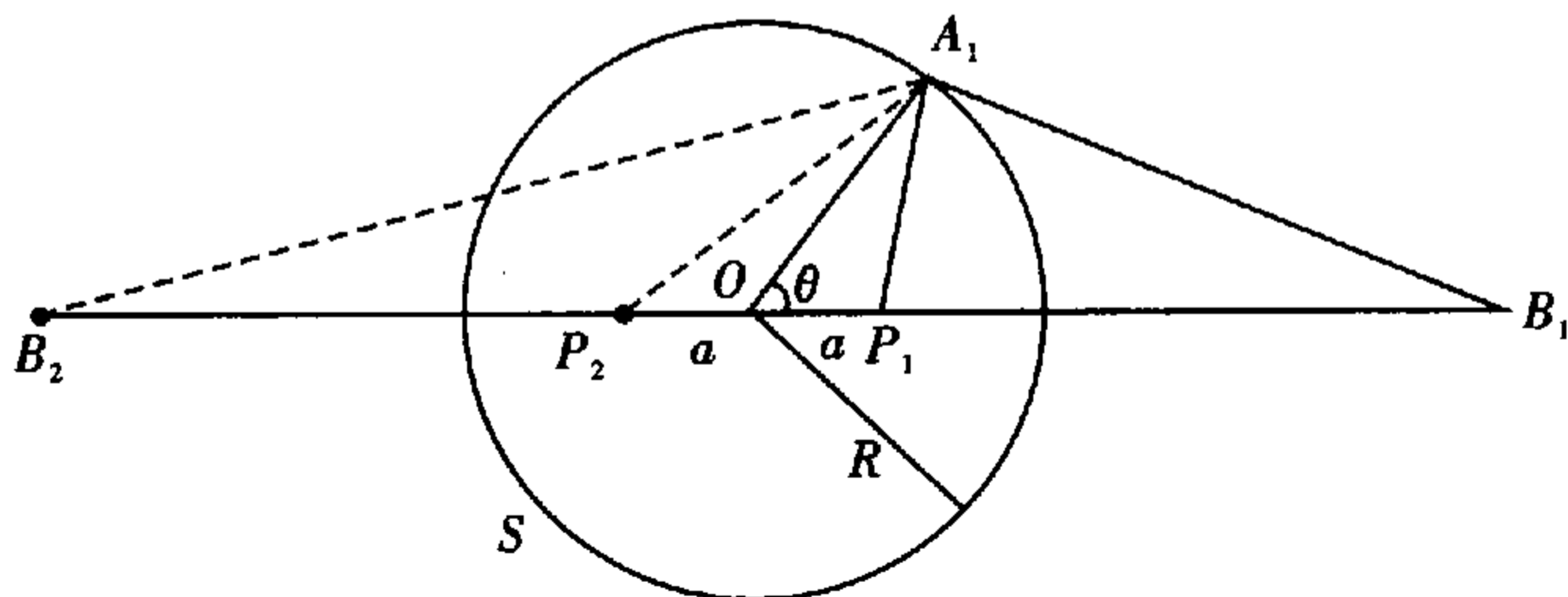


图9-5

$$k \frac{q_1}{A_1 P_1} + k \frac{q'_1}{A_1 B_1} = 0 \tag{1}$$

$$k \frac{q_2}{A_1 P_2} + k \frac{q'_2}{A_1 B_2} = 0 \tag{2}$$

怎样才能使①式成立呢? 下面分析图9-5中 $\triangle OP_1 A_1$ 与 $\triangle OA_1 B_1$ 的关系.

若等效电荷 q'_1 的位置 B_1 使下式成立, 即

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OB_1} = R^2 \tag{3}$$

即 $\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}$ ④

则 $\triangle OP_1A_1 \sim \triangle OA_1B_1$

有 $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{a}{R}$ ⑤

由①式和⑤式便可求得等效电荷 q'_1 :

$$q'_1 = -\frac{R}{a}q_1$$
 ⑥

由③式知,等效电荷 q'_1 的位置 B_1 到原球壳中心位置 O 的距离为

$$\overline{OB_1} = \frac{R^2}{a}$$
 ⑦

同理, B_2 的位置应使 $\triangle OP_2A_1 \sim \triangle OA_1B_2$, 用类似的方法可求得等效电荷

$$q'_2 = -\frac{R}{a}q_2$$
 ⑧

等效电荷 q'_2 的位置 B_2 到原球壳中心 O 位置的距离为

$$\overline{OB_2} = \frac{R^2}{a}$$
 ⑨

(2) A 点的位置如图 9-6 所示. A 的电势由 q_1, q'_1, q_2, q'_2 共同产生, 即

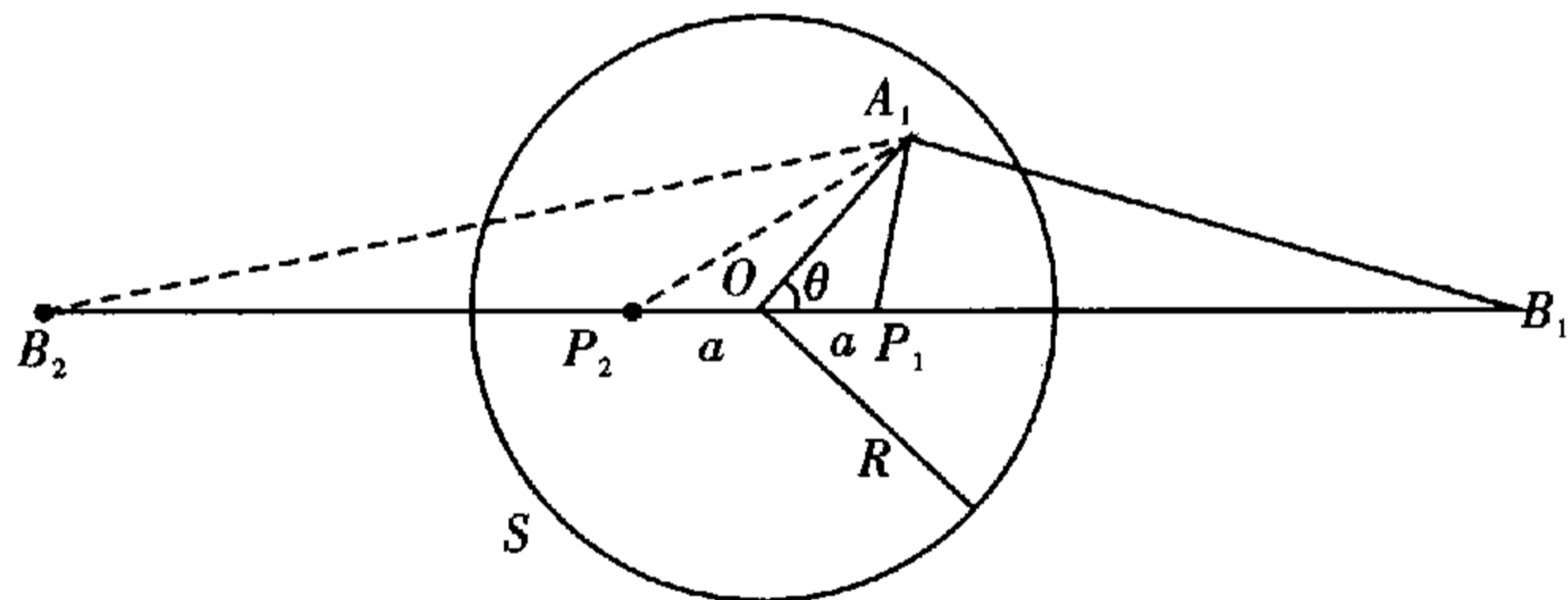


图 9-6

$$U_A = kq \left(\frac{1}{P_1A} - \frac{R}{a} \frac{1}{B_1A} + \frac{1}{P_2A} - \frac{R}{a} \frac{1}{B_2A} \right)$$
 ⑩

因

$$\overline{P_1A} = \sqrt{r^2 - 2racos\theta + a^2}$$

$$\overline{B_1A} = \sqrt{r^2 - 2r\left(\frac{R^2}{a}\right)cos\theta + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2}$$

$$\overline{P_2A} = \sqrt{r^2 + 2racos\theta + a^2}$$

$$\overline{B_2A} = \sqrt{r^2 + 2r\left(\frac{R^2}{a}\right)cos\theta + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2}$$

代入⑩式得

$$U_A = kq \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2racos\theta + a^2}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2 - 2raR^2cos\theta + R^4}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2racos\theta + a^2}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2 + 2raR^2cos\theta + R^4}} \right)$$
 ⑪

方法与技巧 点电荷置于接地导体球壳之内,在球壳内壁会感应出电荷,这时求壳内电势的关键是找到感应电荷的等效电荷即像电荷.求球壳内电势,像电荷一定在壳外,公式⑥⑦给出了电荷的大小和位置.

$$q' = -\frac{R}{a}q \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

a' 为像电荷 q' 到球心的距离.

为了对比,我们看一下点电荷 q 在半径为 R 的接地导体球壳外, q 与球心距离为 a 时壳外电势的分布.如图 9-7 所示,这时的像电荷在壳内,通过上面类似的推导,我们可得到像电荷的大小与位置.

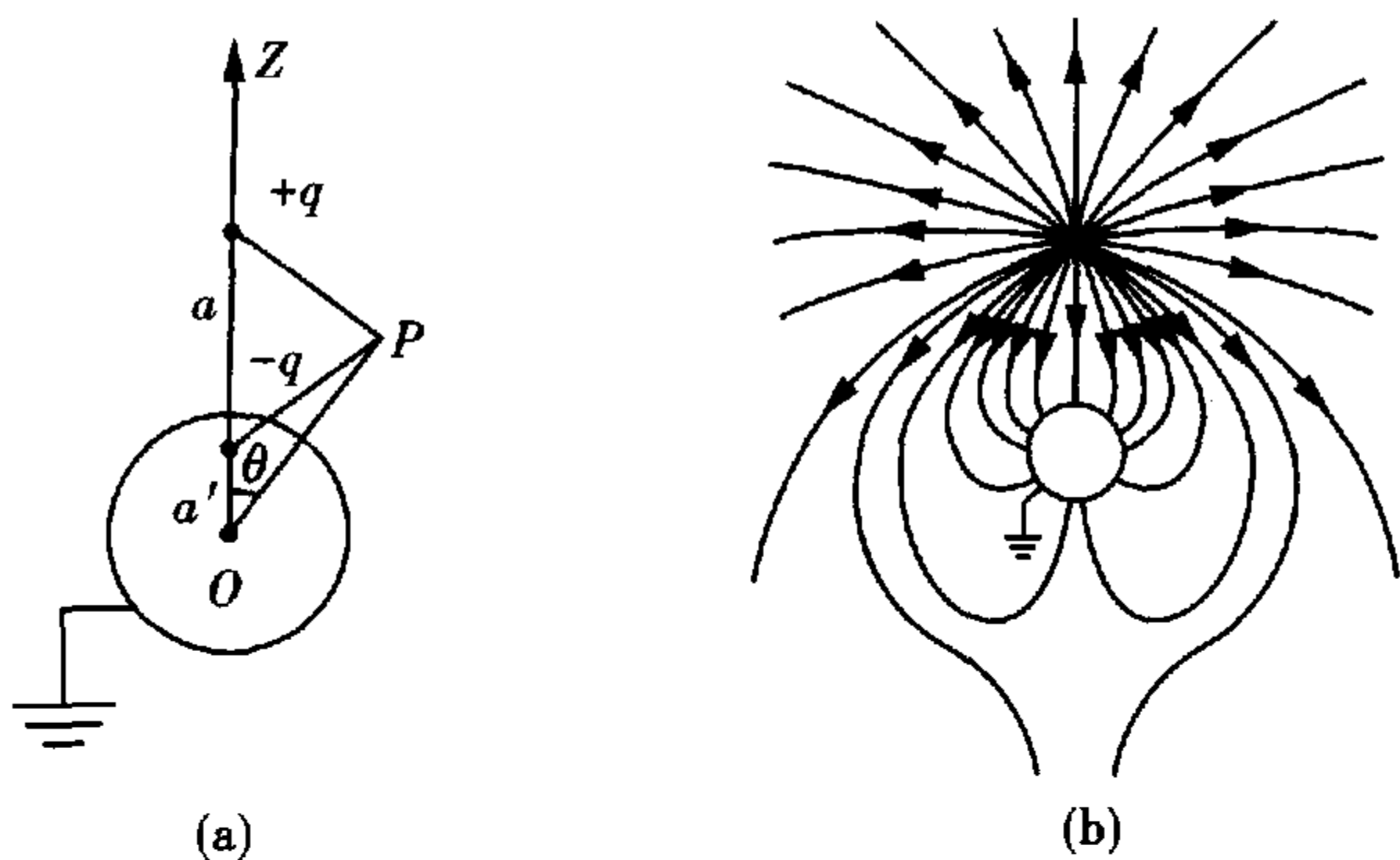


图 9-7

$$q' = -\frac{R}{a}q \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

公式与⑥、⑦式形式上一样,若导体不接地,那内壁感应的电荷仍可由置于壳内 a' 处的像电荷 q' 代替,而外壁的电荷应均匀分布,其量大小也为 q' ,其像位置应在球心,如图 9-8 所示,这时壳外电势应为

$$U = K\left(\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} + \frac{q'}{r_0}\right)$$

我们把这个问题扩展一下,把 q 逐渐移到无限远,即 $a \rightarrow \infty$,但同时增大 q 而使 q 在球心产生的场强保持不变, $E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$,这时 $-q'$ 无限趋于球心,与球心的像电荷 q' 形成一电偶极子,其电偶极矩大小为

$$P = q'a' = \frac{R}{a}q \frac{R^2}{a} = \frac{R^3}{a^2}q = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

考虑方向 $\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$

无限远的一个带无限多电量的点电荷在导体球附近产生的电场 \vec{E}_0 可看作是均匀场.一个绝缘的导体球在匀强电场 \vec{E}_0 中感应后,对球外空间的作用相当于一个位置在球心、偶极矩为 $4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ 的电偶极子.球外的电场应是 \vec{E}_0 和偶极子的场的叠加.现在的讨论已与例 3 讨论中的 (iii)

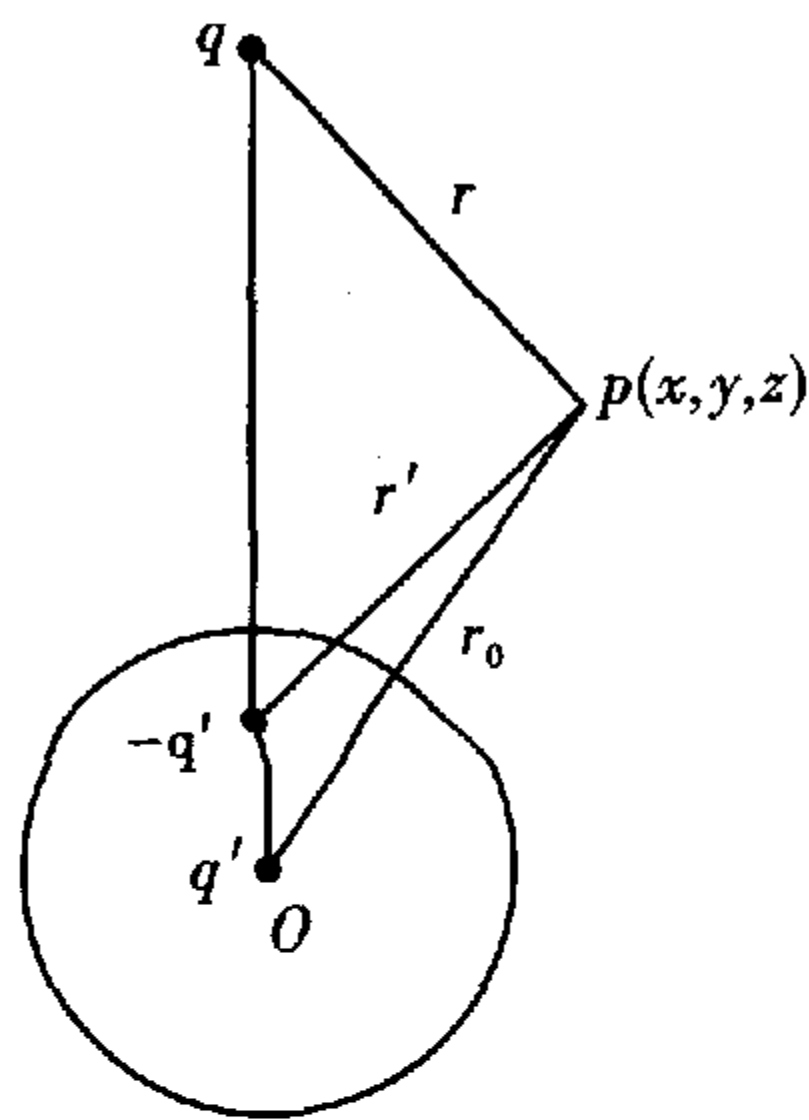


图 9-8

相似. 与例3中(iv)比较, 我们现可求导体球表面电荷的分布, 例3中⑥式

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta = \rho d \cos\theta$$

例3中偶极子的偶极矩为

$$P = qd = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho d$$

令与我们这里的偶极矩相等

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho d = 4 \pi \epsilon_0 R^3 E_0$$

$$\rho d = 3 \epsilon_0 E_0$$

$$\sigma(\theta) = \rho d \cos\theta = 3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

这样我们就得到绝缘导体球在均匀电场中感应后的表面电荷分布. 许多竞赛书上都有这么一道题, 一般采用把导体球壳移动一点的方法, 今天我们又介绍了另一方法.

例5 已知真空中电场的能量密度为 $\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, 试求: (1) 均匀带电球面(电量为 $Q > 0$, 半径为 R) 上电场强度 E_R . (2) 带电球面上的表面张力系数.

解析 (1) 球面内 $E = 0$, 而球面外球面附近 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

根据对称性 E_R 应沿径向向外, 设带电球面缓慢地向外膨胀, 半径由 R 变为 $(R + \Delta R)$, 则电场力对单位球面积的功为 $E_R \sigma \Delta R$, 对整个球面的功:

$$\Delta A = E_R \cdot \sigma \cdot \Delta R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi E_R \sigma R^2 \Delta R$$

球面膨胀后, R 内和 $(R + \Delta R)$ 外电场及能量未变, 而 $R \rightarrow (R + \Delta R)$ 的薄球壳内的电场能发生变化:

$$\Delta W = 0 - \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi R^2 \Delta R = -\frac{2\pi R^2 \sigma^2}{\epsilon_0} \Delta R$$

而电场力的功等于电势能改变加一负号

$$4\pi E_R \sigma R^2 \Delta R = \frac{2\pi R^2 \sigma^2}{\epsilon_0} \Delta R$$

$$E_R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

(2) 电场力做功导致电势能减小, 电势能转化为球面因膨胀而增加的表面自由能.

球面膨胀后增加的表面积在考虑 $(\Delta R)^2$ 可忽略后得

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R \Delta R$$

$$\frac{2\pi R^2 \sigma^2}{\epsilon_0} \Delta R = 8\pi R \Delta R \alpha$$

$$\alpha = \frac{R\sigma^2}{4\epsilon_0} = \frac{Q^2}{64\pi^2 \epsilon_0 R^3}$$

方法与技巧 解这个题目两次运用“虚位移”法. 第一问假设导体球壳在电场力作用下向外膨胀, 电场力做功, 而电场力做的功等于电场能的减小, 从而列出等式解出壳面上的电场强度. 第二问同样是假设导体球壳膨胀, 电势能转化为球壳的表面自由能, 从而解出表面张力系数. 有一些物体本处于平衡状态, 但受到保守力或保守力的矩的作用, 我们假设物体发生“虚位移”或“虚转动”, 从而

导致系统的势能发生改变,利用保守力的功与势能改变的关系,解出保守力或保守力对应的力矩.这种方法称为“虚位移”法.

例6 有100块平行放置的正方形大导体板,每块边长均为 L ,相邻两板彼此相对的两个表面的间距为 $d, d \ll L$,将这些导体从左至右顺次编号为 $1, 2, \dots, 100$.开始每板上都带有净电荷,已知第1块板上的净电量为 q_1 (设 $q_1 > 0$),第 n 块板上的净电量为 $q_n = nq_1$,今将第1块和第100块导体板接地,如图9-9所示.忽略边缘效应.问:

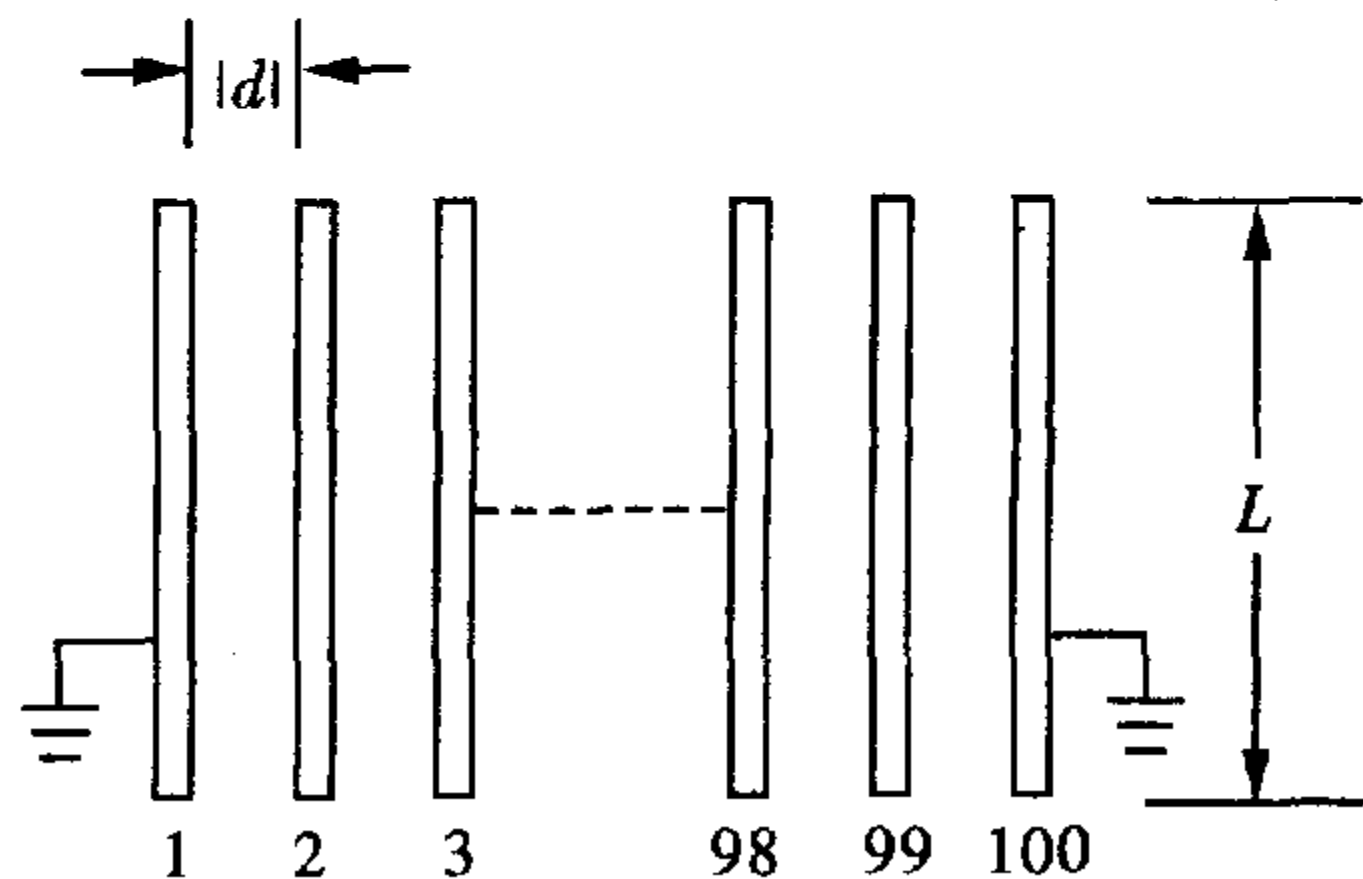


图9-9

(1)从第1块和第100块导体板上流入大地的电量 Δq_1 和 Δq_{100} 各为 q_1 的多少倍?

(2)上述两板接地后哪块板上的电势最高?其电势是多少?

解 (1)左右两端导体板接地时,各导体板上的电荷分布均发生改变,达到静电平衡后,第1块板左侧面上的电量 $Q_{1左} = 0$,第100块板右侧面上的电量 $Q_{100右} = 0$,其余各板上的电荷分布应满足以下几点:(1)忽略边缘效应,导体板的电荷全部分布在板两侧表面上;(2)相邻两板相对侧面的电量大小相等,符号相反,二者形成一个带电的电容器;(3)由于电荷守恒,第 n 块板($2 \leq n \leq 99$)两侧面上电量的代数和 $Q_{n左} + Q_{n右} = q_n$.

设左右两端导体板接地后,第1块板右侧面上的电量 $Q_{1右} = -Q_0$,依据上述电荷分布规律,可依次推出各导体板上的电量如下:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1左} &= 0 & Q_{1右} &= -Q_0 \\ Q_{2左} &= Q_0 & Q_{2右} &= -Q_0 + q_2 \\ Q_{3左} &= Q_0 - q_2 & Q_{3右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ Q_{n左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{n-1} & Q_{n右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \\ &\vdots & &\vdots \\ Q_{99左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{98} & Q_{99右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \dots + q_{99} \\ Q_{100左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{99} & Q_{100右} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{①}$$

相邻两板相对侧面间的电容值均相等,为

$$C = \frac{L^2}{4\pi Kd} \quad \text{②}$$

取地为零电势点,各板上的电势从左至右顺次记作 U_1, U_2, \dots, U_{100} ,则 $U_1 = U_{100} = 0$,相邻两板的电势差可表示为

$$\left. \begin{aligned} U_2 - U_1 &= Q_{2左}/C \\ U_3 - U_2 &= Q_{3左}/C \\ \dots\dots \\ U_n - U_{n-1} &= Q_{n左}/C \end{aligned} \right\} \text{③}$$

把各式左右两边分别相加,得

$$U_n = \frac{1}{C}(Q_{2左} + Q_{3左} + \cdots + Q_{n左}) \quad (2 \leq n \leq 100) \quad ④$$

将①中的结果及 $q_n = nq_1$ 代入④, 可得

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2)q_2 - (n-3)q_3 - \cdots - [n - (n-1)]q_{n-1} \} \\ &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2) \cdot 2q_1 - (n-3) \cdot 3q_1 - \cdots - [n - (n-1)] \cdot (n-1)q_1 \} \\ &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - n[2+3+\cdots+(n-1)]q_1 + [2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]q_1 \} \\ &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - [\frac{n(n+1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 1]q_1 \} \end{aligned} \quad ⑤$$

以上最后一步应用了求和公式

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

由于 $U_{100} = 0$, 代入⑤, 得

$$99Q_0 - [\frac{100 \times 101 \times 98}{2} - \frac{99 \times 100 \times 199}{6} + 1]q_1 = 0$$

解得 $Q_0 = 1682 \frac{1}{3}q_1$

第 1 块板流入大地的电量为

$$\Delta q_1 = q_1 - (Q_{1左} + Q_{1右}) = q_1 + Q_0 = 1683 \frac{1}{3}q_1$$

第 100 块板流入的电量为

$$\begin{aligned} \Delta q_{100} &= q_{100} - (Q_{100左} + Q_{100右}) = q_{100} - (Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{99}) \\ &= (2+3+\cdots+100)q_1 - 1682 \frac{1}{3}q_1 = 3366 \frac{2}{3}q_1 \end{aligned}$$

(2) 设第 n 块板上的电势最高, 则该板两侧面上电量必须满足

$$Q_{n左} > 0 \quad Q_{n右} > 0$$

$$\text{即} \begin{cases} Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{n-1} > 0 \\ -Q_0 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n > 0 \end{cases}$$

$$\text{亦即} \begin{cases} 1682 \frac{1}{3}q_1 - \frac{(n+1)(n-2)}{2}q_1 > 0 \\ -1682 \frac{1}{3}q_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}q_1 > 0 \end{cases}$$

解此不等式组, 得

$$57.5 < n < 58.5$$

故 $n = 58$, 即第 58 块板上电势最高, 代入电势 U_n 式:

$$U_{58} = \frac{4\pi Kd}{L^2} [57Q_0 - (\frac{58 \times 59 \times 56}{2} - \frac{57 \times 58 \times 115}{6} + 1)q_1]$$

$$= 63441 \frac{4\pi Kdq_1}{L^2}$$

方法与技巧 数学中求解数列有关问题时常用到数学归纳法. 其步骤为先证 $n=1$ 时公式成立, 再设 $n=k$ 时成立, 从而证出 $n=k+1$ 时公式成立, 这个方法是严谨的, 而我们有时在解物理有关问题时, 就根据数列前几项形式, 再推断出一般规律. 有时, 题目中就只涉及到有限项(虽然项数可能较大), 可总结出数列变化的规律. 与数学归纳法相对应, 我们称这种方法为不完全归纳法. 竞赛题有许多类似的题, 是对学生归纳与总结能力的考验.

【解题尝试】

1. 如图 9-10 所示, 有一无限薄绝缘球壳, 球壳均匀带电, 电荷面密度 σ 为常量. 设在球壳内任意位置(非球心) P 处有一点电荷, 电量为 q_0 . 如果两点电荷之间的电场力 F 与距离 r 的 n 次方成反比, 即

$$F \propto \frac{1}{r^n}$$

令 $n = 2 + \delta$, 试证明:

若 $\delta = 0$, 则此均匀带电球壳对点电荷 q 的作用力为零; 若 $\delta \neq 0$, 则此均匀带电球壳对点电荷 q 的作用力不为零.

2. (1) 电荷不能自由移动的半圆环, 半径为 R_1 , 均匀带电, 带电量为 Q_1 . 圆心处有一点电荷, 带电量为 q_1 . 试计算半圆环受到圆心处电荷 q_1 的作用力.
 (2) 电荷不能自由移动的半球面, 半径为 R_2 , 均匀带电, 带电量为 Q_2 . 球心处有一点电荷, 带电量为 q_2 . 试计算半球面受到球心处电荷 q_2 的作用力.
3. (1) 一个电荷不能自由移动的均匀带电球体, 质量均匀分布, 半径为 R , 电荷体密度为 ρ_0 , 质量体密度为 ρ_m . 设其中一条直径上有一光滑小通道. 另有一质量为 m 、带电量为 $-q$ 的带电质点, 在小通道内作无摩擦往复运动, 求此带电质点运动的周期. (设 $\rho_0 > 0, q > 0$)
 (2) 一个电荷不能自由移动的带电薄圆盘, 半径为 R , 总电荷量 $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$, 总质量 $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m$, 其中 ρ_e 和 ρ_m 与(1)中相同. 设其中一条直径上有一光滑小通道. 另有一与(1)中相同的带电质点, 质量为 m , 带电量为 $-q$, 在小通道内作无摩擦往复运动. 为使此质点在小通道中作简谐振动, 求圆盘上电量和质量的分布, 并写出带电质点在通道内的运动周期.
4. 一个半径为 R 的金属球, 沿着一个平面被切成两部分, 这个平面距离球中心的最小距离是 h , 金属球均匀带电, 总带电量为 Q . 问需要多大的力才能把球的这两部分合在一起?
5. 一个带正电的质量为 m 的小球, 被一根绝缘线悬起, 线的质量可以忽略不计. 另一个带正电的小球从距离很远的地方缓慢地运动, 直到它到达第一个小球初始的位置. 结果第一个小球相对于原来的位置升高了 h . 这个过程中电场力做了多少功? (如图 9-11 所示)
6. 电荷均匀地分布在一根细长的绝缘棒 AB 上. 请说明在任一点 C 上(如图 9-12 所示), 由棒产生的电场方向指向沿角 ACB 的角平分线方向. 利用这一结论, 确定垂直于这个长的带电棒且包含它的一个端点的平面上的电场的大小和方向.

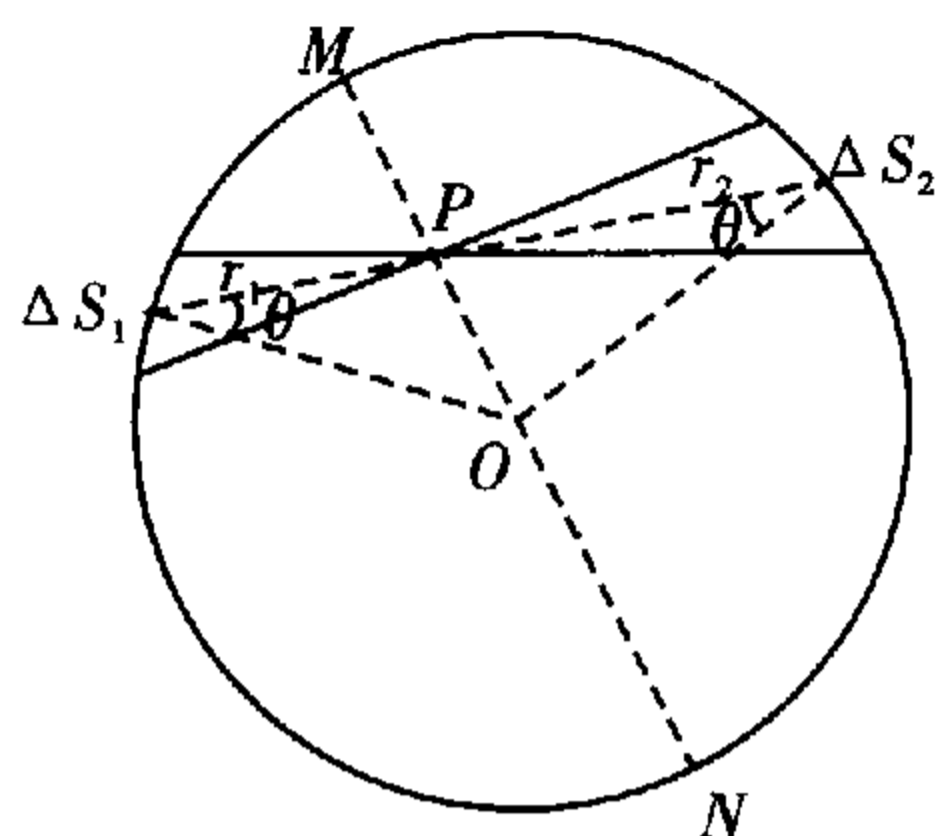


图 9-10

7. 当一个球形电容器的表面如图 9-13 所示凹进去, 以致它的体积减少了 3% 时, 它的电容量将变化多少个百分点?
8. 相对介电系数为 ϵ_r 的绝缘层慢慢地滑过平行板电容器的两个极板中间, 并完全充满两个极板间的空间. 如果电容器的 (i) 电量, 或 (ii) 电压在整个过程中保持不变, 问有多大的力作用在绝缘层上?
在情况 (i) 和 (ii) 中, 绝缘层是如何影响电容的能量的?
9. 设球形电容器内充满介电常数为 $\epsilon = kr$ 的电介质, 球层半径为 R_1 和 R_2 , 求其电容.

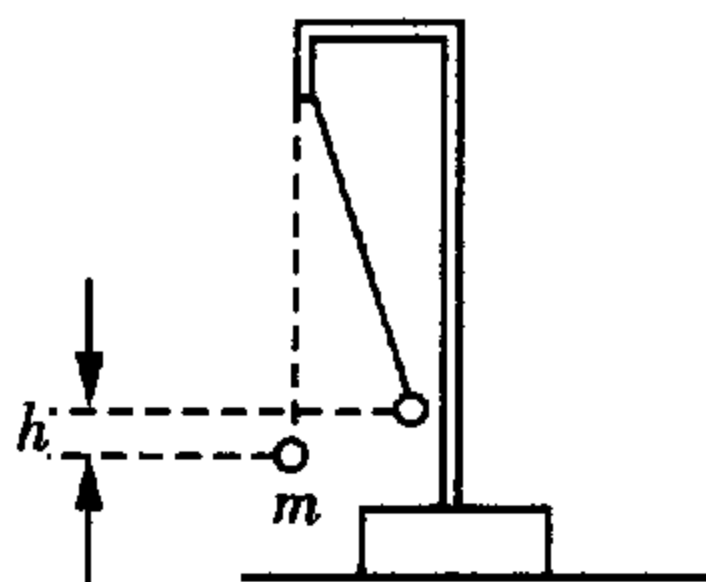


图 9-11

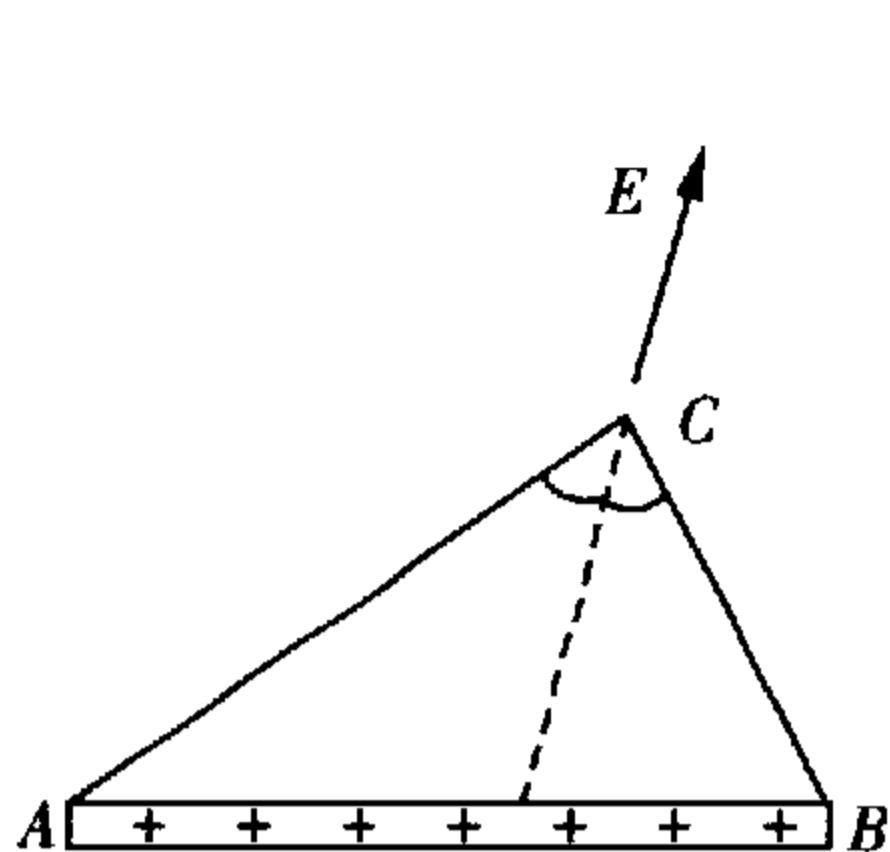


图 9-12

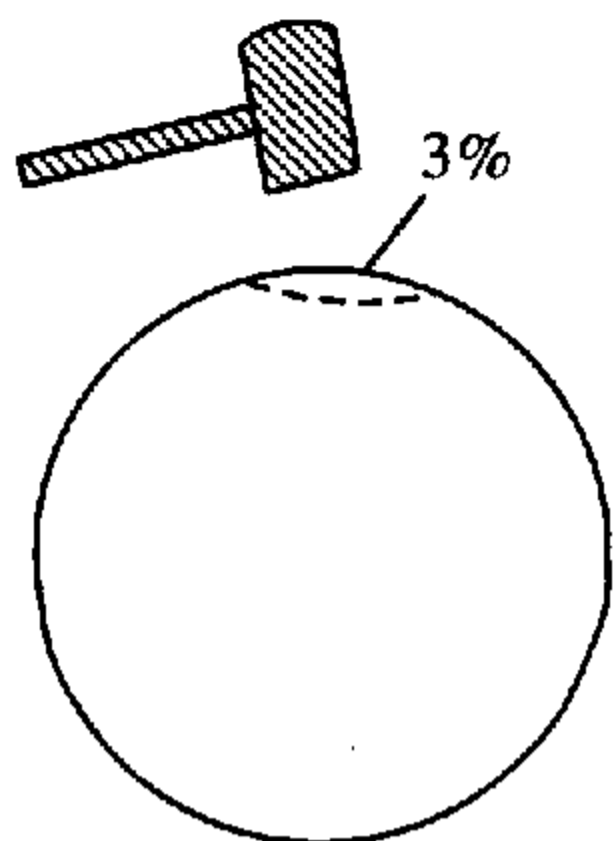


图 9-13

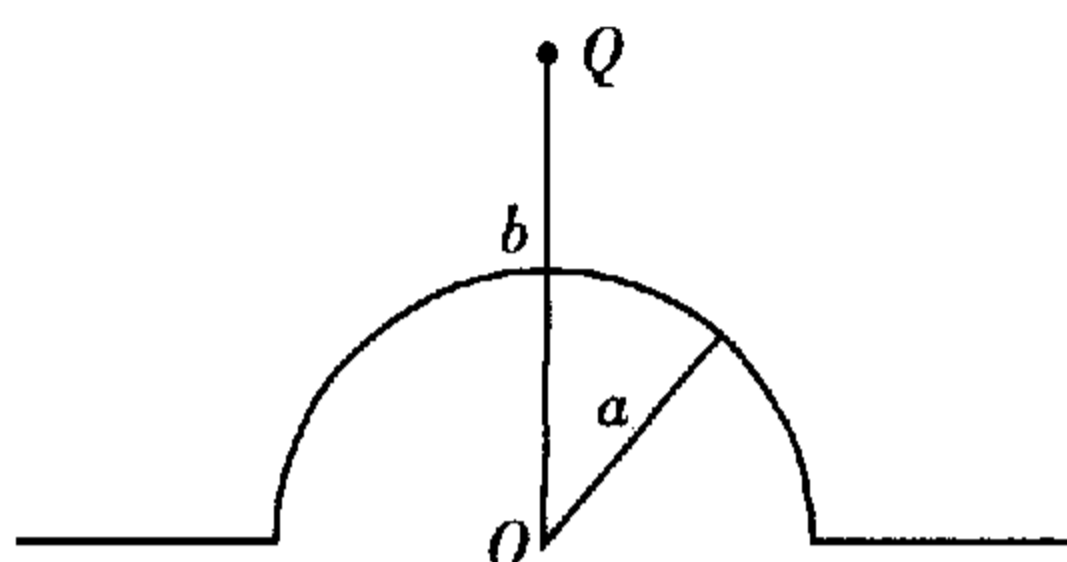


图 9-14

10. 设半径为 a 的绝缘导体球的电势为 U_0 , 在球外距离球心为 d 处有一点电荷 Q , 试用电像法求球外空间中任一点的电势.
11. 接地的空心导体球的内、外半径为 R_1 和 R_2 , 在球内离球心为 d ($d < R_1$) 处置一点电荷 Q , 用电像法求电势, 导体球上的感应电荷有多少? 分布在内表面还是外表面?
12. 在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部 (图 9-14), 半球的球心在导体平面上, 点电荷 Q 位于系统的对称轴上, 并与平面相距为 b ($b > a$), 试用电像法求电势.
13. 在图 9-15 所示电路中, 三个电容器 C_I 、 C_{II} 、 C_{III} 的电容值均等于 C . 电源的电动势为 ϵ , R_I 、 R_{II} 为电阻, K 为双掷开关. 开始时, 三个电容器都不带电, 先接通 oa , 再接通 ab , 再接通 oa , 再接通 ob , \dots , 如此反复换向. 设每次接通前都已达到静电平衡, 试求:
 - (1) 当 K 第 n 次接通 ab 并达到平衡后, 每个电容器两端的电压各是多少?
 - (2) 当反复换向的次数无限增多时, 在所有电阻上消耗的总电能是多少?

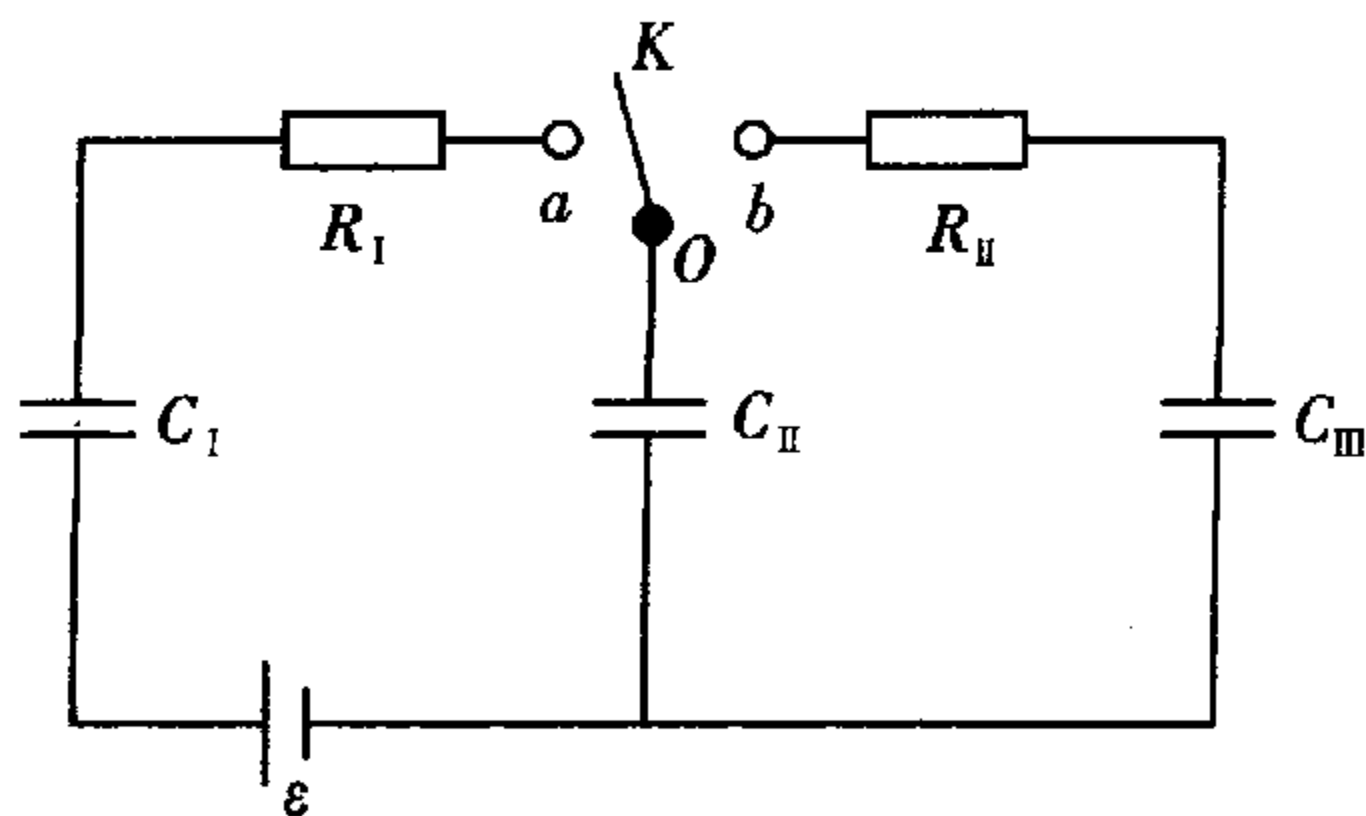


图 9-15

14. 如图 9-16, 半径为 R_1 的圆环上带有电量 Q , 在它的右边有半径为 R_2 的不带电的球面, 球心与环心的间距为 L , 球心与环心的连线和圆环平面垂直, 试求球面上的平均电势 \bar{U} .

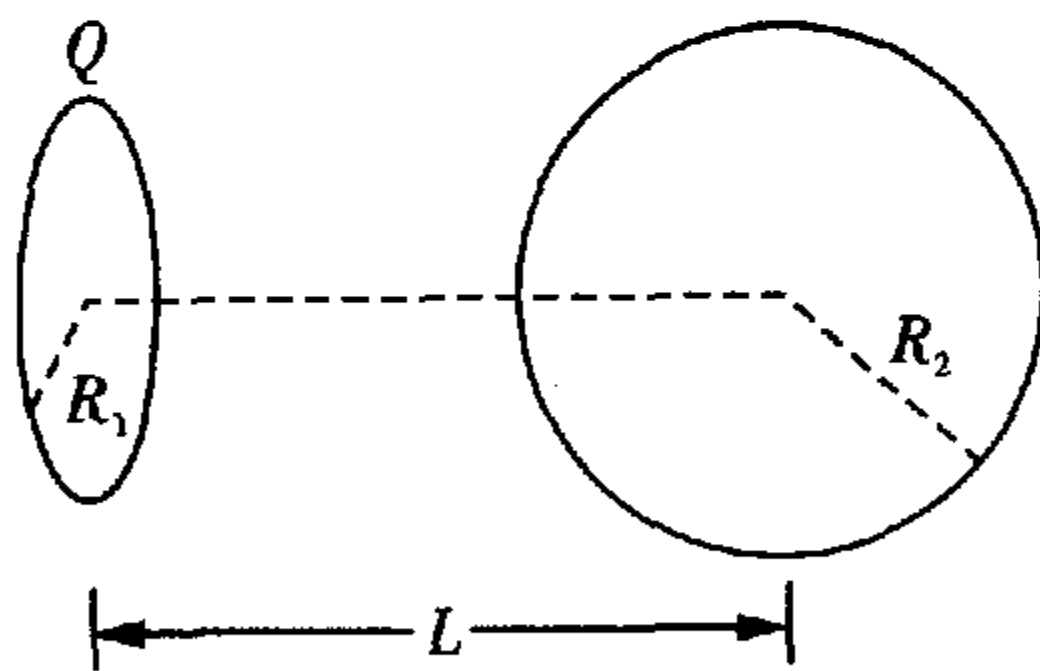


图 9-16

15. 两个带正电的点电荷, 带电量都是 Q . 固定放置在图 9-17 中 x 轴上 A 、 B 两处, A 、 B 距原点的距离都是 r , 若原点处放置另一点电荷 P , 其带电量大小是 q , 质量为 m .

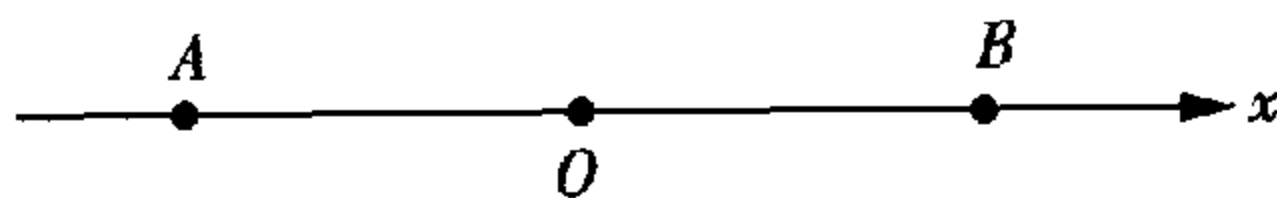


图 9-17

- (1) 当限制点电荷 P 只能在哪些方向上运动时, 它在 O 处才是稳定的?
 (2) 讨论在这些方向上受扰动后, 它的运动情况.
16. 如图 9-18 所示, 两个固定的均匀带电球面 A 和 B 分别带电 $4Q$ 和 Q ($Q > 0$), 两球心之间的距离 d 远大于两球的半径, 两球心的连线 MN 与两球面的相交处都开有足够小的孔, 因小孔而损失的电量可以忽略不计, 一带负电的质点静止放置在 A 球左侧某处 P 点, 且在 MN 直线上. 设质点从 P 点释放后刚好能穿越三个小孔, 并通过 B 球的球心. 试求质点开始时所在的 P 点与 A 球球心的距离 x 应为多少?

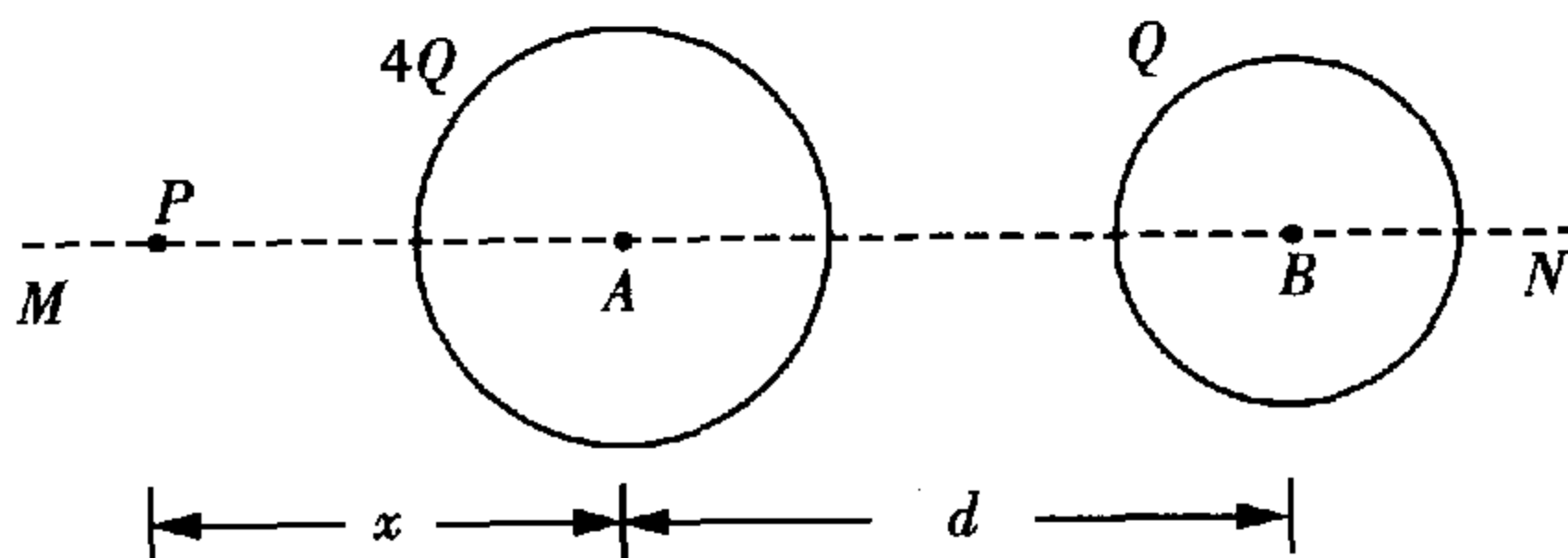


图 9-18

17. 在空间点 A 有电量为 $5Q$ 的固定点电荷, 在点 B 有电量为 $12Q$ 的固定点电荷. A 、 B 相距 $13a$, 空间点 C 与 A 、 B 两点分别相距 $5a$ 和 $12a$.

(1) 以点 C 为球心, 以 $r = a$ 为半径作一球, 试求在该球区域内, 静电场场强的平均值, 即

$$\bar{\vec{E}} = \frac{\sum_i \vec{E}_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}$$

的大小 $|\bar{\vec{E}}|$, 式中 \vec{E}_i 是在体积元 ΔV_i 处的场强.

(2) 以点 C 为球心, 以 $r = 10a$ 为半径作一球, 试求在该区域内, 静电场场强 \vec{E} 的平均值的大小 $|\bar{\vec{E}}|$.

18. 平行板电容器 C 接在如图 9-19 所示电路中, 接通电源充电, 当电压达到稳定值 U_0 时, 就下列两种情况回答, 将电容 C 的两极板的距离从 d 拉到 $2d$, 电容器的能量变化为多少? 外力做功要是多少? 说明做功的正负. (1) 断开电源开关; (2) 闭合电源开关.

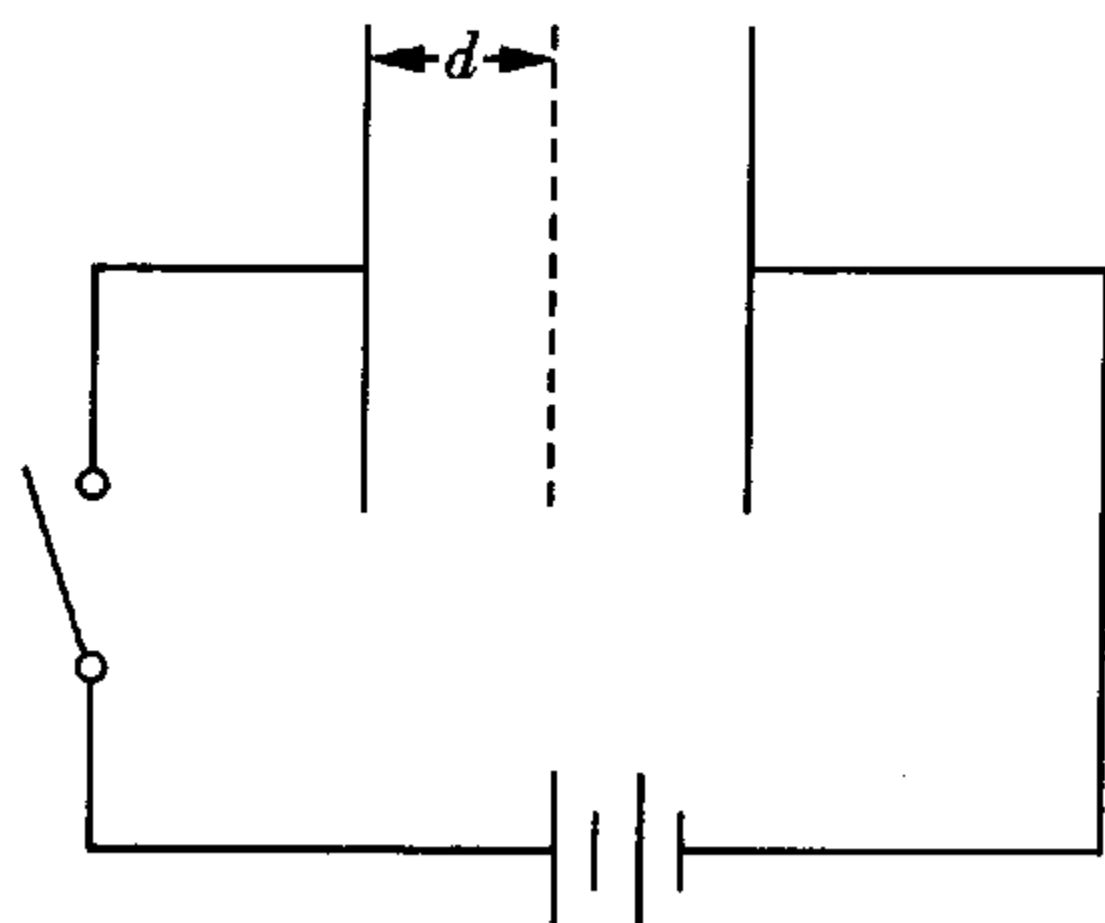


图 9-19

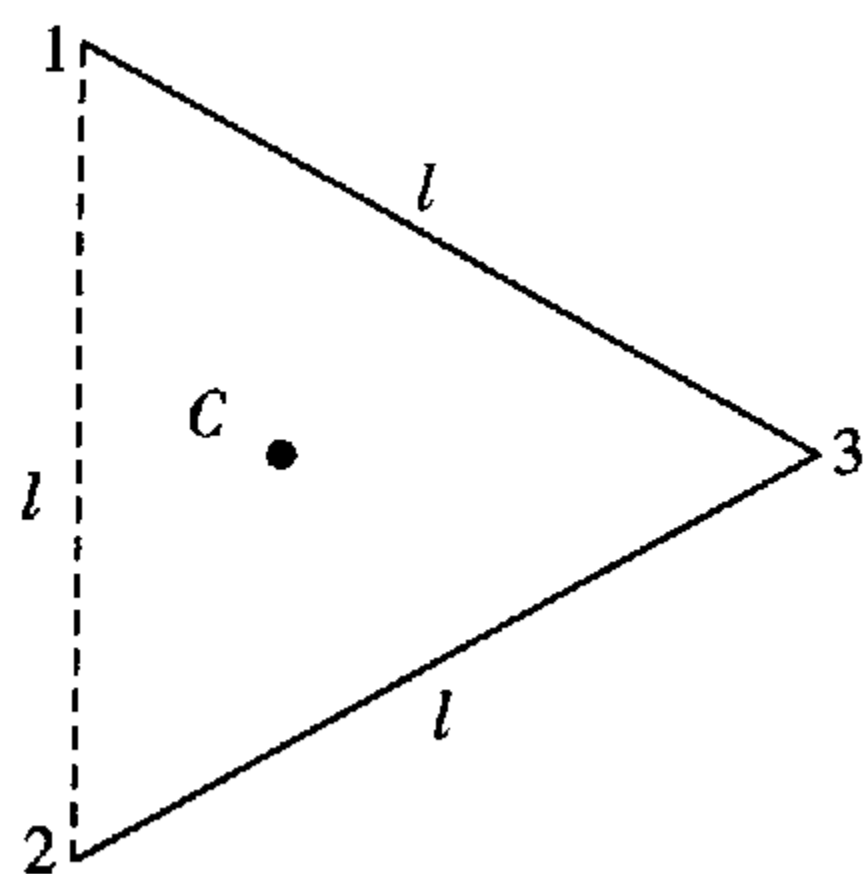


图 9-20

19. 如图 9-20 所示, 在水平光滑绝缘的桌面上, 有三个带正电的质点 1、2、3, 位于边长为 l 的等边三角形的三个顶点处, C 为三角形的中心, 三个质点的质量皆为 m , 带电量皆为 q . 质点 1、3 之间和 2、3 之间用绝缘的轻而细的刚性杆相连, 在 3 的连接处为无摩擦的铰链. 已知开始时三个质点的速度为零, 在此后运动过程中, 当质点 3 运动到 C 处时, 其速度大小为多少?
20. 由 n 个单元组成的电容器网络, 每一单元由三个电容器连接而成, 其中两个电容器的电容都是 $3C$, 另一电容器的电容为 $2C$, 如图 9-21 所示, 图中 a 、 b 为网络的输入端, a' 、 b' 为输出端, 今在网络的输入端 ab 间加一恒定的电压 U , 在其输出端 $a'b'$ 间接一电容为 C 的电容器.
- (1) 求从第 k ($k < n$) 个单元输入端起, 后面所有电容器贮存的总电能.
- (2) 先把第一个单元输出端与后面的网络断开, 再除去电源, 并把它的输入端短路, 求这时构成第一单元的三个电容器贮存的总电能.

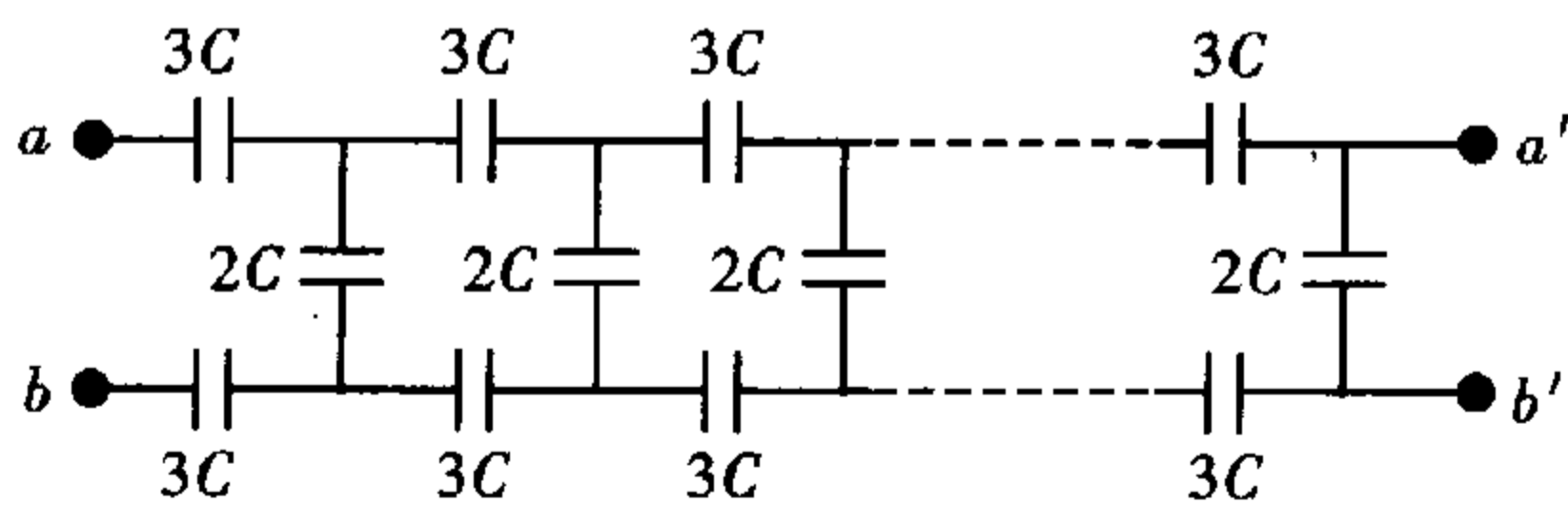


图 9-21

第十章 稳恒电流

【学习目标】

一、稳恒电流 电动势

电荷的定向移动形成电流. 产生电流的条件:(1)存在可以自由移动的电荷;(2)存在电场,即存在电势差(超导除外). 我们规定正电荷移动的方向为电流的方向.

1. 稳恒电流

大小和方向都不随时间变化的电流称为稳恒电流. 用电流强度 I 来描绘电流的强弱. 若 Δt 时间内通过导体任一截面的电荷为 Δq , 则电流强度为

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (10-1)$$

即单位时间内通过导体内任一截面的电荷. 通电导体的两端存在电势差, 故导体内存在电场, 正是在这电场的作用下, 带电粒子克服导体内的阻碍作用而定向移动.

2. 电动势

稳恒电流必须是闭合的, 正电荷在电场力的作用下从高电势处移到低电势处, 若无一非静电力把正电荷从低电势处搬运到高电势处, 则电荷分布不会稳定, 电场不会稳定, 电流也不会稳定.

提供非静电力的装置称为电源. 电源正负极以及外电路导线上堆积的电荷产生的电场驱使电荷经外电路从正极流向负极, 而电源内的非静电力克服电源内静电力作用, 把流到负极的正电荷从负极移到正极. 若正电荷 q 受到非静电力 \vec{f}_k , 则可认为电源内存在非静电场, 非静电场的强度 \vec{E}_k 也类似电场强度的定义:

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{f}_k}{q}$$

将非静电场把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时所做的功定义为电源的电动势, 即

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot \vec{\Delta l}$$

电动势反映电源中非静电力做功的本领, 是表征电源本身特征的物理量, 与外电路的性质以及外电路是否接通都没有关系.

二、稳定电流的基本规律

1. 欧姆定律

在恒定的条件下, 通过一段导体的电流强度 I 与导体两端的电压 U 成正比, 即 $I \propto U$. 这就是一段电路的欧姆定律. 写成等式:

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{或} \quad U = IR.$$

式中比例系数由导体的性质决定,称做导体的电阻,导体电阻的大小与导体的材料和几何形状有关.对于由一定材料制成的横截面均匀的导体,它的电阻 R 与长度 l 成正比,与横截面积 S 成反比,即

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

ρ 称为材料的电阻率,由导体的材料决定.当温度变化范围不大时,电阻率与温度之间近似地存在如下的线性关系:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

式中 ρ 表示 t °C 时电阻率, ρ_0 表示 0 °C 时的电阻率, α 叫做电阻的温度系数.

2. 含源电路的欧姆定律

如图 10-1 所示含有电源的电路称为含源电路.含源电路的欧姆定律就是找出电路中两点间电压与电流的关系.常用的方法是“数电压”的方法.即从一点出发,沿一方向,把电势的升降累加起来得到另一点的电势,从而得到两点间的电压.设电流从 a 流向 b ,则有

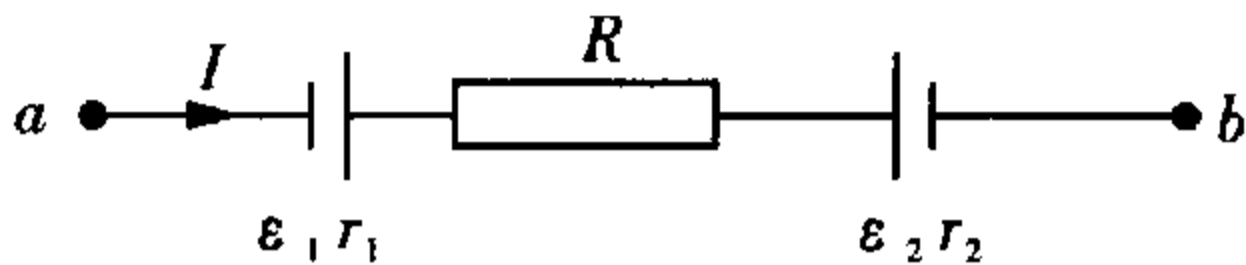


图 10-1

$$U_a + \varepsilon_1 - Ir_1 - IR - \varepsilon_2 - Ir_2 = U_b$$

a 、 b 两点间电压为

$$U_a - U_b = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + Ir_1 + Ir_2 + IR$$

写成一般形式

$$U_a - U_b = \sum \varepsilon_i + \sum (I_i R_i)$$

注意:(1) $U_a - U_b$ 就意味着从 a 点数到 b 点;

(2) 电流方向与数的方向相同则 $I_i R_i$ 取正,相反为负 $-I_i R_i$;

(3) 电动势的指向(规定从电源负极指向电源正极)与数的方向相同则取 $-\varepsilon_i$, 否则为 ε_i .

3. 闭合回路的欧姆定律

对于图 10-1 可把 a 、 b 两点连起来形成一闭合回路,则 $U_a - U_b = 0$, 即

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + Ir_1 + Ir_2 + IR = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

写成一般形式:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R_i}$$

$\sum \varepsilon_i$ 表示整个回路电动势的代数和,当 ε_i 与假定电流 I 的方向相同时取正,相反时取负.这就是闭合回路的欧姆定律.

4. 叠加原理 等效电源定理

(1) 叠加原理

叠加原理与力学中常用的力的独立作用原理相似.在有两个或两个以上电源存在的网络中,每一支路的电流可以看作每个电源单独存在时给支路提供的电流的叠加.计算时应先规定每一支路的电流的正方向,并且在计算每个电源独立提供电流时,应将其他电源电动势除去,仅保留其内

阻.

(2) 等效电源定理

只有电动势而无内阻的理想电源称为稳压源,通常的实际电源相当于恒压源和一内阻的串联.若有一理想电源,不管外电路电阻如何变化,总是提供一个不变的电流 I_0 ,则这种理想电源称为恒流源.通常的实际电源,相当于恒流源与一定内阻的并联.

实际电源既可看成电压源,又可看成电流源.对于同样的外电路,产生的电压和流经的电流相同.如图 10-2:

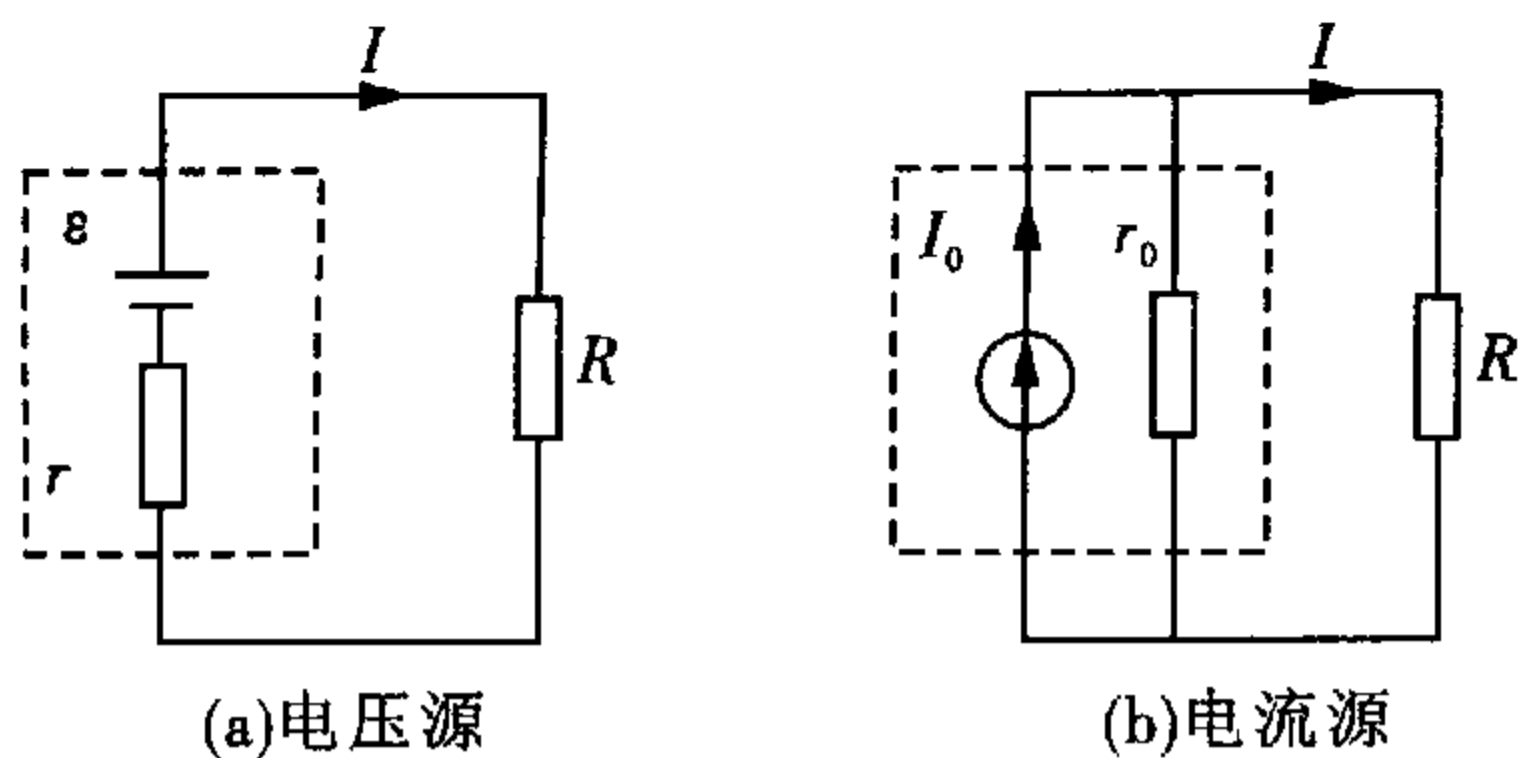


图 10-2

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{r}{R+r}$$

$$I = I_0 \frac{r_0}{R+r_0}$$

由于其等效性,

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r}, \quad r_0 = r$$

即电流源的 I_0 等于电压源的短路电流,电流源内阻等于电压源内阻.

等效电压源定理(又称戴维宁定理)表述为:两端有源网络可以等效于一个电压源,其电动势等于网络的开路端电压,其内阻等于从网络两端看除源(将电动势短路,内阻仍保留在网络中)网络的电阻.

利用电压源与电流源的等效条件,可以得到等效电流源定理(又称诺尔顿定理),内容为:两端有源网络可等效于一个电流源,电流源的电流 I_0 等于网络两端短路时流经两端的电流,内阻等于从网络看除源网络的电阻.

5. 基尔霍夫定律

一个电路若不能通过电阻的串并联求解,则这样的电路称为复杂电路,复杂电路往往通过基尔霍夫定律来求解.

(1) 基尔霍夫第一方程组(节点定律组)

复杂电路中,三条或三条以上支路的汇合点称为节点.

基尔霍夫第一方程内容为:若规定流出节点的电流强度为正,流入节点的电流强度为负,则汇于节点的各支路电流强度的代数和为零.即 $\sum I_i = 0$.

对电路中每一个节点都可写出一个方程,但对于有 n 个节点的电路写出的 n 个方程只有 $n-1$ 个是独立的,剩下的一个方程可由这 $n-1$ 个方程组合得到.这 $n-1$ 个方程,组成基尔霍夫第一方程组.

(2) 基尔霍夫第二方程组(回路定律组)

复杂电路中,我们把几条支路构成的闭合通路称为回路.

基尔霍夫第二方程内容为:对任一闭合回路电势增量的代数和等于零.即 $\sum I_i R_i + \sum \varepsilon_i = 0$, 式中 $I_i R_i$ 和 ε_i 的正负号的选取:在任意确定未知电流方向后,再任意确定一绕行方向,电流 I_i 的方向与绕行方向一致, $I_i R_i$ 取正;相反 $I_i R_i$ 取负. ε_i 的指向与绕行方向相同取负,相反取正.

对于电路中每一个回路都可写出一个方程,但并非 m 个回路就可写 m 个方程.要想每个方程独立,每一次选择的回路都至少有一条原先选择的回路没有选过的新支路.

6. 焦耳定律

电流通过用电器时,电场力对运动电荷做功,电势能转化为其他电像形式的能量.

电荷 q 流经电压为 U 的用电器,电场力做的功:

$$A = qU = UIt$$

单位时间内电场力做的功称为电功率.

$$P = \frac{A}{t} = UI$$

对于纯电阻电路, $U = IR$, 电场力的功全部转化为热

$$Q = UIt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t$$

此式称为焦耳定律,其热功率为

$$P = I^2 R$$

若电路中有直流电动机或电解槽,则电势能除一部分转化为热能外,大部分转化为机械能或化学能等其他电像形式的能量.

三、无源二端网络的等效电阻

任何网络不管它是简单的或是复杂的,只要它有两个引出端,且内部又无电源,则称为无源二端网络.若网络两端之间电压为 U ,从一端流进,另一端流出的电流为 I ,则 U 与 I 的比值 $R = \frac{U}{I}$ 称之为二端无源网络的等效电阻.为求这等效电阻有一些专门的方法,现介绍如下:

1. 对称性化简法

一个无源电阻的网络,经某一操作,例如镜像反射、旋转,若所得网络与原网络相同,则称原网络在此操作下具有对称性.那些对称的点,在网络两端加上电压后,其电势相等,因而把这些点“短路”或“断路”均不影响网络中电流分布,也不影响网络的等效电阻.

2. 电流分布法

本来要求电阻网络的等效电阻,怎么又扯到电流呢?电流分布法的思路是这样:假设电流 I 从一个端点 a 流进,另一个端点 b 流出,即网络的总电流就是 I ,再利用基尔霍夫的两个定律,求出各个支路的电流,当然各个支路的电流肯定是用总电流 I 表示,再从 a 点沿任一路径到 b 点算出 ab 间的总电压 U_{ab} ,这个电压内必含有总电流 I ,拿总电压 U_{ab} 除以总电流 I 就得到电路的总电阻.

3. Y— Δ 变换

复杂的电阻网络中,可能有电阻连成 Y 形或 Δ 形(如图 10-3),在保证 1、2 和 3 三点电势相等,保证流经三点的电流相等时, Y 形、 Δ 形连接互换应对整个电路是没有影响的,而一互换整个网络就可变成用电阻串并联就能计算等效电阻的简单网络了.要保证三点电势与电流相等,对应的电阻有

如下的关系:

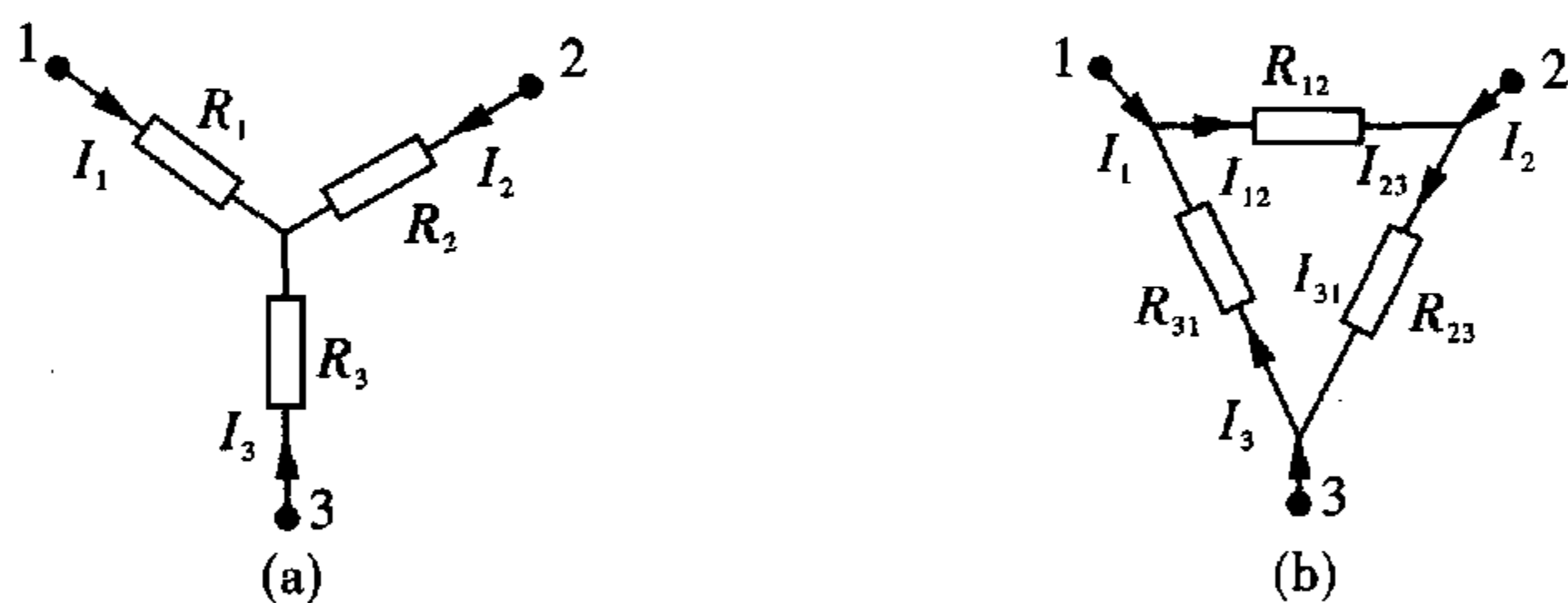


图 10-3

△形变为 Y 形时:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Y 形变为 △形时:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

4. 无限网络

由无限多个电阻构成的两端网络称为二端无限网络. 大致分为线型、面型和正多边形嵌套几种.

(1) 线性无限网络

像图 10-4 所示一字排开的网络属线性的. a, b 两点左侧也可延伸. 构成双边线性网络. 这样网络的特点是呈现周期性. 常用所谓“极限法”求等效电阻. 我们把 r, R 视为一个单元(格子), 该网络是由无限多这样的格子组成. 先设有 n 个格子, 这 n 个格子又可看成由前面的第一个格子和后面 $n-1$ 个格子组成, 若令后面的 $n-1$ 个格子的电阻为 R_{n-1} , 那 R_n 就可看为图 10-5 所示电路, R_n 等于 R_{n-1} 与 R 并联后再与 r 串联. 这样可解得用 R_{n-1} 表示的 R_n , 考虑到 $n \rightarrow \infty$ 时, 去掉一个格子或增加一个格子不影响等效电阻, 即 R_n 应等于 R_{n-1} , 从而解得 a, b 间等效电阻, 若 a, b 向两边延伸, 我们可采取折叠等办法, 变两边无限为一边无限再求解.

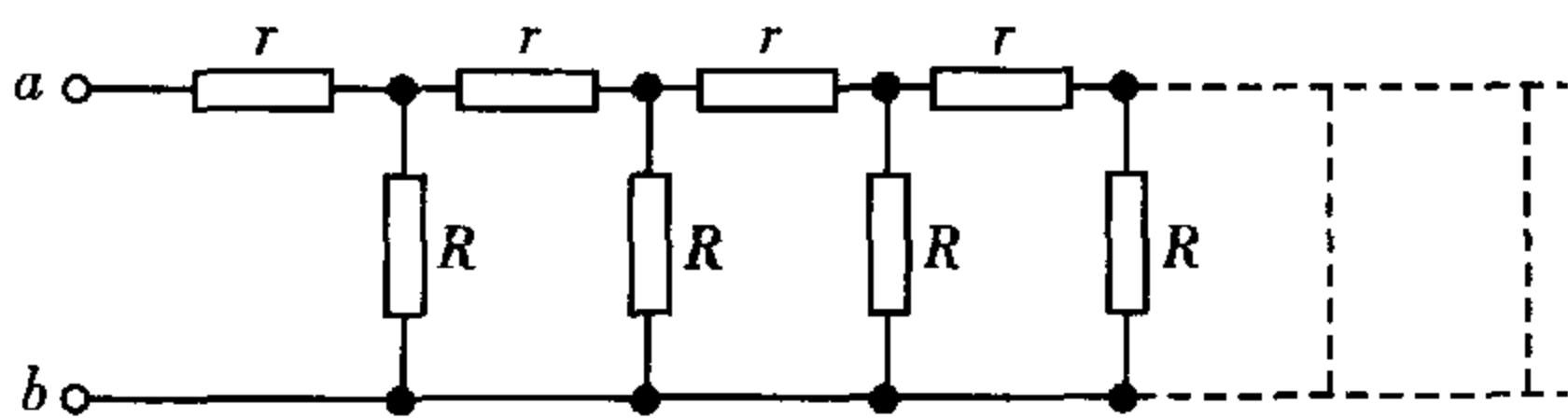


图 10-4

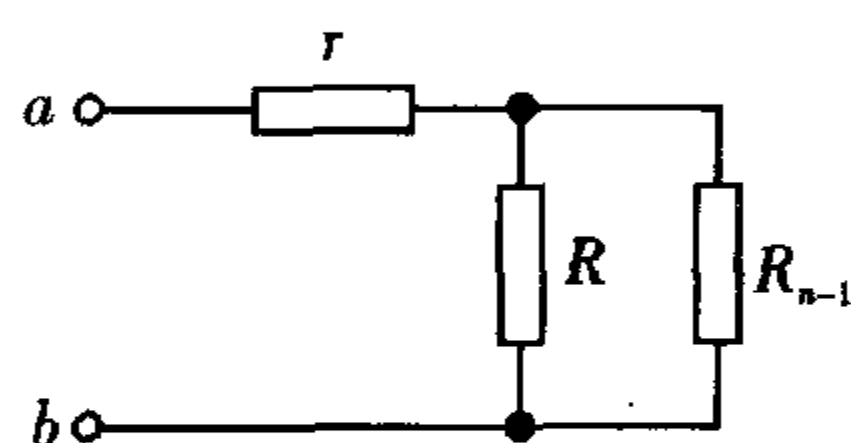


图 10-5

(2) 面型无限网络

像图 10-6 所示网络电阻呈面分布,若所有正六边形每边的电阻均为 R_0 ,那 a, b 间电阻为多少呢? 这类题主要考虑到相对 a 点或是 b 点,网络具有对称性,再利用电流分布法和叠加法求解. 设电流 I 从 a 点流入,沿三个方向流到无限远处. 由于对称性, ac 边上电流为 $\frac{I}{3}$, cb 边上电流为 $\frac{I}{6}$;再设有 I 的电流沿各个方向从无限远处汇集后从 b 点流出,即 ac 边上电流为 $\frac{I}{6}$, cb 上电流均为 $\frac{I}{3}$. 两种情况叠加,即 ac, cb 边上电流均为 $\frac{I}{2}$, $U_{ab} = \frac{I}{2}$

$$R_0 + \frac{I}{2}R_0 = IR_0, R_{ab} = \frac{U_{ab}}{I} = R.$$

(3) 无限多个正多边形嵌套的无穷网络.

图 10-7 所示的用同种均匀金属丝连接成的无限内接等边三角形网络就是这种无穷网络的一个例子,若最外等边三角形边长为 a ,单位长度电阻为 r . 考虑到对称性 $P'OQ'$ 与 AOB 可在 O 点处分开,如图 10-8 所示,而这相当于在大三角形两边中点 P, Q 之间连接一个边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接三角形网络,令此网络等效电阻为 R_{PQ} ,这样图 10-8 的网络等效图 10-9 所示网络,对此我们很容易得到

$$R_{AB} = \frac{ar + 2R_{PQ}}{2ar + 3R_{PQ}} ar$$

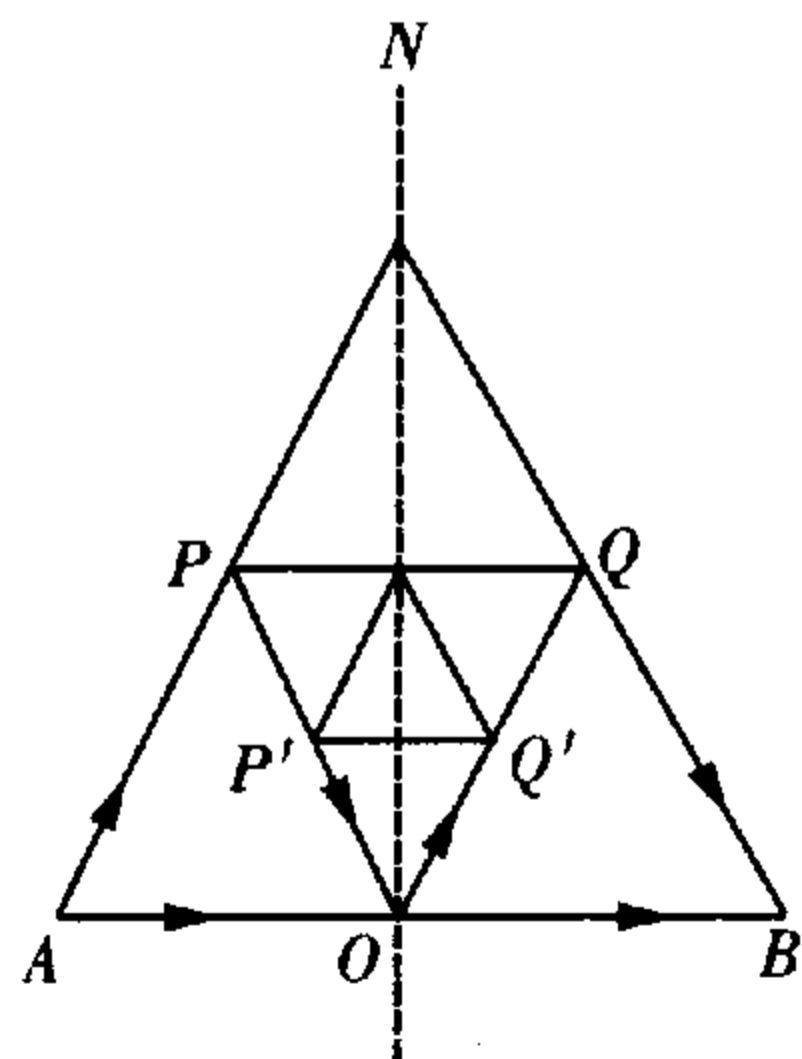


图 10-7

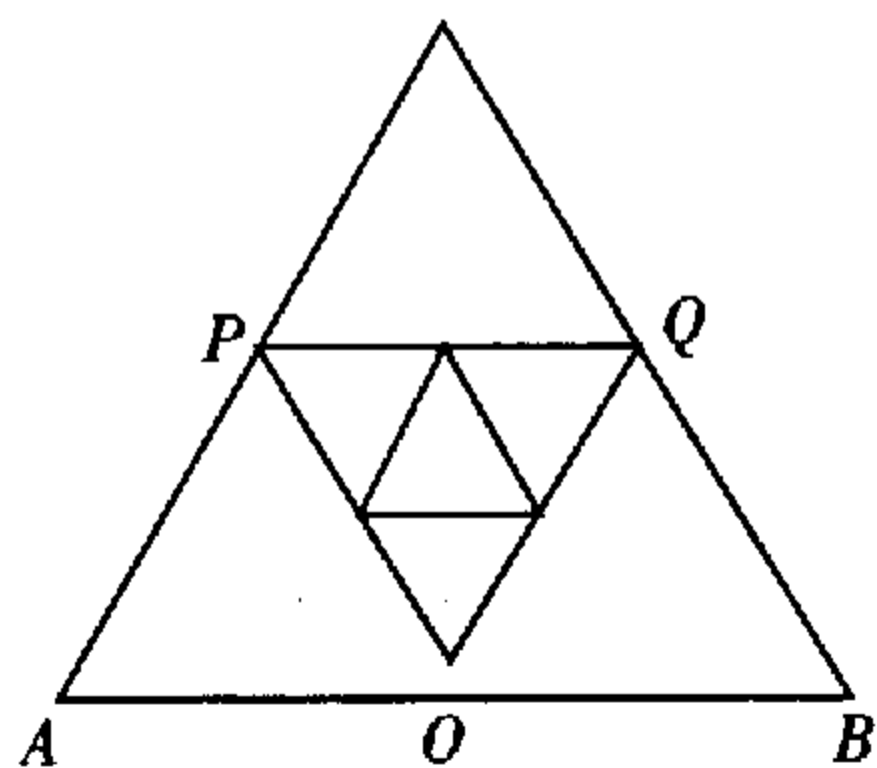


图 10-8

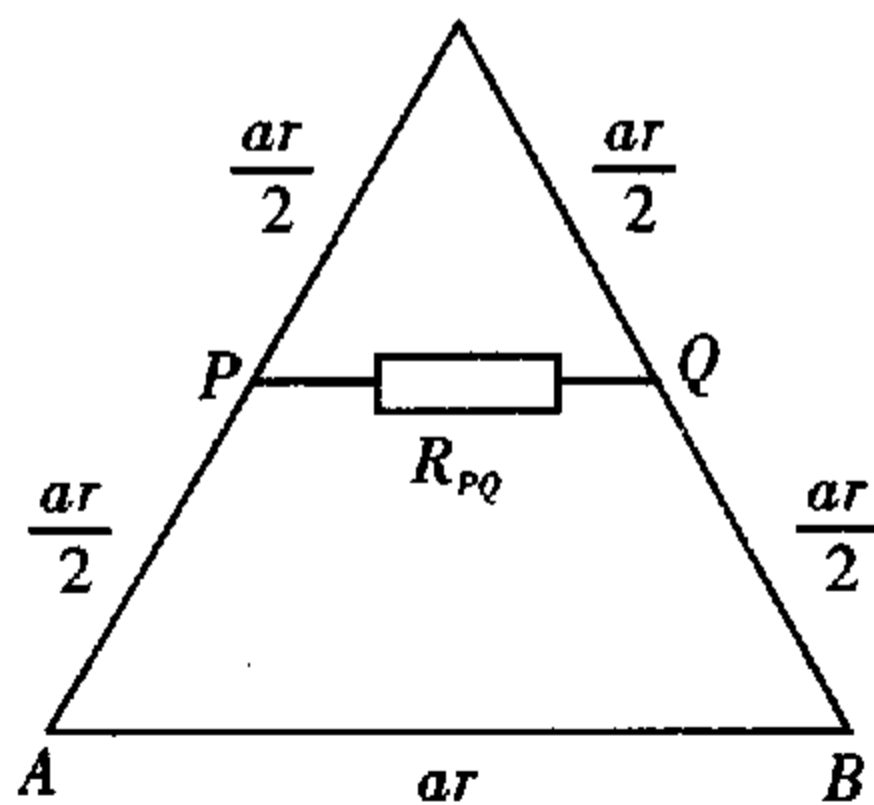


图 10-9

R_{PQ} 是外边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接等边三角形网络的等效电阻,考虑到电阻与长度成正比,应有

$$R_{PQ} = \frac{1}{2}R_{AB}$$

由以上两式,得

$$R_{AB} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1) ar$$

总结解题过程,这样的网络先设内部无限网络为一等效电阻,并找到这个等效电阻与包含它的最外多边形的等效电阻之间的关系,从而求解方程可得.

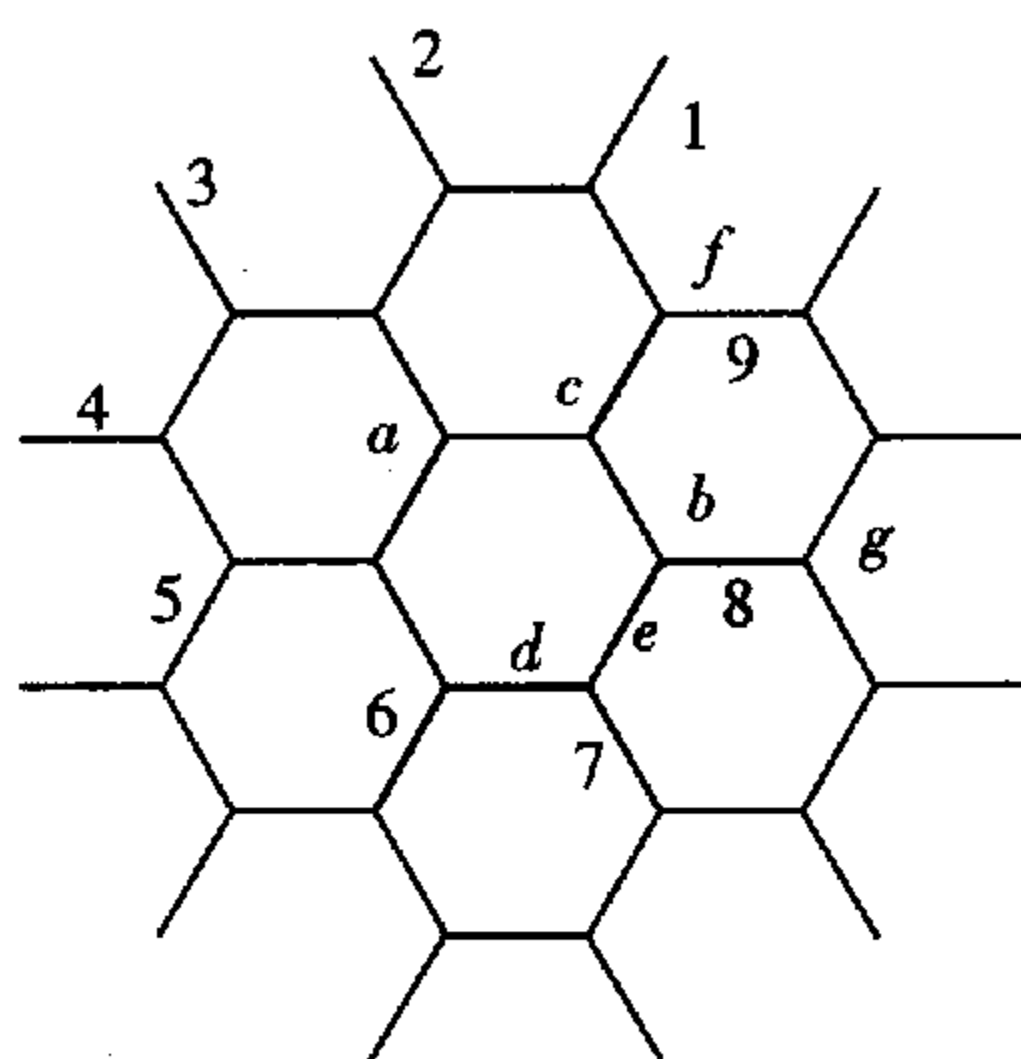


图 10-6

【解题钥匙】

例1 两个均匀金属圆圈和四根均匀短直金属连成如图 10-10 所示网络, $\frac{1}{4}$ 大圆弧、 $\frac{1}{4}$ 小圆弧和短直金属棒的电阻均为 r , 求 A 、 C 两点间的等效电阻.

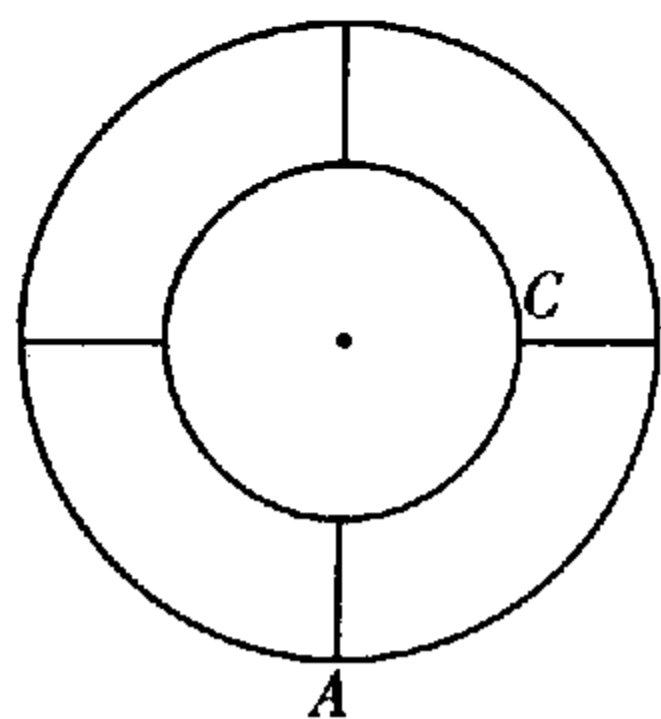


图 10-10

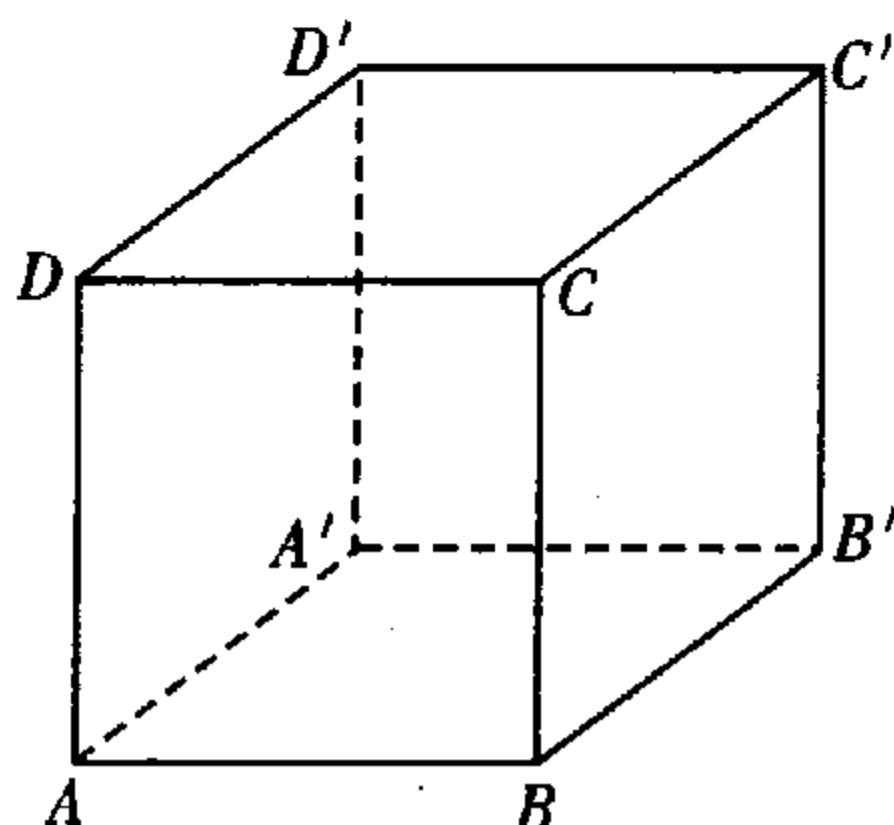


图 10-11

解析 因大小圆的四分之一圆弧与短直金属的电阻均为 r , 所以图 10-10 所示电路与图 10-11 中正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 网络等效. A 、 C 两点在正方形 $ABCD$ 的对角线上, 设电流从 A 流入, 从 C 点流出, 那网络相对对角面 $ACC'A'$ 对称, B 、 D 两点等电势, B' 、 D' 两点等电势, 沿 BD 、 $B'D'$ 将正方体压成图 10-12 所示平面网络.

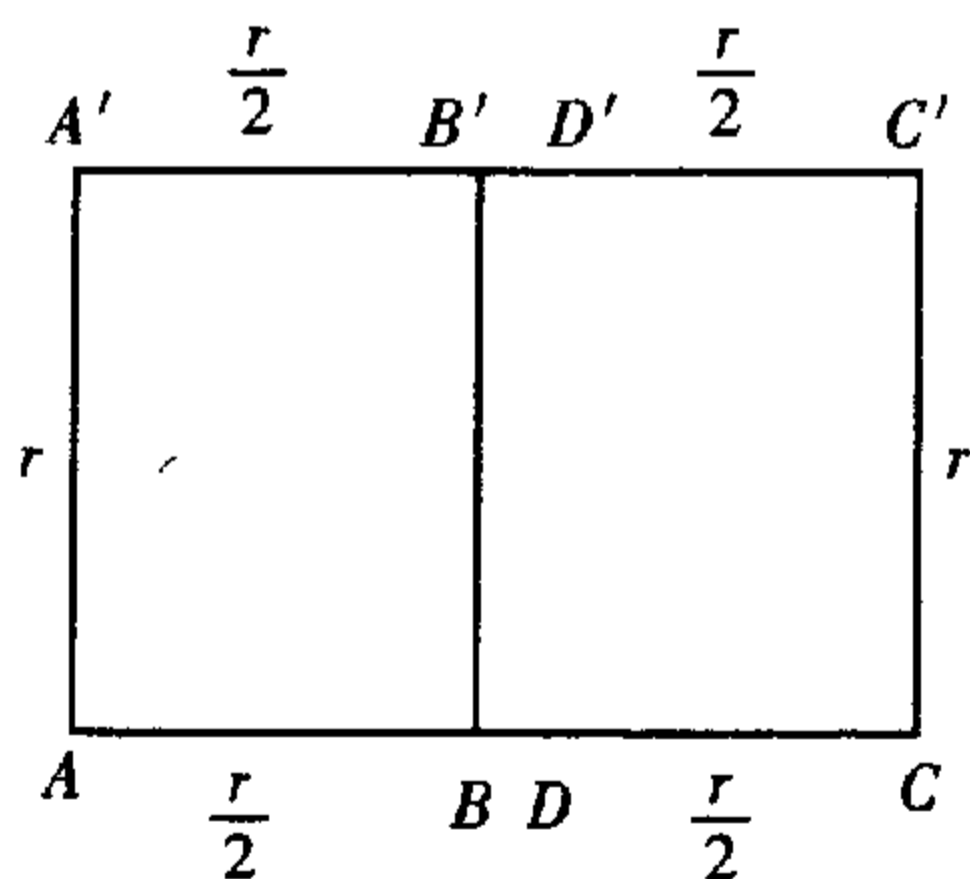


图 10-12

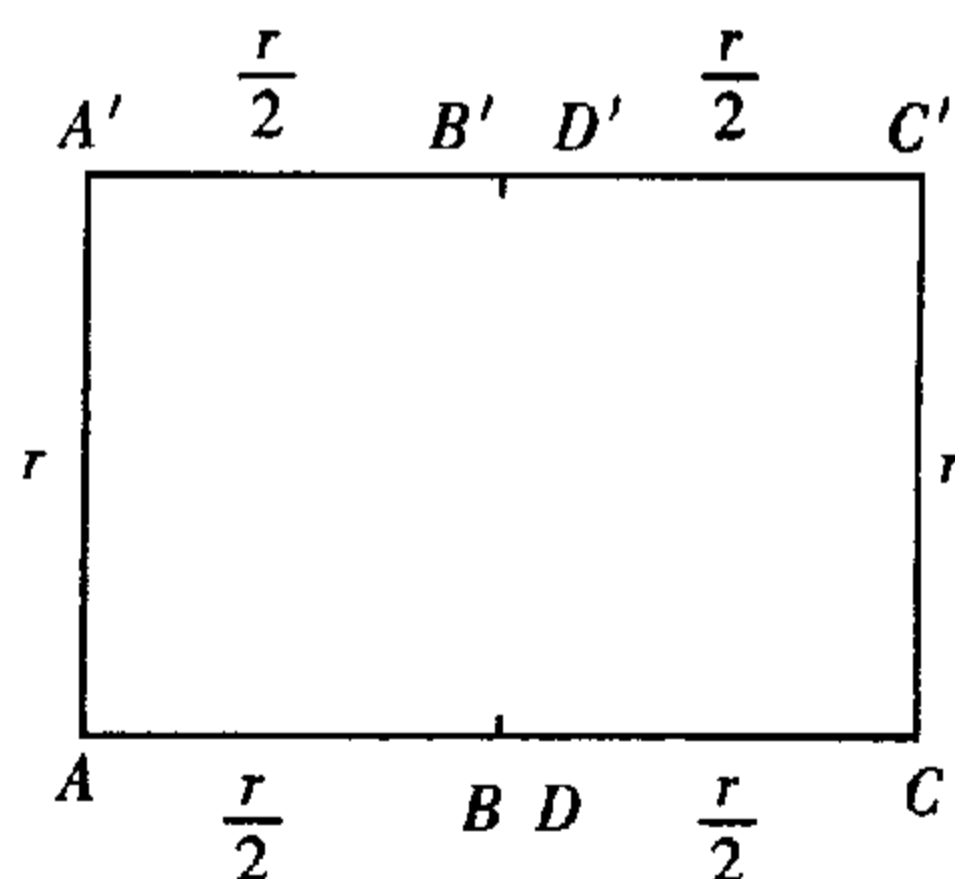


图 10-13

又考虑到对称性, B 、 D 点与 $B'D'$ 等电势, 故其间电阻可拿掉, 网络等效于图 10-13 所示电路, 这是一简单电路, 很容易得到

$$R_{AC} = \frac{3}{4}r$$

方法与技巧 四分之一圆弧和短金属棒虽长短不一, 但电阻相等, 这样可把里面的小圆拉出来, 认为各边相等, 变平面图形为一正立方体, 再考虑到立方体相对对角面 $ACC'A'$ 对称, 对称点的电势相等, 又可沿 BD 、 $B'D'$ 把正方体压成一矩形, 一拉一压把一无从下手的问题变成了一眼就能看出答案的简单问题了. 在理解了原理和拉、压的基本方法之后, 对类似问题, 多接触几个题目就会熟能生巧了.

例2 电阻丝网络如图 10-14 所示, 每一小段的电阻均为 R , 试求 A 、 B 之间的等效电阻 R_{AB} .

解析一 在图 10-14 中, 有电流 I 从 A 点流入, B 点流出, 这电流不具有对称性, 但把它看作是

图 10-15 中电流 I 从 A 流入, O 点流出与图 10-16 中电流 I 从 O 点流入, B 点流出的叠加, 后两种电流流动都具有对称性, 从而把原来不具有对称性的问题转化成具有对称性的问题, 从而便于求解.

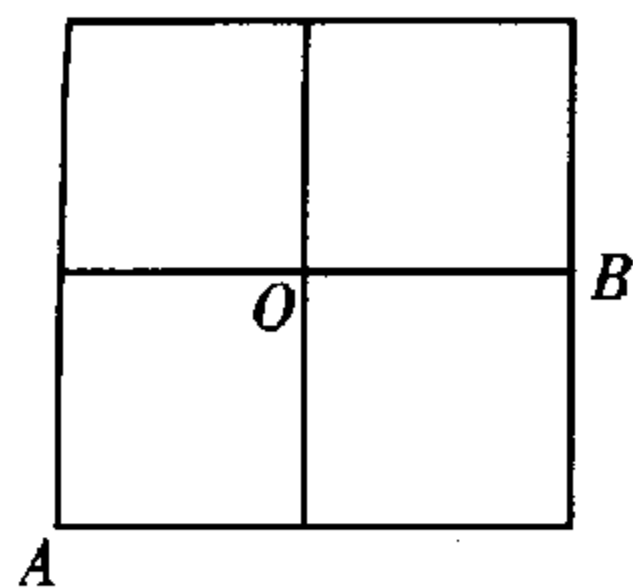


图 10-14

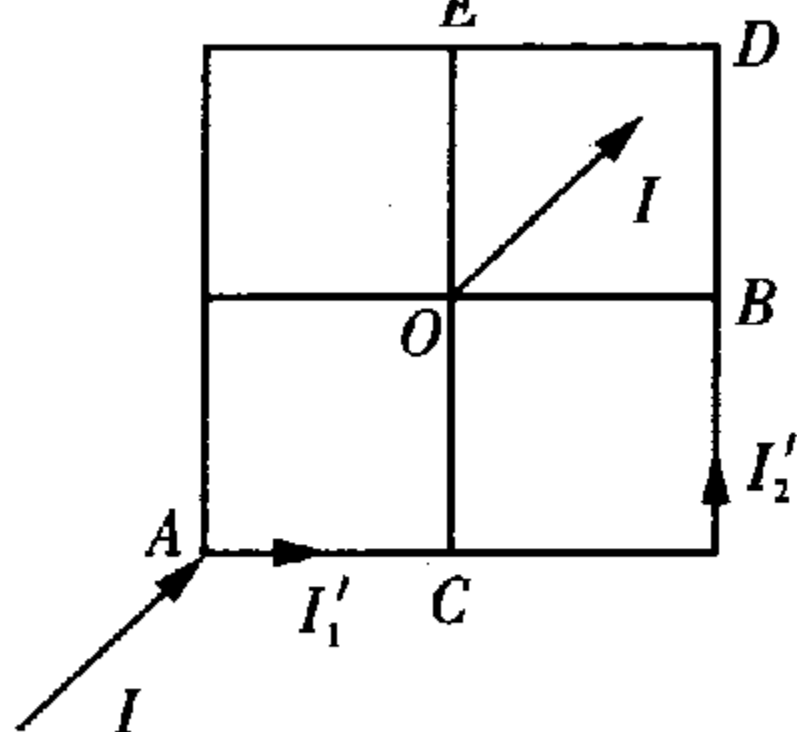


图 10-15

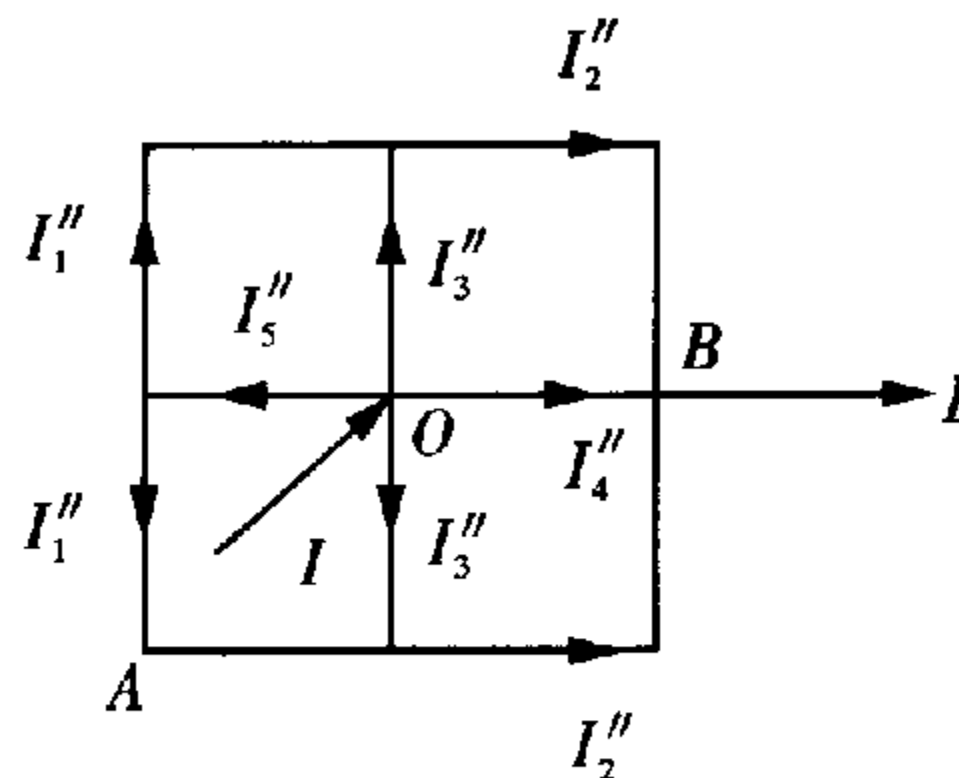


图 10-16

如图 10-15 所示, 设从 A 点流入的电流 I , 由于对称性, 从 A 到 C 的电流 I'_1 应为

$$I'_1 = \frac{I}{2}$$

由于 B, E 因对称而等势, BDE 中应无电流, I'_1 在 C 点分流, 由于 CO 的电阻与 CBO 的电阻之比为 $1:3$, 故

$$I'_2 = \frac{1}{4} I'_1 = \frac{1}{8} I$$

图 10-16 中, 考虑到对称性, 各支路电流如图表示, 运用基尔霍夫定律, 可得

$$I''_1 + I''_3 = I''_2$$

$$2I''_3 + I''_4 + I''_5 = I$$

$$I''_5 = 2I''_1$$

$$I''_4 R = I''_3 R + 2I''_2 R$$

$$I''_5 R + 2I''_1 R - I''_3 R = 0$$

解此方程组可得 $I''_1 = \frac{I}{24}$ $I''_2 = \frac{5}{24} I$

将两种情况叠加得

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = \frac{I}{2} + \frac{I}{24} = \frac{13}{24} I$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{I}{8} + \frac{5}{24} I = \frac{1}{3} I$$

那 AB 两点之间的电压为

$$U_{AB} = I_1 R + I_2 2R = \frac{29}{24} IR$$

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{29}{24} R$$

解析二 把每根电阻线都画成电阻, 经过图 10-17 的 (b) 到 (e) 所示的一系列 $Y-\Delta$ 变换, 原网络变为 (e) 所示的简单电路, 从而解得 $R_{AB} = \frac{29}{24} R$.

方法与技巧 解析一主体上是运用电流分布法, 其中又运用了对称法, 电流从 A 进 B 出本不对

称,但通过叠加法,把A进B出看为A进O出和O进B出的叠加,把不对称的变为了对称,从而顺利求解,一个题目用到这么多方法,确值得玩味. 解析二则是一系列Y— Δ 变换,关键在画好图,计算时要仔细一点.

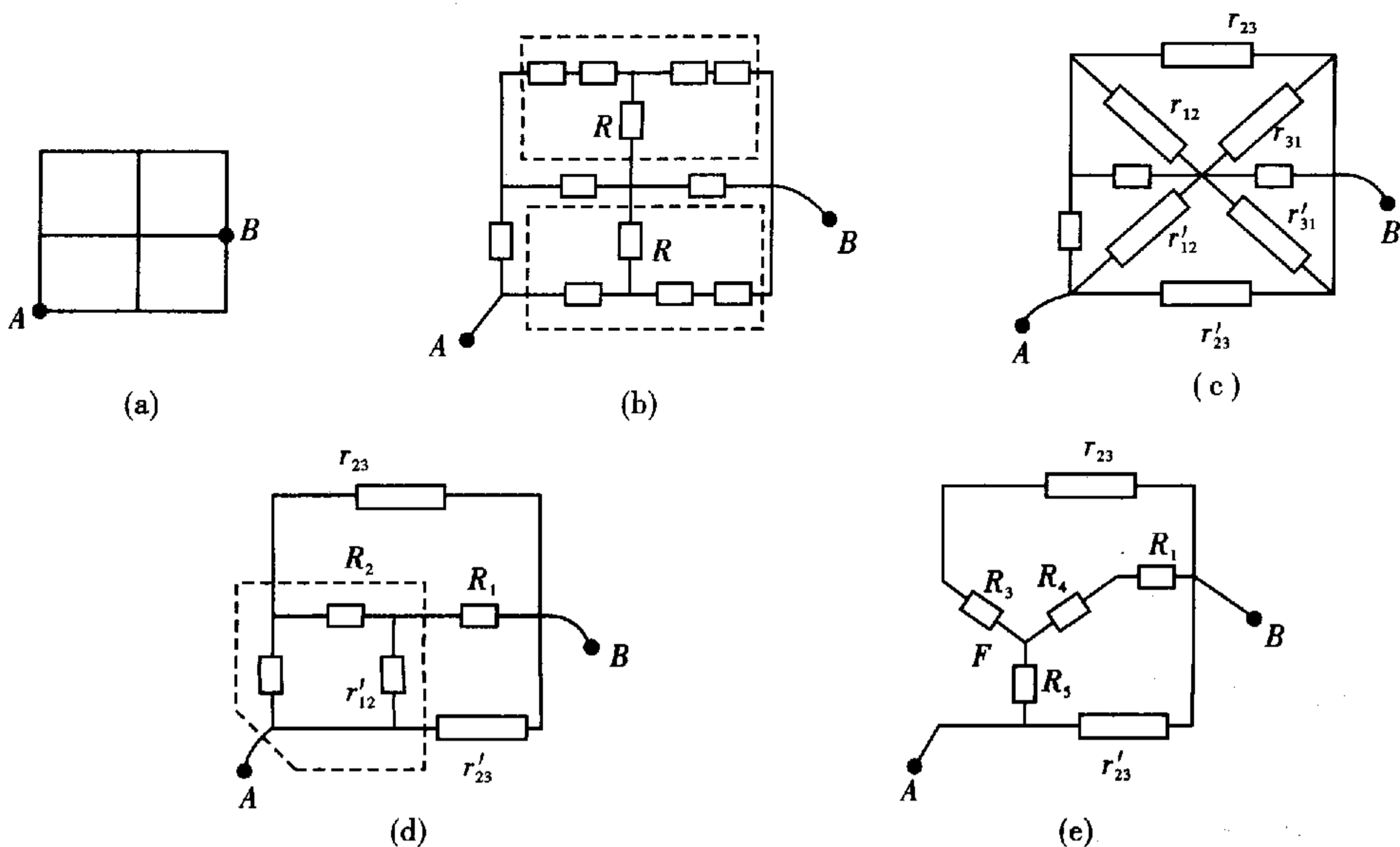


图 10-17

例 3 图 10-18(a)所示的无限旋转内接正方形金属丝网络是由一种粗细一致、材料均匀的金属丝构成,其中每一个内接正方形的顶点都在外侧正方形四边中点上. 已知最外侧正方形边长为 l , 单位长金属丝的电阻为 r_0 , 求网络中:

- (1) A, C 两端间等效电阻 R_{AC} . (2) E, G 两端间等效电阻 R_{EG} .

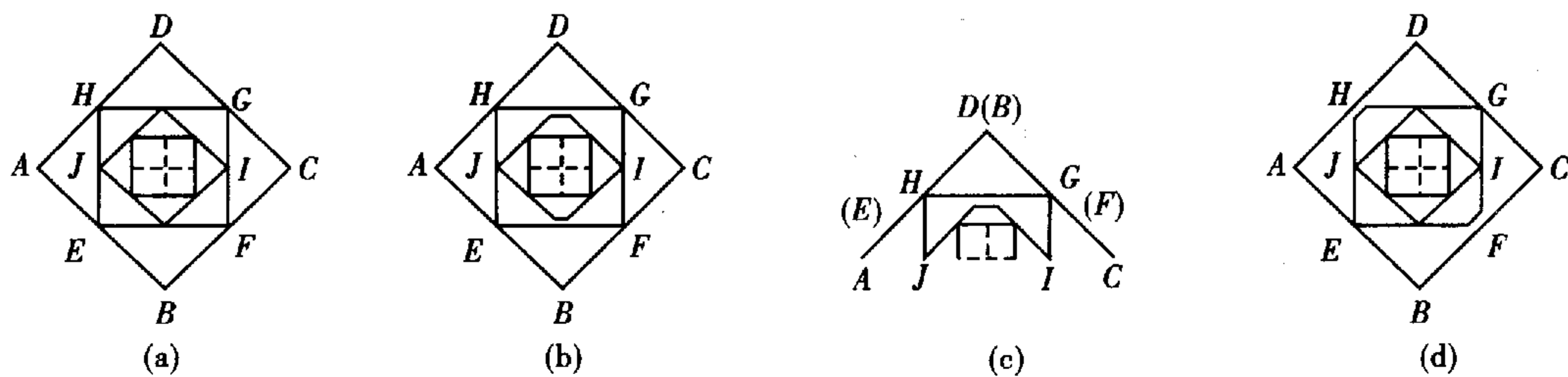


图 10-18

(1) 首先利用网络的对称性作等效变换. 令 A, C 两端加一电压, 必然使得网络在 BD 连线上各节点电势相等, 可以把节点拆开, 如图 10-18(b)所示. 又由于网络关于 AC 连线两侧对称, 所以可以沿 AC 连线对折叠合, 让各对称节点相互重合, 得等效网络, 如图 10-18(c)所示.

容易发现, 在图(c)中, A, C 间网络与 I, J 间网络在形式上相似, 而且在线度上后者是前者的 $\frac{1}{2}$

倍,因此

$$R_{IJ} = \frac{1}{2}R_{AC} \quad ①$$

再考虑到图(c)中,AC 连线两侧各对称节点重合,因此,图(c)与图(a)相比,若金属丝长度相等,阻值应为图(a)中的一半,或图(c)中每段金属丝的电阻等于两条同长金属丝的并联电阻.

设图(c)中 AH 的阻值为 R_1 , HG 的阻值为 R_2 , 易得

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}lr_0 = \frac{1}{4}lr_0 \quad ②$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}lr_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}lr_0 = \sqrt{2}R_1 \quad ③$$

然后利用简单串并联得到 A, C 两端间等效电阻为

$$R_{AC} = R_1 + \frac{2R_1 \cdot R'}{2R_1 + R'} + R_1 = \frac{4R_1(R_1 + R')}{2R_1 + R'} \quad ④$$

其中

$$R' = \frac{R_2(\frac{1}{2}R_2 + R_{IJ} + \frac{1}{2}R_2)}{R_2 + \frac{1}{2}R_2 + R_{IJ} + \frac{1}{2}R_2} = \frac{R_2(R_2 + \frac{1}{2}R_{AC})}{2R_2 + \frac{1}{2}R_{AC}} = \frac{R_2(2R_2 + R_{AC})}{4R_2 + R_{AC}} \quad ⑤$$

将式④代入式⑤,得

$$R_{AC} = \frac{4R_1[R_1 + \frac{R_2(2R_2 + R_{AC})}{4R_2 + R_{AC}}]}{2R_1 + \frac{R_2(2R_2 + R_{AC})}{4R_2 + R_{AC}}} = \frac{4R_1[2R_2(2R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)R_{AC}]}{2R_2(4R_1 + R_2) + (2R_1 + R_2)R_{AC}}$$

化简整理得 R_{AC} 的一元二次方程

$$(2R_1 + R_2)R_{AC}^2 + 2(R_2^2 + 2R_1R_2 - 2R_1^2)R_{AC} - 8R_1R_2(2R_1 + R_2) = 0$$

代入 $R_2 = \sqrt{2}R_1$, 简化为

$$(2 + \sqrt{2})R_{AC}^2 + 4\sqrt{2}R_1R_{AC} - 16(1 + \sqrt{2})R_1^2 = 0 \quad ⑥$$

得出合理解

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_1 \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4(2 + \sqrt{2}) \times 16(1 + \sqrt{2})}}{2(2 + \sqrt{2})} \\ &= R_1 \frac{-4\sqrt{2} + 4(1 + \sqrt{2})\sqrt{6}}{2(2 + \sqrt{2})} \\ &= 2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)R_1 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)lr_0 \quad ⑦ \end{aligned}$$

(2) 当 E, G 两端间加上电压后, 根据图(a)网络的对称性, 在 HF 连线上各节点的电势相等. 所以可把 H, F 两节点拆开, 改画成网络, 如图 10-18(d) 所示.

容易看出, 图(d)中 A, C 间网络与 E, G 间网络在形式上相似, 而且在线度上后者是前者的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍,

因此

$$R'_{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_{AC} \quad \text{⑧}$$

这里 R'_{EG} 表示正方形 $EFGH$ 及其内部的网络关于 E, G 两端点的等效电阻. 于是原网络关于 E, G 两端点的等效电阻 R_{EG} 为

$$R_{EG} = \left(\frac{1}{2l_0} + \frac{1}{R'_{EG}} + \frac{1}{2l_0} \right)^{-1} = \left[\frac{1}{l_0} + \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)l_0} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} l_0 = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)^2 (\sqrt{3} - 1) l_0 = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) l_0$$

方法与技巧 这是一个典型的求正多边形互相嵌套的无穷网络的等效电阻的题目, 利用对称性对折之后, 找出内含的一位似形并令其阻值为 R_{II} , 并找到 R_{II} 与所求电阻 R_{AC} 之间的关系 $R_{II} = \frac{1}{2} R_{AC}$, 最后列出 R_{AC} 的方程, 其中含有 R_{II} , 但考虑二者之间的关系即可求解. 这是这类题目常用的方法. 第(2)问也是运用这个方法.

例 4 如图 10-19 所示的电路中, 各电源的内阻均为零, 其中 B, C 两点与其右方由 1.0Ω 的电阻和 2.0Ω 的电阻构成的无穷组合电路相接. 求图中 $10 \mu\text{F}$ 的电容器与 E 点相接的极板上的电荷量.

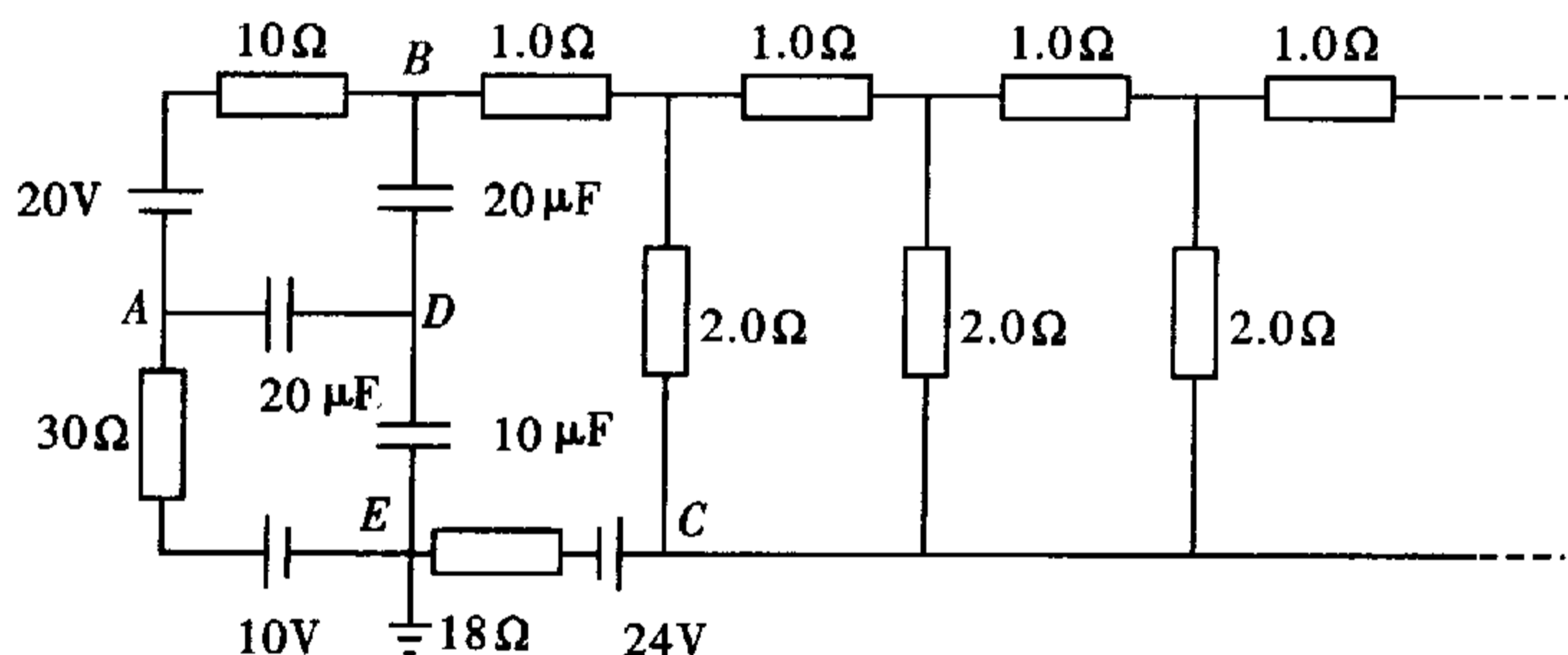


图 10-19

解析 设 B, C 右方无穷组合电路的等效电阻为 R_{BC} , 则题图中通有电流的电路可以简化为图 10-20 中的电路. B, C 右方的电路又可简化为图 10-21 的电路, 其中 $R_{B'C'}$ 是虚线右方电路的等效电阻. 由于 B', C' 右方的电路与 B, C 右方的电路结构相同, 而且都是无穷组合电路, 故有

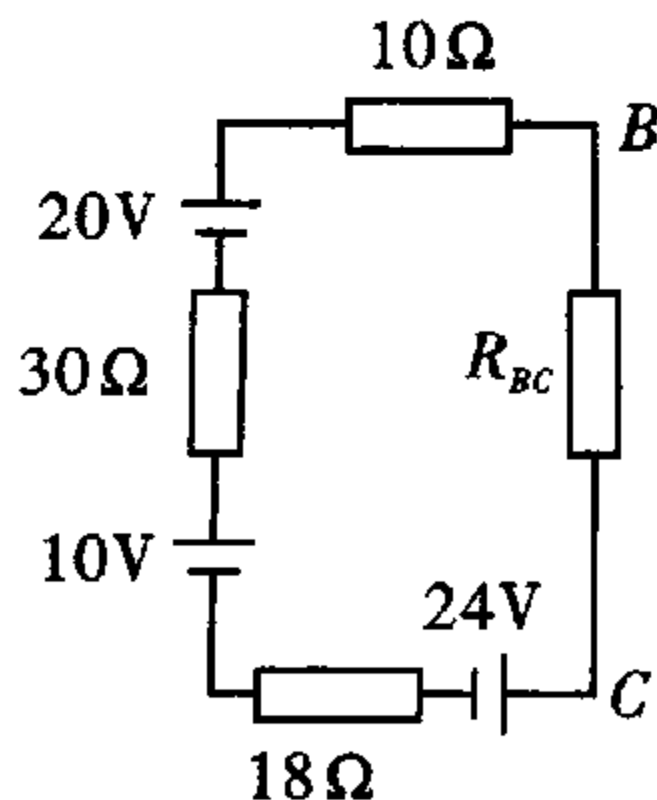


图 10-20

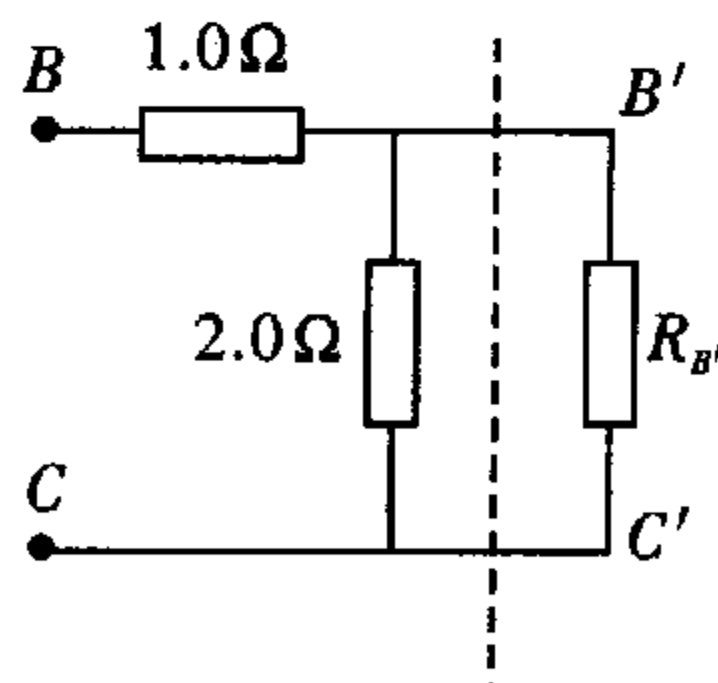


图 10-21

$$R_{BC} = R_{B'C'} \quad ①$$

由电阻串、并联公式可得

$$R_{BC} = 1 + \frac{2R_{B'C'}}{2 + R_{B'C'}} \quad ②$$

由①、②两式得

$$R_{BC}^2 - R_{BC} - 2 = 0$$

解得

$$R_{BC} = 2.0 \Omega \quad ③$$

图 10-20 所示回路中的电流为

$$I = \frac{20 + 10 - 24}{10 + 30 + 18 + 2} \text{A} = 0.10 \text{A} \quad ④$$

电流沿顺时针方向.

设电路中三个电容器的电容分别为 C_1 、 C_2 和 C_3 , 各电容器极板上的电荷量分别为 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 , 极性如图 10-22 所示. 由于电荷守恒, 在虚线框内, 三个极板上电荷的代数和应为零, 即

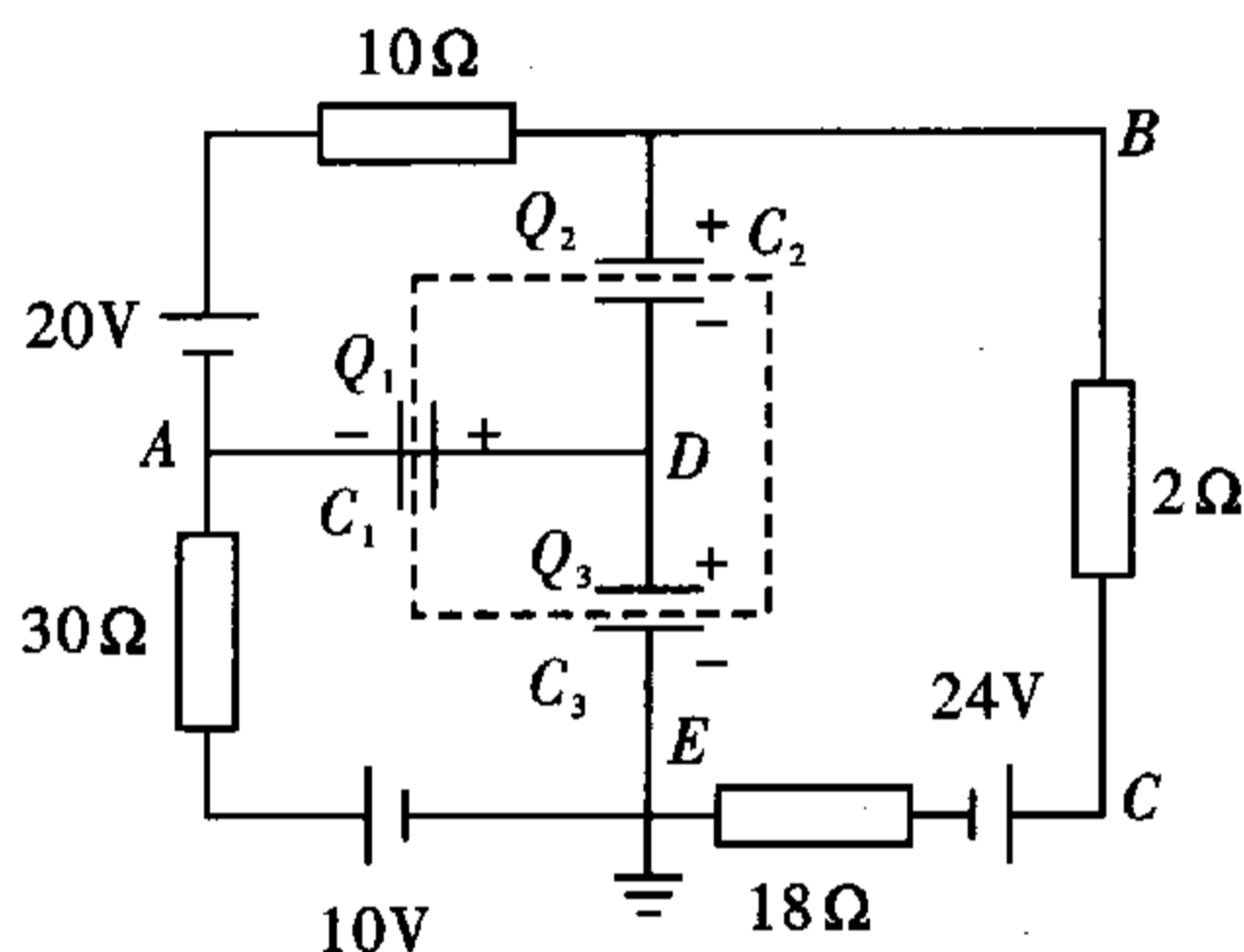


图 10-22

$$Q_1 + Q_3 - Q_2 = 0 \quad ⑤$$

A、E 两点间的电势差

$$U_A - U_E = -\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} \quad ⑥$$

又有

$$U_A - U_E = (10 - 30 \times 0.10) \text{V} = 7.0 \text{V} \quad ⑦$$

B、E 两点间的电势差

$$U_B - U_E = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad ⑧$$

又有

$$U_B - U_E = (24 + 20 \times 0.10) \text{V} = 26 \text{V} \quad ⑨$$

根据⑤、⑥、⑦、⑧、⑨式并代入 C_1 、 C_2 和 C_3 之值后可得

$$Q_3 = 1.3 \times 10^{-4} \text{C} \quad ⑩$$

即电容器 C_3 与 E 点相接的极板带负电, 电荷量为 $1.3 \times 10^{-4} \text{C}$.

方法与技巧 这是一个电阻、电容混联的题目,电路稳定后,把所有电容部分拆掉,而右边是一线性无限电阻网络,利用常用的方法可求出其等效电阻.这样得到图 10-20 所示电路,从而计算出回路电流,再利用数电压法计算相应点电势差,再进一步计算出电容器上的电量,图 10-22 中 D 点连接三个电容器的三个极板形成一个孤岛,三个板上电荷的代数和一定为零.

【解题尝试】

- 三个相同的均匀金属圆圈两两相交地连成如图 10-23 所示的网络,已知每一个金属圆圈的电阻都是 R ,试求 A 、 B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .

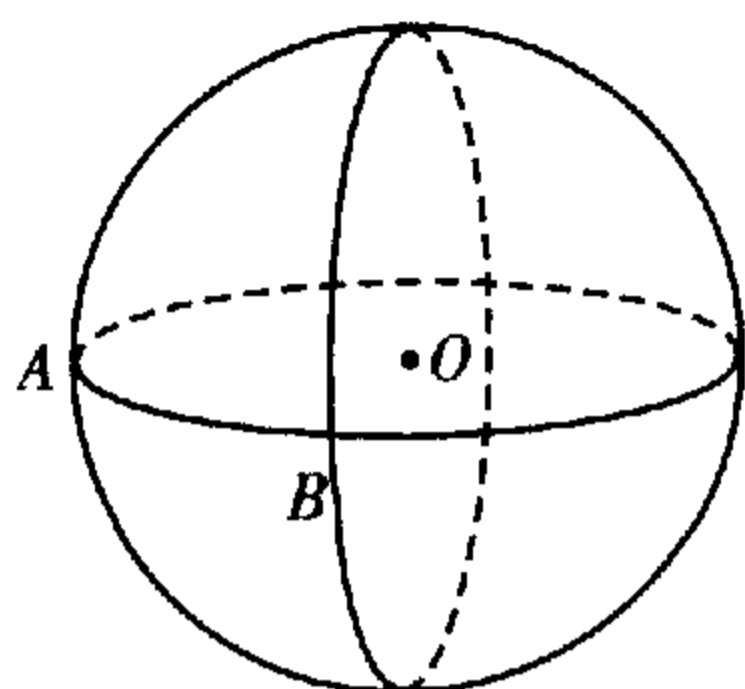


图 10-23

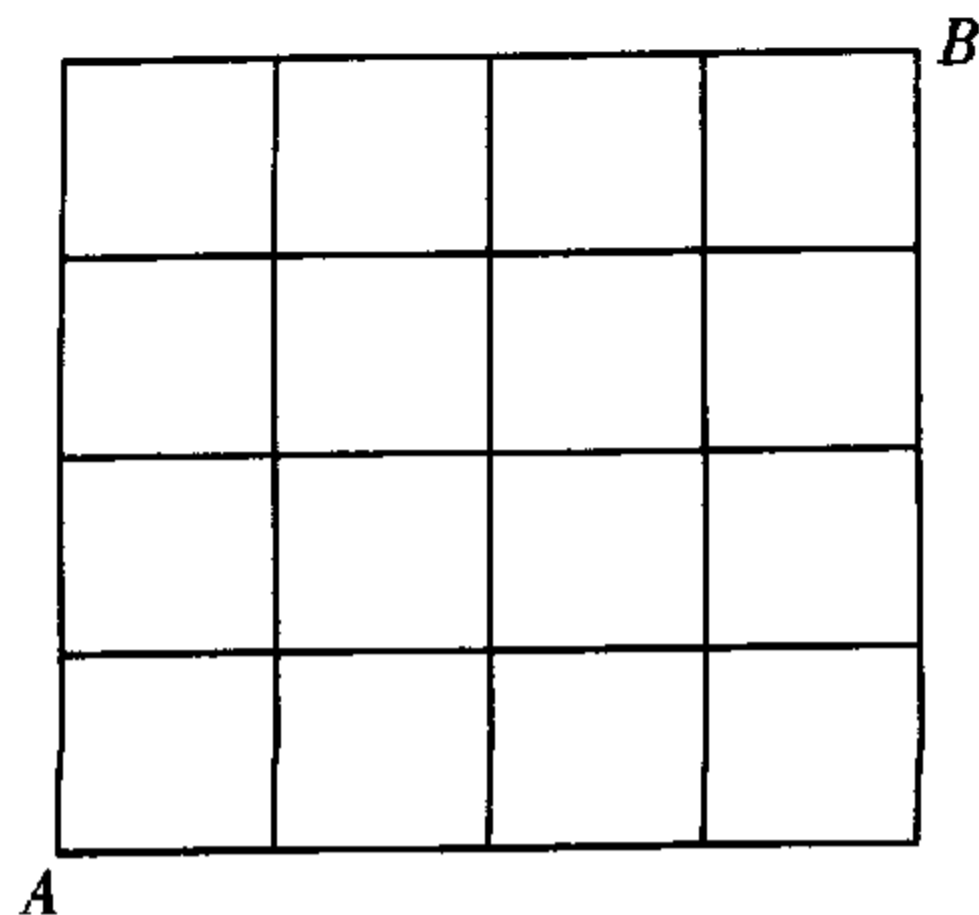


图 10-24

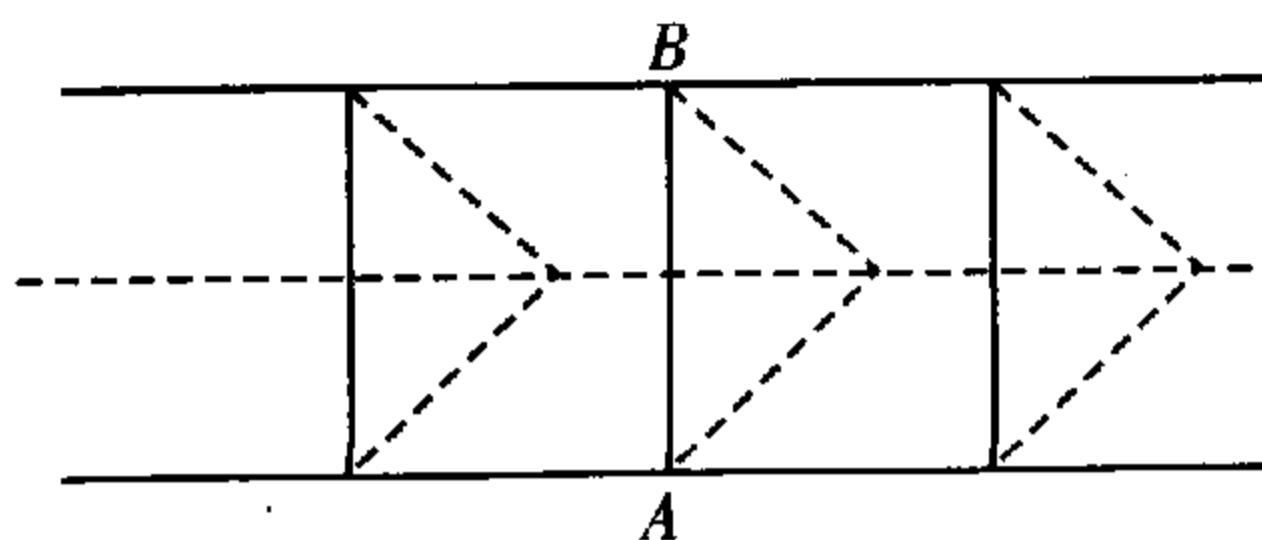


图 10-25

- 如图 10-24 所示,由电阻丝构成的网络中,每一段电阻丝的电阻均为 R ,试求 R_{AB} .
- 如图 10-25 所示是由电阻丝连接成的无限电阻网络,已知每一段电阻丝的电阻均为 r ,试求 A 、 B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .
- 如图 10-26 所示为由粗细、质地均匀的细金属丝连成的无限内接网络.已知金属丝单位长度电阻为 R_0 .求等效电阻 R_{AB} , $\triangle ABC$ 为等边三角形,内接三角形的顶点均为三角形各边的中点.

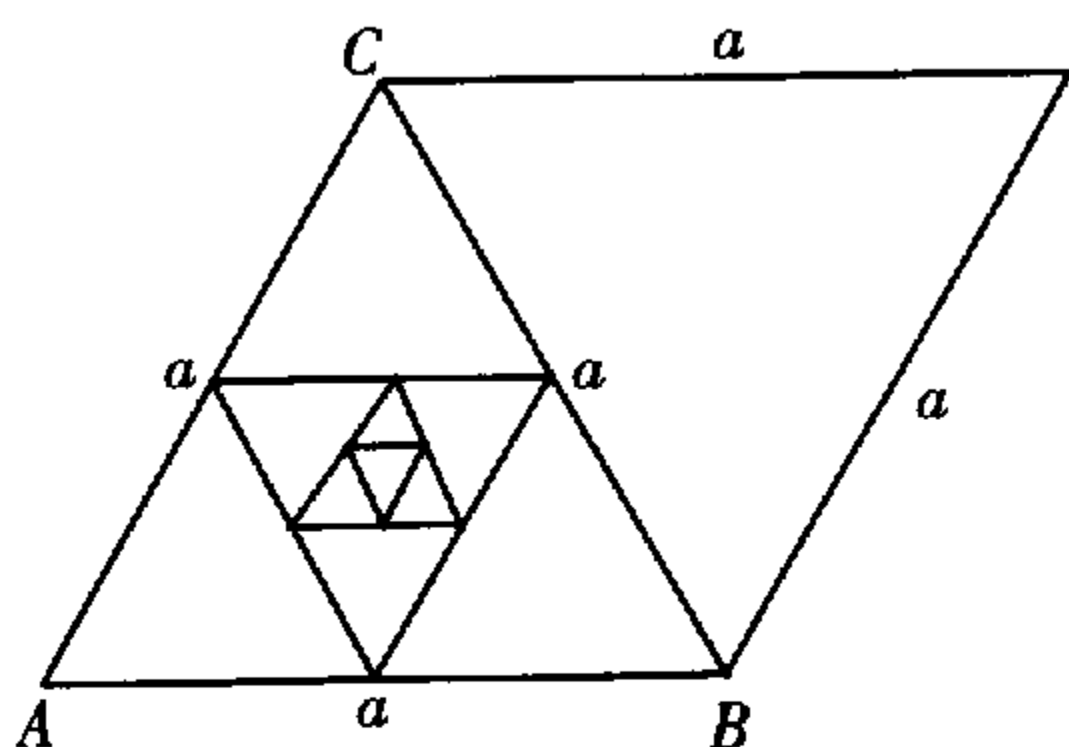


图 10-26

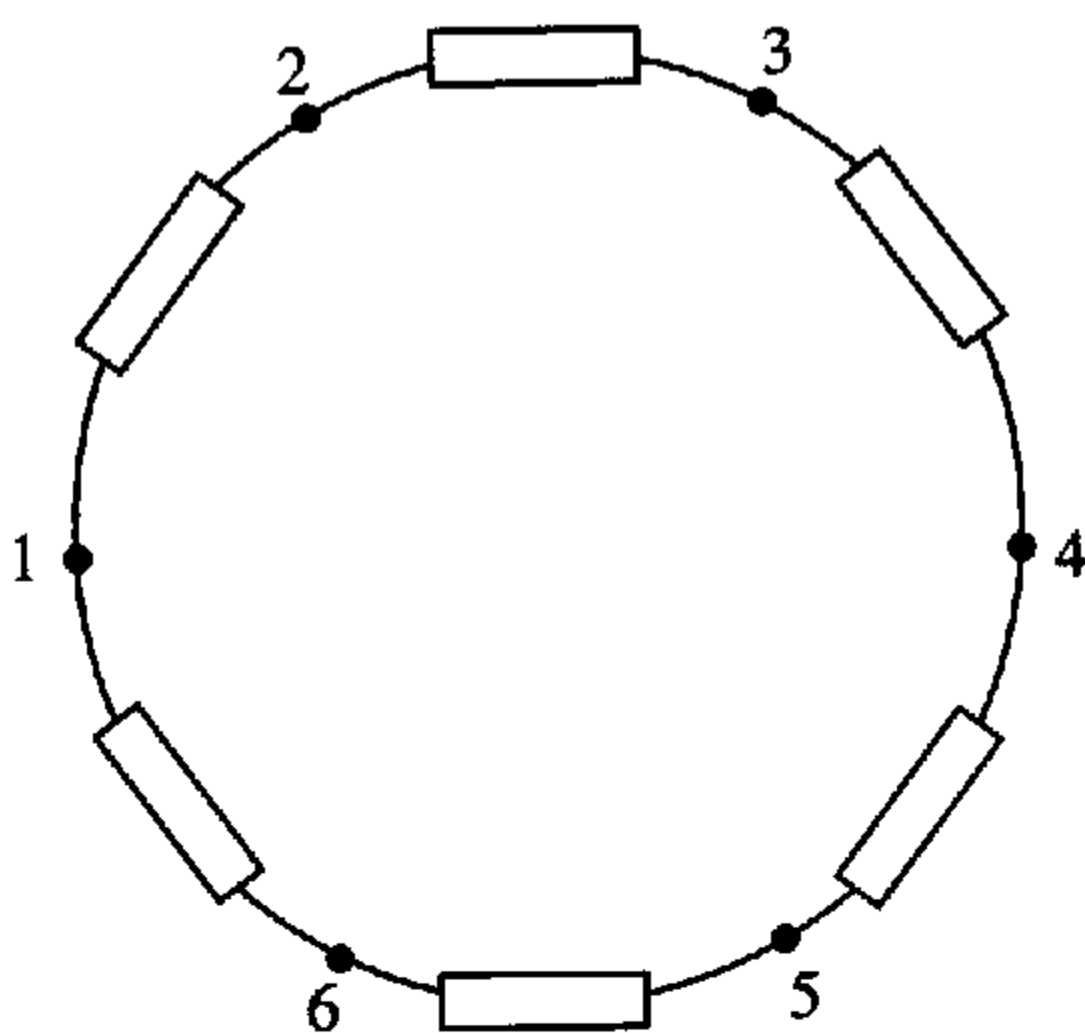


图 10-27

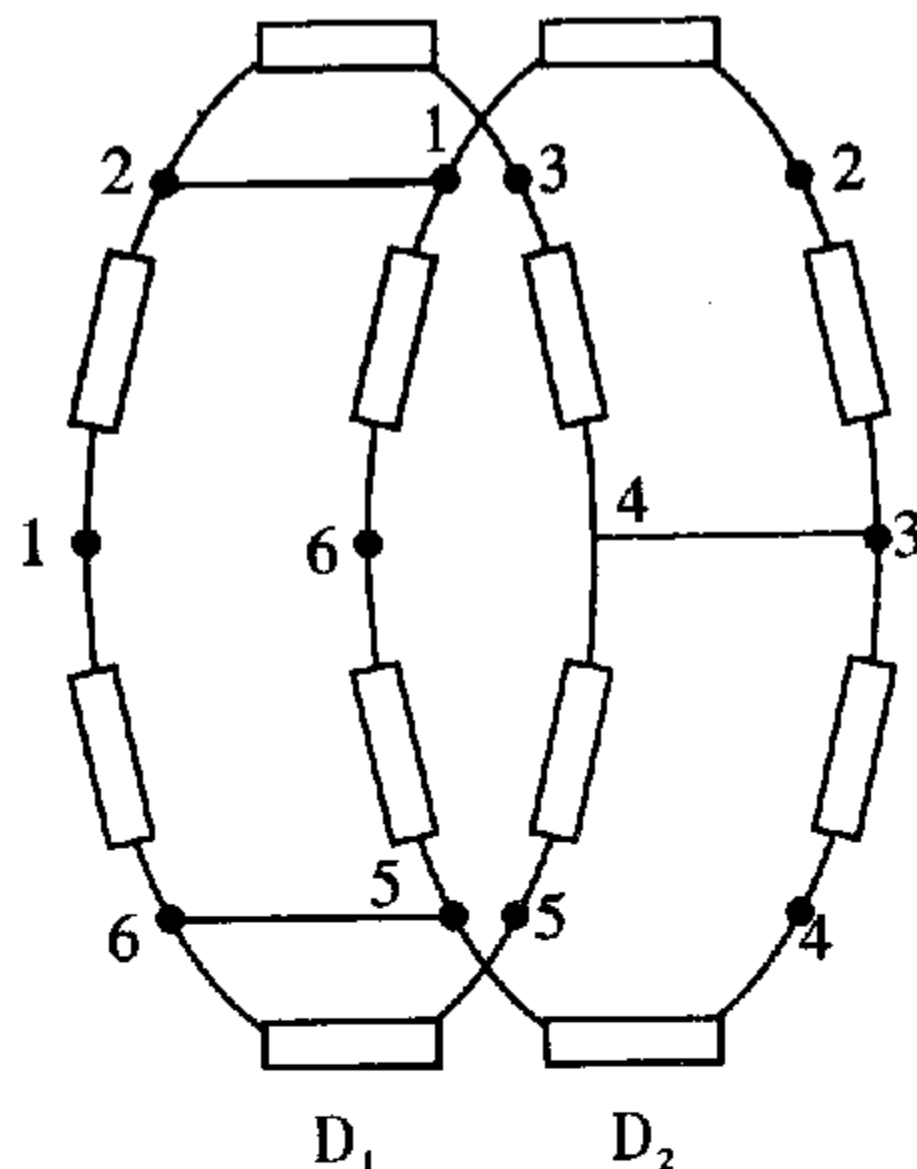


图 10-28

- 六个相同的电阻(阻值均为 R)连成一个电阻环,六个接点依次为 1、2、3、4、5 和 6,如图 10-27 所示,现有五个完全相同的这样的电阻环,分别称为 D_1 、 D_2 、 D_3 ... D_5 .
现在将 D_2 的 1、3、5 三点分别与 D_1 的 2、4、6 三点用导线连接,如图 10-28 所示,然后将 D_3 的 1、

3、5 三点分别与 D_2 的 2、4、6 三点用导线连接……依此类推,最后将 D_3 的 1、3、5 三点分别连接到 D_4 的 2、4、6 三点上.

(1) 证明全部接好后在 D_1 上的 1、3 两点间的等效电阻为 $\frac{724}{627}R$.

(2) 求全部接好后在 D_3 上的 1、3 两点间的等效电阻.

6. 如图 10-29, 一个平面把空间分为两个部分. 一半充满了均匀的导电介质, 而物理学家在另一半空间里工作. 他们在平面上画出一个边长为 a 的正方形的轮廓, 并用精细的电极使一电流 I_0 在正方形的两个相邻角, 一个流入一个流出. 同时, 他们测量另两个角之间的电势差 V . 如图所示. 问物理学家们如何用这些数据来计算均匀介质的电阻率?

7. 一个立方体, 每条边都是 1Ω 的电阻. 问立方体的体对角线的两个端点之间的等效电阻为多少?

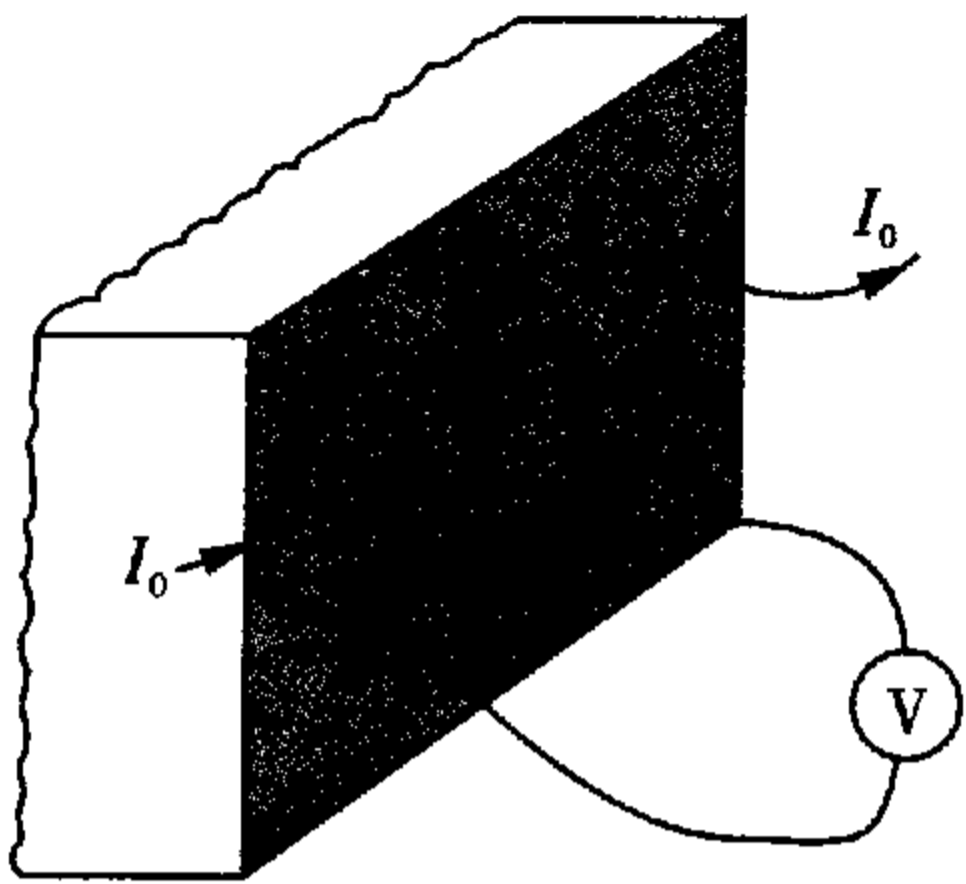


图 10-29

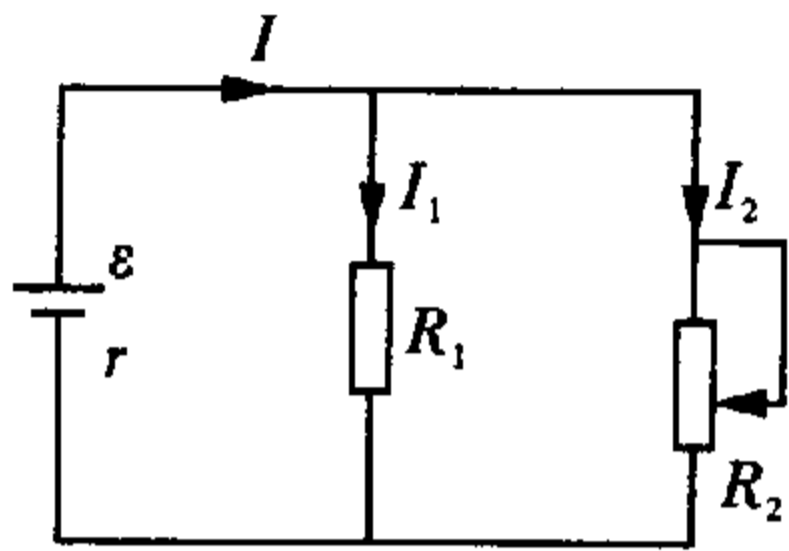


图 10-30

8. 如图 10-30 所示, 电源电动势 $\varepsilon = 10 \text{ V}$, 内阻 $r = 2 \Omega$, $R_1 = 8 \Omega$, R_2 为变阻器, 阻值可在 $0 \sim 12 \Omega$ 之间变化. 调节 R_2 , 问 R_1 和 R_2 上所消耗的最大电功率可达多大?

9. 如图 10-31 所示电路中,

$$R_1 = R_3 = R_5 = \dots = R_{99} = 5 \Omega$$

$$R_2 = R_4 = R_6 = \dots = R_{98} = 10 \Omega$$

$$R_{100} = 5 \Omega, \text{ 电源电动势 } \varepsilon = 10 \text{ V}, \text{ 内阻不计.}$$

(1) 求 R_2 上的电功率.

(2) 试找出各电阻上电功率分配的规律.

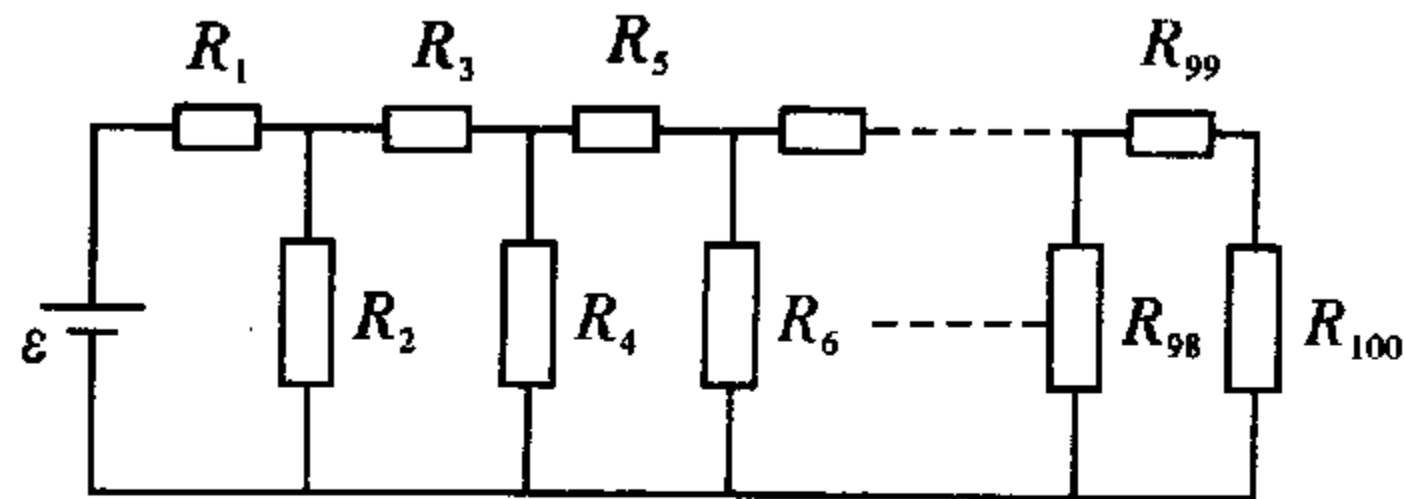


图 10-31

10. 在空间有 n 个点, 分别标记点 $1, 2, \dots, n$. 任意两点间均用一电阻为 R 的导线相连接, 再把点 1 和点 n 接到电动势为 ε , 内阻为 r 的电源上, 求流过连接点 1 和点 n 的电阻 R 上的电流强度值.

11. 在如图 10-32 所示的网络中, 已知道部分支路上电流值及方向、某些元件参数和支路交点的电势值(有关数值及参数已标在图上). 请你利用所给的有关数值及参数求出含有电阻 R_x 的支路

上的电流值 I_x 及其方向.

12. 如图 10-33 所示电路中, 已知每个电池的电动势为 2 V, 内电阻为 0.25Ω , $R_2 = 18 \Omega$, 安培表 A_1 的示数是 0.5 A, A_2 的示数是 0.3 A, 伏特表的示数为 3 V, 求:

- (1) R_1 、 R_3 和 R_4 的阻值;
- (2) 电池组的输出功率.

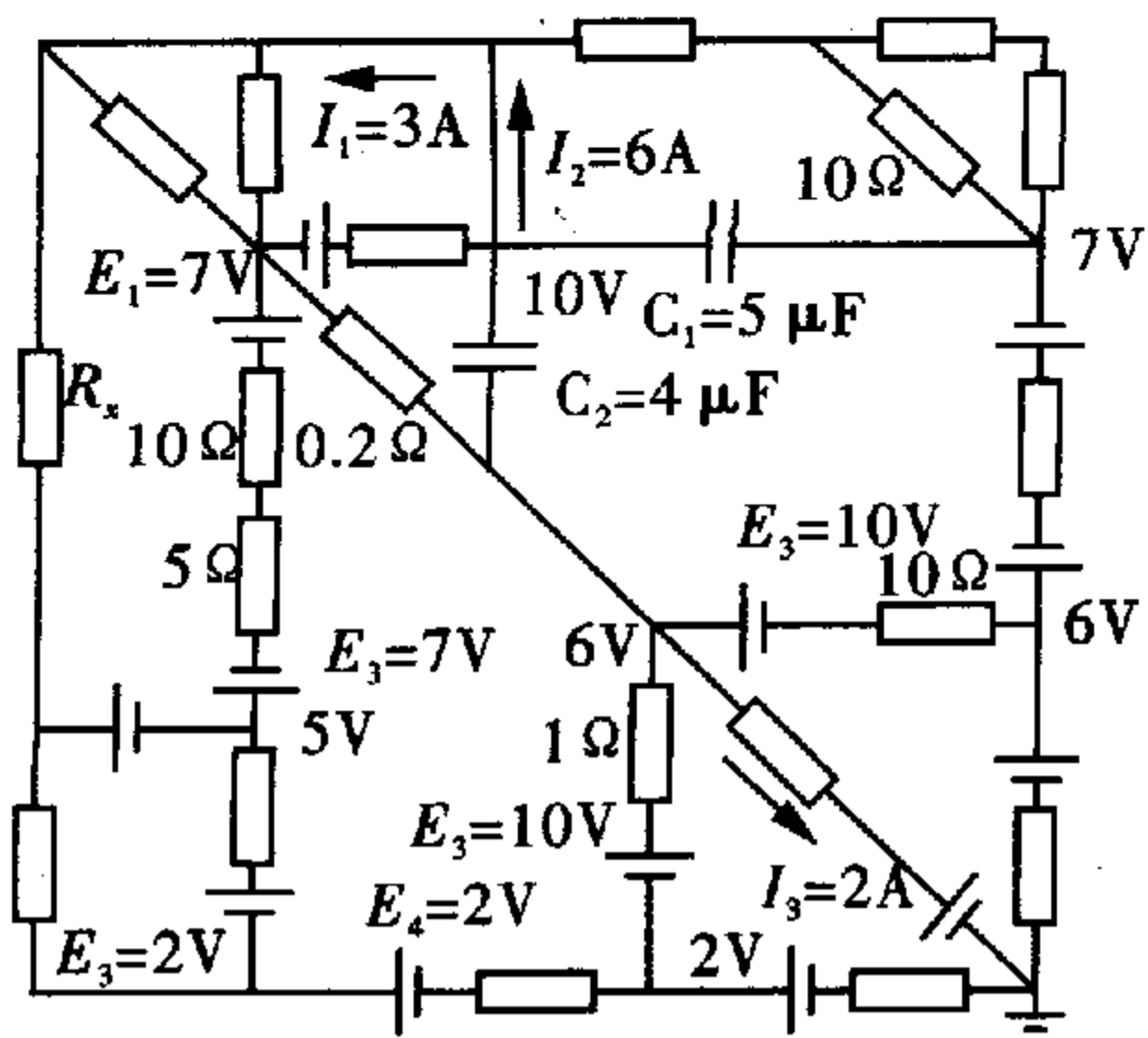


图 10-32

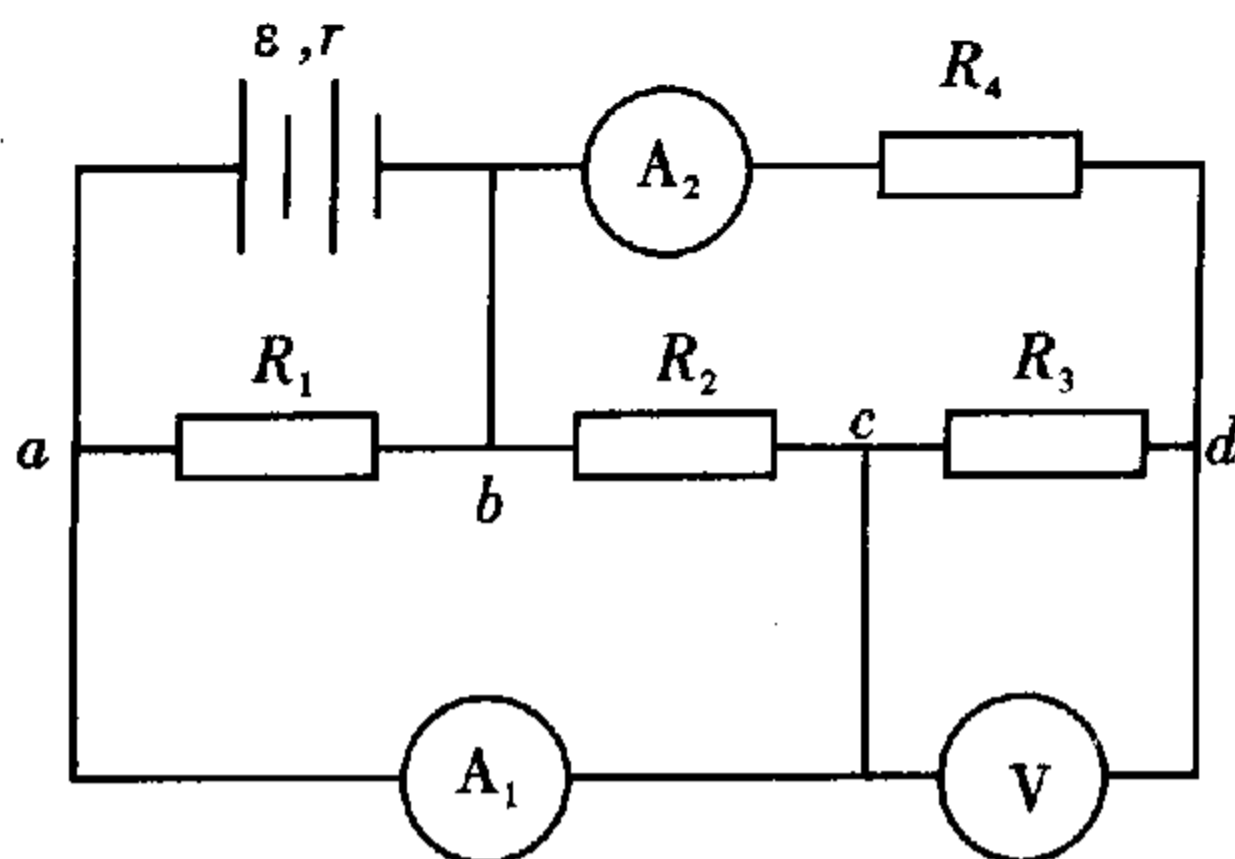


图 10-33

13. 如图 10-34 所示电路中, $C_1 = 4C_0$, $C_2 = 2C_0$, $C_3 = C_0$, 电池电动势为 ε , 不计内阻, C_0 和 ε 为已知量, 先在断开 K_4 的条件下, 接通 K_1 、 K_2 、 K_3 , 令电池给三个电容器充电; 然后断开 K_1 、 K_2 、 K_3 , 接通 K_4 , 使电容器放电, 求:

- (1) 放电过程中, 电阻 R 上共产生多少热量.
- (2) 放电过程达到放电总量一半时, R 上的电流是多大.

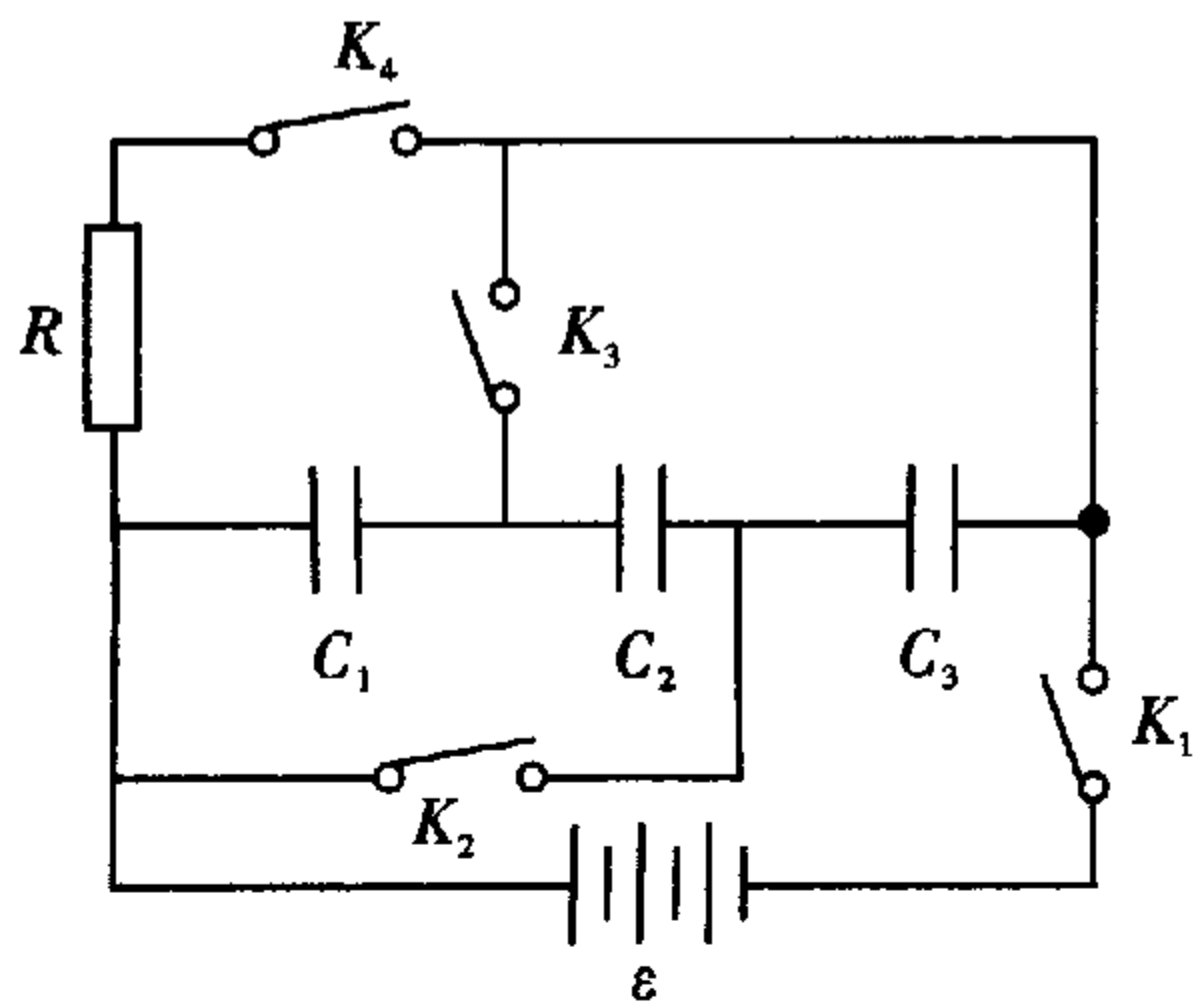


图 10-34

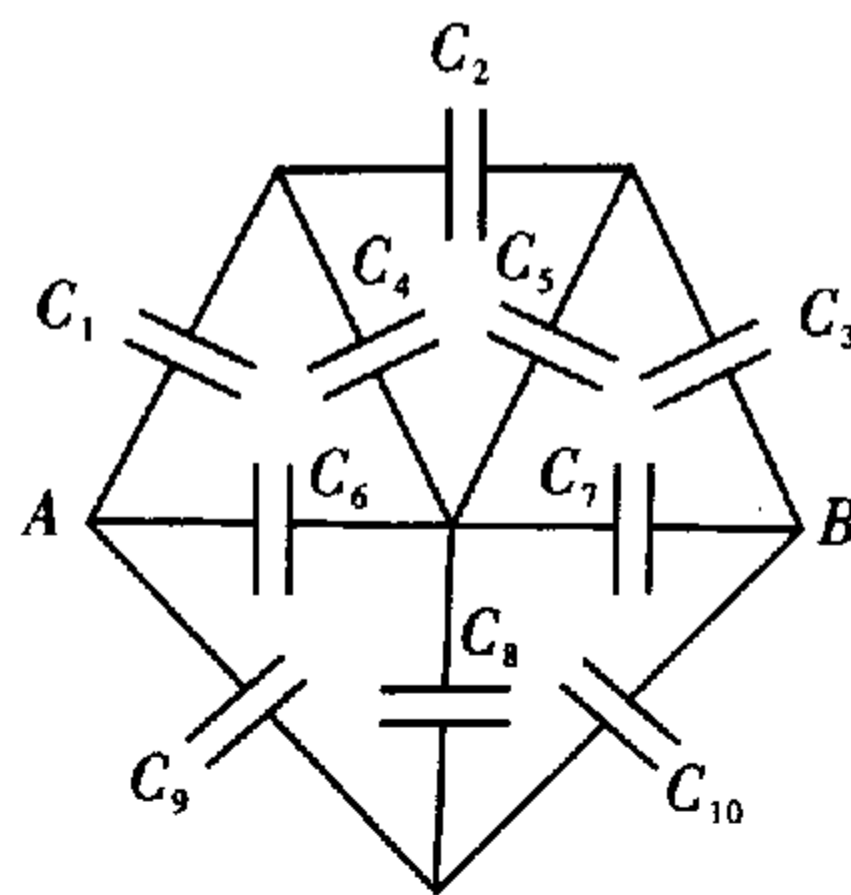


图 10-35

14. 在如图 10-35 所示的电容网络中, 已知 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$, $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2 \mu\text{F}$, $C_8 = C_{10} = 3 \mu\text{F}$. 试求 A, B 两点之间的等效电容 C_{AB} .

15. 如图 10-36(a) 所示, 电阻 $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, 电动势 $\varepsilon = 6 \text{ V}$, 两个相同的二极管 D 串联在电路中, 二极管 D 的 $I_D - U_D$ 特性曲线如图 10-36(b) 所示, 求:

- (1) 通过二极管的电流 I_D ;

(2) 电阻 R_1 消耗的功率 P_1 .

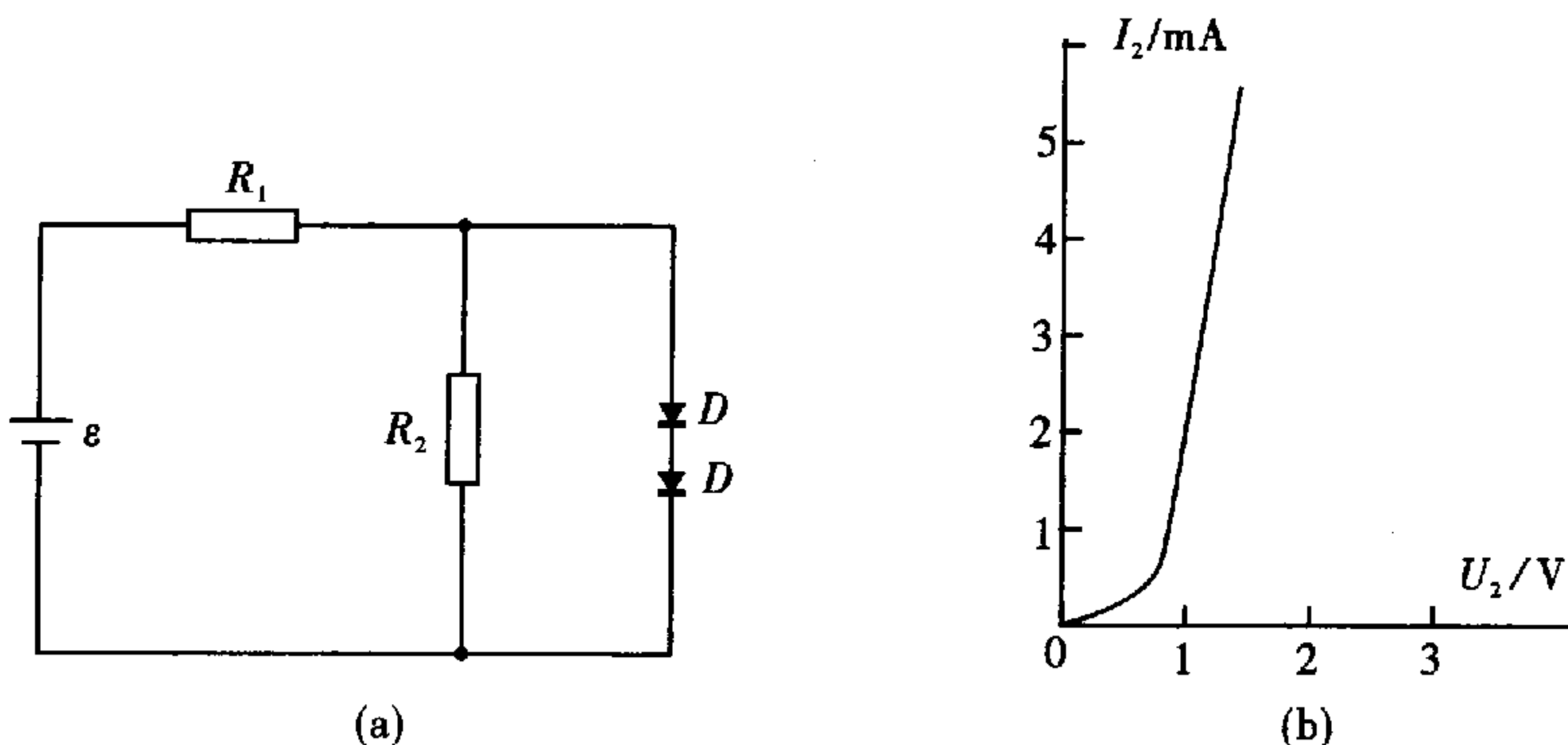


图 10-36

16. 有如图 10-37 所示的电路, 其中 E 为内阻可以忽略的电源电动势, R 为电阻的阻值; S 为开关; A 、 B 右边是由如图所标的 8 个完全相同容量均为 C 的理想电容器组成的电路. 问从合上 S 到各电容器充电完毕, 电阻 R 上发热消耗的能量是多少? (在解题时, 要求在图上标出你所设定的各个电容器极板上电荷的正负)

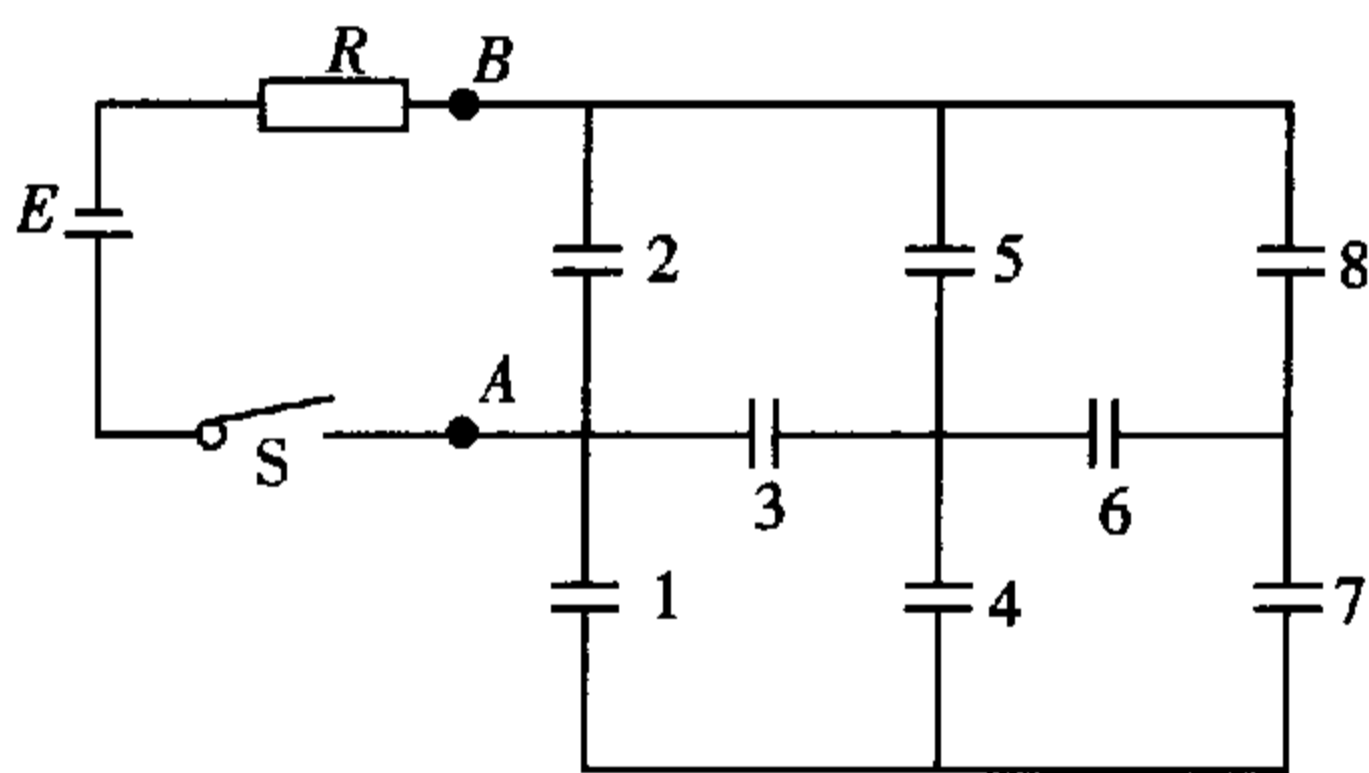


图 10-37

第十一章 磁 场

【学习目标】

一、磁场 磁感应强度

由于自然界中磁石的存在,人类很早对磁现象就有一些认识.磁石具有N极和S极,同极排斥,异极吸引;地球是一个大磁体.1920年丹麦科学家奥斯特发现了电流的磁效应.历史上第一次把磁现象和电现象联在了一起.

磁极间、磁极与电流间、电流间的相互作用是通过磁场传递的,为描绘磁场,我们引入磁感应强度这个物理量.当长为 ΔL 、载有电流 I 的电流元置于磁场某点时,其所受力与 ΔL 的方位有关.若电流元在某一方位时受最大力 F_m ,则 F_m 与 $I\Delta L$ 的比值定义为磁感应强度 \vec{B} 的大小:

$$B = \frac{F_m}{I\Delta L}$$

磁感应强度 \vec{B} 的方向由 $I\Delta L$ 受力为零、且是稳定平衡时电流元的方向给出.

真空中,当产生磁场的载流回路确定后,空间各点的 \vec{B} 也就确定了.

由电流求空间各点 \vec{B} 由实验定律毕奥-萨伐尔定律给出,对图11-1所示电流元 $I\Delta L$ 在相对其位置为 \vec{r} 的 P 处所产生磁场的磁感应强度为

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta L \sin\theta}{r^2}$$

θ 为 $I\Delta L$ 与 \vec{r} 正方向的夹角, μ_0 为真空的磁导率.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

P 点 \vec{B} 的方向满足右手螺旋法则.

整个载流回路由许多 $I\Delta L$ 组成,空间任意点 P 的 \vec{B} 由所有 $I\Delta L$ 在 P 点产生的 $\Delta \vec{B}$ 叠加而成.由毕-萨定律和矢量叠加原理我们可得到许多载流导线所产生磁场的磁感应强度:

$$\text{无限长载流直导线外的一点 } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{圆电流轴线上距圆心为 } x \text{ 的一点 } B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\text{圆电流圆心 } B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\text{无限长直螺线管内 } B = \mu_0 n I$$

式中 n 为无限长直螺线管单位长度上线圈的匝数.

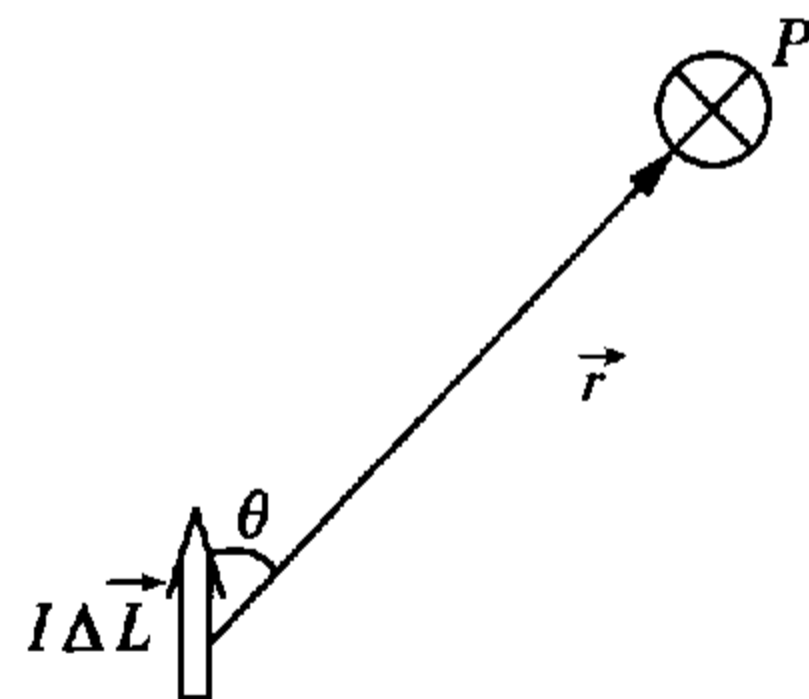


图 11-1

二、磁感线 磁通量

我们可利用磁感线来描绘磁场的分布,磁感线上任一点的切线方向表示该点磁感应强度 \vec{B} 的方向,磁感线的密度表示 \vec{B} 的大小.磁感线是无头无尾的封闭曲线;它不中断,也不相交;与电流相互套合.

通过一给定曲面的磁感线总数称为通过该曲面的磁通量,若磁场为均匀场,曲面为一平面,如图11-2所示:

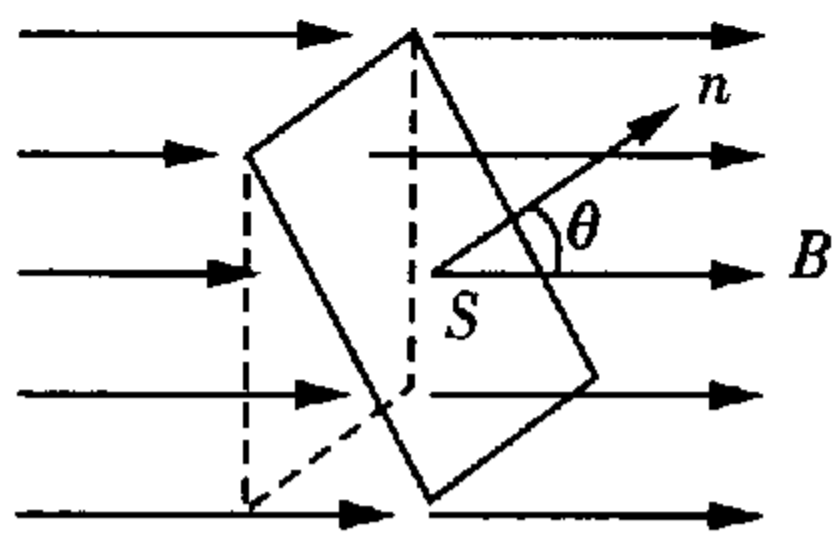


图 11-2

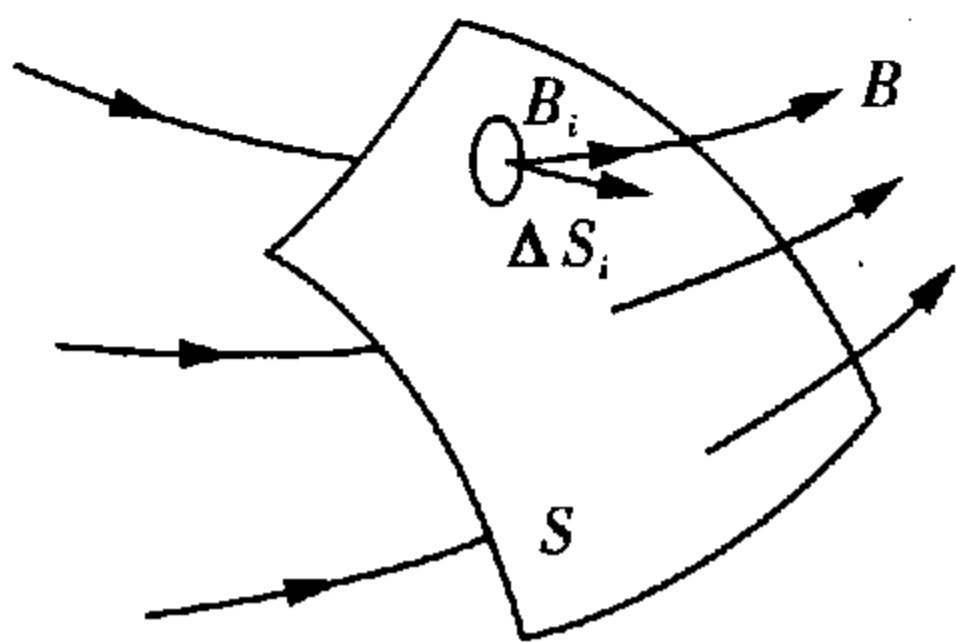


图 11-3

$$\Phi_m = BS\cos\theta$$

若磁场和曲面都是任意的,如图11-3所示,先求出通过任一小面元 ΔS_i 的磁通量后求和即得

$$\Phi_m = \sum B_i \cos\theta_i \Delta S_i$$

三、磁场对载流导线和载流线圈的作用

1. 安培力

如图11-4所示,长为 ΔL 电流强度为 I 的载流导线处的磁感应强度为 \vec{B} ,电流元的方向与 \vec{B} 之间的夹角为 θ ,则电流元所受安培力为

$$F = IB\Delta L\sin\theta$$

力的方向可由左手定则确定.

任意长度、任意形状的载流导线可以分解为若干小段直导线,各小段所受到的安培力的矢量和就是整个导线所受到的安培力.

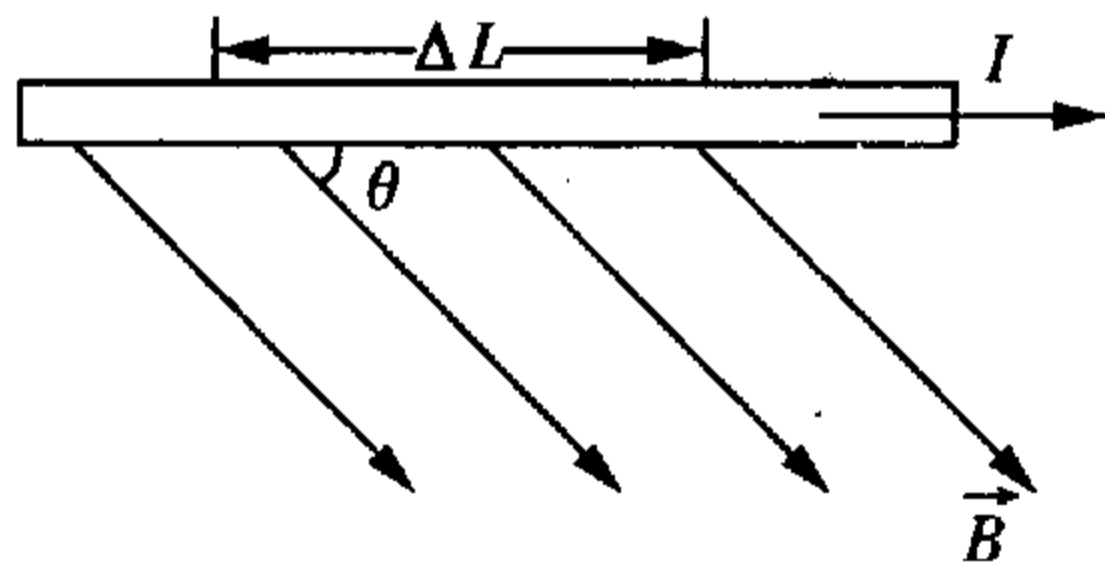


图 11-4

2. 磁场对载流平面线圈的作用

匀强磁场中,平面载流线圈各电流元所受力的矢量和为零,即

$$\sum \Delta \vec{F}_i = 0$$

但线圈受一力矩作用,其力矩大小为

$$M = ISB\sin\theta$$

其中 I 为载流平面线圈中的电流, S 为平面线圈的面积, θ 为平面法线与 \vec{B} 之间的夹角,平面法线与线圈中电流绕行方向满足右手定则.力矩的方向可由力矩总是使线圈法线方向与 \vec{B} 的方向一致,从而使通过平面线圈的磁通量最大来决定.如图11-5、11-6所示.

非匀强磁场中,载流平面线圈除受到力矩之外,其各电流元所受力的矢量和不再为零,当平面法线与 \vec{B} 同向时,力的矢量和是指向磁场强的一侧,从而使线圈向磁场强的一侧移动,从而使通过线圈

平面的磁通量最大.

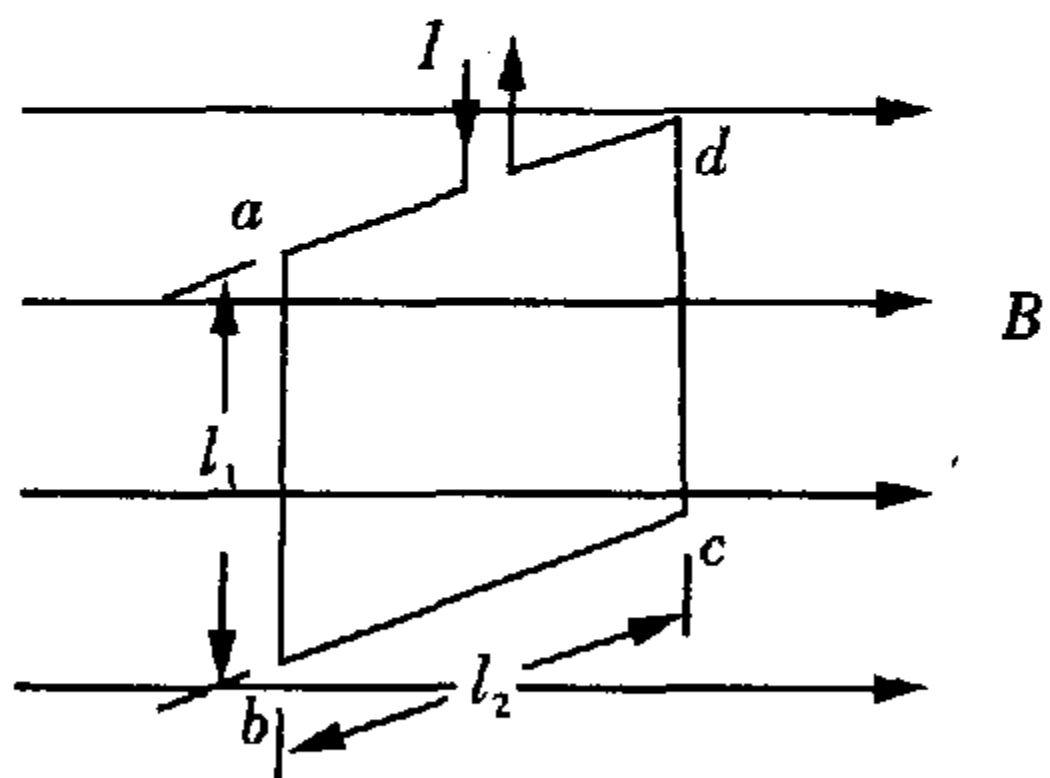


图 11-5

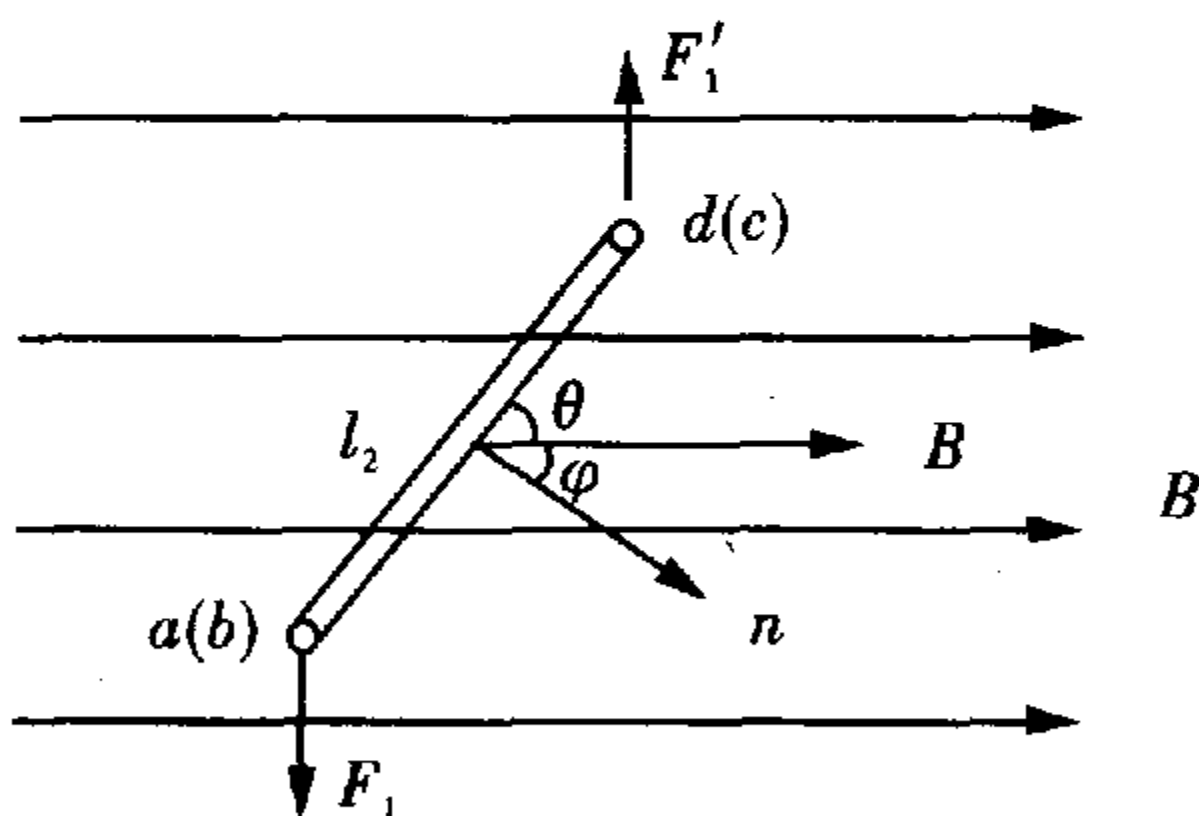


图 11-6

四、带电粒子在磁场中的运动

1. 洛伦兹力

磁场对运动电荷的作用力称之为洛伦兹力. 若带电粒子所带电量为 q , 速度为 \vec{v} , 则运动粒子在磁感应强度为 \vec{B} 的一点所受洛伦兹力的大小为

$$f = |q|vB\sin\theta$$

θ 为 \vec{v} 的正方向与 \vec{B} 的正方向的夹角, \vec{f} 的方向可用右手定则确定: 伸出右手, 四指顺着 \vec{v} 的方向, 沿小于 180° 的方向绕向 \vec{B} 的方向, 若 q 为正, 则大拇指的方向为洛伦兹力的方向; 若 q 为负, 则洛伦兹力的方向与大拇指的方向相反, 洛伦兹力总是与粒子运动速度垂直, 洛伦兹力不做功, 它不能改变运动电荷速度的大小, 只能改变速度的方向, 使其运动路径发生弯曲.

2. 带电粒子在匀强磁场中的运动

设有一匀强磁场, 磁感应强度为 \vec{B} , 一电量为 q 、质量为 m 的粒子, 以初速度 \vec{v} 进入磁场中运动.

(1) $\vec{v} // \vec{B}$, $F = qv\sin\theta = 0$ 粒子在磁场中作匀速直线运动.

(2) $\vec{v} \perp \vec{B}$, $f = qvB$, 方向垂直于 \vec{v} 和 \vec{B} , 带电粒子在与磁场垂直的平面内作匀速圆周运动, f 为向心力.

圆周运动的半径 $R = \frac{mv}{qB}$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(3) \vec{v} 和 \vec{B} 成一任意夹角 α , 我们把 \vec{v} 分解为与 \vec{B} 平行的分量 $v\cos\alpha$ 和垂直分量 $v\sin\alpha$. 粒子所作的运动是上面两种运动的叠加, 粒子作螺旋运动, 螺旋半径 $R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$, 运动的周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$, 其螺距 h

$$= v\cos\alpha T = v\cos\alpha \frac{2\pi m}{qB}$$

上述结果是一种最简单的磁聚集原理. 设想从磁场 A 点射出一束很窄的带电粒子流, 其速率 v 相差无几, \vec{v} 与 \vec{B} 的夹角 α 都很小, 则

$$v_{//} = v\cos\alpha \approx v \quad v_{\perp} = v\sin\alpha \approx v\alpha$$

由于速度的垂直分量不等,粒子将在磁场作用下沿不同半径螺旋前进.但它们的水平分量近似相等,而运动周期又相同,故经过时间 T ,它们又都在前进 $h \approx \frac{2\pi mv}{qB}$ 后相遇于 A' 点,如图



图 11-7

11-7,这与光经透镜后聚焦的现象相似,所以叫磁聚焦.

3. 质谱仪

质谱仪是用来测定离子荷质比的仪器,图 11-8 为其示意图. N 为一离子源, S_1 、 S_2 间有加速电场. S_2 下为一称为速度选择器的装置, P_1 和 P_2 两板加一与板垂直的电场,电场强度为 E . 板间还加一垂直纸面向外的匀强磁场 B' , 速度选择器有一狭缝 S_3 , S_3 下为磁感应强度为 B , 方向垂直纸面向外的匀强磁场,离子源所产生的离子经 S_1 、 S_2 加速后沿窄缝进入速度选择器,离子同时受到电场力、磁场力的作用.

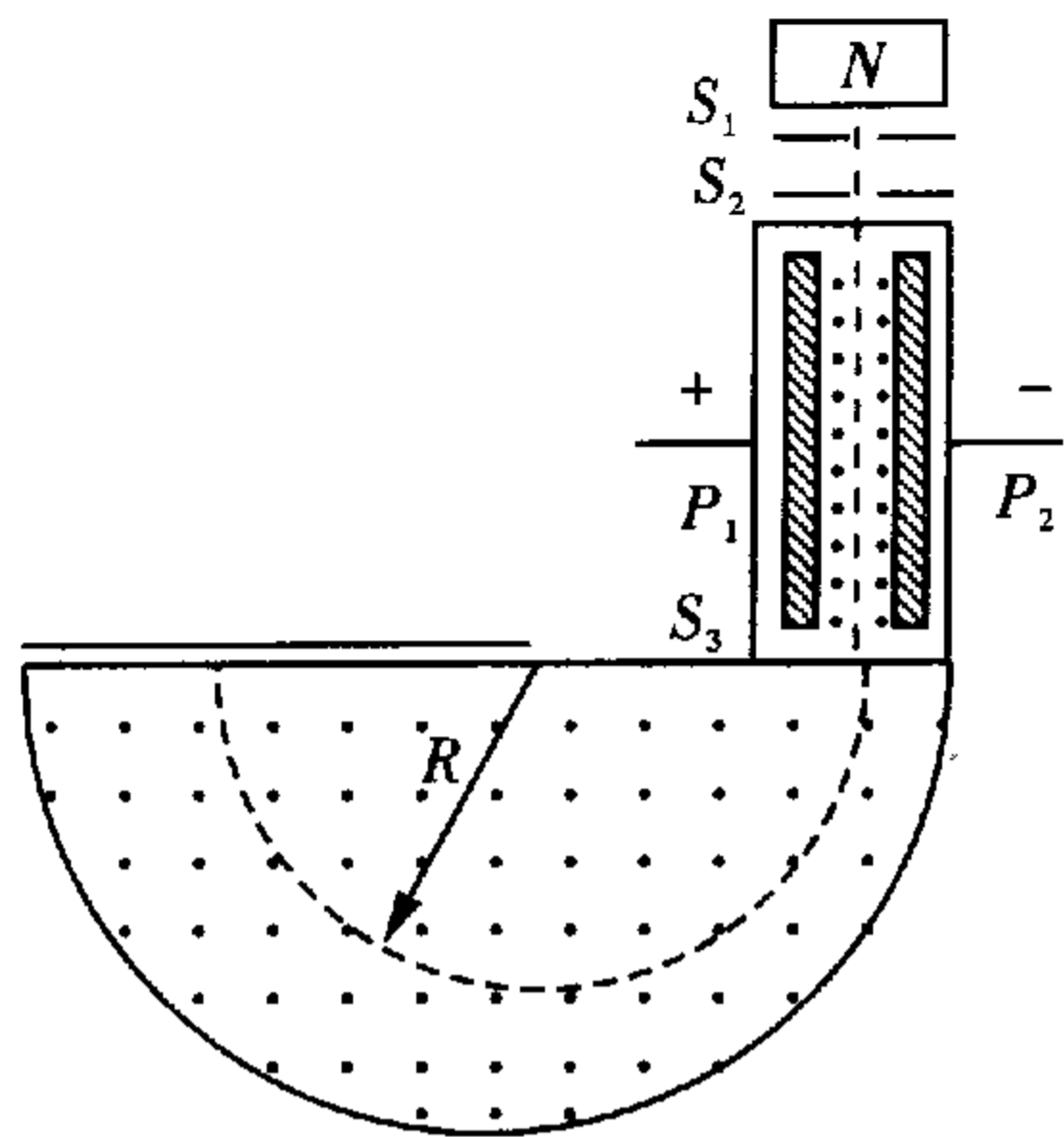


图 11-8

$$f_e = qE \quad f_m = qvB' \quad f_e \text{ 与 } f_m \text{ 方向相反}$$

要使离子无偏转地通过 S_3 , F 必为零. 于是我们得到顺利通过速度选择器的离子的速度一定为 $V = E/B'$.

离子通过 S_3 后又在磁场中做圆周运动,其半径为

$$R = \frac{mV}{qB} = \frac{mE}{qBB'}$$

若离子都是一价的, q 与电子电量等值,而 E 、 B 、 B' 均为事先设定,故可根据 R 测到 m ,从而区分各类同位素.

【解题钥匙】

例 1 在空间有相互垂直的场强为 E 的匀强电场和磁感应强度为 B 的匀强磁场. 如图 11-9 所示,一电子从原点静止释放,求电子在 y 轴方向前进的最大距离.

解析 虽然电子在 O 点速度为 0,但也可设想其具有沿 x 方向的速度 $+\vec{v}$ 和逆 x 轴方向的 $-\vec{v}$, \vec{v} 满足

$$Bev = eE \quad v = \frac{E}{B}$$

与 $+\vec{v}$ 所对应的洛伦兹力沿 y 轴反方向,与电子所受电场力平衡. 与 $-\vec{v}$ 对应的洛伦兹力与 y 轴同向. 电子的运动可视为一个速率为 v 的沿 x 轴正向的匀速直线运动和一个速率为 v 的匀速圆周运动的合成,对匀速圆周运动有

$$evB = m \frac{v^2}{R}, \quad \text{而 } R = \frac{y_m}{2}$$

$$y_m = \frac{2mE}{eB^2}$$

方法与技巧 电子受电场力的作用,沿 y 轴加速运动, y 轴上速度的增加,又使得 x 轴上洛伦兹

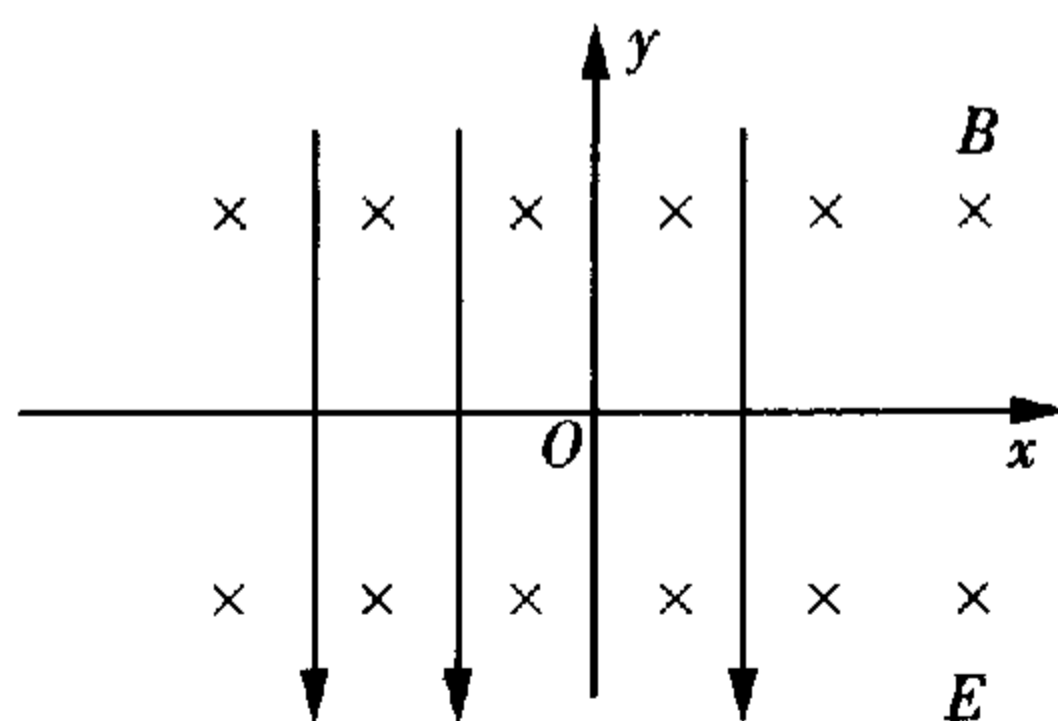


图 11-9

力不断增大,互相牵连使问题变得复杂,且力为变力,求解要用到微分方程. 这显然超过中学知识范畴. 而当配以一对速度后,其中一个速度对应的洛伦兹力与电场力平衡不再考虑电场的作用,电子一方面以这个速度沿 x 轴作匀速直线运动,一方面以配的另一速度在磁场中作匀速圆周运动,而这两种运动是我们熟悉的,使问题得以简化,这种配速度的方法我们经常用到,下面再举一个例子.

例 2 如图 11-10 所示的无限长平行板中存在一均匀电场 $\vec{E} = E \vec{i}$ 和磁场 $\vec{B} = -B \vec{k}$, 今有一质量为 m , 带有正电荷 q 的粒子从缝隙 A 以初速 \vec{v}_0 进入此平行板, 假定此粒子的初速 \vec{v}_0 保证它能靠近右侧的平行板而不与其相碰, 求: (1) 此粒子在 P 点处的曲率半径; (2) 若粒子的初速为 0, 且坐标原点选在 A 处, 求此粒子在平行板中的运动方程.

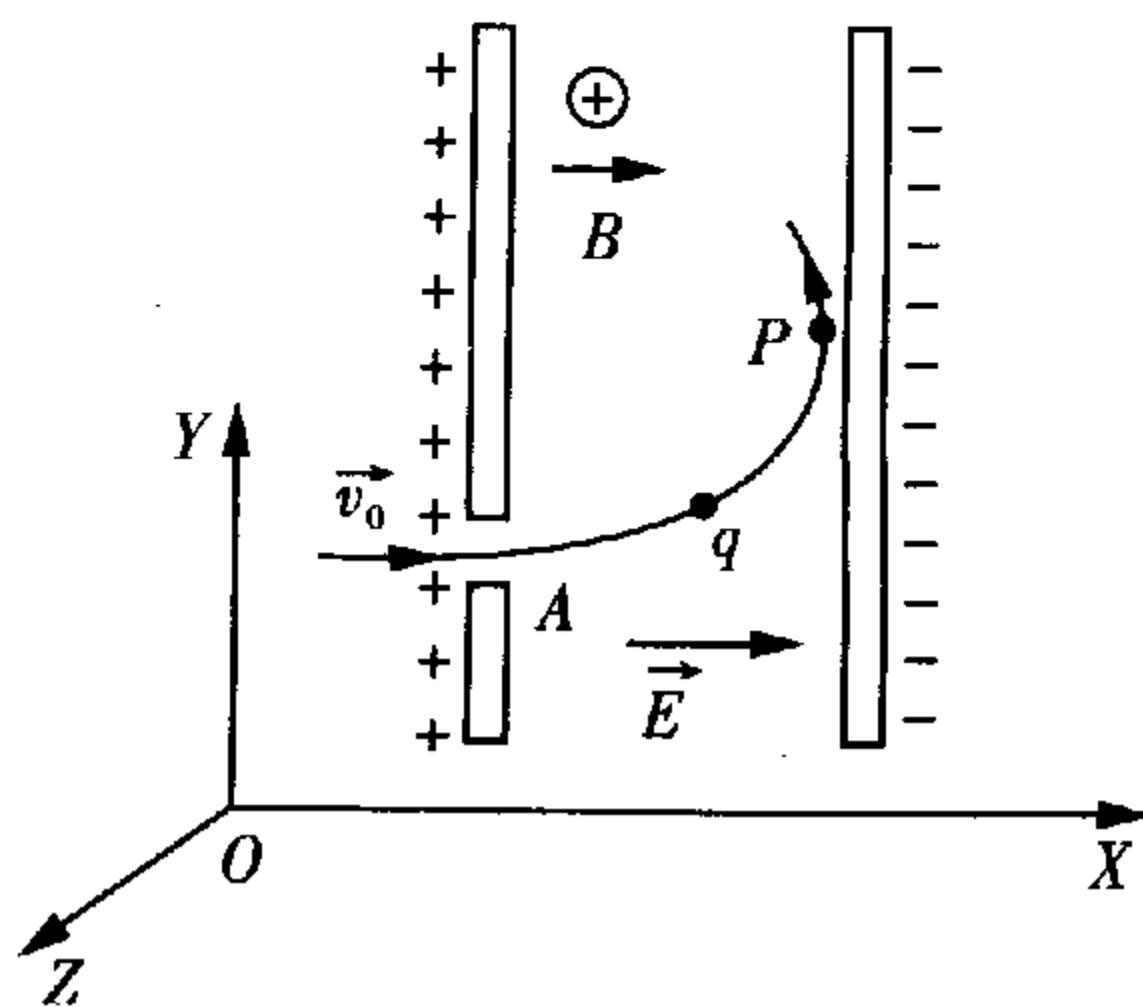


图 11-10

解析 (1) 这又是一个载电粒子在电磁场中运动的题目, 我们采取配一对大小相等、方向相反的速度的方法解这道题, 设粒子有一沿 y 轴的速度 v_1 和沿 y 轴负方向的速度 $-v_1$, 速度 v_1 所对应的洛伦兹力刚好与粒子在电场中受到的电场力平衡.

$$qE = qv_1 B \quad v_1 = \frac{E}{B}$$

这样粒子一方面以 v_1 的速度沿 y 轴正方向作匀速直线运动, 另一方面则以 v_2 做匀速圆周运动, 而 v_2 为

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{E}{B}\right)^2}$$

当粒子到达 P 点时, \vec{v}_2 的方向也沿 y 轴正方向, 与 \vec{v}_1 同向,

$$v_P = v_1 + v_2 = \frac{E}{B} + \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{E}{B}\right)^2}$$

此时粒子的向心力 F 为洛伦兹力和电场力的合力:

$$F = qBv_P - qE$$

由 $F = m \frac{v_P^2}{\rho}$ 可得 P 点曲率半径 ρ 为

$$\rho = \frac{m \left[\frac{E}{B} + \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{E}{B}\right)^2} \right]^2}{qB \left(\frac{E}{B} + \sqrt{v_0^2 + \frac{E^2}{B^2}} \right) - qE} = \frac{m \left(\frac{E}{B} + \sqrt{v_0^2 + \frac{E^2}{B^2}} \right)^2}{qB \sqrt{v_0^2 + \frac{E^2}{B^2}}}$$

(2) 给粒子配一沿 y 轴正方向的 v_1 和沿 y 轴负方向的 $-v_1$, $v_1 = \frac{E}{B}$, 则粒子一边沿 y 轴正向作匀速直线运动, 一边以 v_1 的速度在磁场中做匀速圆周运动, 其半径

$$R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{mE}{qB^2}$$

所对应的转动角速度 $\omega = \frac{v_1}{R} = \frac{qB}{m}$

则粒子运动方程为

$$\begin{cases} x = \frac{mE}{qB^2} (1 - \cos \frac{qB}{m} t) \\ y = \frac{E}{B} t - \frac{mE}{qB^2} \sin \frac{qB}{m} t \\ z = 0 \end{cases}$$

方法与技巧 给带电粒子配 $\pm v_1$ 速度后,可不考虑电场对粒子的作用,粒子运动视为沿 y 轴的匀速运动与磁场中匀速圆周运动叠加,大大减小了题目难度.也许会有人疑惑(1)中质点在 P 点时,分析向心力为什么还要考虑电场力,电场力不是与 v_1 所对应的洛伦兹平衡了吗?应提醒的是 $-v_1$ 始终存在的影响, $-v_1$ 还对应一洛伦兹力.也有人认为题目应给出两板间的宽度 d 才能求解,实际上,当 \vec{B} , \vec{E} 和 v_0 确定,题目又是要求靠近右板而又不相碰的条件,这样就决定了 d 的值,由图 11-11 可看到, $d = R + R\sin\theta = R(1 + \sin\theta)$

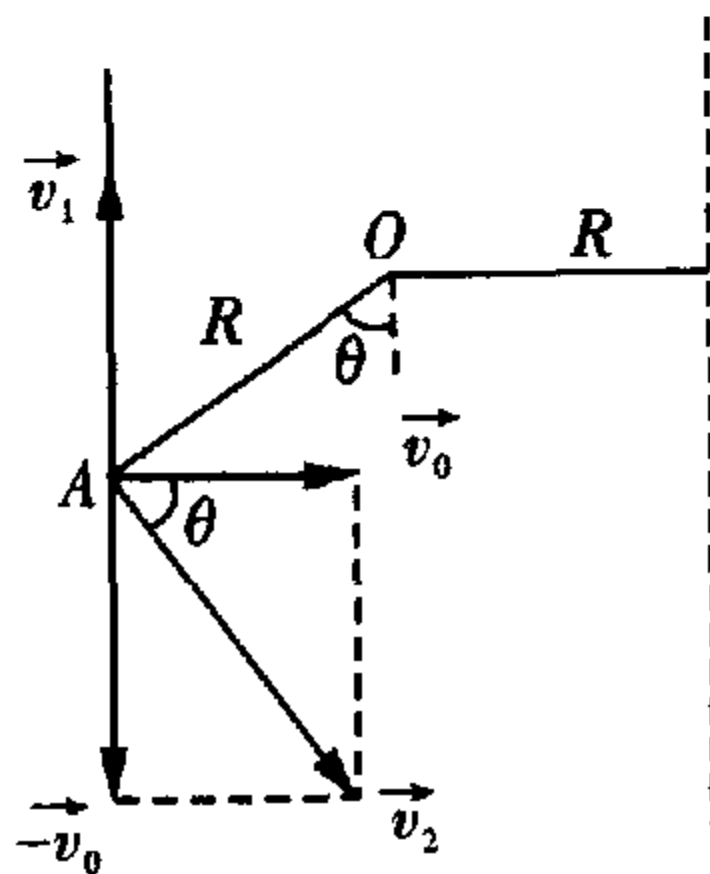


图 11-11

$$R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{m \sqrt{v_0^2 + \frac{E^2}{B^2}}}{qB}$$

$$\tan\theta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{E}{Bv_0}$$

联立解得

$$d = \frac{m \sqrt{v_0^2 + \frac{E^2}{B^2}}}{qB} \left(1 + \frac{E}{\sqrt{E^2 + B^2 v_0^2}} \right) = \frac{m(E + \sqrt{E^2 + B^2 v_0^2})}{qB^2}$$

从 d 的表达式中可看出 d 由 E 、 B 、 v_0 决定.

类似的题目还有运动粒子在磁场和重力场运动的情况.这时配一对速度,使其中一速度所对应的洛伦兹力与重力平衡,另一速度与粒子原有速度合成,并以合成速度作匀速圆周运动.粒子的运动是匀速直线运动和匀速圆周运动的叠加.

例 3 如图 11-12 所示,有一无限长直线电流 I_0 ,另有一半径为 R 的圆形电流 I ,其直径 AB 与此直线电流近似重合.试求

- (1) 半圆弧 \widehat{AaB} 所受作用力的大小和方向;
- (2) 整个圆形电流所受的作用力的大小和方向.

解析 (1) 半圆电流所受磁力见图 11-12(b),在 \widehat{AaB} 弧上的 C 点取一电流元 $I\Delta l$,其所在处的磁感强度方向垂直纸面向里,大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi X} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R \sin\theta}$$

则电流元 $I\Delta l$ 上所受到的安培力为

$$\Delta f = IB\Delta l = \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi R \sin\theta} \Delta l, \text{方向沿径向}$$

现将 Δf 分解到 x 轴和 y 轴

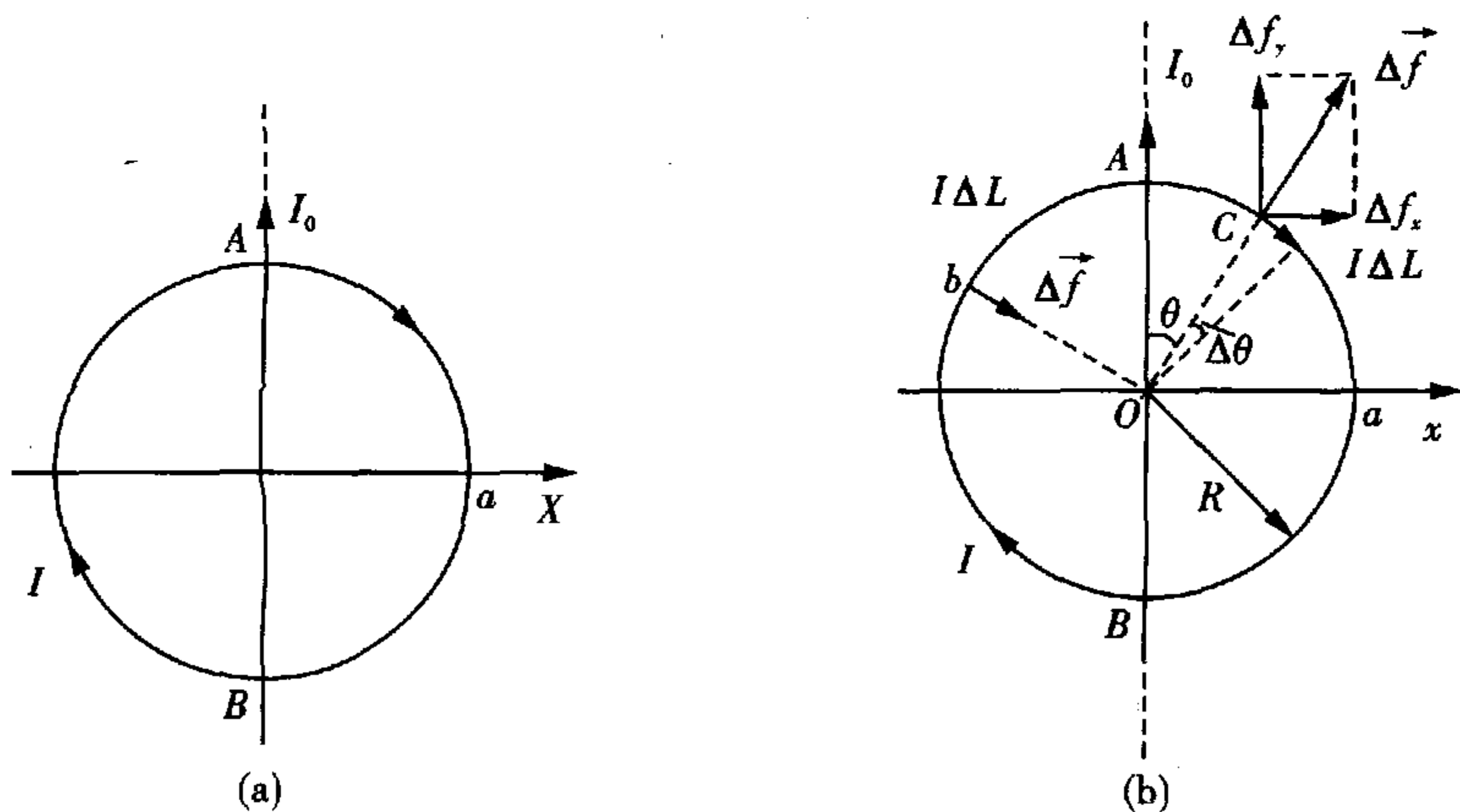


图 11-12

$$\Delta f_x = \Delta f \sin\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \Delta l$$

$$\Delta f_y = \Delta f \cos\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R \tan\theta} \Delta l$$

考虑到对称性, $\sum \Delta f_y = 0$

$$f = f_x = \sum \Delta f_x = \sum \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \Delta l = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \cdot \pi R = \frac{\mu_0 I_0}{2}$$

方向沿 x 轴正方向.

(2) 由于左半圆 \widehat{AbB} 的电流与右半圆 \widehat{AaB} 的电流等值反向且与 I_0 对称, 所处空间的磁感应强度也是对称反向的, 故两半圆所受安培力等值同向, 都沿 x 轴正向, 那么

$$f = f_{AaB} + f_{AbB} = \mu_0 I_0$$

方法与技巧 这又是一个用微元法求合力的题目. 因长直电流的磁场不是均匀场, 而电流的方向沿圆不断改变. 这时只好取一电流元, 求它所受到的力. 力是矢量, 叠加时先分解到 x 轴和 y 轴上, 考虑到对称性, y 轴上分量和为零, 合力只沿 x 轴方向, 第(2)问求解时, 以为两半圆受力大小相同而方向相反, 得到合力为零的结果. 两边的电流对称反向, 而磁场也反向, 故力同向.

例 4 (1) 图 11-13 所示是两根相同的导线环 A 与 B . 中心都在 z 轴上, 两导线环分别位于平面 $z = \pm h$, 为了使两环互相排斥, 它们通的电流方向应是相同还是相反? (2) 一个通以电流的导线圆环能在不用任何器械的情况下漂浮在水平的超导平面之上. 假设 A 就是这样一个均匀圆环, 它的质量为 M , 且它的半径 r 远大于它和超导平面的距离 h , 平面 $z = 0$ 就是超导平面. 证明达到平衡时的高度, 即导线环 A 离超导平面的距离 $h_0 = \frac{\mu_0 r I^2}{2Mg}$. (3) 如果飘浮的环在垂直方向上振动, 求振动的周期.

解析 (1) 因为 $r \ll h$, 所以可将两导线环看作两根长的平行导线, 要它们相互排斥, 电流方向必须相反.

(2) 因超导体内磁感应强度为零, 为抵消 A 产生的磁力线穿过超导面, 即在超导面下, 与 A 对称处有线圈 B , 其中电流大小与 A 中相同, 而方向相反. A 与超导面的作用相同于 A 、 B 两线圈的作用,

把两环看作两根长的平行导线,因而 A 所受的磁场力为

$$F_m = IlB = I \cdot 2\pi r \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2h} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}$$

当平衡时磁场力应等于重力 Mg , 所以

$$Mg = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h_0}$$

即
$$h_0 = \frac{\mu_0 r I^2}{2Mg}$$

(3) 在平衡位置附近,可令 $h = h_0 + \Delta h$, Δh 为一相对平衡位置的小位移,而合力等于重力和磁场力的合成,即

$$F = F_m - Mg = \frac{\mu_0 I^2 r}{2(h_0 + \Delta h)} - Mg = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h_0} \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0}\right) - Mg = -\frac{\mu_0 r I^2}{2h_0^2} \Delta h$$

振动的角频率为:
$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 r I^2}{2h_0^2 M}} = \sqrt{\frac{Mg}{h_0 M}} = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$$

振动周期为:
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h_0}{g}}$$

方法与技巧 此题首先要搞清的就是超导的抗磁性. 当超导面上置一线圈 A 时,线圈电流产生的磁场的磁力线要进入超导面,这时只有在超导面下,与线圈 A 对称的地方,有一与 A 线圈对称的线圈 B,并流有与 A 线圈中电流大小相同、方向相反的电流才能使超导面内无磁场. 其实 B 就是 A 的像. 另外在 $r \gg h$ 时,把圆电流近似处理为无限长载流直线也是应该掌握的方法.

例 5 如图 11-14 所示, K 为一带电粒子发生器,从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子,它们都带正电,电量为 q , 质量为 m , 速度的方向都沿图中的虚线. D_1 、 D_2 为两块挡板,可定时开启和关闭. C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u = U_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$, T 为交变电压的周期. 已知只有当门上电压的值为零附近的无限短的时间内,粒子才能通过该门. G 为能量增减器,它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$. 当带电粒子在 t 时刻通过 G 时,粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4})$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{l^2}{T^2}$. 通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域,磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直纸面向里(整个装置都放在真空中). 在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界,它平行于 x 轴. 现在 $t=0$ 的时刻,同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t=3T/4$ 时刻,关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 ; 在 $t=10T/4$ 时刻,再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G . 已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ 的 Q 点. 问:假如要使从 O 点进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点,则应将磁场边界 MN 在 Oxy 平面内平移到什么位置?

解析 (1) 讨论进入磁场区域的粒子的速度

在 $t=0$ 的时刻打开 D_1 , 由 $u = U_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ 可知, 此时 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子都能

通过该门. G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$. 当带电粒子在 t 时刻通过 G 时, 粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4})$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{l^2}{T^2}$. 通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直纸面向里(整个装置都放在真空中). 在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴. 现在 $t=0$ 的时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t=3T/4$ 时刻, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 ; 在 $t=10T/4$ 时刻, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G . 已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ 的 Q 点. 问: 假如要使从 O 点进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在 Oxy 平面内平移到什么位置?

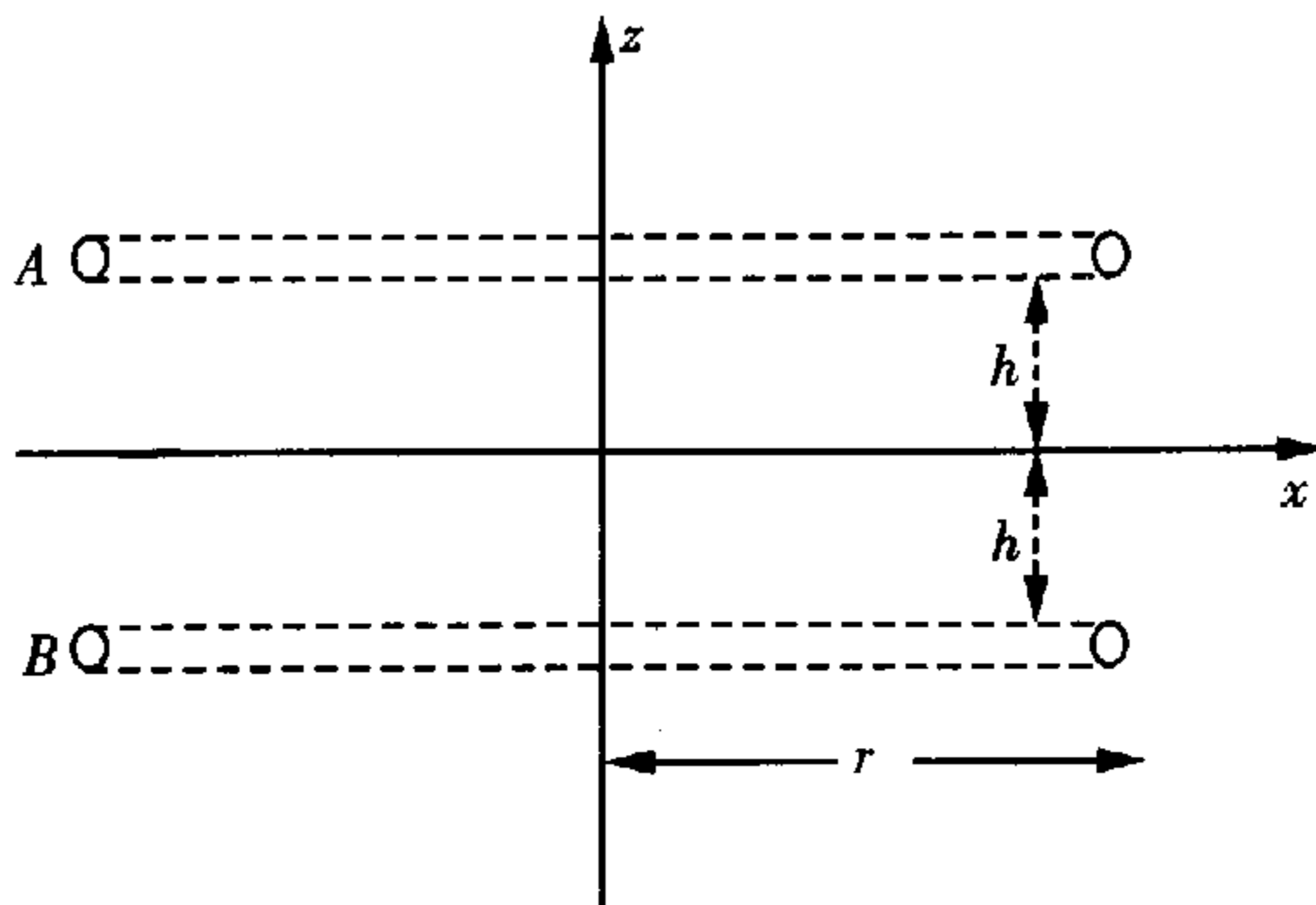


图 11-13

通过 C_1 . 如果通过 C_1 的粒子到达 C_2 的时刻为 $t = T/2$ 或 $T/2$ 的整数倍, 则此时 C_2 的电压恰好为零, 这些粒子又能通过 C_2 , 故通过 C_1 的粒子若能通过 C_2 , 其速度 v_n 应满足条件

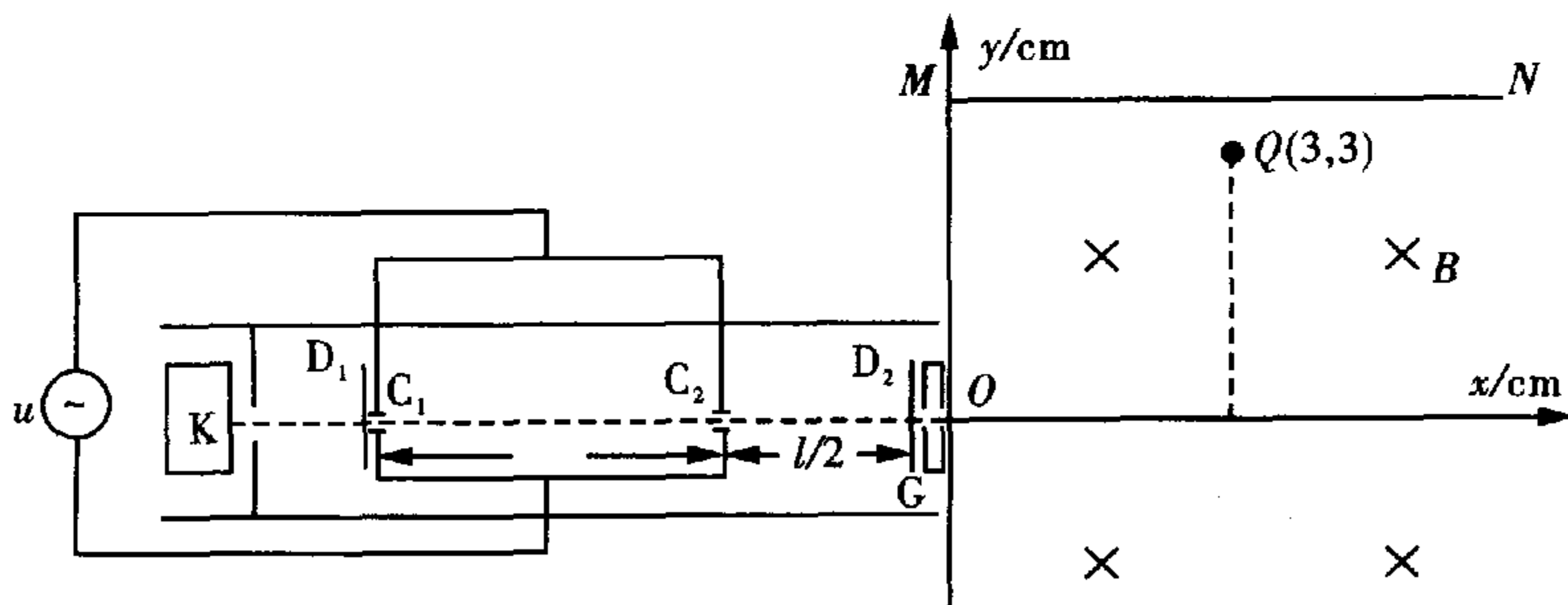


图 11-14

$$\frac{l}{v_n} = n \frac{T}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad \textcircled{1}$$

由此可得在 $t = 0$ 时刻通过 C_1 后又能通过 C_2 的这些粒子的速度为

$$v_n = \frac{2l}{nT} \quad n = 1, 2, \dots \quad \textcircled{2}$$

速度为 v_n 的粒子由 C_1 到 C_2 经历时间

$$\Delta t_{n1} = \frac{1}{2} nT \quad \textcircled{3}$$

由 C_2 到 G 经历的时间

$$\Delta t_{n2} = \frac{l}{2v_n} \quad \textcircled{4}$$

由此可得到粒子到 G 的时刻

$$t_n = \Delta t_{n1} + \Delta t_{n2} = \frac{3}{4} nT \quad \textcircled{5}$$

因为当 $t = 10T/4$ 时, D_2 关闭, 故只有当

$$t_n \leq \frac{10}{4} T \quad \textcircled{6}$$

粒子才能通过 G 并进入磁场区域, 根据⑤、⑥式, 注意到 n 为整数, 可知 n 的最大值为

$$n_{\max} = 3 \quad \textcircled{7}$$

这些粒子进入磁场时的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 + E_0 \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{3n}{4} T \right) + \frac{\pi}{4} \right] \quad \textcircled{8}$$

$$n = 1, 2, 3 \quad \textcircled{8}$$

这些粒子的能量分别为

$$E_1 = \frac{7}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_2 = \frac{1}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_3 = \frac{17}{36} \frac{ml^2}{T^2} \quad \textcircled{9}$$

在 $t = T/2$ 时刻 C_1 的电压 $u = 0$, 各处不同速率的粒子又能通过 C_1 . 对速率 v'_n 满足条件

$$\frac{l}{v'_n} = \frac{n}{2} T \quad n = 1, 2, \dots \quad \textcircled{10}$$

的粒子又能通过 C_2 . 这些粒子的速率为

$$v'_n = \frac{2l}{nT} \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

由 C_1 到 C_2 经历的时间和由 C_2 到 G 经历的时间分别为

$$\Delta t_{n_1}' = \frac{n}{2}T \quad \Delta t_{n_2}' = \frac{n}{4}T \quad (12)$$

到达 G 的时刻

$$t'_n = \frac{T}{2} + \Delta t_{n_1}' + \Delta t_{n_2}' = \frac{3n+2}{4}T \quad (13)$$

因为在 $t = 10T/4$ 时 D_2 关闭, 故有

$$t'_n \leq \frac{10}{4}T \quad (14)$$

由⑬和⑭式, 注意到 n 为整数, 得

$$n_{\max} = 2 \quad (15)$$

这些粒子进入磁场时具有的能量为

$$E'_n = \frac{1}{2}mv'^2_2 + E_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi(3n+2)}{4}\right)T + \frac{\pi}{4}\right] \quad (16)$$

$$n = 1, 2 \quad (16)$$

进入磁场的粒子的能量分别为

$$E'_1 = \frac{9}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E'_2 = \frac{3}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad (17)$$

由于在 $t = 3T/4$ 时 D_1 已关闭, 以后无粒子再能进入 C_1 . 由⑨、⑰式可知, 进入磁场的粒子的能量的最大值为 E'_1 , 对应的速度 V'_1 最大, 由 $E'_1 = \frac{1}{2}MV'^2_1$, 得

$$V'_1 = \sqrt{\frac{9}{2}} \frac{l}{T} \quad (18)$$

进入磁场的粒子的能量的最小值为 E_2 , 对应的速度 V_2 最小, 同理得

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{l}{T} \quad (19)$$

(2) 确定磁场边界

如图 11-15 所示, 在磁场区建立的直角坐标系中, 已知从 O 点进入磁场速度最大的粒子经过坐标为 $(3 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ 的 Q 点, 由⑱、⑲式知: 进入磁场的粒子最大的速度 V'_1 是最小的速度 V_2 的 3 倍, 此两粒子进入磁场后它们的圆轨迹半径 R'_1 和 R_2 有关系:

$$R'_1 = 3R_2$$

因速度为 V'_1 的粒子的圆轨道过坐标原点 O , 且与 x 轴相切, 又过 Q 点, 由此可求得

$$R'_1 = 3 \text{ cm}$$

其圆心 O'_1 的坐标为 $(0 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$, 故知速度最小粒子的圆轨道半径

$$R_2 = 1 \text{ cm}$$

O_2 应在坐标为 $(0 \text{ cm}, 1 \text{ cm})$ 处, 其轨道圆方程为

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (20)$$

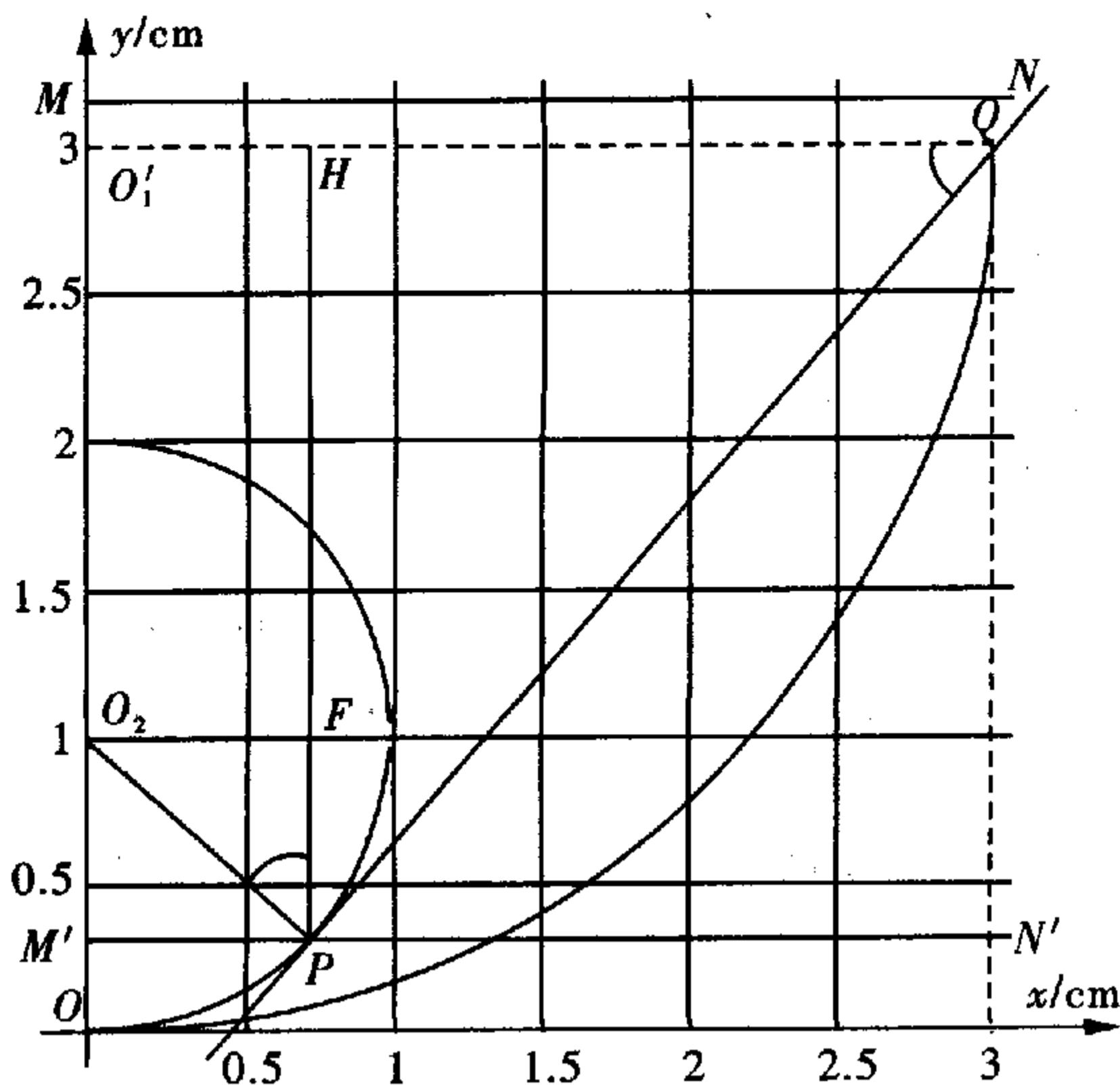


图 11-15

过 Q 点作此圆的切线, 设切点 P 的坐标为 (x_p, y_p) , 若此粒子在 P 点以速度 V_2 进入无磁场区域, 则它将沿直线 PQ 到达 Q 点. P 点一定在磁场区域的边界上.

现在求 P 点的坐标. 因 O_2P 垂直于 PQ , 由 P 点作 O_1Q 的垂线交于 H 点, 由 O_2 点作 PH 的垂线交于 F 点. ΔO_2PF 与 ΔPQH 相似, 因而有

$$\frac{O_2F}{PF} = \frac{PH}{HQ} \quad (21)$$

即
$$\frac{x_p}{(1-y_p)} = \frac{(3-y_p)}{(3-x_p)} \quad (22)$$

得
$$x_p^2 + y_p^2 - 4y_p = 3x_p - 3$$

经配方得

$$x_p^2 + (y_p - 1)^2 - 2y_p - 1 = 3x_p - 3$$

因 P 点坐 (x_p, y_p) 满足 (20) 式, 故得

$$-2y_p = 3x_p - 3$$

$$y_p = \frac{3}{2}(1 - x_p) \quad (23)$$

代入 (20) 式, 可求得 P 点的 y 坐标为

$$y_p = 0.354 \text{ cm} \quad (24)$$

因此, 只要将磁场的区域边界 MN 平行下移到过 P 点, 即图中的 $M'N'$, 速度 V_2 的粒子在 P 点穿出磁场, 它将沿轨迹圆的切线方向到达 Q 点.

方法与技巧 这个题目题干长, 物理情景复杂但并不难, 只要依题意一步一步思考, 不遗漏题干设置的条件, 是容易做出的. 实际上 D_1 、 D_2 两块挡板, C_1 、 C_2 两扇门构成一速度选择器, 一周期之内, 从 K 射出的、能顺利通过 D_1 、 C_1 、 C_2 、 D_2 的带电粒子的速度只能取 5 个值, 再从中挑出速度最大和最小的两种, 在磁场中做匀速圆周运动时, 速度最大的粒子的运动半径是速度小的粒子的半径的 3

倍,速度大的粒子能过 Q 点,但速度小的粒子在磁场范围不变时是无法过 Q 点的,只有当速度小的粒子在圆周运动未结束前穿过磁场再做匀速直线运动通过 Q 点,此题要求解析几何知识比较多,要想在物理竞赛中取得好成绩,数学一定要学好.

例 6 如图 11-16 从 z 轴上的 O 点发射一束电量为 $q (> 0)$ 、质量为 m 的带电粒子,它们速度的方向分布在以 O 点为顶点、 z 轴为对称轴的一个顶角很小的锥体内,速度的大小都等于 v . 试设计一种匀强磁场,能使这束带电粒子会聚于 z 轴上的另一点 M , M 点离开 O 点的距离为 d ,要求给出该磁场的方向、磁感应强度的大小和最小值. 不计粒子间的相互作用和重力的作用.



图 11-16

解析 如图 11-17 设计的磁场为沿 z 轴方向的匀强磁场, O 点和 M 点都处于这个磁场中. 下面我们根据题意求出这种磁场的磁感应强度的大小. 粒子由 O 点射出就进入了磁场,可将与 z 轴成 θ 角的速度分解成沿磁场方向的分速度 v_z 和垂直于磁场方向的分速度 v_{\perp} ,注意到 θ 很小,得

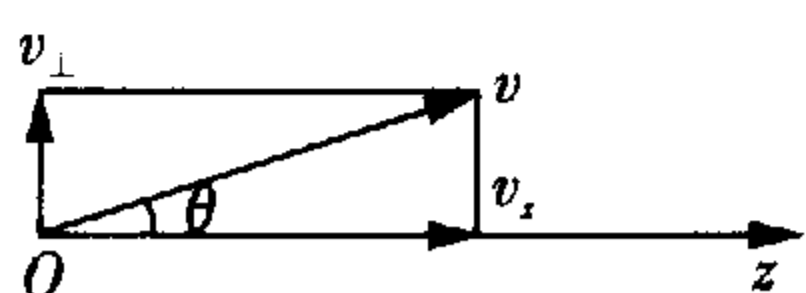


图 11-17

$$v_z = v \cos \theta \approx v \quad \text{①}$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta \approx v \theta \quad \text{②}$$

粒子因具有垂直磁场方向的分速度,在洛伦兹力作用下做圆周运动,以 R 表示圆周的半径,有

$$qBv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$$

由此得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{③}$$

可见周期与速度分量 v_{\perp} 无关.

粒子因具有沿磁场方向的分速度,将沿磁场方向做匀速直线运动. 由于两种分速度同时存在,粒子将沿磁场方向做螺旋运动,螺旋运动螺距为

$$h = v_z T = vT \quad \text{④}$$

由于它们具有相同的 v ,因而也就具有相同的螺距;又由于这些粒子是从同一点射出的,所以经过整数个螺距(最小是一个螺距)又必定会聚于同一点,只要使 OM 等于一个螺距或一个螺距的 n (整数)倍,由 O 点射出的粒子绕磁场方向旋转一周(或若干周后)必定会聚于 M 点,如图 11-18 所示,所以

$$d = nh \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{⑤}$$

由式③、④、⑤解得

$$B = \frac{2\pi m v n}{qd} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{⑥}$$

这就是所要求磁场的磁感应强度的大小,最小值应取 $n = 1$,所以磁感应强度的最小值为

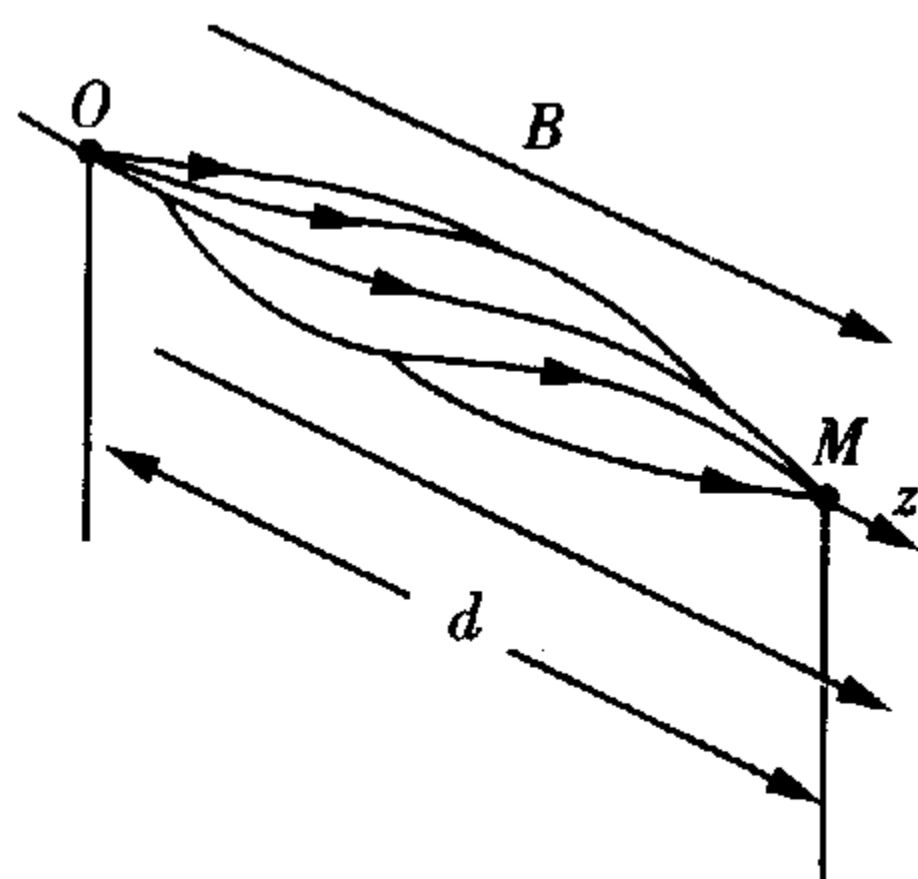


图 11-18

$$B = \frac{2\pi mv}{qd}$$

方法与技巧 这是2003年的一个预赛题,其实就是磁聚焦原理.因为 θ 小,所有粒子 v_z 相同, v_{\perp} 因 θ 不同而不同,做圆周运动半径不同,但周期相同,故螺距相同.粒子在 O 点分开后,经一周期又会在 M 点汇集,利用磁聚焦可测粒子的荷质比.

例7 如图11-19所示, y 轴右边存在磁感强度为 $2B_0$ 的匀强磁场, y 轴左边存在磁感强度为 B_0 的匀强磁场,它们的方向皆垂直于纸面向里.在原点 O 处,一个带正电的电荷量为 q 、质量为 m 的粒子 a ,在 $t=0$ 时以大小为 $2v_0$ 的初速度沿 x 轴方向运动.在粒子 a 开始运动后,另一质量和电荷量都与 a 相同的粒子 b 从原点 O 以大小为 v_0 的初速度沿负 x 轴方向开始运动.要想使 a 和 b 能在运动过程中相遇,试分析和计算它们出发的时间差的最小值应为多大,并求出与此对应的相遇地点的坐标.设整个磁场区域都处于真空中,且不考虑重力及 a 、 b 两粒子之间相互作用力.

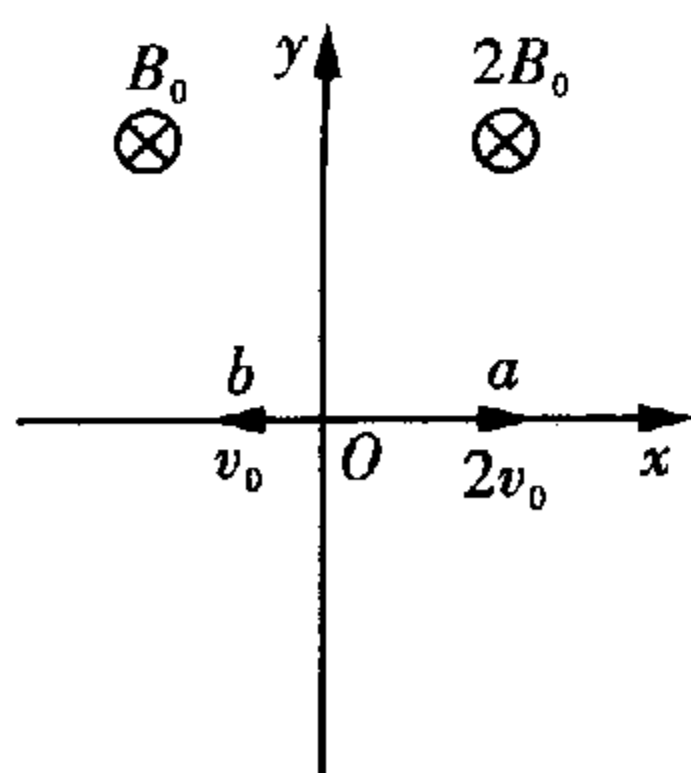


图 11-19

解析 带电荷量为 q 、质量为 m 、初速为 v 的粒子,当它在磁感强度为 B 的匀强磁场中运动时,如果其初速度的方向与磁场方向垂直,由洛伦兹力和牛顿定律可知,它将在磁场中做匀速圆周运动.令 T 和 R 分别表示其周期和轨道半径,则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R} = mR \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

由此求得

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

把这些结论用到本题中,可知 a 粒子开始在第一象限中运动(y 轴以右)

$$T_{a1} = \frac{2\pi m}{q(2B_0)} = \frac{\pi m}{qB_0}$$

$$R_{a1} = \frac{m(2v_0)}{q(2B_0)} = \frac{mv_0}{qB_0}$$

经半个周期(即 $\frac{1}{2}T_{a1}$)后,进入第二、三象限中(y 轴以左),周期和轨道半径变为

$$T_{a2} = \frac{2\pi m}{qB_0}$$

$$R_{a2} = \frac{2mv_0}{qB_0}$$

以后就按此模式在 xOy 平面内沿图11-20中的虚线运动.

同理,粒子 b 开始在第三象限(y 轴以左)中运动

$$T_{b1} = \frac{2\pi m}{qB_0}$$

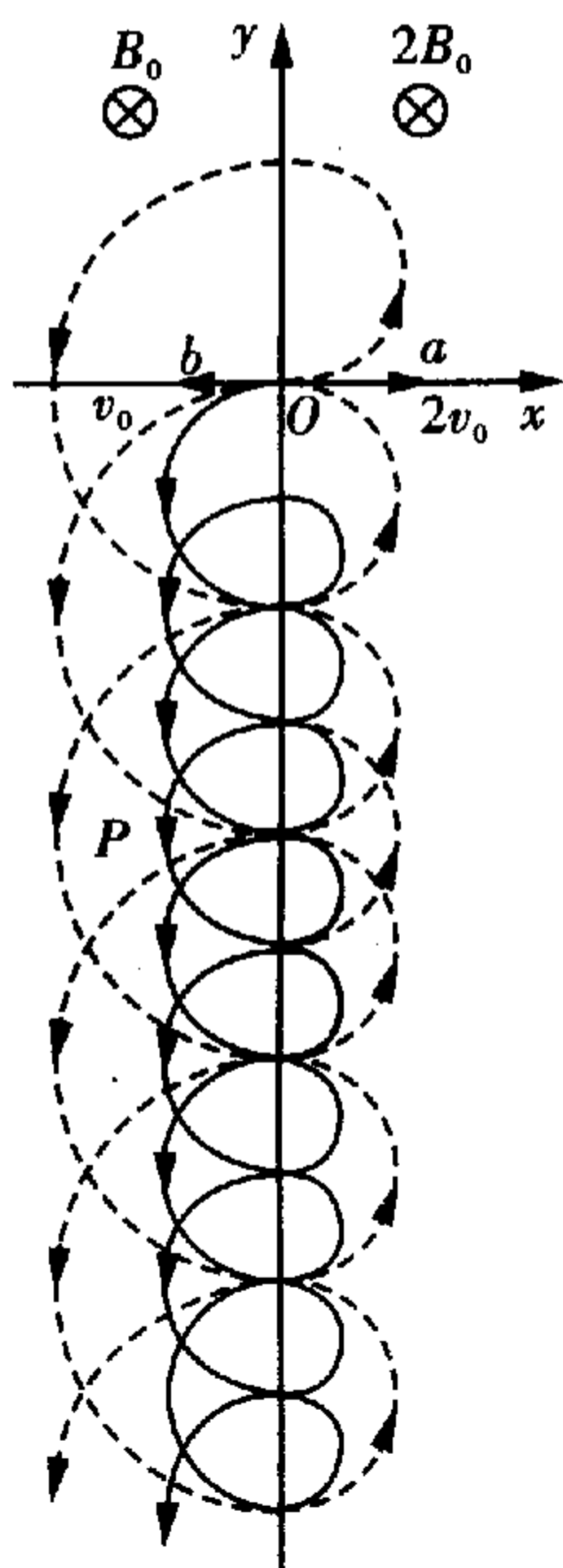


图 11-20

⑧

$$R_{bl} = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (9)$$

经半个周期(即 $\frac{1}{2}T_{bl}$)后,进入第四象限(y 轴以右)运动,周期和轨道半径变为

$$T_{br} = \frac{\pi m}{qB_0} \quad (10)$$

$$R_{br} = \frac{mv_0}{2qB_0} \quad (11)$$

以后就按此模式在 xOy 平面内沿图 11-20 中实线运动. 由以上分析可知,只要在右边,不管 a 还是 b ,周期皆为 $T_0 = \pi m/qB_0$;只要在左边,周期皆为 $2T_0$.

由图 11-20 可见,只有在两轨迹交叉或相切的那些点,才有相遇的可能性. 为求得题中说的时间差的最小值,下面我们先假设,如果 a 、 b 同时开始运动,分析经过哪个交叉或相切点时两者的时间差最短,则这个时间差就应当等于题中说的要 a 、 b 在此交叉或相切点能相遇,两者出发时间的的时间差. 为此,结合图 11-20 分别考查 a 、 b 的运动,经过分析就可看出,在 $5T_0$ 到 $5.25T_0$ 之间的那个交叉点(图 11-21 中的 P 点)处, a 、 b 通过它的时间差最短(在 $5T_0$ 以前和 $5.25T_0$ 以后的那些交叉或相切点, a 、 b 通过时的时间差都较长).

为了定量地求出此时间差,取负 y 轴上距原点 O 为 $3R_{a1}$ (即 $6R_{b1}$) 处为新的原点 O' ,如图 11-21 所示,取时间 $t = 5T_0$ 为新的起始计时时刻,对 a 用 $t' = 0$ 表示,对 b 用 $t'' = 0$ 表示. 在 y 轴以左 a 、 b 的周期相同,所以角速度亦相同,以 ω_1 表示 a 、 b 在 y 轴以左的角速度

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T_0} \quad (12)$$

对 a

$$x'_a = R_{a1} \cos(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}) \quad (13)$$

$$y'_a = R_{a1} \sin(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}) \quad (14)$$

对 b

$$x'_b = \frac{R_{a1}}{2} \cos(\omega_1 t'' + \pi) \quad (15)$$

$$y'_b = R_{a1} + \frac{R_{a1}}{2} \sin(\omega_1 t'' + \pi) \quad (16)$$

对 P 点应有

$$x'_a = x'_b \quad y'_a = y'_b \quad (17)$$

由以上各式可解得所求的时间差应为

$$\Delta t = t' - t'' = 0.0802 \frac{\pi m}{qB_0} \quad (18)$$

这个结果说明,如果 a 、 b 同时出发,则 a 比 b 晚 $0.0802\pi m/qB_0$ 时间通过 P 点,换成题目的要求,就应当说,要 a 、 b 相遇,则 b 的出发时间应比 a 晚 $0.0802\pi m/qB_0$.

由以上各式还可求得 O 点的坐标:

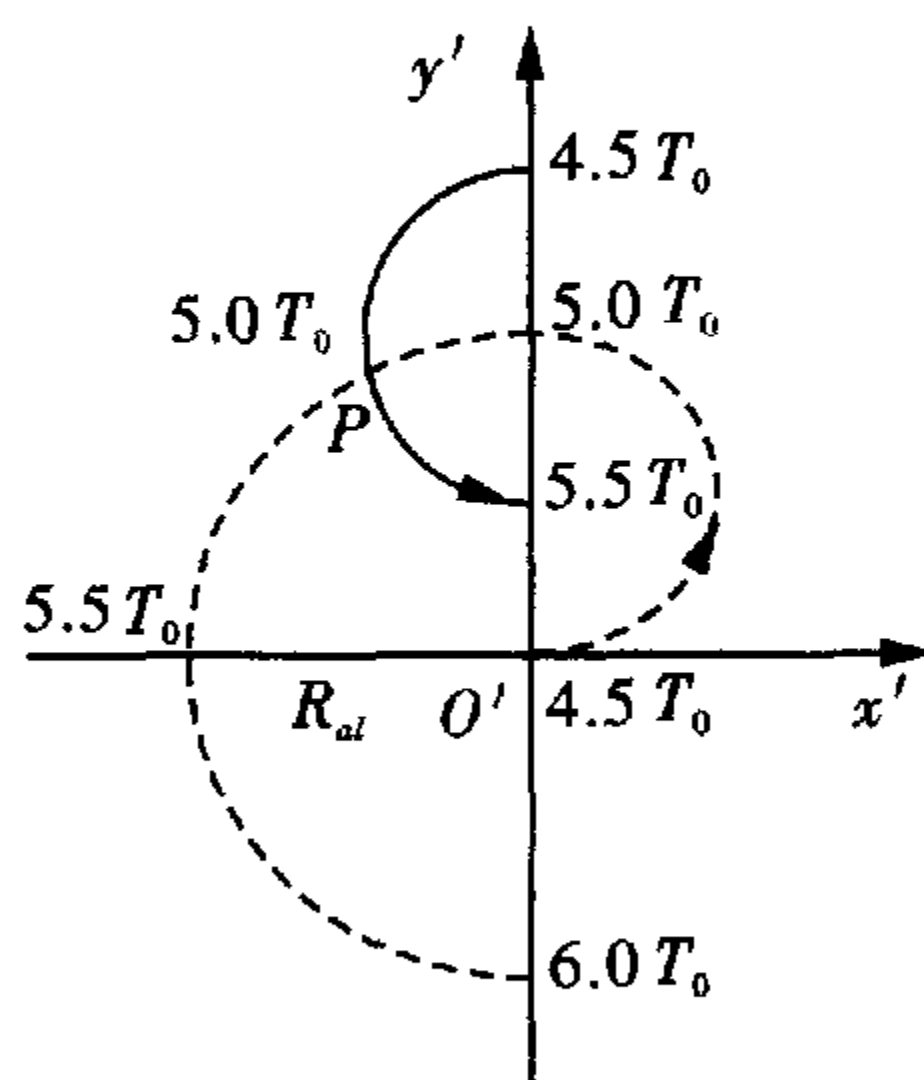


图 11-21

$$x'_P = -\frac{\sqrt{15}}{8}R_{a_1} = -0.484R_{a_1} = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (19)$$

$$y'_P = -\frac{7}{8}R_{a_1} = 0.875R_{a_1} = 1.75 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (20)$$

换为 Oxy 坐标系

$$x_P = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (21)$$

$$y_P = -3R_{a_1} + \frac{7}{8}R_{a_1} = -2.125 R_{a_1} = -4.25 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (22)$$

方法与技巧 这个题能把 a 、 b 粒子运动的轨迹图准确画出就相当于解决了一大半，画出图后仔细分析每一个相交点和相切点，找出它们经过这些点的时间差，这个时间差就是它们出发的时间差。找出这些点后，把坐标平移一下，对简化问题也有很大的好处。

在竞赛试卷中，与带电粒子在电磁场中运动有关的题往往占很大比例。其原因一是这方面题涉及的知识比较多，一般都跨力学和电学这两部分；原因二是粒子的运动在现代科学实验、生产生活、仪器电器等方面都有应用，掌握好这部分知识和解这类题的方法对取得竞赛的好成绩是很有帮助的。

【解题尝试】

1. 如图 11-22 在相互逆平行的匀强电场 \vec{E} 和匀强磁场 \vec{B} 中， \vec{E} 沿 x 轴负方向， \vec{B} 沿 x 轴正方向，一电子以初速 \vec{v}_0 与 x 轴正方向成 α 角（在 xOy 平面内）自原点射出，求

(1) 电子运动的轨迹；(2) 电子在 z 轴方向偏转的最大距离。

2. 如图 11-23 所示，在真空中建立一坐标系，以水平向右为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向， z 轴垂直纸面向里，在 $0 \leq y \leq L$ 的区域内有匀强磁场， $L = 0.80 \text{ m}$ ，磁场的磁感应强度的方向沿 z 轴的正方向，其大小 $B = 0.10 \text{ T}$ ，今把一荷质比 $q/m = 50$

$\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$ 的带正电质点在 $x = 0, y = -0.20 \text{ m}, z = 0$ 处静止释放，将带电质点过原点的时刻定为 $t = 0$ 时刻，求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标。并求它刚离开磁场时的位置和速度，取重力加速度 $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

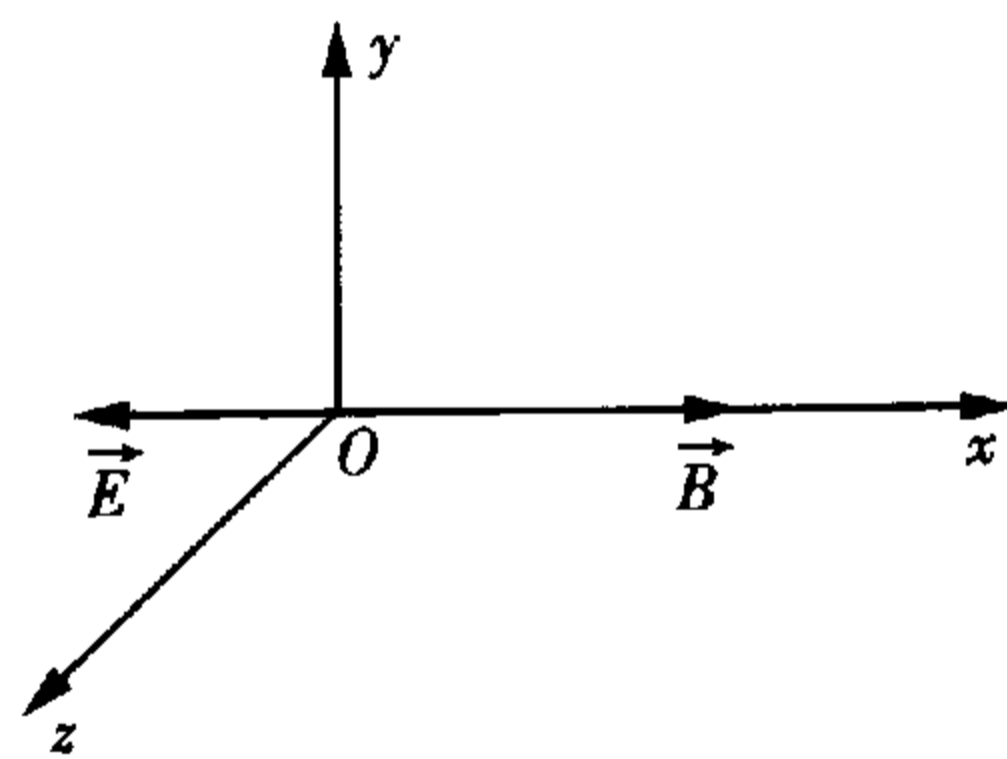


图 11-22

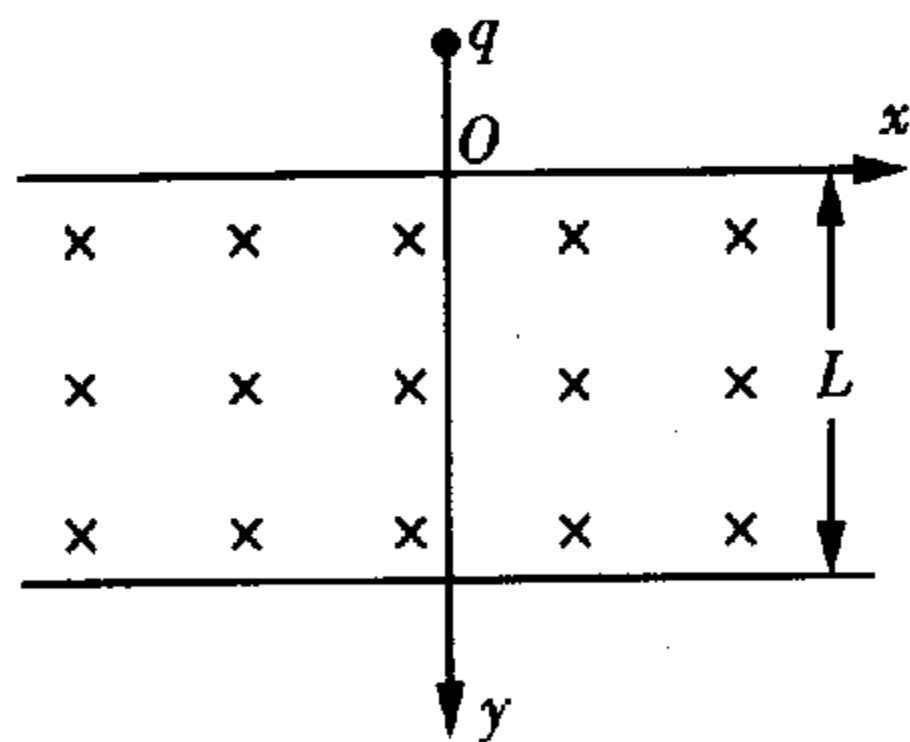


图 11-23

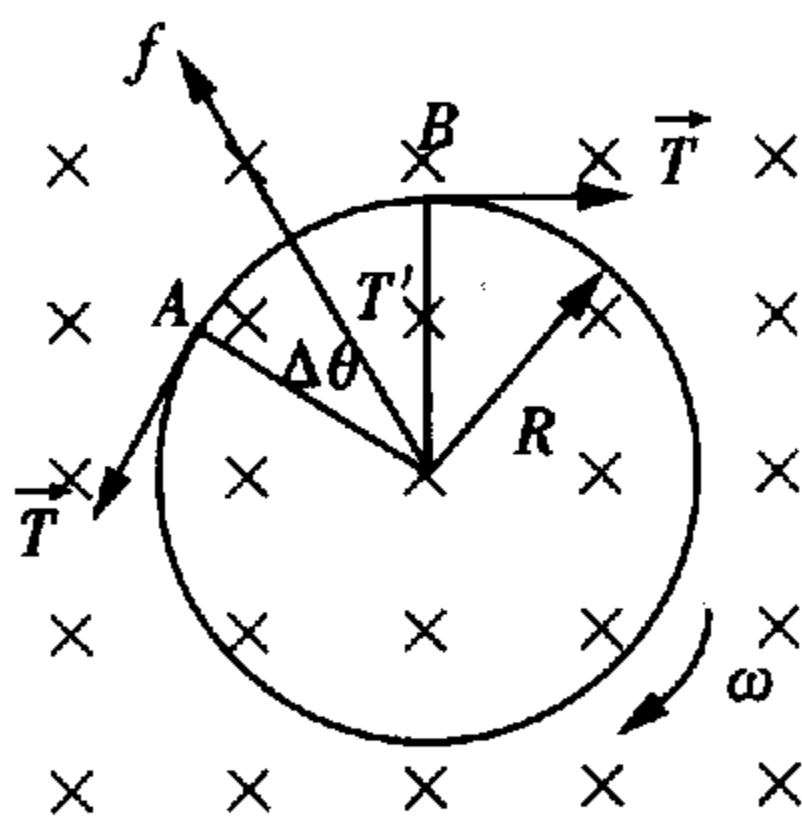


图 11-24

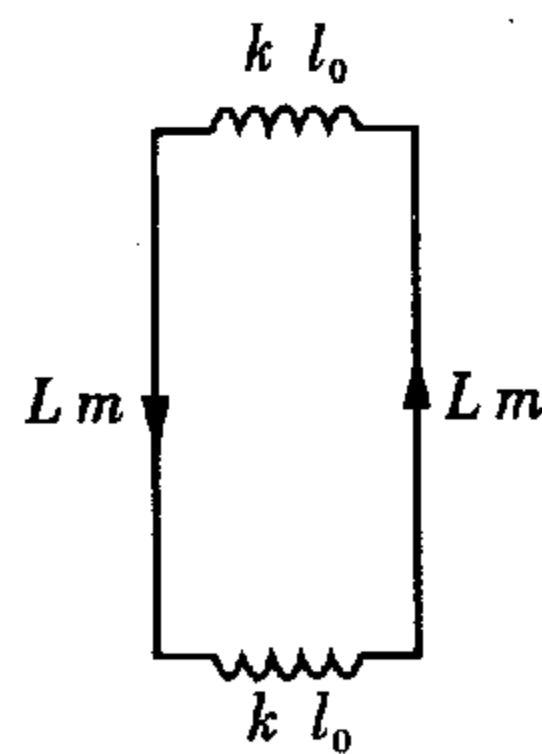


图 11-25

3. 如图 11-24 所示,一质量均匀分布的细圆环,其半径为 R ,质量为 m ,令环均匀带正电,总电量为 Q .现将此圆环平放在绝缘的光滑水平桌面上,并处于磁感应强度为 B 的均匀磁场中,磁场方向竖直向下,当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度 ω 沿图示方向旋转时,环中张力等于多少?

4. 如图 11-25 所示,两根平行金属棒与两金属弹簧构成回路.已知棒长为 L ,质量为 m ,只能作左右对称的运动,边缘效应可以忽略.已知弹簧的劲度系数为 K ,原长为 l_0 ($l_0 \ll L$),设以某种方式使回路有恒定的电流 I ,设电磁感应可以忽略.试求两棒围绕平衡位置作小振动的周期.

5. 一宇宙人在太空(那里的万有引力可以忽略不计)玩垒球.辽阔的太空球场半侧为均匀电场 E ,另半侧为均匀磁场 B ,电场与磁场的分界面为平面,电场方向与界面垂直,磁场方向垂直纸面向里.宇宙人位于电场一侧距界面为 h 的 P 点, O 点是 P 点至界面垂线的垂足, D 点位于纸面上 O 点的右侧, OD 与磁场 B 的方向垂直, $OD = d$,如图 11-26 所示,垒球的质量为 m ,且带有电量 $-q$ ($q > 0$).

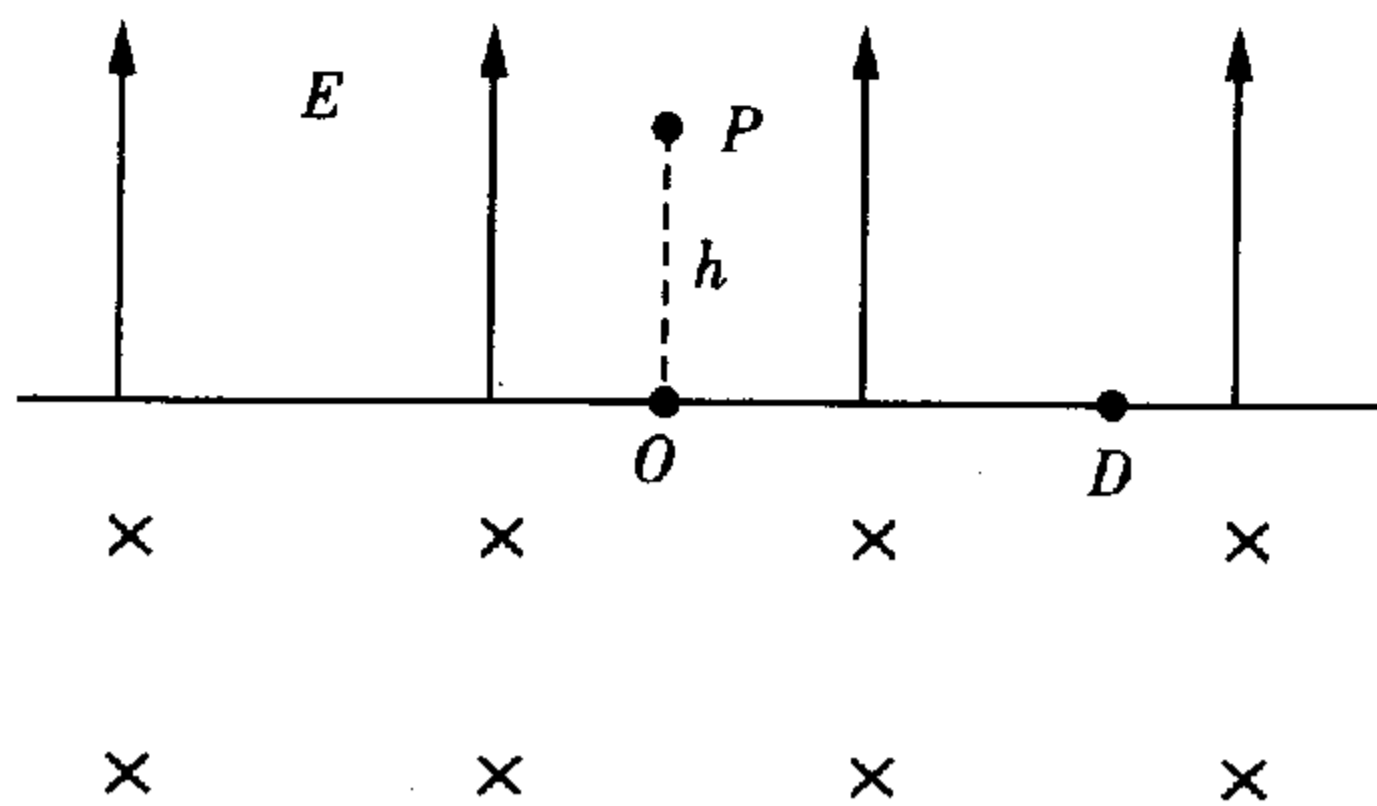


图 11-26

(1) 宇宙人是否可能自 P 点某个适当的投掷角(与界面所成的夹角) α_0 及适当的初速度 v_p 投出垒球,使它经过 D 点,然后历经磁场一次自行回至 P 点? 试讨论为实现这一游戏 d 必须满足的条件并求出相应的 α_0, v_p .

(2) 若宇宙人从 P 点以初速度 v_0 平行于界面投出垒球,要使垒球击中界面上的某一点 D ,初速度 v_0 的指向和大小应如何?

6. 围绕地球周围的磁场是两极强、中间弱的空间分布,1958 年,范·阿仑通过人造地球卫星搜集到的资料研究了带电粒子在地球磁场空间中的运动情况后,得出了在距地面几千公里和几万公里的高空存在着电磁辐射带(范·阿仑辐射带)的结论.有人在实验中通过实验装置,形成了如图 11-27 所示的磁场分布区域 MM ,在该区域中,磁感应强度 B 的大小沿 Z 轴从左到右,由强变弱,由弱变强,对称面为 PP ,已知 Z 轴上 O 点磁感应强度 B 的大小为 B_0 ,两端 M 点的磁感应强度为 B_M ,现有一束质量均为 m ,带电量均为 q ,速度大小均为 v_0 的粒子,在 O 点以与 Z 轴成不同的投射角 α_0 向右半空间发射.设磁场足够强,粒子只能在由紧邻 Z 轴的磁感线围成的截面积很小的“磁力管”内运动,试分析说明具有不同的投射角 α_0 的粒子在磁场区 MM 间的运动情况.

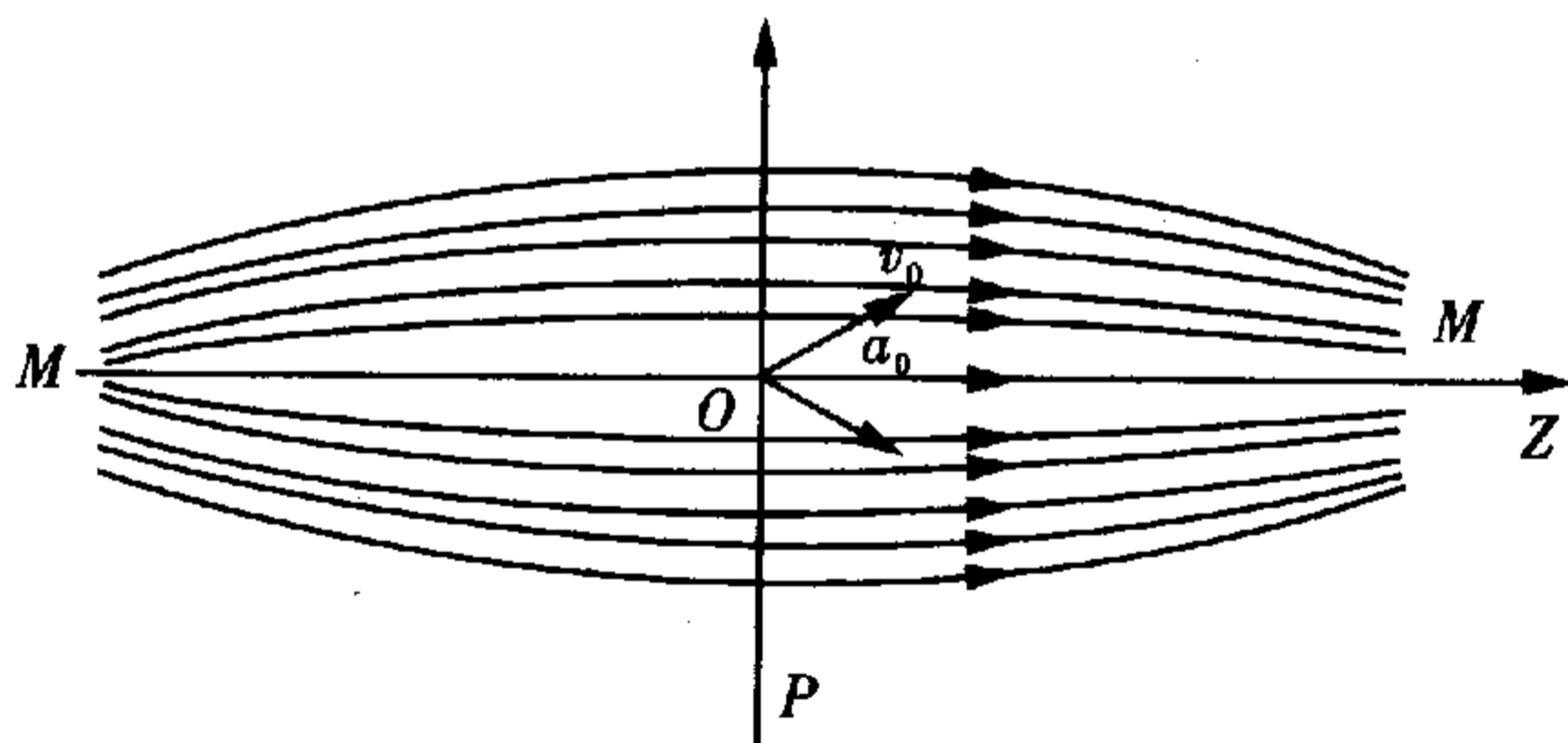


图 11-27

提示:理论上可证明,在细“磁力管”的管壁上粒子垂直磁场方向的速度 v_{\perp} 的平方与磁力管上的磁感应强度的大小 B 之比为一常量.

7. 在云室中有均匀磁场,如图 11-28 所示.有一质子在垂直于磁场的平面内作半径为 r_1 的圆周运动.现有一未知粒子沿与磁场垂直的 x 轴方向进入云室,并与质子发生弹性碰撞,碰后此未知粒子沿着与 x 轴成 45° 的方向作直线运动,而质子则改为绕半径为 r_2 的圆周作圆运动.测出 $\frac{r_1}{r_2} = 0.618$

(黄金分割),问未知粒子是什么?

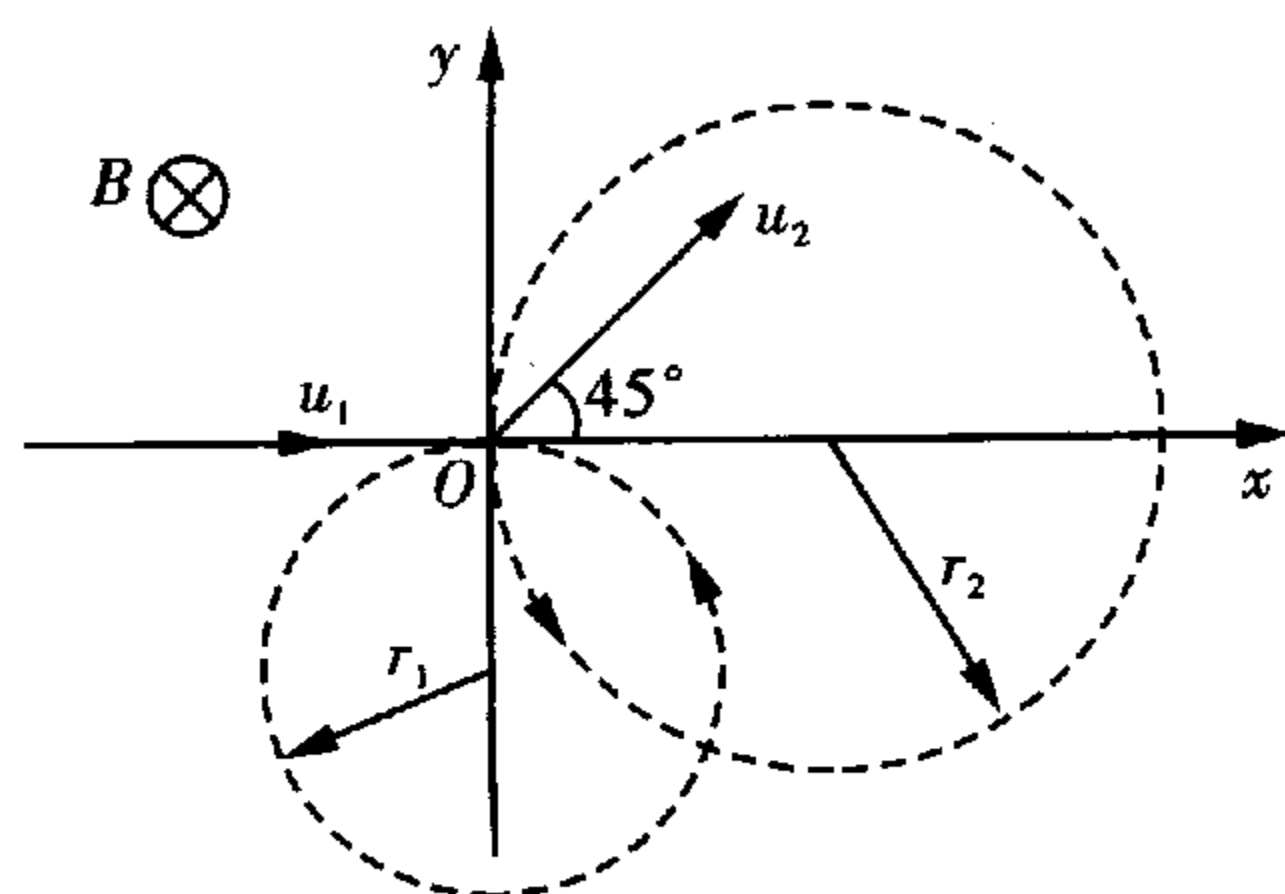


图 11-28

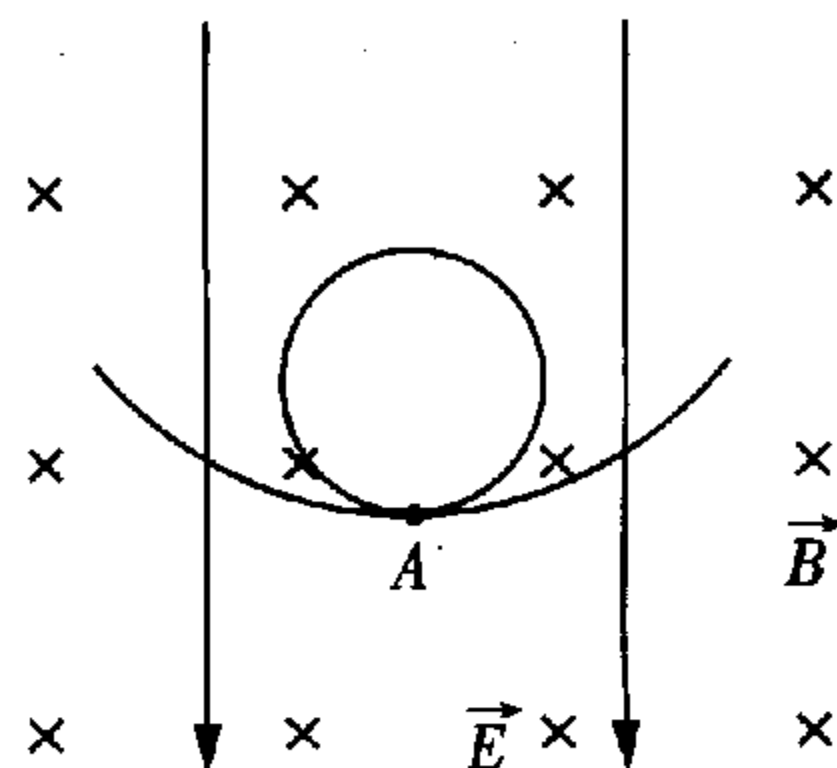


图 11-29

8. 一个质量为 m 的带电液滴在互相垂直的均匀电场和均匀磁场中运动. 已知电场强度为 \vec{E} , 方向竖直向下, 磁感应强度为 \vec{B} , 方向水平, 如图 11-29 所示. 若此带电液滴在垂直于磁场的竖直平面内作半径为 R 的圆周运动, 运动中液滴所受空气浮力和阻力不计. 问:

(1) 液滴受哪几个力作用?

(2) 液滴速度多大?

(3) 若此液滴运行到最低点 A 时分裂成大小相等的两个液滴, 其中一个仍在原平面内作半径为 $R_1 = 3R$ 的圆周运动, 绕行方向不变, 且此圆周的最低点仍是 A 点, 那么另一个液滴怎样运动?

9. 质量为 m 、带电量为 $+q$ 的小环套在竖直的均匀圆柱形直杆上, 环可在直杆上滑动, 摩擦因数为 μ . 空间有水平向右的均匀电场, 场强为 E ; 垂直纸面向外的均匀磁场的磁感应强度为 B , 如图 11-30 所示. 小环从静止开始向下运动, 求小环的最大加速度和最大速度.

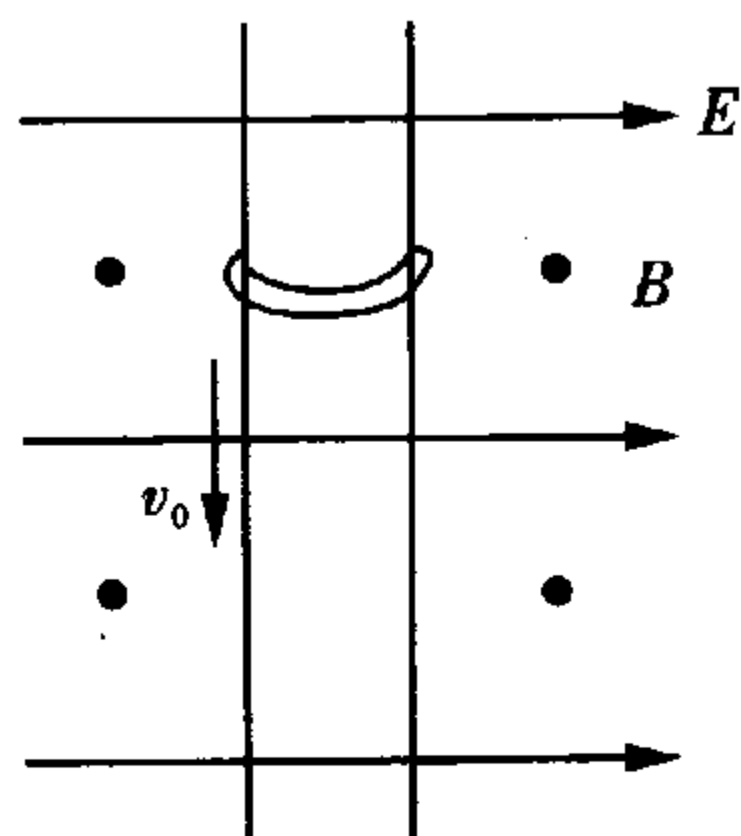


图 11-30

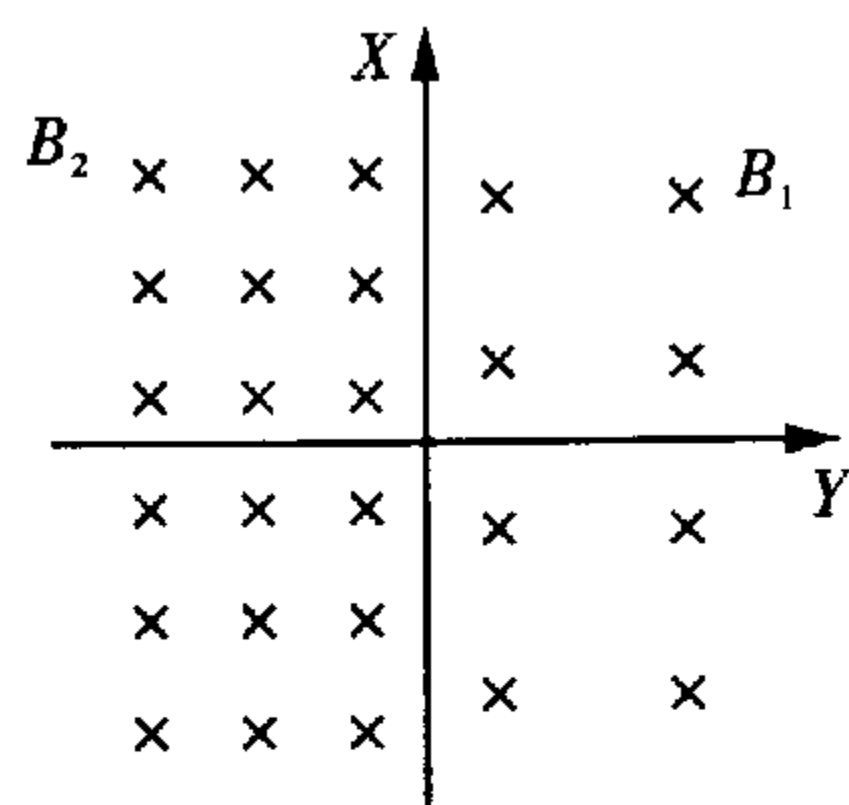


图 11-31

11. 在不计重力的真空中建立一坐标系 $Oxyz$. 分布于全空间的匀强电场方向与 $+y$ 轴方向平行, 电场强度大小为 E , 分布于 $0 \leq y \leq L$ 的空间中的匀强磁场方向与 $+z$ 轴方向平行, 磁感应强度大小为 B . 如图 11-32 所示. 今有一带电质点, 质量为 m , 带电量为 $q (q > 0)$, 在 $x=0, y=-h, z=0$ 的 P

点处静止释放. 设 $h \geq 0$.

- (1) 若带电质点的运动轨道恰好与 $y=L$ 的平面相切, 求 h 应满足的条件.
- (2) 若 $h=0$, 且带电粒子的运动不超出磁场区域, 试写出粒子 x, y 分量的运动学方程.

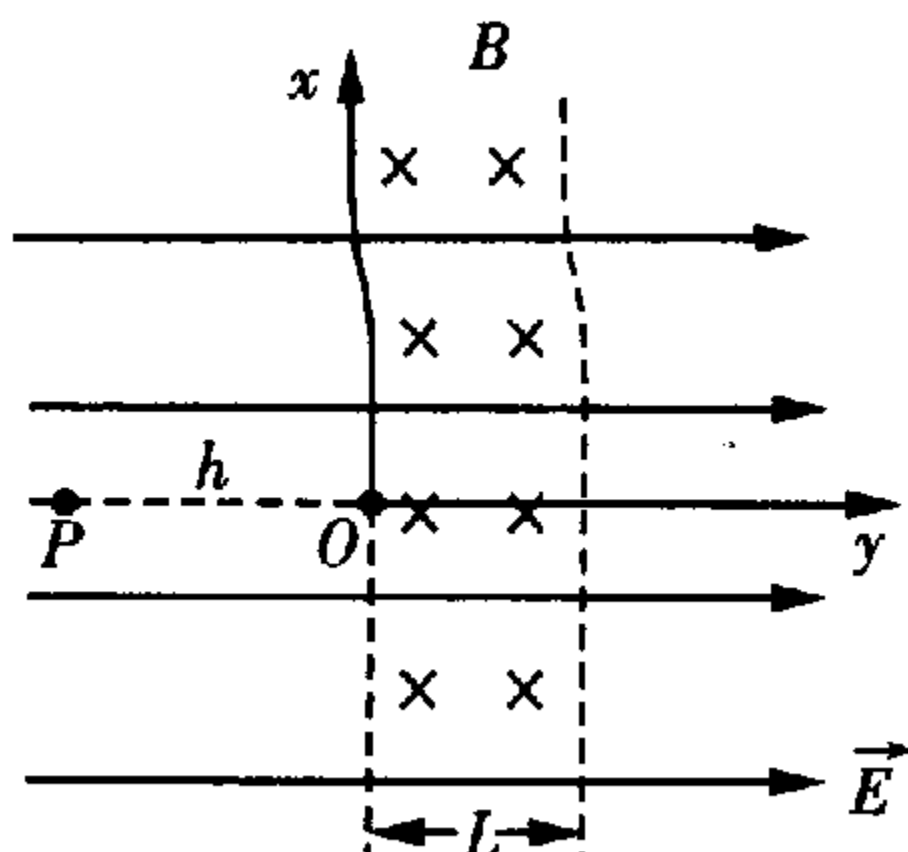


图 11-32

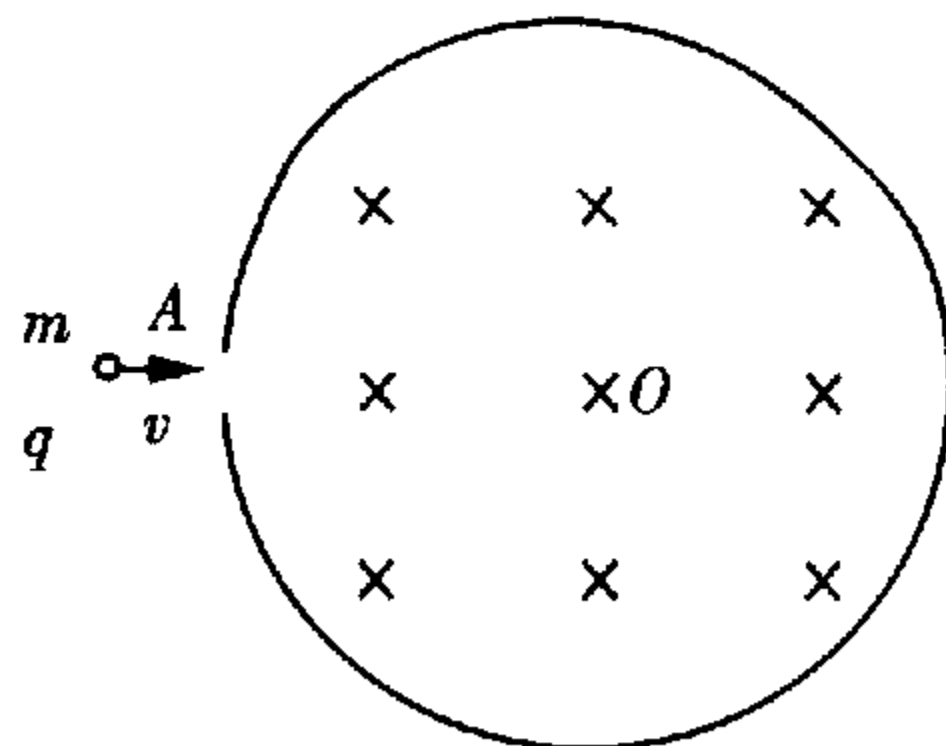


图 11-33

12. 如图 11-33 所示, 一光滑水平绝缘桌面上固定一半径为 R 的绝缘介质圆环, 在圆环所围的区域内有垂直于桌面的匀强磁场, 磁感应强度大小为 B . 一个质量为 m 、带电量为 q 、速度为 v 的粒子从环上小孔 A 处对着环心 O 射入磁场区域. 已知带电粒子在桌面上运动, 或与环碰撞时带电量不变, 粒子与环碰撞是弹性碰撞. 若该带电粒子与环顺次碰撞后不再超越小孔 A 点, 并直接从小孔 A 处射出, 求: 带电粒子在磁场中运动的时间以及相应的人射粒子的速度大小.
13. 如图 11-34 所示, 在空间有一个其方向与水平面平行且垂直纸面向里的足够大的匀强磁场 B 的区域. 在磁场区域中有 a 和 b 两点, 相距为 s , ab 连线在水平面上且与 B 垂直, 一质量为 m , 电量为 q ($q > 0$) 的粒子从 a 点以 v_0 的初速对着 b 点射出, 为了使粒子能经过 b 点, 试问 v_0 可取什么值? (注意, 重力不可忽略.)

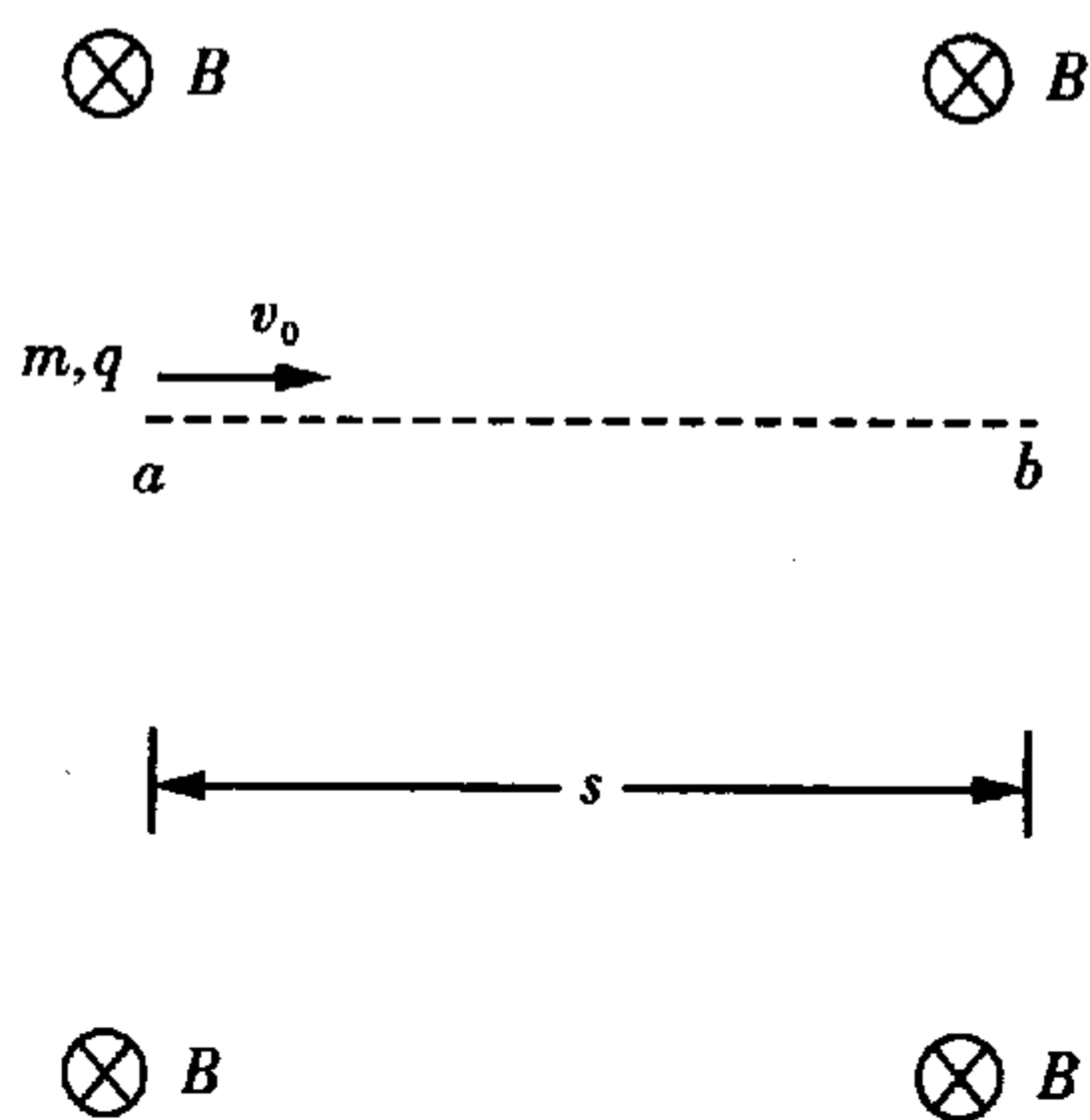


图 11-34

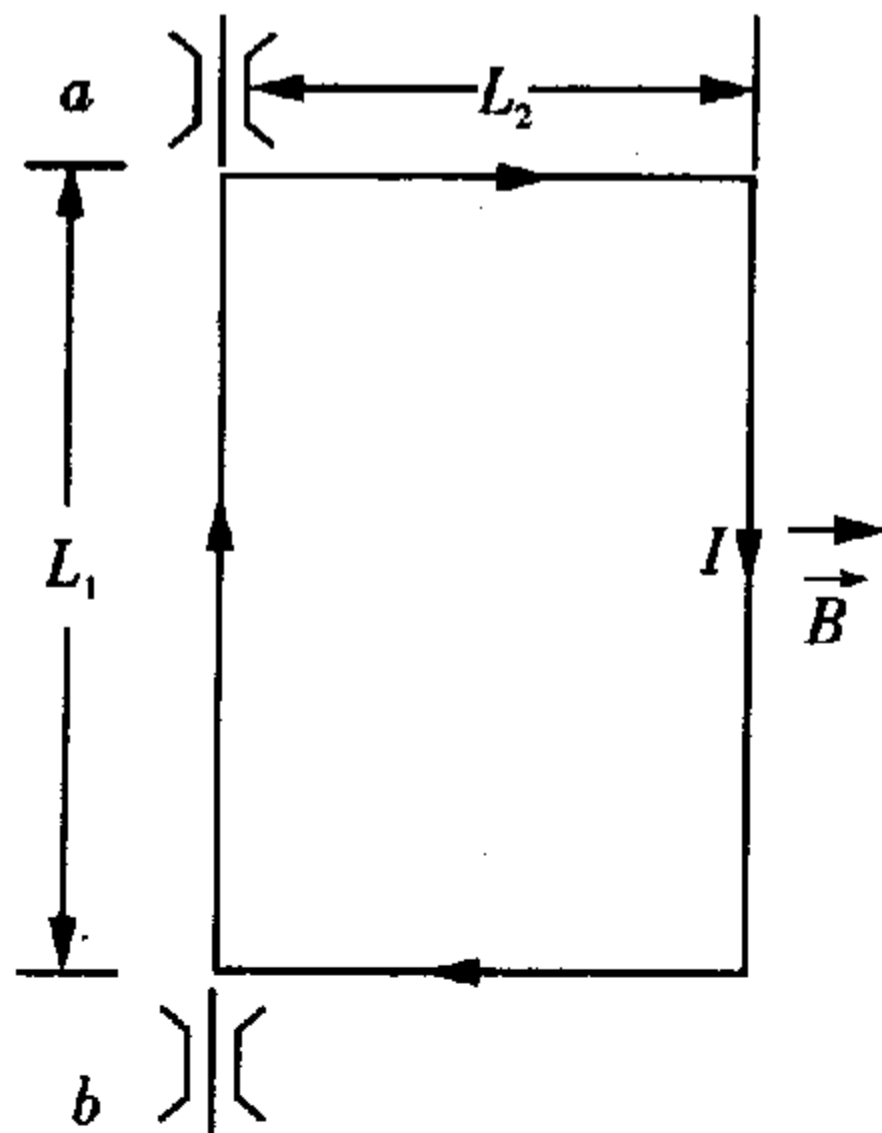


图 11-35

14. 一个长为 L_1 , 宽为 L_2 , 质量为 m 的矩形导电线框, 由质量均匀分布的刚性杆构成, 静止放置在不导电的水平桌面上, 线框可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴 ab 转动, 在此边中串接一能输出可变电流的电流源 (图中未画出), 线框处在匀强磁场中, 磁场的磁感应强度 B 沿水平方向且与转轴垂直. 俯视图如图 11-35 所示, 现将电流从零逐渐增大, 当电流大于某一最小值 I_{\min} 时, 线框

将改变静止状态。(1)求电流值 I_{\min} ; (2)当线框改变静止状态后,设该电流具有始终保持恒定电流 I_0 不变 ($I_0 > I_{\min}$) 的功能. 已知在线框运动过程中存在空气阻力,试分析线框的运动状况.

15. 如图 11-36 所示,在半径为 a 的圆柱空间中(图中圆为其横截面)充满磁感应强度大小为 B 的均匀磁场,其方向平行于轴线远离读者,在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为 $L = 1.6a$ 的刚性等边三角形框架 $\triangle DEF$,其中心 O 位于圆柱的轴线上. DE 边上 S 点 ($\overline{DS} = \frac{1}{4}L$) 处有一发射带电粒子的源,发射粒子的方向皆在图 11-36 中截面内且垂直于 DE 边向下. 发射粒子的电量皆为 $q (> 0)$,质量皆为 m ,但速度 v 有各种不同的数值. 若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞,并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰的边. 试问:

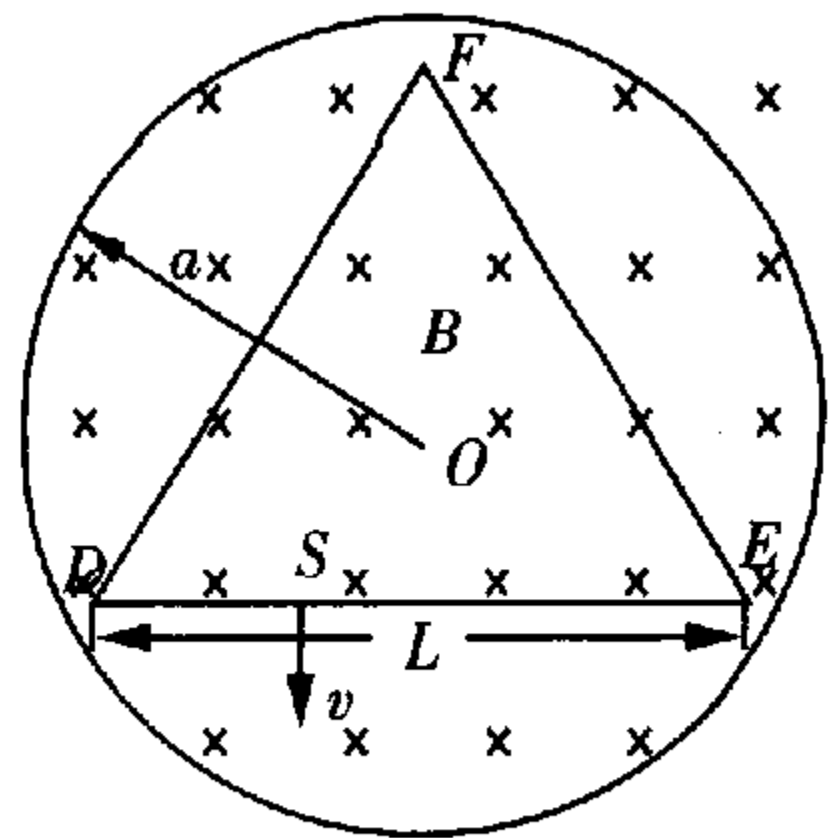


图 11-36

- (1)带电粒子速度 v 的大小取哪些数值时可使 S 点发出的粒子最终又回到 S 点?
 (2)这些粒子中,回到 S 点所用的最短时间是多少?

16. 测定电子荷质比(电荷 q 与质量 m 之比 q/m) 的实验装置如图 11-37 所示,真空玻璃管内,阴极 K 发出的电子,经阳极 A 与阴极 K 之间的高电压加速后,形成一束很细的电子流,电子流以平行于平板电容器极板的速度进入两极板 C, D 间的区域. 若两极板 C, D 间无电压,则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的 O 点;若在两极板间加上电压 U ,则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的 P 点;若再在极板间加一方向垂直于纸面向外、磁感应强度为 B 的匀强磁场,则打到荧光屏上的电子产生的光点又回到 O 点. 现已知极板的长度 $l = 5.00 \text{ cm}$, C, D 间的距离 $d = 1.5 \text{ cm}$,极板区的中点 M 到荧光屏中点 O 的距离为 $L = 12.50 \text{ cm}$, $U = 200 \text{ V}$, P 点到 O 点的距离 $y = \overline{OP} = 3.0 \text{ cm}$, $B = 6.3 \times 10^{-4} \text{ T}$. 试求电子的荷质比.(不计重力影响).

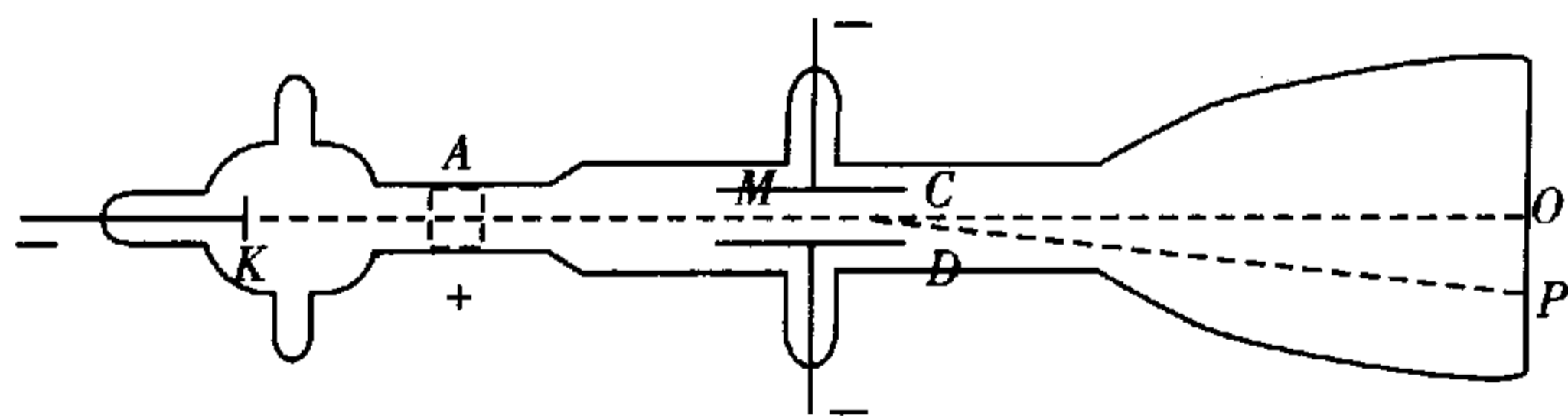


图 11-37

17. 如图 11-38 所示,有一半半径为 b ,厚为 d 的半导体圆盘,电阻率为 ρ ,圆盘中心有一半半径为 a 的金属电极,边缘 b 为一环形金属电极,两者之间接上电池 E ,并将圆盘放入一均匀磁场 B 中,圆盘的法线和 B 一致,求圆盘所受的力矩.
18. 如图 11-39 所示,半径为 R 的圆筒形真空管中有两个隔板把管内分成三个区域,隔板上分别有位于中心的小孔 A 和 A' ,其间距离为 L . 区域 I 中有电场,区域 II 中有沿管轴方向的匀强磁场,区域 III 中既无电场也无磁场. 由阴极 K 连续发出的电子在区域 I 中

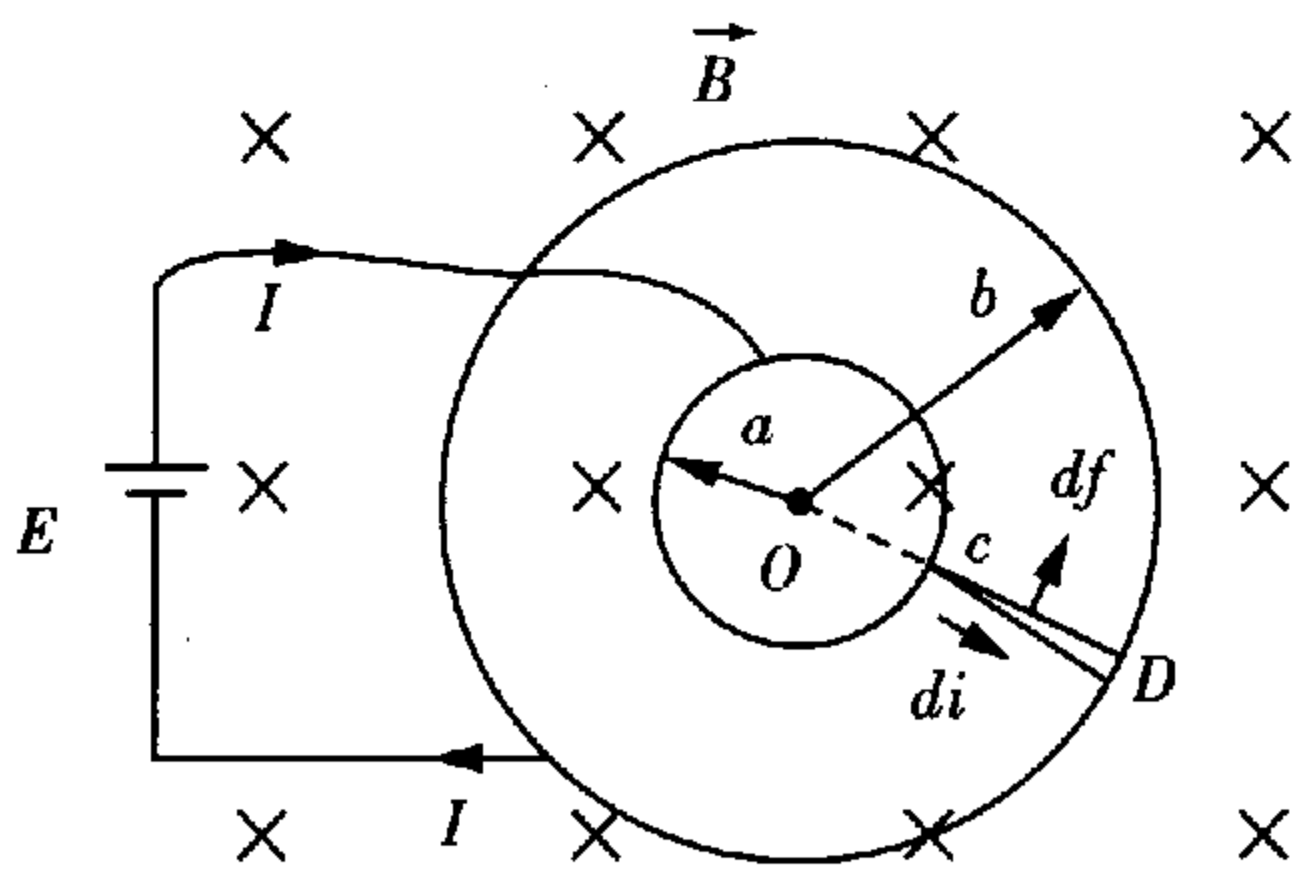


图 11-38

由电场加速,穿过小孔 A 成发散电子束进入区域 II. 设各个电子穿过小孔 A 时沿管轴方向的分速度都为 v , 调节区域 II 中的磁感应强度使它等于为使在区域 III 中有穿过孔 A' 的发射电子束所必须的最低值, 从这时开始计时且保持此最低值不变, 但使磁场方向作周期为 T 的周期性正、反变化, 如图 11-40 所示. 设真空管中凡碰到管壁的电子均不弹回.

- (1) 求在区域 III 中有穿过 A' 的发散电子束时 T 的最小值 T_0 .
- (2) 设 $T = 2T_0$, 在图 11-40 的时间轴上标出区域 III 中有发射电子束的时间区间.
- (3) 进入区域 III 内的电子束中, 电子运动方向与管轴间的夹角最大可能值为多大?

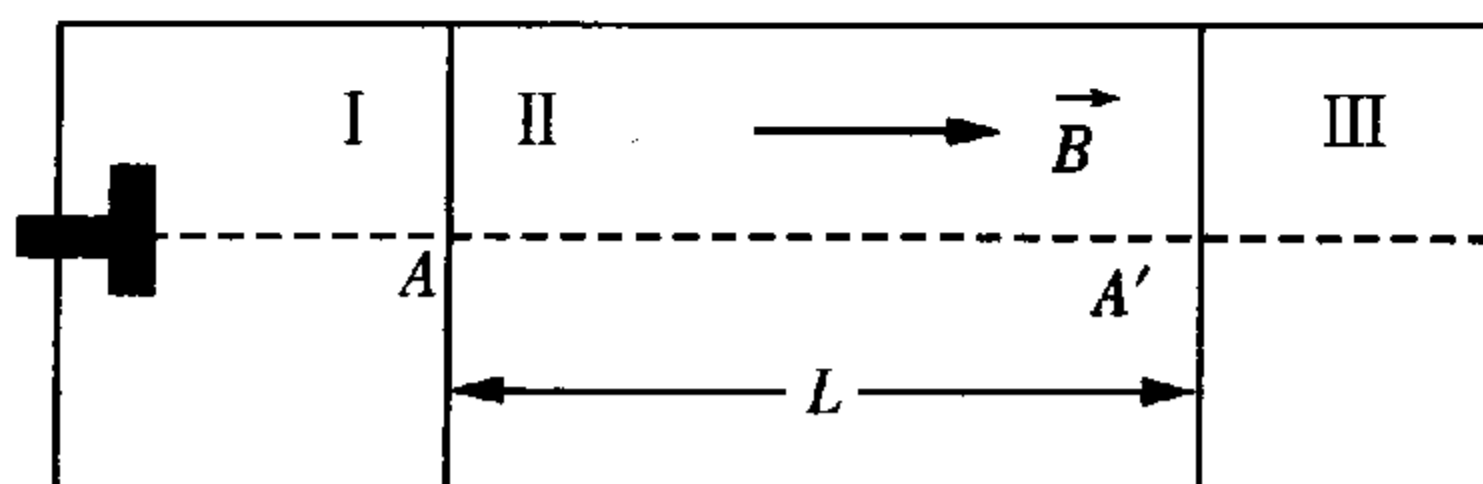


图 11-39

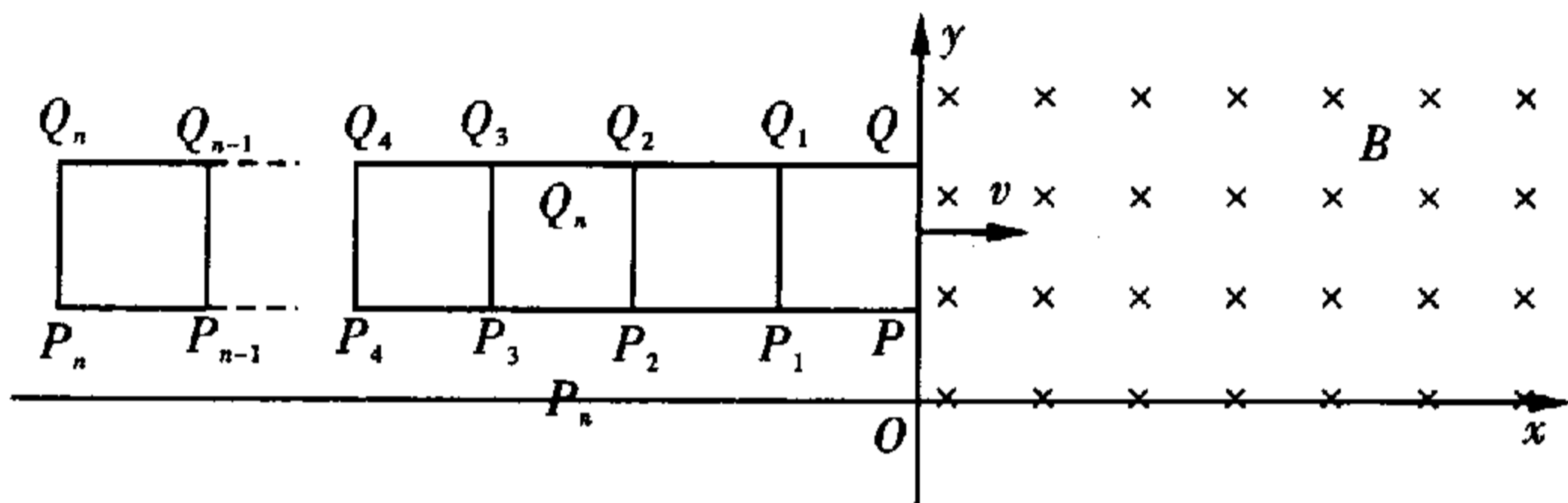


图 11-40

19. 如图 11-41 所示, 在半径为 R 的圆形平面内, 分布有匀强磁场, 磁场方向与圆平面垂直且指向纸面外, 圆面的周界是一刚性的固定的圆环, SD 是圆环的一条直径, 一束质量和电量都相等的带正电的粒子以不同的速度沿垂直于磁场的方向从 S 点射入磁场, 速度方向与 SD 的夹角不超过 30° , 已知这种粒子在该磁场中做圆周运动时的周期为 T . 在 D 点, 圆环上有一小孔, 只要粒子到达 D 点, 该粒子便从小孔穿出磁场区域. 设粒子与圆环的碰撞都是完全弹性的, 每次碰撞后, 粒子的电量不变, 不考虑粒子间的相互作用与相互碰撞以及重力的影响. 求满足以下条件的那些粒子在射入磁场时的速度的大小和方向: 在磁场内运动的总时间为 T 且与圆环的碰撞不超过 6 次, 其中最后一次“碰撞”是指正好达到 D 点.

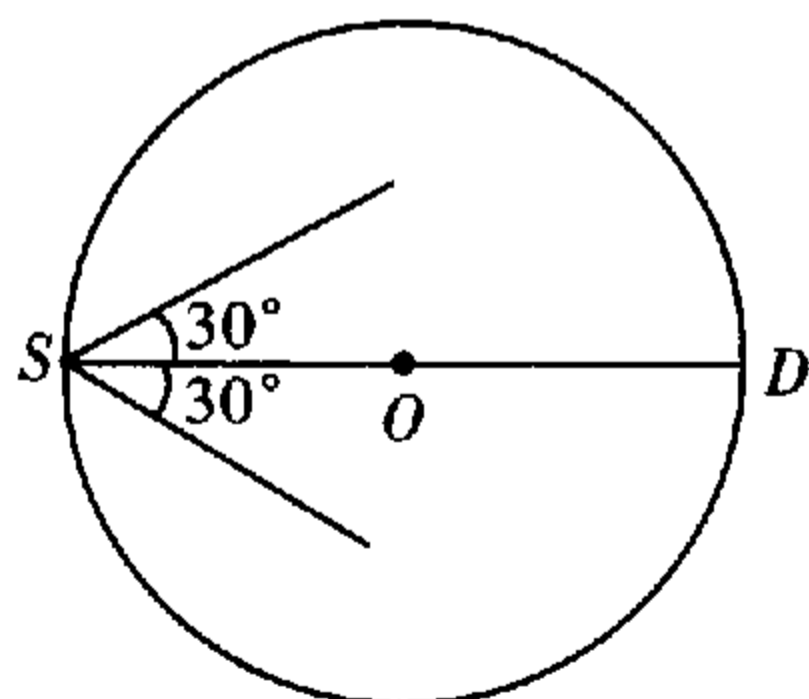


图 11-41

第十二章 电磁感应 电磁波

【学习目标】

当通过由一闭合导体回路所包围的面积磁通量发生变化时,回路中就产生电流,这个现象称做电磁感应现象,这个电流称为感应电流.

一、电磁感应的基本定律

1. 法拉第电磁感应定律

当通过闭合导体回路的磁通量变化时,线圈中有感应电流产生,而电流的产生必与电动势的存在有关,这种由于回路中磁通量变化而引起的电动势称为感应电动势.感应电动势比感应电流更反映电磁感应现象的本质.

精确的实验表明:闭合回路中的感应电动势 ε 与穿过回路的磁通量的变化率 $\Delta\Phi/\Delta t$ 成正比.这就是法拉第电磁感应定律,即

$$\varepsilon = -K \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

式中的 K 为比例常数,如果 Φ 的单位用 Wb , t 的单位用 s , ε 的单位用 V ,则 $K=1$. 式中负号用以确定感应电动势的指向. 这样

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

2. 楞次定律

闭合导体回路中感应电流的方向,总是使得感应电流所激发的磁场阻止引起感应电流的磁通量的变化,这个结论就是楞次定律.

二、动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律告诉我们:只要闭合回路的磁通量发生变化,回路中就有电动势产生,而不管磁通的变化是怎样引起的. 而 $\Phi = \sum B_i \Delta S_i \cos\theta_i$, 造成 Φ 变化的原因有下列三种情况:

第一是 \vec{B} 、 θ 不变,但回路的一部分切割磁力线运动使得回路面积改变导致 Φ 变;

第二是 \vec{B} 、 S 不变,但 θ 变,即回路在磁场中转动,使回路所包围的面与 \vec{B} 的夹角改变而导致 Φ 变;

第三是 S 、 θ 不变,但 \vec{B} 变导致 Φ 变.

第一、二种情况是由于线圈回路的一部分或整体在磁场中运动使得通过回路的磁通量改变而产生感应电动势,这类感应电动势称之为动生电动势;第三种情况是磁场的变化使得回路的磁通量改变而产生的感应电动势,这种感应电动势称之为感生电动势.

1. 动生电动势

动生电动势对应的非静电力是洛伦兹力,如图 12-1 中,当 ab 导体在匀强磁场中向右以速度 v

运动时,自由电子受到向下的洛伦兹力的作用:

$$f = evB$$

而其电动势为单位正电荷从负极通过电源内部移到正极过程中洛伦兹力所做的功:

$$\varepsilon = \frac{A}{e} = \frac{evBl}{e} = vBl$$

式中 l 是导线 ab 的长度.

若导线 \vec{v} 的方向不与 \vec{B} 垂直,而夹角为 θ 时,则导线内的动生电动势为

$$\varepsilon = Blv \sin \theta$$

2. 感生电动势和感生电场

当导体线圈回路静止而圈内磁场变化时,圈内有感应电流产生,那是什么力驱使电荷定向移动的呢?显然不是静电力(没有静电荷)和洛伦兹力(洛伦兹力要电荷运动时才产生),麦克斯韦提出变化的磁场产生感生电场的假设,正是这感生电场驱使电荷的定向移动,实验证实了假设的存在.感生电场是变化的磁场激发的;感生电场驱使单位正电荷绕闭合回路一周时,所做的功不为零而恰好为线圈内感生电动势的值.感生电场是非保守场.感生电动势对应的非静电力正是感生电场对电荷的作用力.

下面仅就无限长直螺线管内部磁感应强度 \vec{B} 随时间线性变化时所产生的感生电场做些讨论,设 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 已知.

(1) 电力线 管内外感生电场电力线都是与管截面同心的同心圆,电力线方向可由楞次定律确定,与 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 的正负有关.

(2) 感生电场的大小 若螺线管半径为 R ,

$$r \leq R \quad E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$r > R \quad E_{\text{感}} = \frac{R^2}{2r} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$\vec{E}_{\text{感}}$ 的大小在管内与 r 成正比,在管外与 r 成反比.

(3) 任一过圆心的直线段上的电动势为零.

三、自感和互感

1. 自感

因线圈内电流变化而在线圈自身引起感应电动势的现象称为自感现象.所产生电动势称为自感电动势.

根据毕奥-萨伐尔定律,通过线圈的磁通量与线圈中电流成正比:

$$\Phi = LI$$

式中 L 为比例系数,仅与线圈的大小,形状、匝数及周围介质情况有关.称为自感系数,其物理实质是线圈“电磁惯性”的量度.

根据法拉第电磁感应定律,自感电动势为

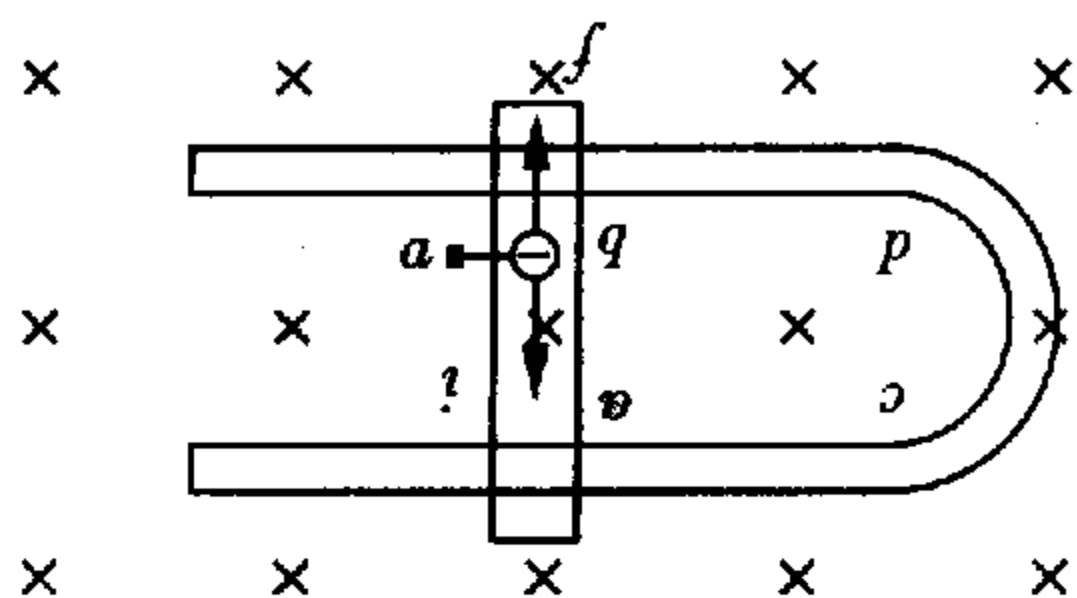


图 12-1

$$\varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

2. 互感

如图 12-2 所示, 1, 2 线圈中的电流 I_1 和 I_2 可在线圈 2, 1 中产生磁通量, 而当 I_1 和 I_2 变化时, 可在线圈 2 和 1 中产生感应电动势, 这种现象称为互感现象, 所产生的感应电动势称为互感电动势.

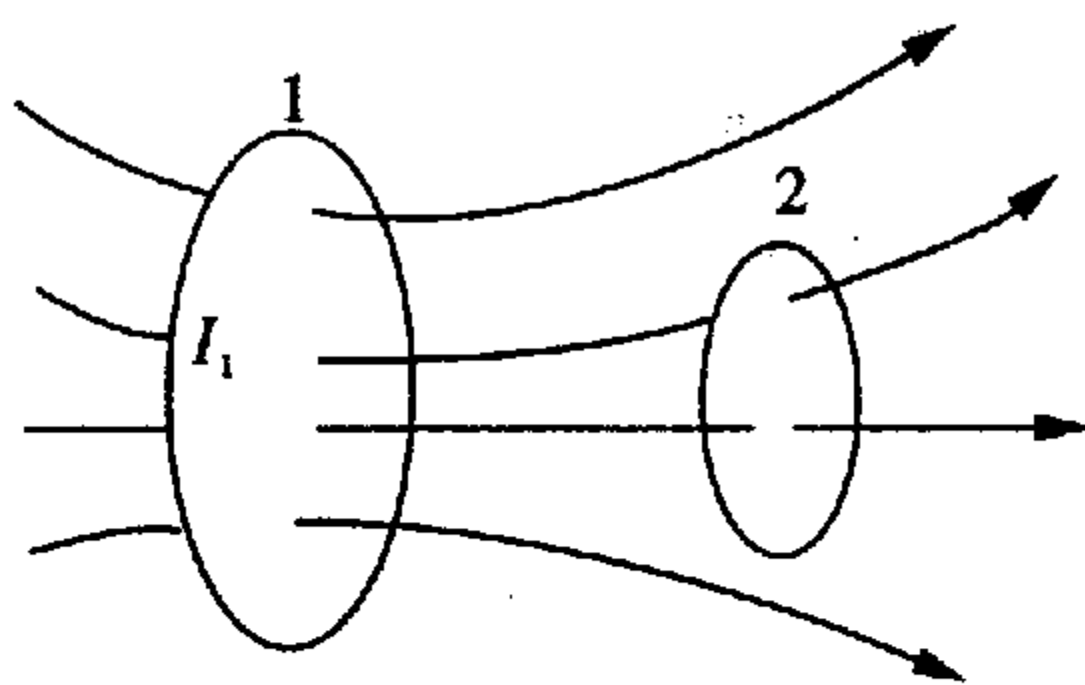


图 12-2

设线圈 1 中的电流 I_1 在线圈 2 中产生的磁通量为 Φ_{12} , 线圈 2 中的电流 I_2 在线圈 1 中产生的磁通量为 Φ_{21} , 根据毕奥 - 萨伐尔定律: $\Phi_{12} = MI_1$ $\Phi_{21} = MI_2$

根据法拉第电磁感应定律:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \varepsilon_1 = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

3. 磁场的能量

见图 12-3, 当 K 闭合后, 自感系数为 L 的线圈中将产生自感电动势 $\varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$, 电池电动势 ε 与 $\varepsilon_{\text{自}}$ 合起来产生电流通过电阻 R

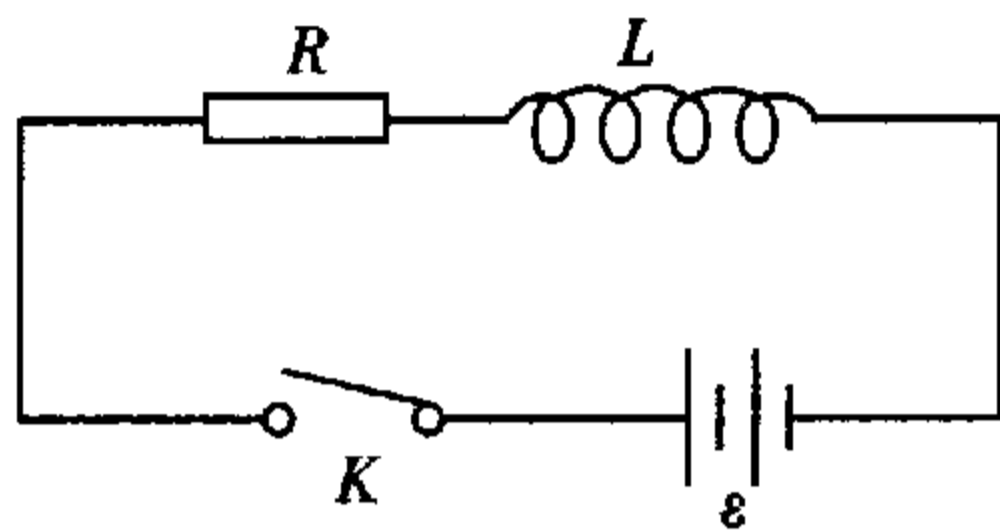


图 12-3

$$\varepsilon - L \frac{\Delta i}{\Delta t} = iR$$

即 $\varepsilon = iR + L \frac{\Delta i}{\Delta t}$

式中 i 是变化的, 方程两边乘以 $i\Delta t$ 并求和,

$$\sum \varepsilon i \Delta t = \sum Ri \Delta t + \sum Li \Delta i$$

显然, 方程左边是电源输出能量, 右边第一项是在电阻 R 上产生的焦耳热, 则第二项显然也是能量, 即贮存在线圈内磁场的能量. 若电流 i 从 0 增为 I , 求和可得到

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

从公式我们看到能量与电流的关系, 螺线管线圈通有电流 I 时, 管内有磁场, 我们可推导出单位体积磁场的能量即磁场能量密度为

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

四、电磁振荡和电磁波

麦克斯韦 1861 年提出变化的磁场激发感生电场的第二年, 又提出了变化的电场也激发磁场. 这样, 变化的电场和磁场可以互相激励, 交替产生, 由近及远以一定速度向前传播, 这个传播过程称之为电磁波.

1. 电磁振荡

如图 12-4 所示, 当开关放在位置“1”时, 对电容器充电, 当充电到 Q 时, 把开关迅速拨到位置“2”, 使电容器与电感线圈组成回路(电路中 R 很小, 实际上就是电感线圈的直流电阻).

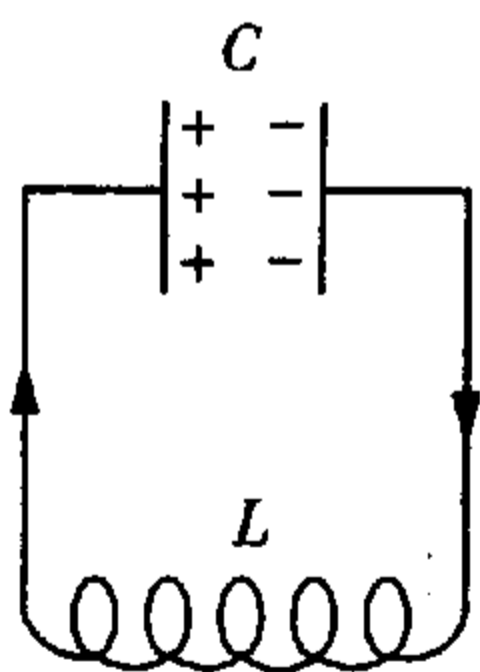
充电完毕,电容器贮有电能 $W_e = \frac{Q^2}{2C}$, 开关拨向“2”, 电容器放电, 电流逐渐增大, 放电完毕时电流最大, 电场能全部转换为贮藏在线圈内的磁场能, 放电完, 电流不能停止, 电感产生的自感电动势要维持继续按原方向流动. 这时反向充电, 磁场能又转换为电场能. 这样周而复始, 形成电磁振荡, 如果忽略电阻、辐射的存在, 振荡将永久存在下去, 其振动的圆频率和振荡周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad T = 2\pi \sqrt{LC}$$

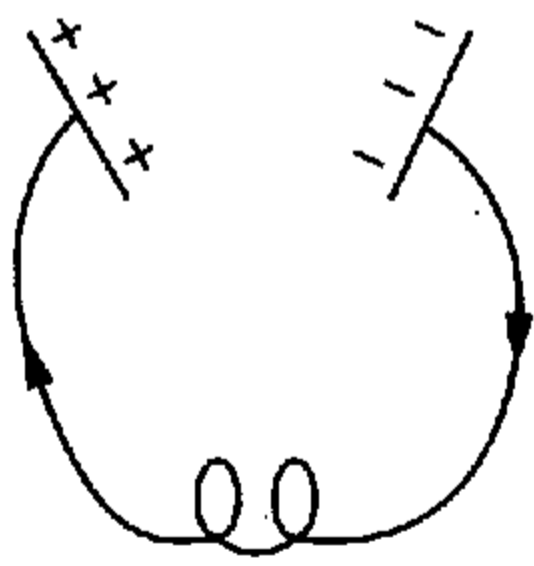
电路总是有电阻的, 能量总有损耗. 若电阻较小, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 可得如图 12-5 所示的阻尼振荡; 若电阻 R 较大, $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 电容器进行非周期性放电, 不能产生振荡.

图 12-4 所示的振荡电路不能向外发射电磁波, 要想发射电磁波必须一要电路开放, 二要 ω 大即 L 和 C 小, 经过图 12-6 所示的一系列演化就达到上述两个要求, 从而能向外发射电磁波. 图 12-6(d) 实际就是一发射天线, 相当一振荡的电偶极子.

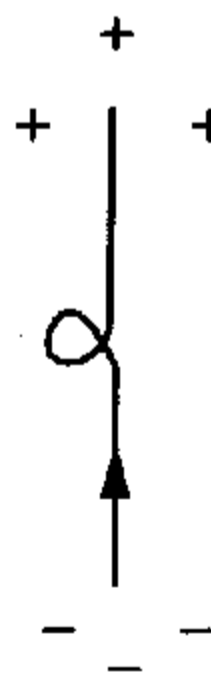
电偶极子产生的电磁波有以下几点性质:



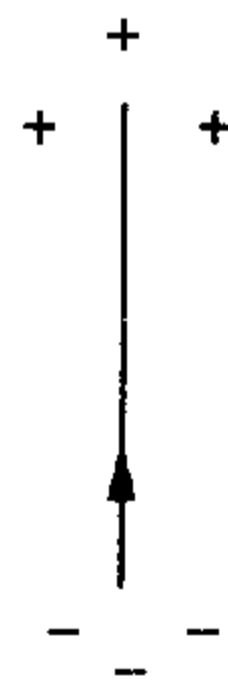
(a)



(b)



(c)



(d)

图 12-6

(1) 电场和磁场都作正弦或余弦函数的周期性变化, 两者同位相. 在空间任一点, 电场和磁场在量值上有 $B = \sqrt{\epsilon\mu}E$ 的关系.

(2) \vec{E} 和 \vec{B} 互相垂直, 且均与传播方向垂直, 电磁波是横波.

(3) 电磁波传播速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, 在真空 $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(4) 振荡电偶极子所辐射的电磁波的频率等于电偶极子的振荡频率, \vec{E} 和 \vec{B} 的振幅都与频率的平方成正比.

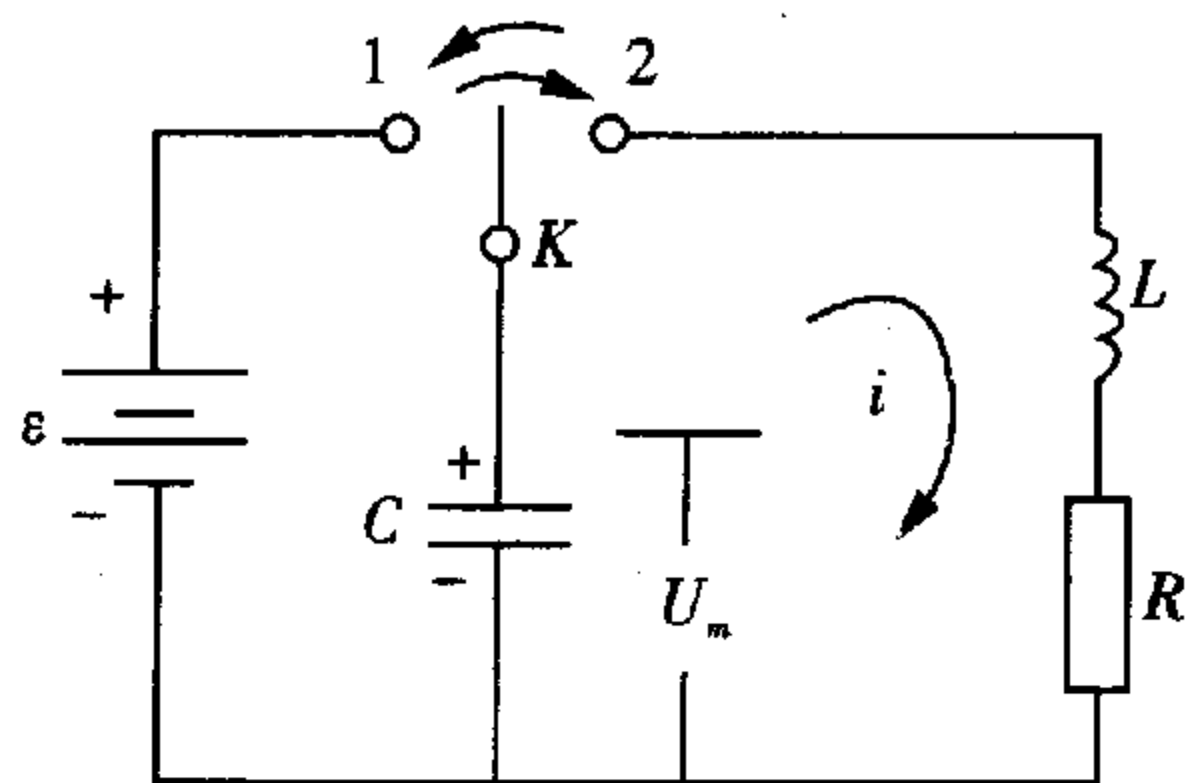


图 12-4

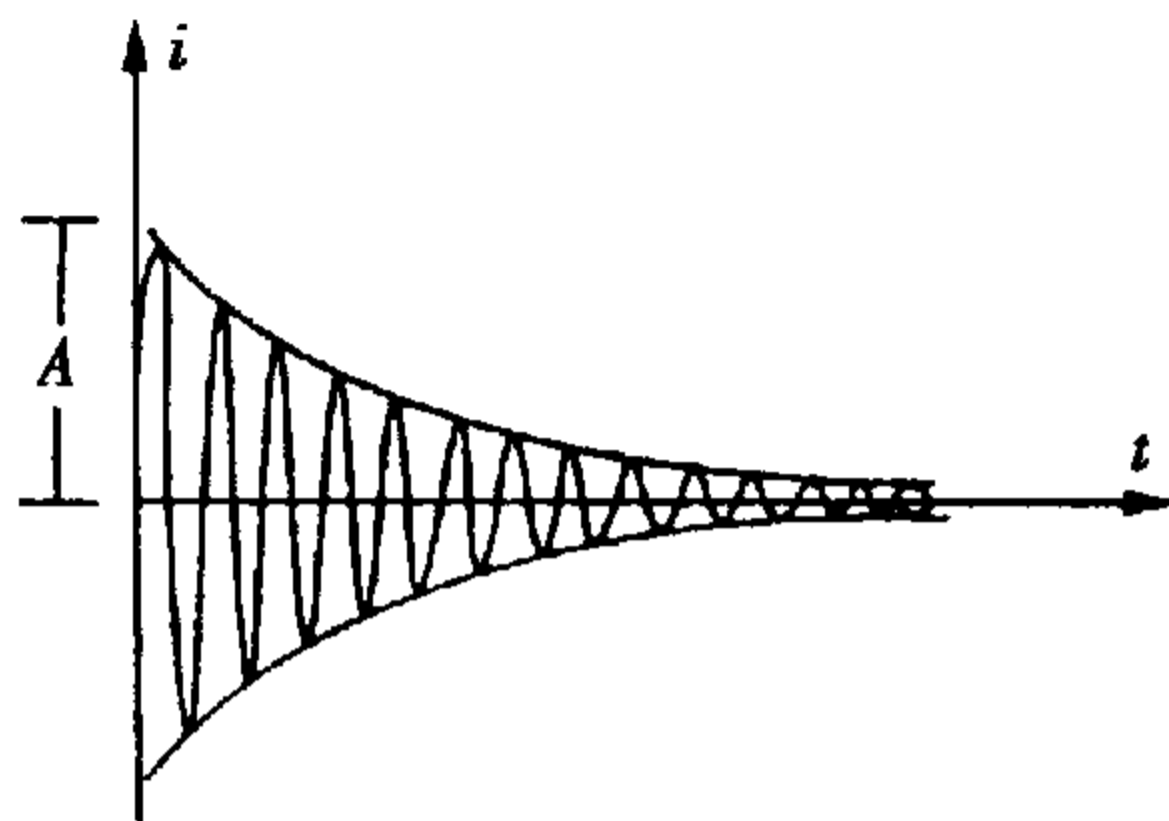


图 12-5

【解题钥匙】

例1 如图12-7所示,有两平行金属导轨,相距 l ,位于同一水平面内(图中纸面),处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向竖直向下(垂直纸面向里).质量均为 m 的两金属杆 ab 和 cd 放在导轨上,与导轨垂直.初始时刻,金属杆 ab 和 cd 分别位于 $x = x_0$ 和 $x = 0$ 处.假设导轨及金属杆的电阻都为零,由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数为 L .今对金属杆 ab 施以沿导轨向右的瞬时冲量,使它获得初速 v_0 .设导轨足够长, x_0 也足够大,在运动过程中,两金属杆之间距离的变化远小于两金属杆的初始间距 x_0 ,因而可以认为在杆运动过程中由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数 L 是恒定不变的.杆与导轨之间摩擦可不计.求任意时刻两杆的位置 x_{ab} 和 x_{cd} 以及由两杆和导轨构成的回路中的电流 i 三者各自随时间 t 的变化关系.

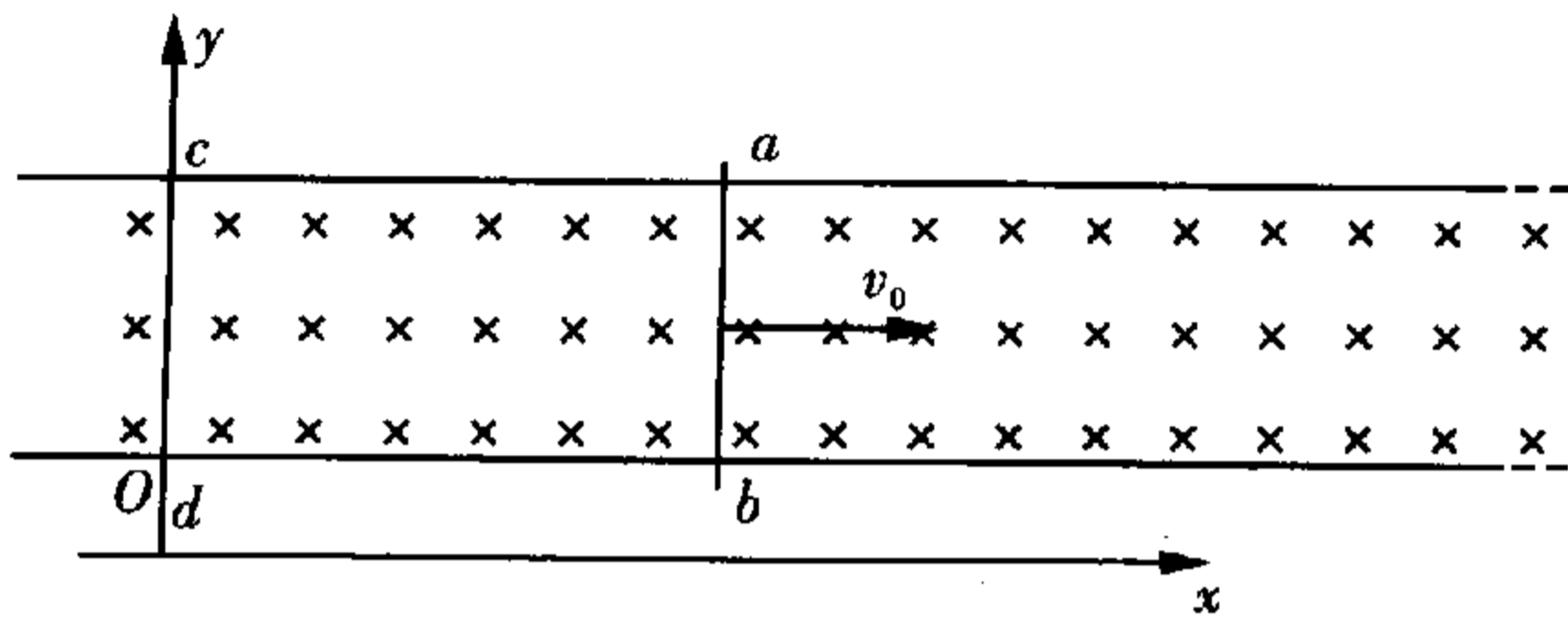


图 12-7

解析 当金属杆 ab 获得沿 x 轴正方向的初速 v_0 时,因切割磁感线而产生感应电动势,由两金属杆与导轨构成的回路中会出现感应电流.由于回路具有自感系数,感应电流的出现,又会在回路中产生自感电动势,自感电动势将阻碍电流的增大,所以,虽然回路的电阻为零,但回路的电流并不会趋向无限大,当回路中一旦有了电流,磁场作用于杆 ab 的安培力将使 ab 杆减速,作用于 cd 杆的安培力使 cd 杆运动.

设在任意时刻 t , ab 杆和 cd 杆的速度分别为 v_1 和 v_2 (相对地面参考系),当 v_1 、 v_2 为正时,表示速度沿 x 轴正方向;若规定逆时针方向为回路中电流和电动势的正方向,则因两杆作切割磁感线的运动而产生的感应电动势为

$$E = Bl(v_1 - v_2) \tag{①}$$

当回路中的电流 i 随时间的变化率为 $\Delta i / \Delta t$ 时,回路中的自感电动势为

$$E_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{②}$$

根据欧姆定律,注意到回路没有电阻,有

$$E + E_L = 0 \tag{③}$$

金属杆在导轨上运动过程中,两杆构成的系统受到的水平方向的合外力为零,系统的质心做匀速直线运动.设系统质心的速度为 v_c ,有

$$mv_0 = 2mv_c \tag{④}$$

得

$$v_c = \frac{v_0}{2} \tag{⑤}$$

v_c 方向与 v_0 相同,沿 x 轴的正方向.

现取一新的参考系 S' , 它与质心固连在一起, 并把质心作为坐标原点 O' , 取坐标轴 $O'x'$ 与 x 轴平行. 设相对 S' 系, 金属杆 ab 的速度为 u , cd 杆的速度为 u' , 则有

$$v_1 = v_c + u \quad (6)$$

$$v_2 = v_c + u' \quad (7)$$

因相对 S' 系, 两杆的总动量为零, 即有

$$mu + mu' = 0 \quad (8)$$

由①、②、③、⑤、⑥、⑦、⑧各式, 得

$$2Blu = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (9)$$

在 S' 系中, 在 t 时刻, 金属杆 ab 坐标为 x' , 在 $t + \Delta t$ 时刻, 它的坐标为 $x' + \Delta x'$, 则由速度的定义

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \quad (10)$$

代入⑨式得

$$2Bl\Delta x' = L\Delta i \quad (11)$$

若将 x' 视为 i 的函数, 由⑪式知 $\Delta x'/\Delta i$ 为常量, 所以 x' 与 i 的关系可用一直线方程表示

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + b \quad (12)$$

式中 b 为常数, 其值待定. 现已知在 $t=0$ 时刻, 金属杆 ab 在 S' 系中的坐标 $x' = \frac{1}{2}x_0$, 这时 $i=0$, 故得

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + \frac{1}{2}x_0 \quad (13)$$

$$\text{或 } i = \frac{2Bl}{L}(x' - \frac{1}{2}x_0) \quad (14)$$

$\frac{1}{2}x_0$ 表示 $t=0$ 时刻金属杆 ab 的位置, x' 表示在任意时刻 t 杆 ab 的位置, 故 $(x' - \frac{1}{2}x_0)$ 就是杆 ab 在 t 时刻相对初始位置的位移, 用 X 表示,

$$X = x' - \frac{1}{2}x_0 \quad (15)$$

当 $X > 0$ 时, ab 杆位于其初始位置的右侧; 当 $X < 0$ 时, ab 杆位于其初始位置的左侧. 代入⑭式, 得

$$i = \frac{2Bl}{L}X \quad (16)$$

这时作用于 ab 杆的安培力

$$F = -iBl = -\frac{2B^2l^2}{L}X \quad (17)$$

ab 杆在初始位置右侧时, 安培力的方向指向左侧; ab 杆在初始位置左侧时, 安培力的方向指向右侧, 可知该安培力具有弹性力的性质. 金属杆 ab 的运动是简谐振动, 振动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2B^2l^2/L}} \quad (18)$$

在任意时刻 t , ab 杆离开其初始位置的位移

$$X = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (19)$$

A 为简谐振动的振幅, φ 为初相位, 都是待定的常量. 通过参考圆可求得 ab 杆的振动速度:

$$u = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (20)$$

⑱、⑳式分别表示任意时刻 ab 杆离开初始位置的位移和运动速度. 现已知在 $t=0$ 时刻, ab 杆位于初始位置, 即

$$x = 0$$

速度为

$$u = v_0 - V_c = v_0 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}v_0$$

故有

$$0 = A\cos\varphi$$

$$\frac{v_0}{2} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\varphi$$

解这两式, 并注意到⑱式得

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (21)$$

$$A = \frac{v_0}{4\pi}T = \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}} \quad (22)$$

由此得 ab 杆的位移:

$$X = \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \quad (23)$$

由⑮式可求得 ab 杆在 S' 系中的位置:

$$x'_{ab} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \quad (24)$$

因相对质心, 任意时刻 ab 杆和 cd 杆都在质心两侧, 到质心的距离相等, 故在 S' 系中, cd 杆的位置:

$$x'_{cd} = -\frac{1}{2}x_0 - \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \quad (25)$$

相对地面参考系 S , 质心以 $V_c = \frac{1}{2}v_0$ 的速度向右运动, 并注意到⑱式, 得 ab 杆在地面参考系中的位置:

$$x_{ab} = x_0 + \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \quad (26)$$

cd 杆在 S 系中的位置:

$$x_{cd} = \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \quad (27)$$

回路中的电流由⑮式得

$$i = \frac{2Blv_0}{L2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t = v_0\sqrt{\frac{m}{2L}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \quad (28)$$

方法与技巧 该题是要求杆的运动方程. 在初始条件已知的情况下, 只要知道杆所受到的力, 根据牛顿运动定律即可求解. 对杆来说, 这里所受的力只有安培力, 写出安培力公式 $F = iBl$, i 也是所求

的,但考虑到超导回路里电动势应为零,我们通过杆的动生电动势与回路自感电动势的和应为零.就找到了 i 与 x 的关系,将 i 代入安培力公式,刚好可看到杆所受到的力具有弹性力的性质,从而知道杆 ab 作简谐振动.而根据初始条件,可定出简谐振动的振幅和初相,从而得到杆 ab 的运动方程,根据电流与杆 ab 位置的关系,得到电流随时间的变化关系.因为杆 ab 和杆 cd 都在运动,两杆上的动生电动势的和与两杆的相对速度有关,故选质心坐标系来求解,会使问题简化.

例 2 一个长的螺线管包含了另一个同轴的螺线管(它的半径 R 是外面螺线管的一半).它们的线圈单位长度具有相同的圈数,且初始时都没有电流.在同一瞬间,电流开始在两个螺线管中线性增长.在任意时刻,里边的螺线管中的电流为外边螺线管中的两倍,它们的方向相同.由于增长的电流,一个初始静止的处于两个螺线管中间的带电粒子,开始沿着一根圆形的轨道运动(见图 12-8).问圆的半径 r 为多少?

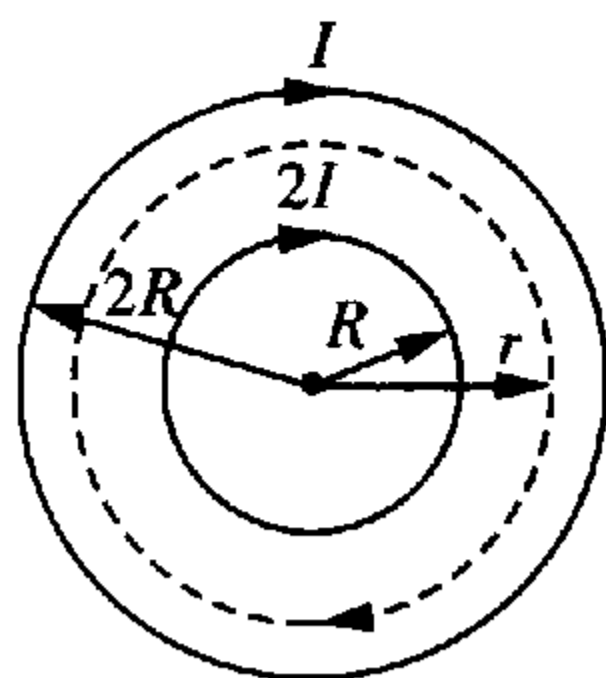


图 12-8

解析 在 t 时刻外边螺线管中的电流为 $I = kt$,在里边的螺线管中的电流为 $2I = 2kt$,其中 k 是一个常数.由这些电流产生的磁场在外边螺线管中为 $B = \mu_0 nkt$,而在里边螺线管中为 $3B$,其中 n 为单位长度上螺线管的圈数.由半径为 r 的粒子轨道所包围的磁通量为

$$\Phi = \pi R^2 \times 2B + \pi r^2 \times B = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nkt$$

感生电场的大小可以从磁场随时间的变化率计算得出:

$$E \times 2\pi r = \frac{d\Phi}{dt} = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nk$$

因此

$$E = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r}$$

带电粒子由磁场限制在它的圆形轨道上,因此,从作用在它上面的力的总的径向分量为零,我们可以得到

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \tag{1}$$

根据公式 $ma_t = qE$,粒子由合力的切向分量沿着它的圆形轨道加速,其中 m 是质量, q 是粒子的电荷.

当电场力的大小恒定时,粒子的速度随时间均匀地增加,

$$v = a_t t = \frac{qE}{m} t = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r} \frac{q}{m} t$$

把上式和 B 的值代入方程①,我们得到

$$\frac{m}{r} \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r} \frac{q}{m} t = q \mu_0 nkt$$

满足上式的条件为

$$\frac{(2R^2 + r^2)}{r^2} = 1 \quad \text{即} \quad r = \sqrt{2}R$$

方法与技巧 螺线管内电流随时间变化,即磁场也是随时间变化,螺线管内外产生感生电场,在感生电场作用下,静止带电粒子做加速圆周运动.其向心力由洛伦兹力提供,列出方程很易求出结果.

例3 一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环,其内、外半径分别为 a_1 、 a_2 ,厚度可以忽略.两个表面都带有电荷,电荷面密度 σ 随离开环心距离 r 变化的规律均为 $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$, σ_0 为已知常量.薄圆环绕通过环心垂直环面的轴以大小不变的角加速度 β 减速转动, $t=0$ 时刻的角速度为 ω_0 .将一半径为 a_0 ($a_0 \ll a_1$)、电阻为 R 并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置.试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力 F 与时间 t 的关系.

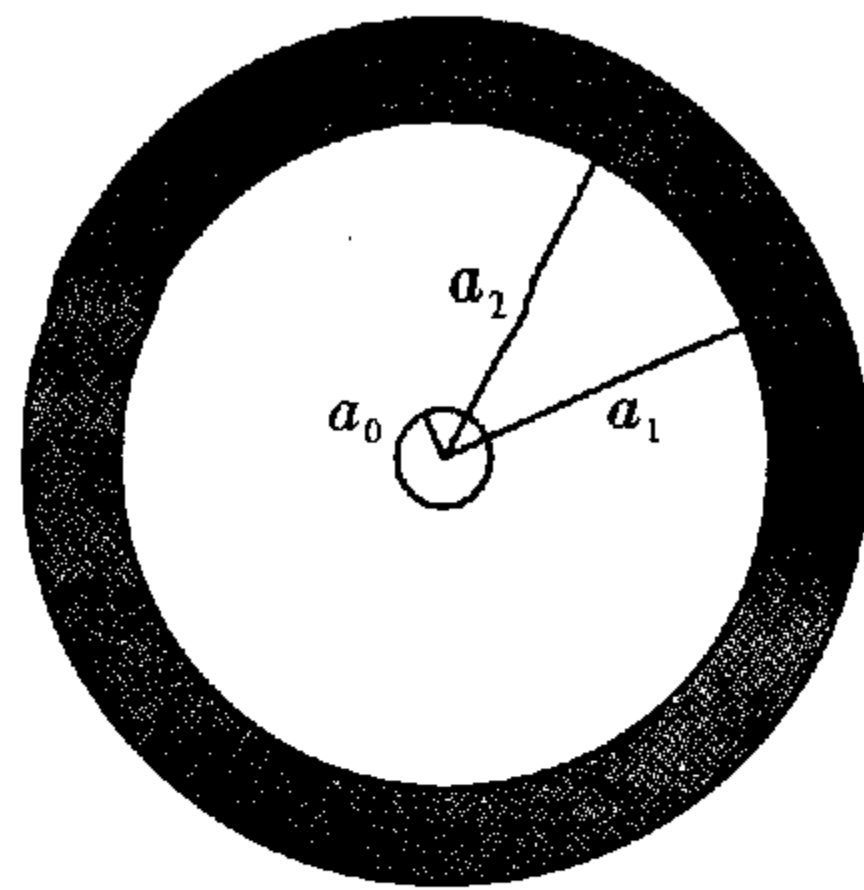


图 12-9

提示:半径为 r 、通有电流 I 的圆线圈(环形电流),在圆心处产生的磁感应强度为 $B = k \frac{I}{r}$ (k 为已知常量).

解析 用半径分别为 $r_1 (> a_1)$, $r_2, \dots, r_1, \dots, r_{n-1} (< a_2)$ 的 $(n-1)$ 个同心圆把塑料薄圆环分割成 n 个细圆环.第 i 个细圆环的宽度为 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$,其环带面积为

$$\Delta S_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - \Delta r_i)^2 = 2\pi r_i \Delta r_i$$

式中已略去高阶小量 $(\Delta r_i)^2$,该细圆环带上、下表面所带电荷量之和为

$$\Delta q_i = 2\sigma \Delta S_i = \frac{2\sigma_0}{r_i^2} 2\pi r_i \Delta r_i = \frac{4\pi\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}$$

设时刻 t 细圆环转动的角速度为 ω ,

$$\omega = \omega_0 - \beta t$$

单位时间内,通过它的“横截面”的电荷量,即为电流

$$\Delta I_i = \Delta q_i \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}$$

由环形电流产生磁场的规律,该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

$$\Delta B_i = k \frac{\Delta I_i}{r_i} = k \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i^2} \quad \text{①}$$

式中 Δr_i 是一个微小量,注意到 $r_i r_{i-1} = r_i (r_i - \Delta r_i) \approx r_i^2$,有

$$\frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i r_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \quad \text{②}$$

将各细圆环产生的磁场叠加,由①、②式得出环心 O 点处的磁感应强度:

$$B = \frac{2k\omega\sigma_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \quad \text{③}$$

由于 $a_0 \ll a_1$,可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场,可由 O 点的场表示.磁场对导线环的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{2k\omega\sigma_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \pi a_0^2 \quad \text{④}$$

由于 ω 是变化的,所以上述磁通量是随时间变化的,产生的感应电动势的大小为

$$E = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0 (a_2 - a_1) \pi a_0^2}{a_1 a_2} \left| \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0 (a_2 - a_1) \pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2} \quad \text{⑤}$$

由全电路欧姆定律可知,导线环内感应电流的大小为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2\beta}{a_1 a_2 R} \quad (6)$$

设题图中薄圆环带正电作逆时针旋转,穿过导线圆环的磁场方向垂直纸面向外,由于薄圆环作减角速转动,穿过导线圆环的磁场逐渐减小,根据楞次定律,导线圆环中的感应电流亦为逆时针方向,导线圆环各元段 Δl 所受的安培力都沿环半径向外,现取对于 y 轴两对称点 U 、 V ,对应的两段电流元 $I\Delta l$ 所受的安培力的大小为

$$\Delta f = BI\Delta l \quad (7)$$

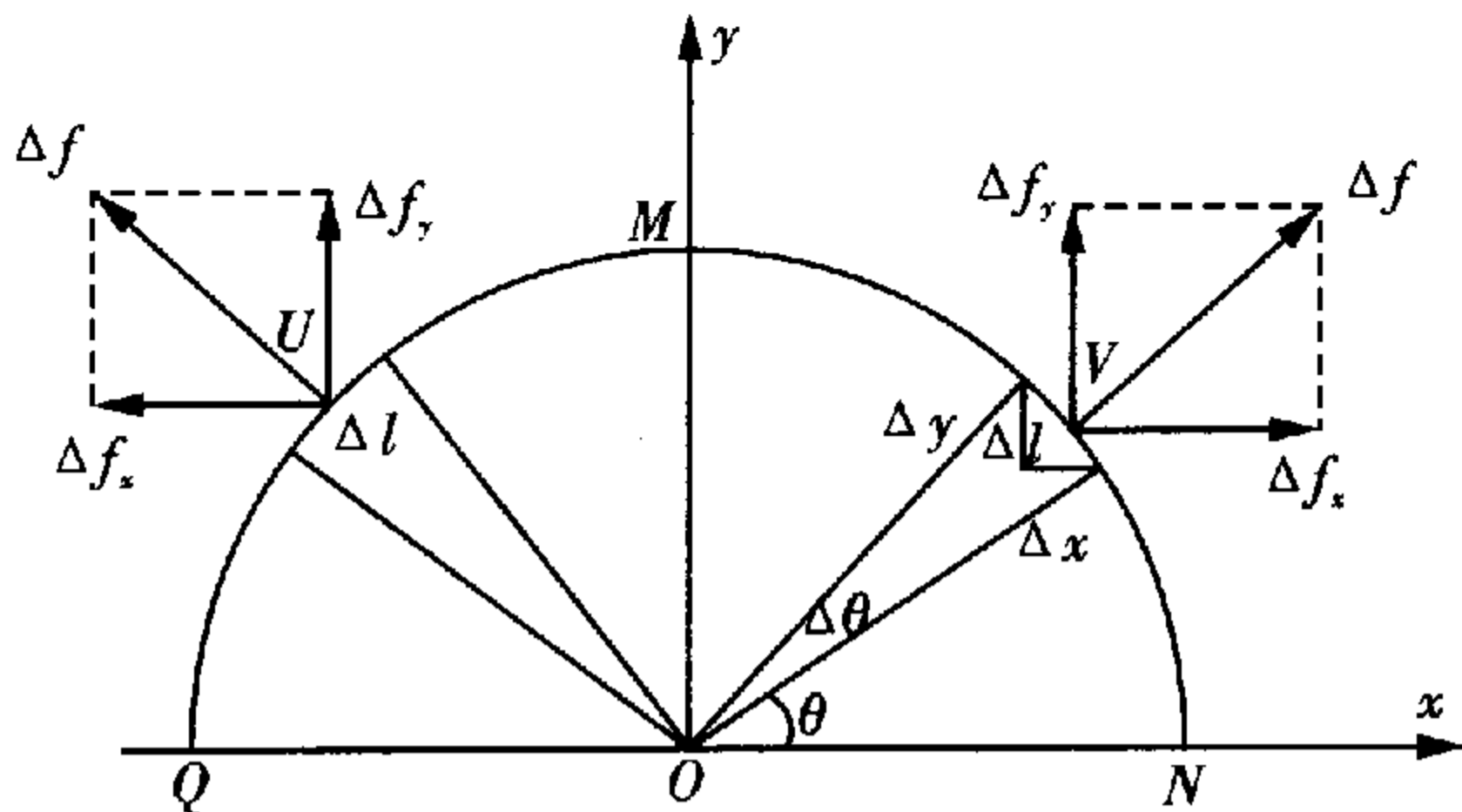


图 12-10

方向如图 12-10 所示,它沿 x 及 y 方向的分量分别为

$$\Delta f_x = BI\Delta l \cdot \cos\theta = BI\Delta y \quad (8)$$

$$\Delta f_y = BI\Delta l \cdot \sin\theta = BI\Delta x \quad (9)$$

根据对称性,作用于沿半个导线圆环 QMN 上的各电流元的安培力的 x 分量之和相互抵消,即

$$f_x = \sum BI\Delta y = BI\sum \Delta y = 0 \quad (10)$$

式中 $\Delta y = \Delta l \cos\theta$, 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, Δy 是正的, 当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, Δy 是负的, 故 $\sum \Delta y = 0$, 而作用于沿半个

导线圆环 QMN 上的各电流元的安培力的 y 分量之和为

$$f_y = \sum BI\Delta x = BI\sum \Delta x = BI2a_0 \quad (11)$$

式中 $\Delta x = \Delta l \sin\theta$, 由于 θ 在 $0 \sim \pi$ 之间 Δx 都是正的, 故 $\sum \Delta x = 2a_0$, 即半个导线圆环上受的总安培力的大小为 $BI2a_0$, 方向沿 y 正方向, 由于半个圆环处于平衡状态, 所以在导线截面 Q 、 N 处所受(来自另外半个圆环)的拉力(即张力) F 应满足 $2F = BI2a_0$. 由③、⑥两式得

$$F = BIa_0 = \frac{4k^2\sigma_0^2\pi a_0^3(a_2 - a_1)^2\beta}{a_1^2 a_2^2 R} (\omega_0 - \beta r) \quad (12)$$

由⑫式可见, 张力 F 随时间 t 线性减小.

方法与技巧 这又是一个典型的运用微分法求解的题目. 求电流磁场时, 先把圆环分解成一系列窄圆环带, 分别求其在圆心处的磁场后叠加, 得到整个圆环在圆心处的磁场. 在求导线圆环所受的安培力时再次用到微分法. 先求导线圆环上一微元上所受力, 再把力叠加. 通过这个题目, 我们要掌握微元法经常遇到的问题, 一是合理地近似, 去掉一些高价的无穷小量, 二是矢量叠加时, 注意对称性, 往往有一些方向叠加是为零的.

例 4 如图 12-11 所示, 悬挂着的弹簧下挂一重物, 其长度 $L = 1 \text{ m}$, 直径 $D = 0.04 \text{ m}$, 劲度系数 $K = 0.5 \text{ N/m}$, 一共有 700 匝, 如给弹簧通以 $I = 2.5 \text{ A}$ 的电流, 则重物平衡位置将作微小变化, 试求此

变化量.

解析 视弹簧为无限长螺线管,则内部磁感应强度为

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I (\mu_0 \text{ 为真空中磁导率})$$

故磁通量为

$$\Phi = NSB = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l} I = LI$$

故 $L = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l}$

设通电达稳定后,弹簧缩短 x ,长度变为 l_1 ,则自感系数为

$$L_1 = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l_1} = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4(l-x)} \quad \text{③}$$

当系统处于平衡状态时,假设重物受到一微扰,下降了 Δl ($\Delta l \rightarrow 0$),考虑系统的功能情况.机械势能的变化为

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} k(x - \Delta l)^2 - \frac{1}{2} kx^2 = -kx\Delta l + \Delta l^2 \approx -kx\Delta l \quad \text{④}$$

其间自感系数也有变化,由③式

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4(l_1 + \Delta l)} - \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l_1} \approx -\frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l_1^2} \Delta l \quad \text{⑤}$$

故磁场能量变化为

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} \Delta(LI^2) = \frac{1}{2} I^2 \Delta L = -\frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8l_1^2} \Delta l \quad \text{⑥}$$

同时, L 的变化使弹簧两端有了电压,恒流电源将对系统做功,由电磁感应定律,有

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(LI)}{\Delta t} = \frac{I \Delta L}{\Delta t}$$

故恒流电源做功为

$$W = UI \Delta t = \frac{I^2 \Delta L}{\Delta t} \Delta t = -I^2 \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l_1^2} \Delta l \quad \text{⑦}$$

由能量守恒,有

$$W = \Delta E_1 + \Delta E_2$$

$$-\frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{4l_1^2} I^2 \Delta l = -kx\Delta l - \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2}{8l_1^2} I^2 \Delta l$$

故

$$x = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8l_1^2 k} = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8(l-x)^2 k} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8l^2 k} \left(1 + \frac{2x}{l}\right) (x \ll l)$$

$$x = \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8kl^2} / \left(1 - \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{4l^3}\right)$$

代入数据,得 $x = 4.9 \text{ mm}$

方法与技巧 通有电流之后,螺线管每匝线圈通有相同方向的电流,每匝之间跟两根平行直线通有相同方向电流要互相吸引一样,每匝线圈间也有吸引力,故螺线管要收缩,平衡后,再假设重物

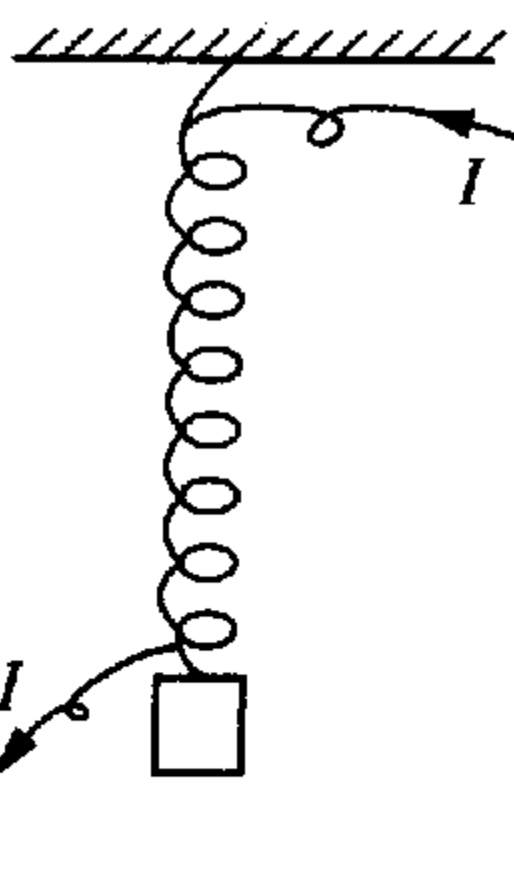


图 12-11

下降,引起能量的改变,通过功能关系列出方程求解.这又是运用“虚位移”方法的一个例子.

例5 如图12-12(a)所示的电路中,已知 ε, R, r, L ,电源内阻不计,电感内阻为 r .问闭合电键 K 后,有多少电量通过无电阻导线 ab ?

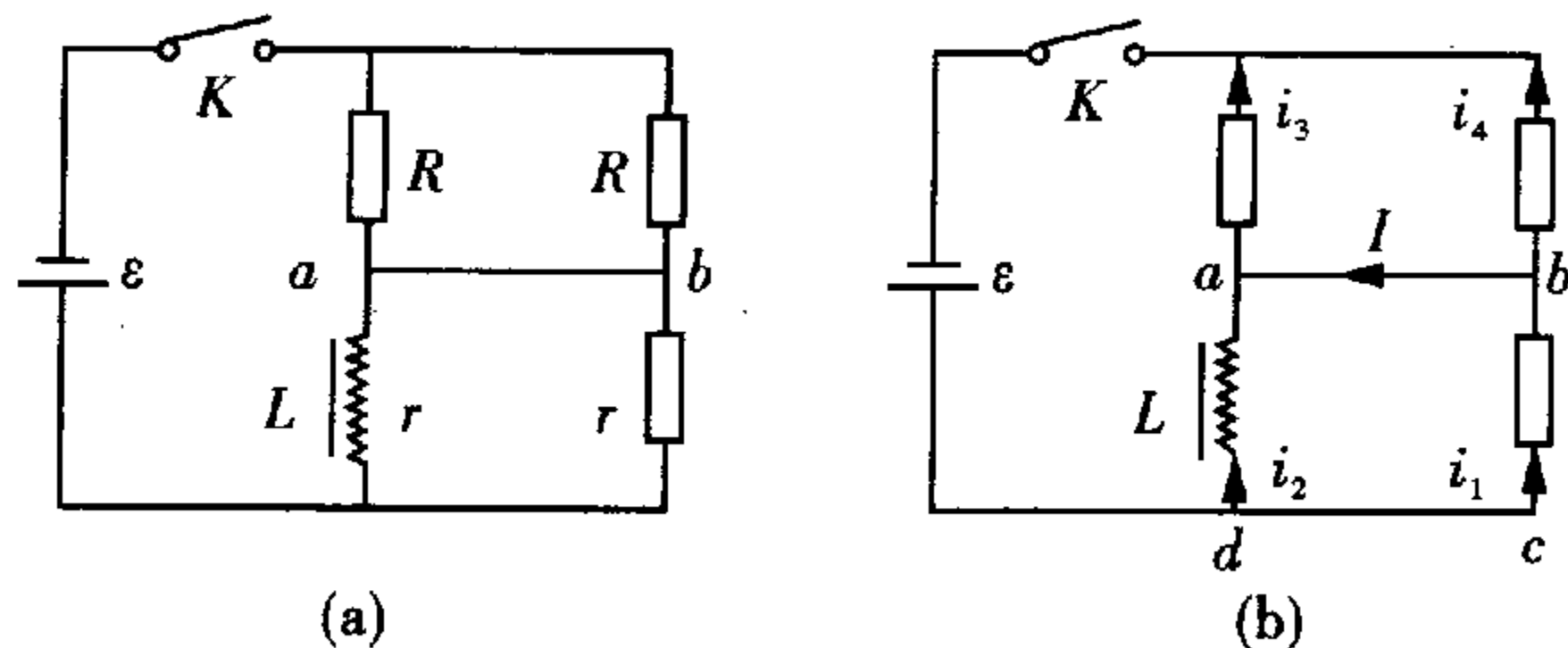


图 12-12

解析 当闭合电键 K 后,由于电感 L 的存在,支路 ad 段上的电流 i_2 从零逐渐增大,直至电流达到稳定.当电流稳定时,电感中无感生电动势,所以节点 a 和 b 的电势相同,无电流流动.在电流达到稳定之前,支路 ad 和 bc 中电流不等,而由两个 R 并联的两支路中电流相等,所以将有电荷通过导线 ab .

设自闭合 K 到电流稳定的过程中任一时刻,各支路中的电流如图12-12(b)所示.由无阻导线 ab 相连的两点 a 和 b 电势始终相等.因此,流经 R 的电流应相等,即

$$i_3 = i_4 \quad (1)$$

写出 a 点节点方程:

$$i_3 = i_2 + i \quad (2)$$

将每一时刻看成稳恒电流,得

$$2i_3 = i_3 + i_4 = i_1 + i_2 \quad (3)$$

K 闭合后 L 上电流 i_2 渐增,回路 $abcd$ 有方程

$$L \frac{\Delta i_2}{\Delta t} + i_2 r - i_1 r = 0$$

即

$$L \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = r(i_1 - i_2) \quad (4)$$

利用式②、③,得

$$i = i_3 - i_2 \quad (5)$$

$$i_1 - i_2 = 2i_3 - 2i_2 = 2i \quad (5)$$

联立式④、⑤得到

$$\frac{L}{2r} \Delta i_2 = i \Delta t \quad (6)$$

从闭合 K 直至电流稳定,易知 i_2 从零增加到

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}(R+r)} = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

所以可以对式⑥两边整个过程求和,得到通过 ab 的电量:

$$q = \frac{L}{2r} \cdot \frac{\varepsilon}{R+r}$$

方法与技巧 闭合 K 后, 由于 ab 是一无阻导线, a 、 b 两点有电流通过时电势也相等, 故 $i_3 = i_4$, 而 da 间有阻碍电流增大的自感电动势存在, 稳定前 $i_2 < i_1$, 故必有电荷由 b 流向 a . 通过节点定律找到这些电流之间关系, 通过 $abcd$ 回路找到一时间微元内通过 ba 的电荷 $i\Delta t$ 与通过线圈的电流的增量 Δi_2 之间的关系, 通过求和即得到通过 ba 的电荷, 这实际上也是微元法.

例 6 如图 12-13 所示, 在一个半径为 r , 质量为 m , 可以无摩擦地自由转动的匀质绝缘圆盘中部有一细长螺线管, 其半径为 a , 沿轴线方向单位长度上绕有 n 匝线圈, 线圈中通以稳恒电流 I . 在圆盘的边缘上均匀地嵌着 N 个带等量正电荷 q 的小球. 设开始时, 螺线管中的电流为 I , 圆盘静止, 然后将电流切断, 试求圆盘转动的角速度.

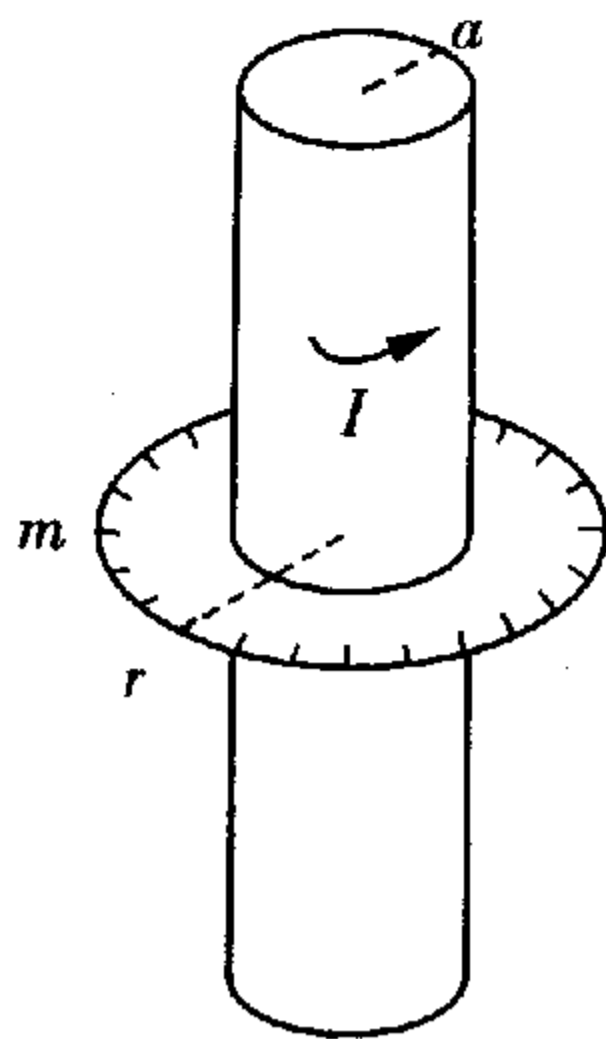


图 12-13

解析 设螺线管电流切断后, 在 Δt 时间内电流从 I 减为零, 在此过程中任意时刻 t 的电流表示为 $i(t)$, 则在 t 时刻由 $i(t)$ 产生的磁场 $B(t)$ 为

$$B(t) = \mu_0 n i(t)$$

B 的方向沿轴向, $B(t)$ 将随 $i(t)$ 减小为零, 变化的 $B(t)$ 产生环状涡旋电场, 在 r 处的涡旋电场 $E(t)$ 应满足

$$E(t)2\pi r = \varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}[B(t)S] = -S\frac{\Delta}{\Delta t}B(t) = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{\Delta i(t)}{\Delta t}$$

即

$$E(t) = -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n \frac{\Delta i(t)}{\Delta t}$$

因 $i(t)$ 随时间减小, $\frac{\Delta i(t)}{\Delta t} < 0$, $E(t) > 0$, 即涡旋电场 $\vec{E}(t)$ 的方向与电流的方向一致.

在半径为 r 的圆周上嵌着的 N 个带电小球所受的总切向力为

$$F(t) = NqE(t) = -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n Nq \frac{\Delta i(t)}{\Delta t}$$

它相对转轴形成的力矩为

$$M(t) = F(t)r = -\frac{1}{2} a^2 \mu_0 n Nq \frac{\Delta i(t)}{\Delta t}$$

由刚体的角动量定理, 在电流从 I 减小为零的 Δt 时间内, 刚体所获得的全部冲量矩等于它的角动量的增量. 因开始时刚体(圆盘)静止, 角动量为零, 故有

$$J\omega = \sum M\Delta t = \frac{1}{2} a^2 \mu_0 n Nq \sum \left[-\frac{\Delta i(t)}{\Delta t} \Delta t \right] = \frac{1}{2} a^2 \mu_0 n Nq \sum [-\Delta i(t)] = \frac{1}{2} a^2 \mu_0 n Nq I$$

圆盘绕轴的转动惯量 J 为

$$J = \frac{1}{2} mr^2$$

代入上式, 得出电流降为零后, 圆盘转动的角速度 ω 为

$$\omega = \frac{a^2 \mu_0 n Nq I}{mr^2}$$

方法与技巧 电流切断后, 在短暂的 Δt 时间内, 螺线管线圈中的电流由 I 降为零, 同时磁场相应减小, 磁场的变化产生环状感生电场(又称涡旋电场), 涡旋电场对 N 个带电小球的切向作用力形成力矩, 推动圆盘转动. 利用刚体的角动量定理, 即可求出圆盘所获得的角速度.

例7 有一边长为 a 的正方形小框,由不会发生形变的、电阻为零的超导体材料制成,置于非均匀磁场中, \vec{B} 的三个分量为 $B_x = 0, B_y = -\alpha y, B_z = B_0 + \alpha x$, 式中 α, B_0 为常量,线框的自感系数为 L ,质量为 m ,水平放置,如图 12-14 所示.试确定小线框的运动规律,即在 t 时刻小线框所处的位置.设在 $t=0$ 时,小线框的中心 O 在坐标原点.

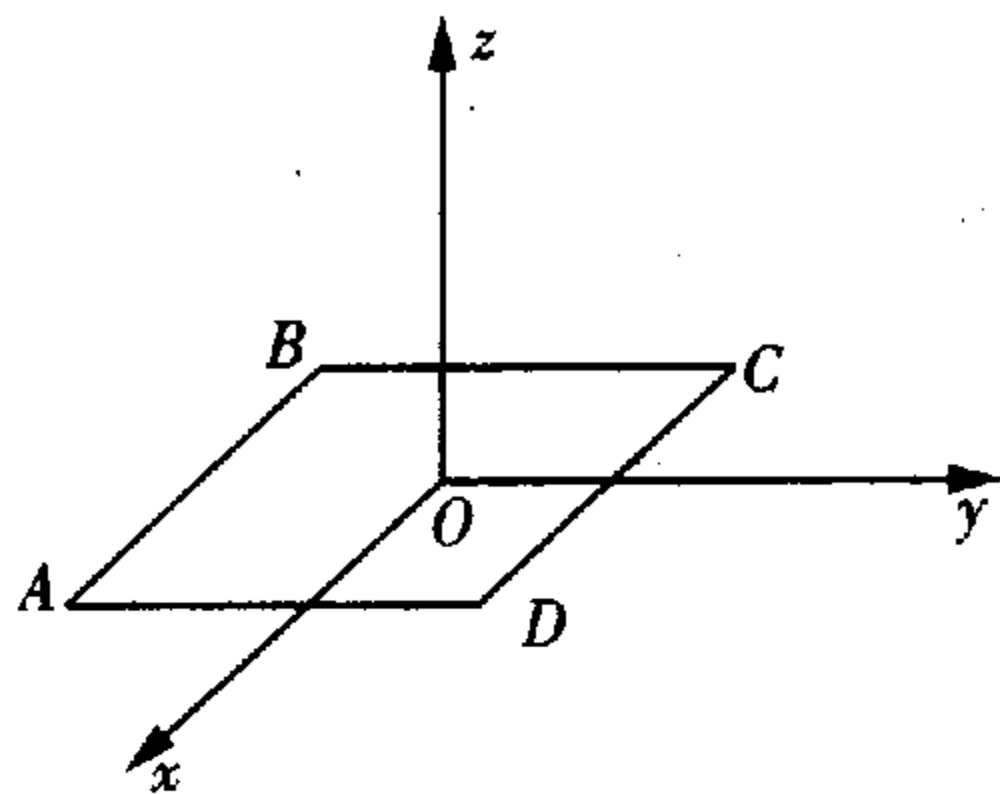


图 12-14

解析 (1) 与一般导体在非均匀磁场中运动时情况不同,无论磁场均匀与否,超导体框内的磁通量恒保持不变.为了确定其值,我们可利用 $t=0$ 时的 Φ 值即 Φ_0 .

$$\Phi_0 = (B_0 - \alpha \cdot 0)s = a^2 B_0$$

(2) 线框中电流强度的计算,小线框中电动势为零,但电流不为零,这是超导体一个特殊的电磁性质.怎样确定这个电流 I 的大小? 这里的关键在于正确理解超导线框内的 Φ_0 为什么不变,当线框从 $t=0$ 受重力作用开始下滑,其外磁场通过线框的磁通量因 $z < 0$ 实际上是减小了,因而产生了感应电流,这个感应电流 I 的磁场是补偿线框回路中磁通量减小,所以线框内的总磁通量 Φ_0 保持不变.

线框位置为 z 处时感应电流产生的磁通量 $\Phi_{\text{感应}}$ 为

$$\Phi_{\text{感应}} = -a^2 \alpha z$$

利用电流与磁通量成正比的关系有

$$LI = -a^2 \alpha z, \text{ 从而得到}$$

$$I = -\frac{a^2 \alpha z}{L} \text{ 式中 } L \text{ 为线圈的自感.}$$

(3) 线框受力分析,线框受到沿 z 轴负方向的力 mg ,线框中的电流受到外磁场作用的安培力. B_x 对线框产生的力, AB 与 CD 边上受力大小相等,方向相反; BC 边与 DA 边亦然,故合力为零,不影响线框的运动.而 B_y 对 BC 与 DA 两边无作用,只对 AB 边与 CD 边有安培力作用,二者大小相等,方向相同,系沿 z 轴正方向(因线框向下运动)且

$$F_{\text{安}} = 2a \left| \alpha \frac{a}{2} \right| I = a^2 \alpha I$$

4. 小框运动满足的方程

$$ma_z = -mg + a^2 \alpha I$$

$$ma_z = -mg - a^4 \alpha^2 z / L$$

$$\text{令 } K = a^4 \alpha^2 / L$$

$$\text{则 } ma_z = -mg - Kz$$

上述方程与一个无重、劲度系数为 K 的弹簧,其下悬一质量为 m 的物体运动方程相同.因而可用类比法而求得线框位置 z 随时间变化的规律.

首先确定振动的平衡位置 z_0 ,而且 z_0 的绝对值就是振幅,物体在平衡位置时,加速度 a_z 等于零

$$\frac{a^4 \alpha^2}{L} z_0 = -mg$$

$$z_0 = -\frac{mgL}{\alpha^2 a^4}$$

$$\text{振动的圆频率 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{Lm}}$$

z 随时间变化的规律是

$$z = \frac{mgL}{\alpha^2 a^4} \left(\cos \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{Lm}} t - 1 \right)$$

方法与技巧 解这道题的关键是对超导框的理解,超导框电阻为零,那框内不能有电动势,否则电流会无限大,要想无电动势,即框所包围的面积内磁通量不能变,而框在非均匀磁场中,在重力作用下框会下落,引起框内磁通量减小,这时框内会有电流产生,电流产生的磁场会补充框包围的磁通量的减少,根据 $\Phi = LI$, 计算出框内的电流 I . 电流又在磁场中,磁场对电流的力具有弹性力性质,这时框的运动与一弹簧悬挂一重物的运动相同. 框做简谐振动.

【解题尝试】

1. 如图 12-15, 电源的电动势为 U , 电容器的电容为 C , S 是单刀双掷开关, MN 、 PQ 是两根置于同一水平面内的平行光滑长导轨, 它们的电阻可以忽略不计, 两导轨间距为 L , 导轨处在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中, 磁场方向垂直于两导轨所在的平面并指向图中纸面向里的方向. l_1 和 l_2 是两根横放在导轨上的导体小棒, 它们在导轨上滑动时与导轨保持垂直并接触良好, 不计摩擦, 两小棒的电阻相同, 质量分别为 m_1 和

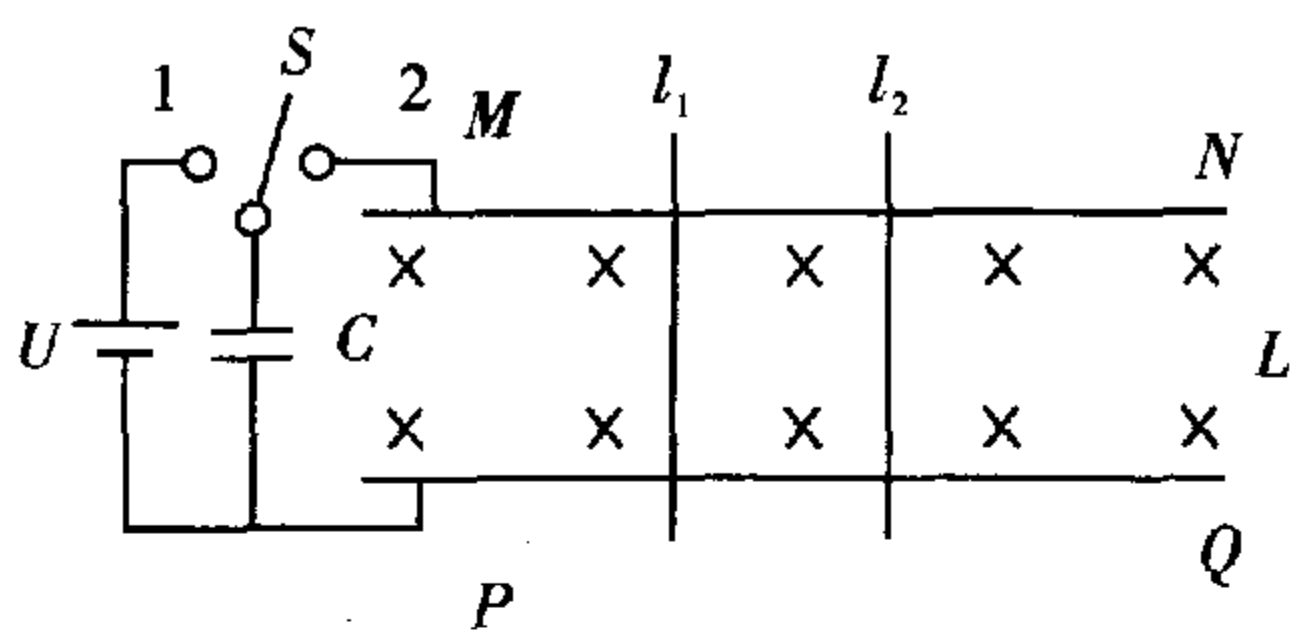


图 12-15

m_2 , 且 $m_1 < m_2$, 开始时两根小棒均静止在导轨上, 现将开关先合向 1, 然后合向 2, 求:

- (1) 两根小棒最终速度的大小;
 - (2) 在整个过程中的焦耳热损耗. (当回路中有电流时, 该电流所产生的磁场可以忽略不计)
2. 铜制圆环的两个半径分别为 $r_1 = 1 \text{ cm}$ 和 $r_2 = 1 \text{ mm}$. [如图 12-16(a) 所示]. 圆环竖放在地面上, 环底部有固定的光滑栓限制, 使其不能滑动. 圆环周围有竖直向上的均匀的强磁场 $B = 1.0 \text{ T}$. 如图(b)所示, 圆环偏离竖直方向倒向地面. 已知铜的电导率 $\sigma = 6.25 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, 质量密度 $\rho = 8.93 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 试通过数量级的估算, 判断圆环倒下时其重力势能主要是转换成圆环的动能还是转换为焦耳热能.

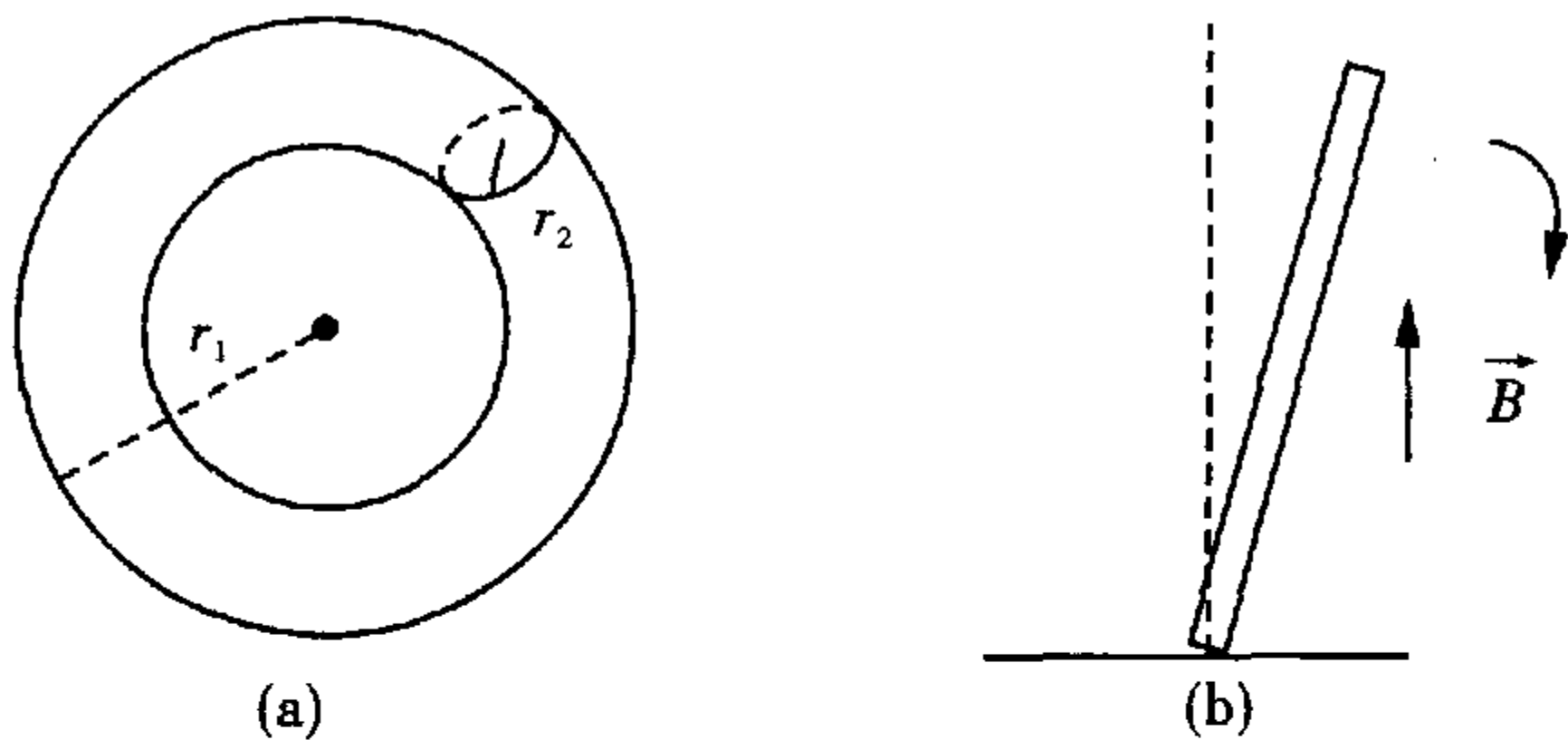


图 12-16

3. PQQ_nP_n 是由若干正方形导线方格 $PQQ_1P_1, P_1Q_1Q_2P_2, P_2Q_2Q_3P_3, \dots, P_{n-1}Q_{n-1}Q_nP_n$ 构成的网络, 如图 12-17(a) 所示. 方格每边长度 $l = 10.0 \text{ cm}$. 边 $QQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots$ 与边 $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$ 的电阻都等于 r , 边 $PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, \dots$ 的电阻都等于 $2r$. 已知 PQ 两点间的总电阻为 C , C 是一已

知数, 在 $x > 0$ 的半空间分布有随时间 t 均匀增加的匀强磁场, 磁场方向垂直于 Oxy 平面并指向纸面, 如图 12-17(b) 所示.

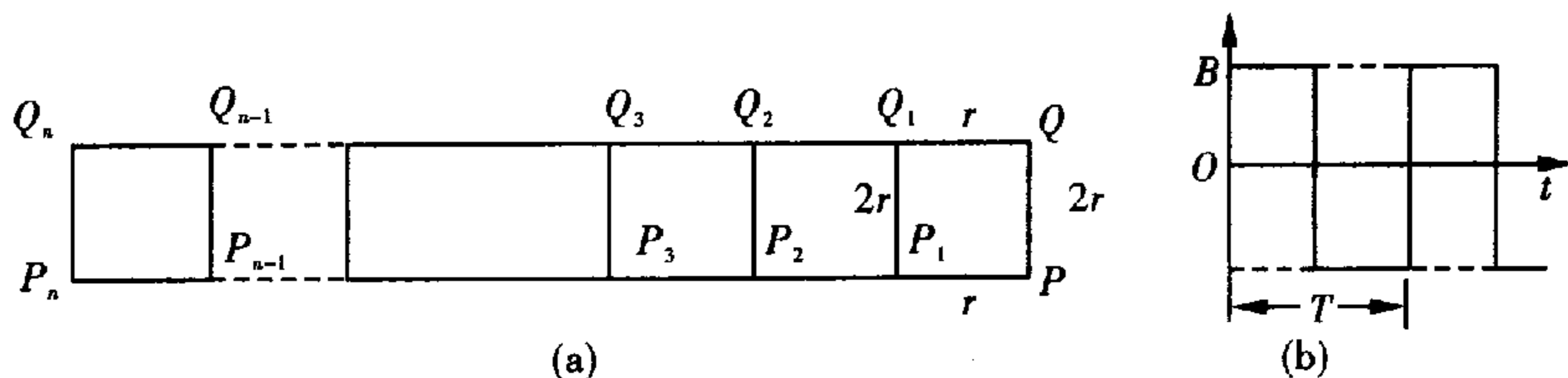


图 12-17

今令导线网络 PQQ_nP_n 以恒定的速度 $v = 5.0 \text{ cm/s}$ 沿 x 方向运动并进入磁场区域, 在运动过程中方格的边 PQ 始终与 y 轴平行. 若取 PQ 与 y 轴重合的时刻为 $t = 0$, 在以后任一时刻 t 磁场的磁感应强度 $B = B_0 + bt$, 式中 t 的单位为 s , B_0 为已知恒量, $b = 0.10 B_0$. 求 $t = 2.5 \text{ s}$ 时刻, 通过导线 PQ 的电流 (忽略导线网络的自感).

4. 如图 12-18 所示, 在光滑的水平面上, 有边长 $l = 0.8 \text{ m}$ 的正方形导线框 $abcd$, 其质量 $m = 100 \text{ g}$, 自感 $L = 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s/A}$, 电阻可忽略不计, 该导线框 bc 边在 $t = 0$ 时, 从 $x = 0$ 处以初速 $v_0 = 4 \text{ m/s}$ 进入磁感应强度为 B 的有界匀强磁场区域. 磁场区域宽度为 $S = 0.2 \text{ m}$, \vec{B} 的方向与导线框平面垂直 (图中指向纸内), \vec{B} 的大小为 0.5 T . 忽略空气阻力. 试求:

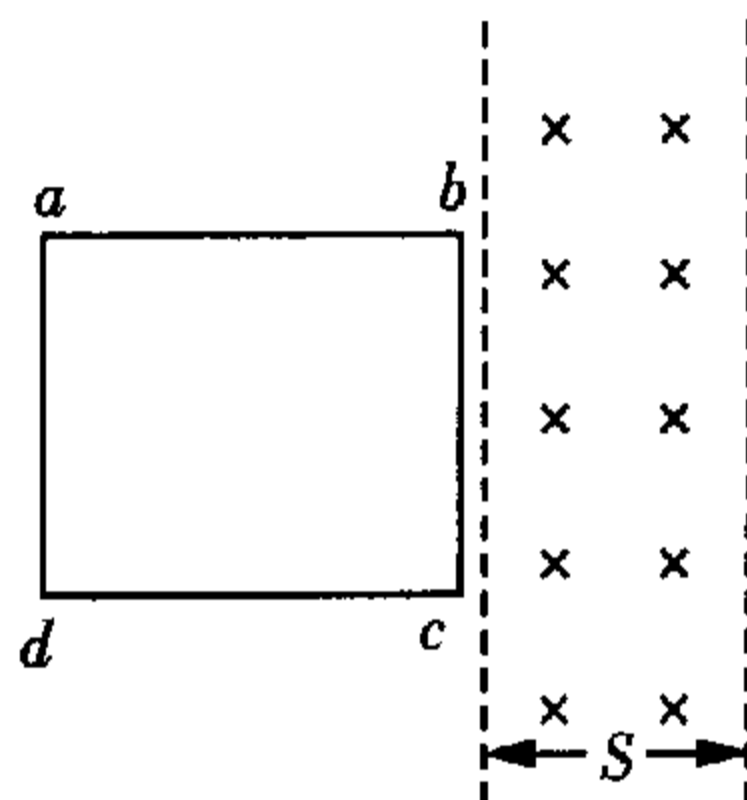


图 12-18

- (1) $t = \pi/36 \text{ s}$ 时刻导线框 bc 边的位置;
 (2) 若初速度为 $4v_0/\sqrt{3}$, 求 $t = \pi/36 \text{ s}$ 时刻 bc 边的位置.

5. 如图 12-19 所示为一“日”字形矩形闭合导线框. 已知 $ab = bc = cd = de = ef = fa = 0.1 \text{ m}$, 已知 ab, cf, de 段电阻均为 3Ω , cd, fe 段电阻均匀

1.5Ω , bc, af 段电阻均为零. 匀强磁场 \vec{B} 的方向与框面垂直向里, 大小为 $B = 1.0 \text{ T}$, 磁场的边界与 de 平行, 如图 12-19 中虚线所示, 今以图中向右的方向, 以 $v = 24 \text{ m/s}$ 的速度, 将线框匀速地拉出磁场区域. 试求在此过程中拉力所做的功.

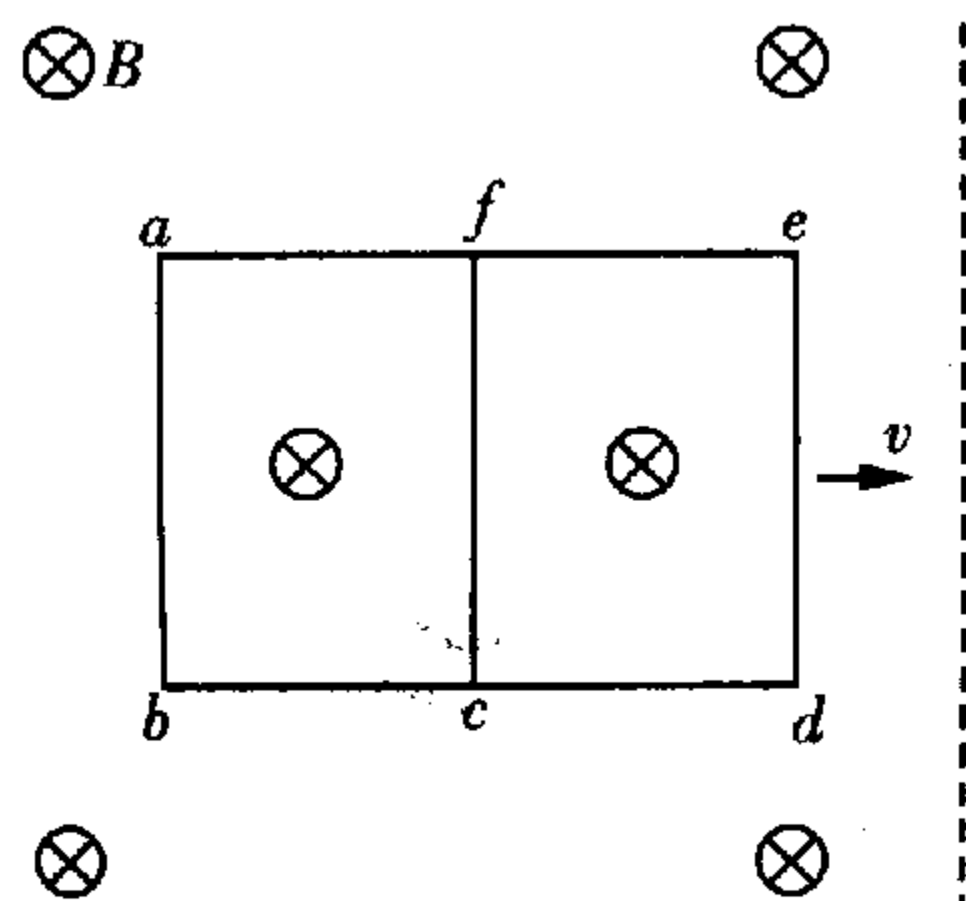


图 12-19

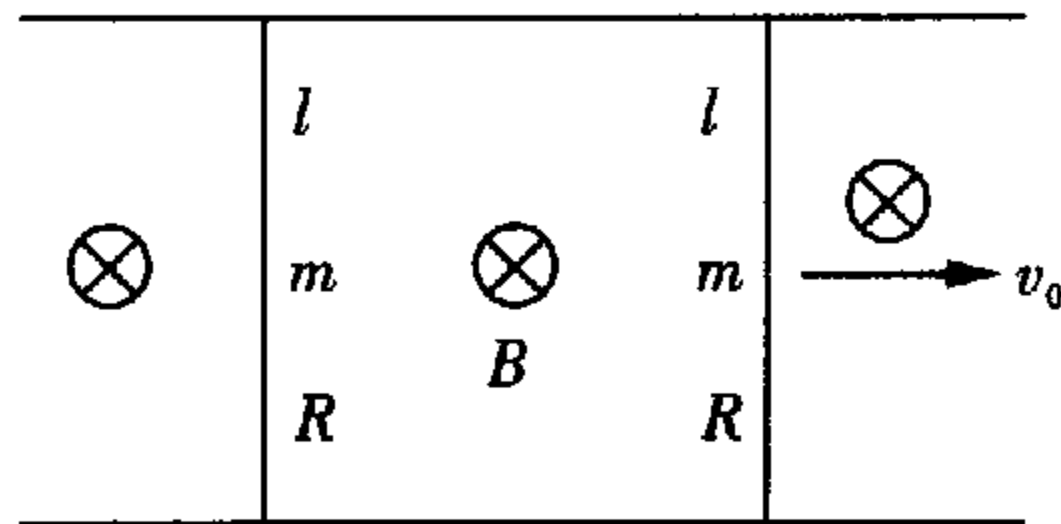


图 12-20

6. 如图 12-20 所示, 在匀强磁场区域与 \vec{B} 垂直的平面 (水平面) 中有两根足够长的固定的平行金属导轨, 在它们上面横放着两根平行导体棒, 构成矩形回路. 导体棒的长度均为 l , 质量均为 m , 电阻

均为 R , 回路中导轨部分的电阻可以忽略. 设导体棒在导轨上可以无摩擦地滑行, 设重力及电磁辐射均可不计, 设开始时左导体棒静止, 右导体棒具有向右的初速度 v_0 .
试求: (1) 右导体棒向右的速度 v_1 随时间 t 的变化.
(2) 两导体棒间距增量 x 的上限.

7. 如图 12-21 所示, 在边长为 a 的等边三角形区域内有匀强磁场 B , 其方向垂直纸面向外. 一个边长也为 a 的等边三角形导体框架 ABC , 在 $t=0$ 时恰好与上述磁场区域的边界重合, 尔后以周期 T 绕其中心在纸面内以顺时针方向匀速转动, 于是在框架 ABC 中产生感应电流. 规定电流按 $ABCA$ 方向流动时电流强度取正值, 反向流动时取负值. 设框架 ABC 的电阻为 R , 试求从 $t=0$ 到 $t_1 = \frac{T}{6}$ 时间内的平均电流强度 \bar{I}_1 和从 $t=0$ 到 $t_2 = \frac{T}{2}$ 时间内的平均电流强度 \bar{I}_2 .

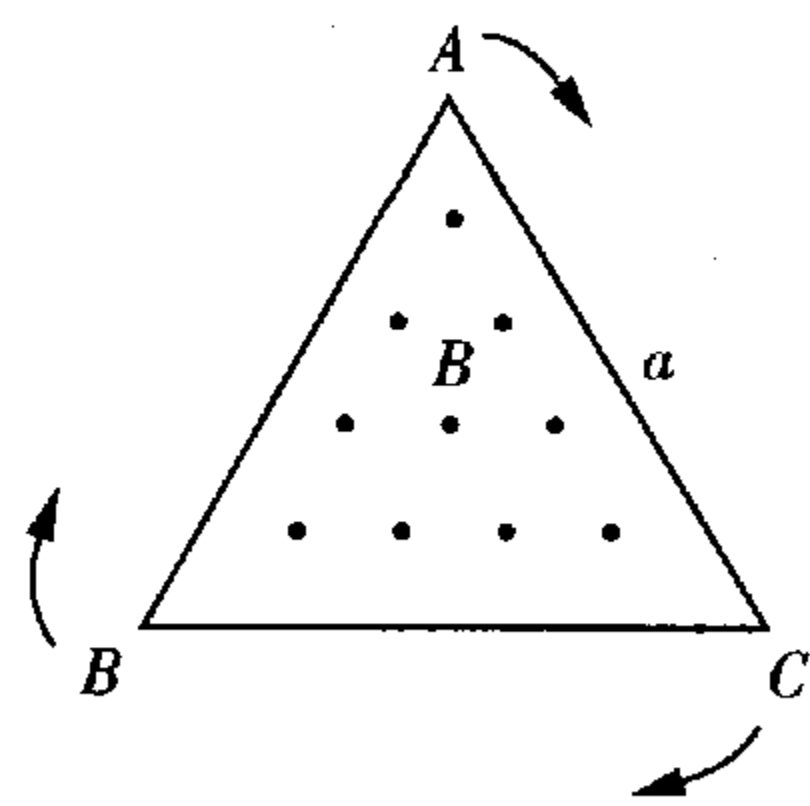


图 12-21

8. 如图 12-22 所示, 两条平行的长直金属细导轨 KL 、 PQ 固定于同一水平面内, 它们之间的距离为 l , 电阻可忽略不计; ab 和 cd 是两根质量皆为 m 的金属细杆, 杆与导轨垂直, 且与导轨良好接触, 并可沿导轨无摩擦地滑动. 两杆的电阻皆为 R . 杆 cd 的中点系一轻绳, 绳的另一端绕过轻的定滑轮悬挂一质量为 M 的物体, 滑轮与转轴之间的摩擦不计, 滑轮与杆 cd

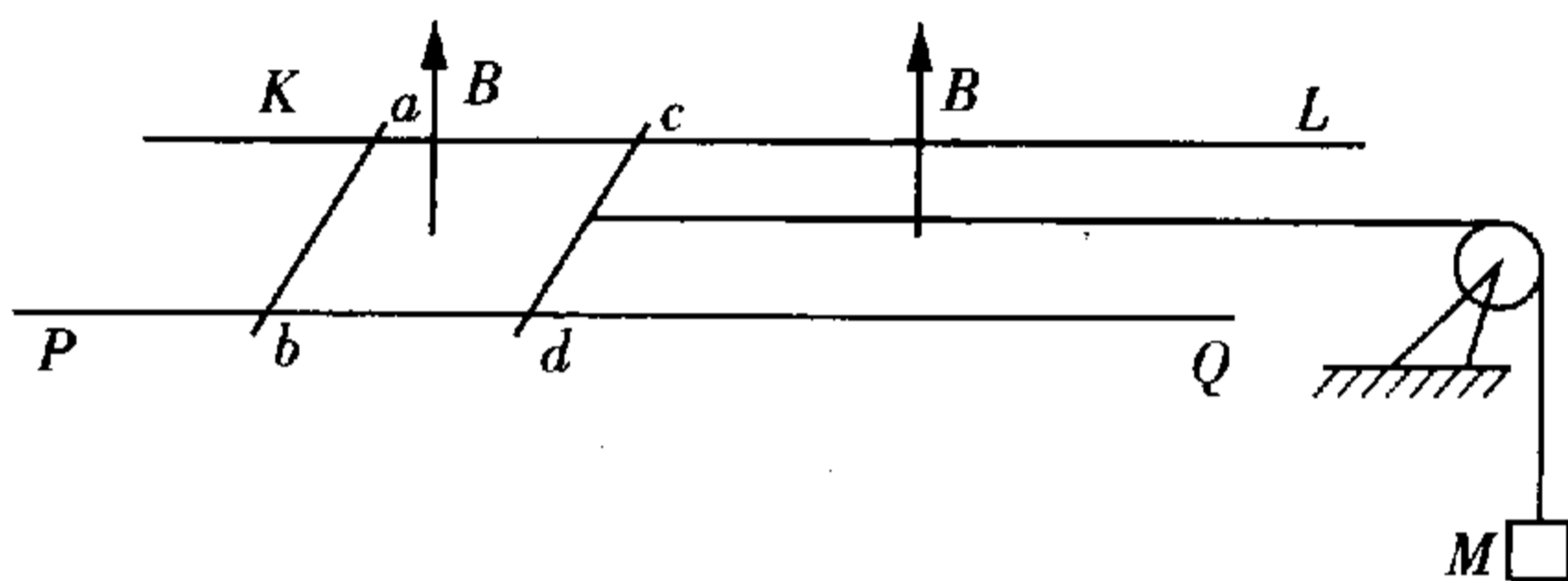


图 12-22

之间的轻绳处于水平伸直状态并与导轨平行. 导轨和金属细杆都处于匀强磁场中, 磁场方向垂直于导轨所在平面向上, 磁感应强度的大小为 B . 现两杆及悬物都从静止开始运动, 当 ab 杆及 cd 杆的速度分别达到 v_1 和 v_2 时, 两杆加速度的大小各为多少?

9. 如图 12-23 所示, 一圆柱形区域内的匀强磁场 \vec{B} 随时间 t 变化. 在磁场区域内垂直于 \vec{B} 的 Oxy 平面上有一光滑绝缘的细空心管 MN , 它固定在 x 轴上并相对 y 轴对称, MO' 与 OO' 之间的夹角为 θ_0 , 其中 O' 是磁场区域中央轴与 xy 平面的交点, 在管 MN 内有一质量为 m , 电量为 q ($q > 0$) 的光滑小球. $t=0$ 时小球静止在 M 位置. 设 \vec{B} 的方向如图 12-23 所示, 其大小随 t 的变化规律为 $B = B_0 \sin \omega t$, 其中 B_0 和 ω 均为正的常量. 设 \vec{B} 的这种变化规律刚好能使小球在 MN 之间以 O 为中心, 以 MN 长度之半为振幅作简谐振动.

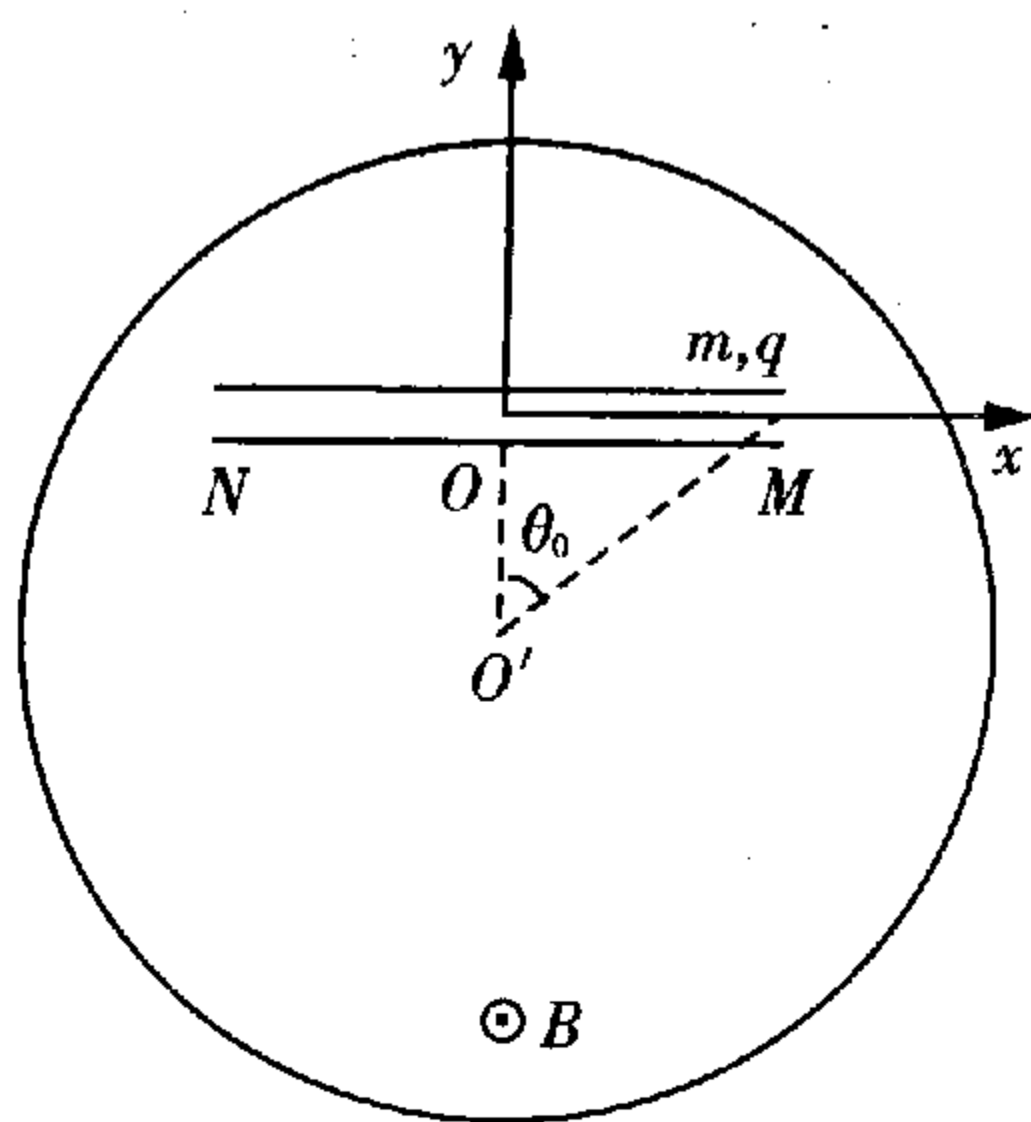


图 12-23

(1) 试确定小球作简谐振动的圆频率 $\omega_{球}$ 与 m, q, θ_0, B_0 之间的关系.

(2) 设 MN 长为 $2R$. 试求管 MN 受到小球作用力的 y 分量 N_y 与小球位置 x 之间的函数关系, 画出 $N_y(x)$ 曲线, 并标出曲线上的特征点.

10. 由半径为 1 mm 的导线构成的半径为 10 cm 的圆形线圈处于超导状态. 开始时, 线圈内通有 100

A 的电流. 一年后测出线圈内电流的减小量不足 10^{-6} A , 试粗略估算此线圈电阻率的上限.

11. 一个磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场, 垂直于一轨距为 l 的导轨, 轨道与水平面有 α 的倾角. 一根无摩擦的导体棒, 质量为 m , 横跨在两根铁轨上, 如图 12-24 所示.

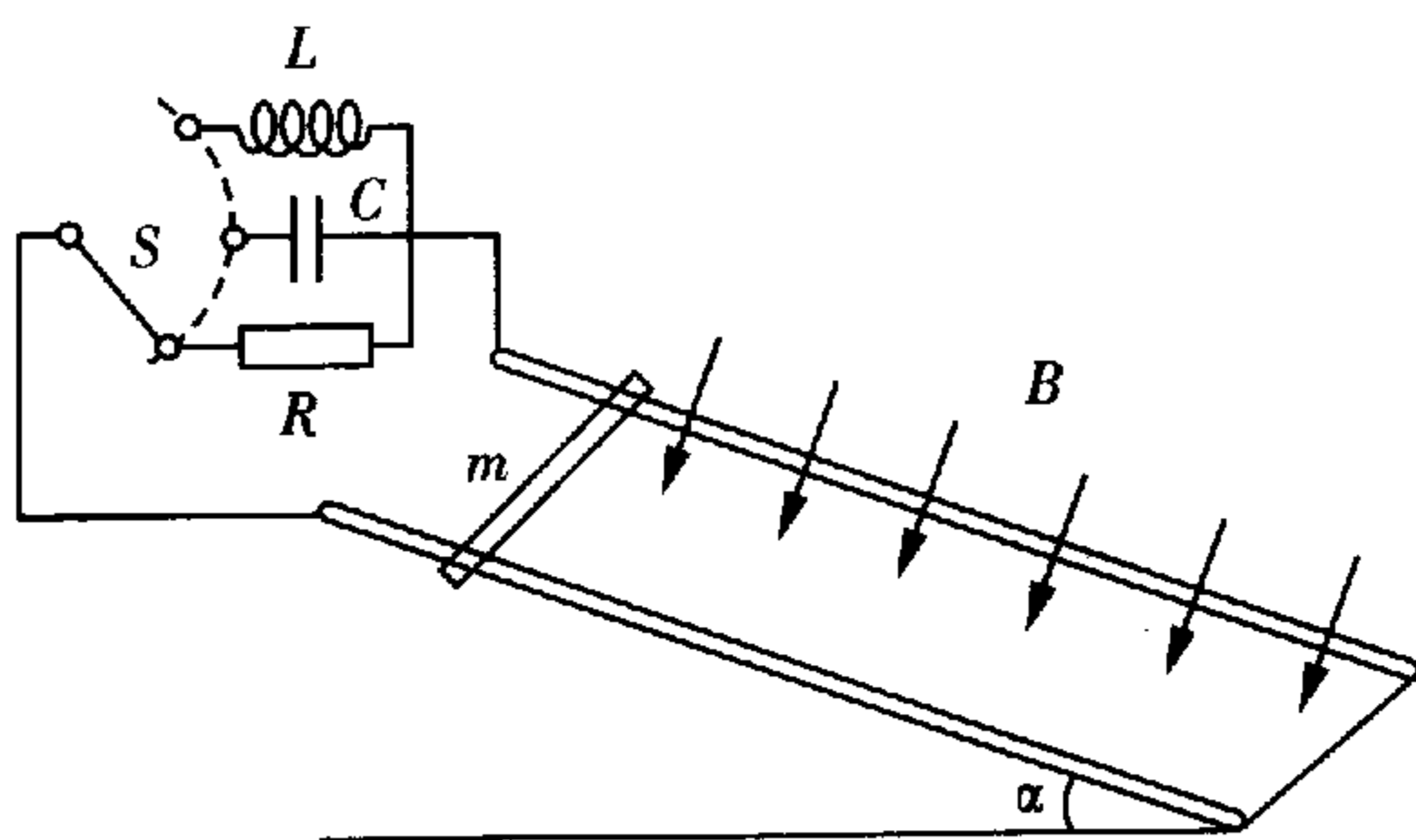


图 12-24

如果由导体棒和轨道组成的电路在以下几种不同情况下被闭合, 当从静止开始放开导体棒后, 棒将会如何运动呢?

- (i) 一个阻值为 R 的电阻;
- (ii) 一个电容为 C 的电容;
- (iii) 一个电感为 L 的线圈.

12. 有一个 N 匝的螺旋状弹簧如图 12-25 所示, 半径为 R , 长度为 x_0 , 劲度系数为 k , 当电流 I_0 流过弹簧时, 弹簧的长度改变了多少?

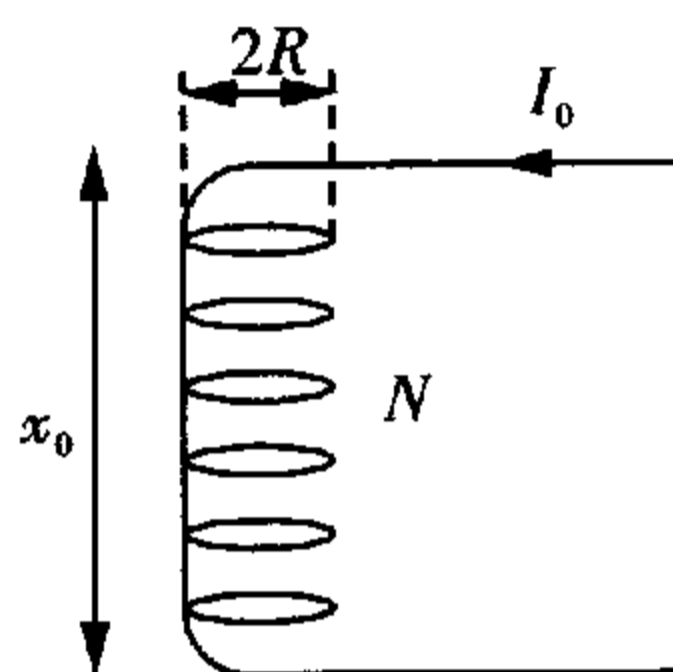


图 12-25

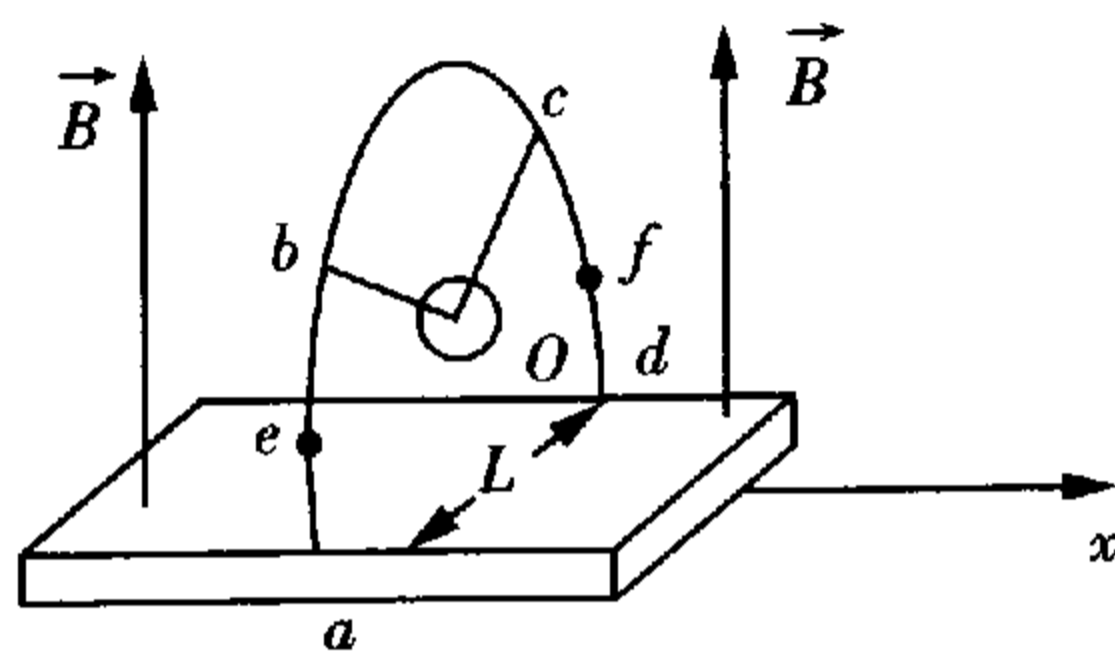


图 12-26

13. 如图 12-26 所示. 一很长的薄导体平板沿 x 轴放置, 板面位于水平位置, 板的宽度为 L , 电阻可以忽略不计, $aebcfd$ 是圆弧形均匀导线, 其电阻为 $3R$, 圆弧所在的平面与 x 轴垂直, 圆弧的两端 a 和 d 与导体的两个侧面相接触. 并可在其上滑动. 圆弧 $ae = eb = cf = fd = \frac{1}{8}$ 圆周长, 圆弧 $bc = \frac{1}{4}$ 圆周长, 一内阻 $R_g = nR$ 的体积很小的电压表位于圆弧的圆心 O 处, 电压表的两端分别用电阻可忽略的直导线与 b 和 c 点相连, 整个装置处于磁感应强度为 B 、方向竖直向上的匀强磁场中, 当导体板不动而圆弧导线与电压表一起以恒定速度 v 沿 x 轴方向平移运动时, 求

- (1) 电压表的读数;
- (2) e 点与 f 点的电势差 $(U_e - U_f)$.

14. 如图 12-27 所示, 有一由匀质细导线弯成的半径为 a 的圆线圈和一内接等边三角形的电阻线组成的电路 (电路中各段的电阻值见图), 在圆线圈平面内有垂直纸面向里的均匀磁场, 磁感应强度 B 随时间 t 均匀减小, 其变化率的大小为一已知常数 K , 已知 $2r_1 = 3r_2$ 试求图中 A, B 两点的电势差 $(U_A - U_B)$.

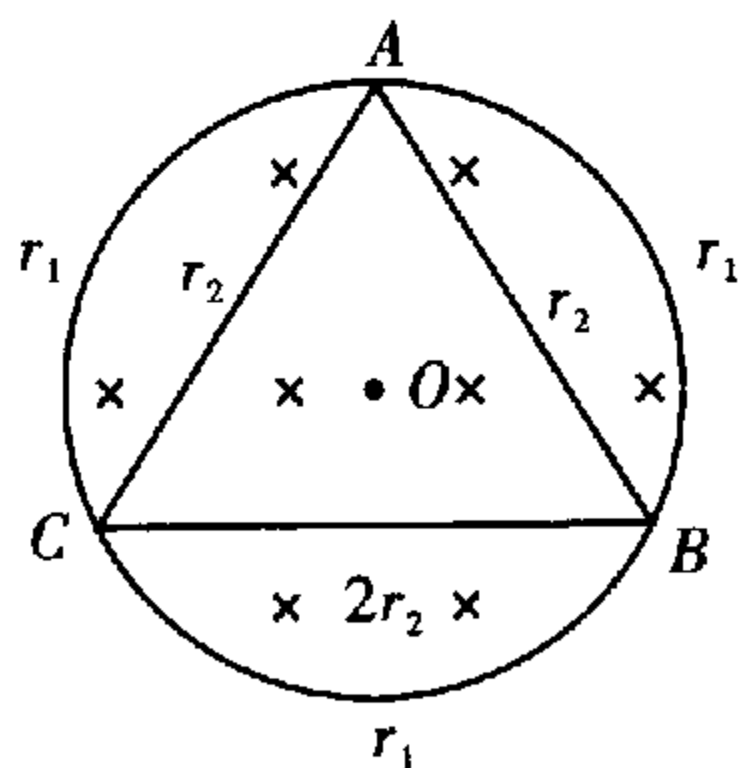


图 12-27

15. 一导线围成半径为 D 的圆环 $adbc$, 在圆环所围的区域内有一半径为 $\frac{D}{2}$ 的圆柱形磁场区域, 其周界与圆环内切于 C 点, 此区域内有均匀磁

场,磁感应强度为 \vec{B} ,方向垂直纸面向里,磁场随时间增强,变化率 $\Delta B/\Delta t = K = \text{常数}$. 导线 ab 是圆环的一条直径,与磁场边界相切(见图12-28). 设导线 ab 以及被其所分割成的两个半圆的电阻都是 r ,今有一电流计 G 接在 a, b 两点之间,电流计位于纸面内,内阻亦为 r (连接电流计的导线电阻忽略不计). 试问下列情况下,通过电流计的电流 I_g 为多少?

- (1) 半圆环 acb 和 adb 都位于纸面内,并分别位于 ab 的两侧;
- (2) 半圆环 adb 绕直径 ab 转过 90° ,折成与纸面垂直;
- (3) 半圆环 adb 再绕 ab 转 90° ,折成与 acb 重合.

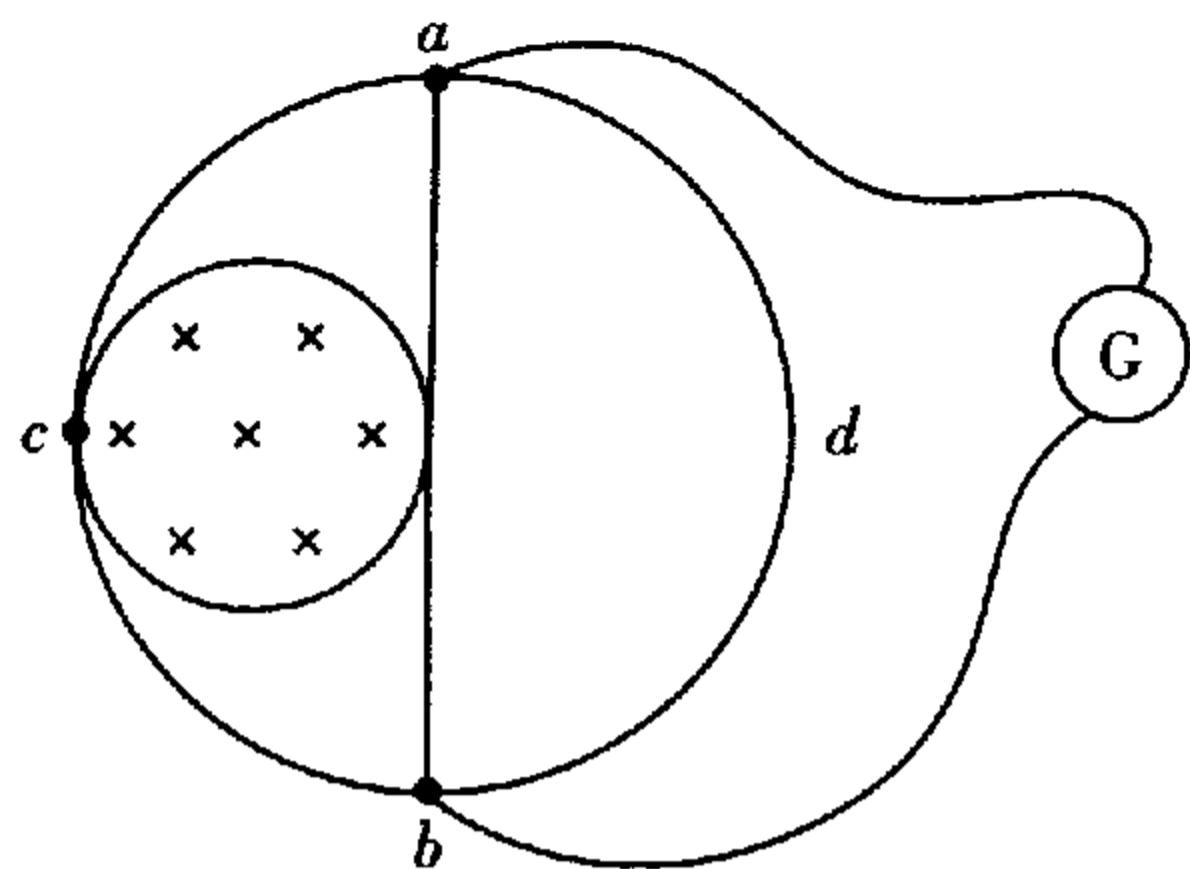


图 12-28

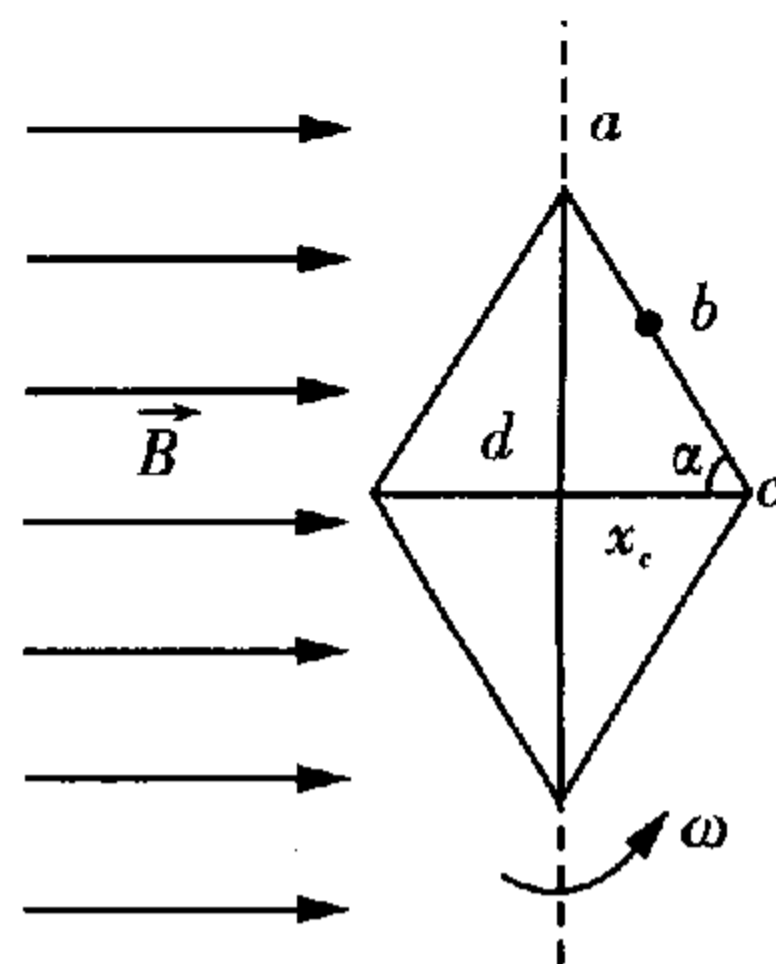


图 12-29

16. 如图12-29所示,一菱形均匀线圈中. 已知 $\angle acd = \alpha, \overline{dc} = x_c$,在均匀恒定磁场 \vec{B} 中以匀角速度 ω 绕其对角线转动,转轴与 B 垂直,当线圈平面转至与 \vec{B} 平行时,求:

- (1) $U_a - U_c$.
- (2) 设 b 为 ac 中点, $U_b - U_c = ?$
- (3) ac 间电势最低点的位置.

17. 如图12-30所示,均匀磁场的方向垂直纸面向里,磁感应强度 B 随时间 t 变化. $B = B_0 - Kt$ (K 为大于0的常数). 现有两个完全相同的均匀金属圆环相互交叠并固定在图中所示位置,环面处于图中纸面内. 圆环的半径为 R ,电阻为 r ,相交点的电接触良好,两个环的接触点 A 与 C 间的劣弧对圆心 O 的张角为 60° . 求 $t = t_0$ 时,每个环所受的均匀磁场的作用力. 不考虑感应电流之间的作用.

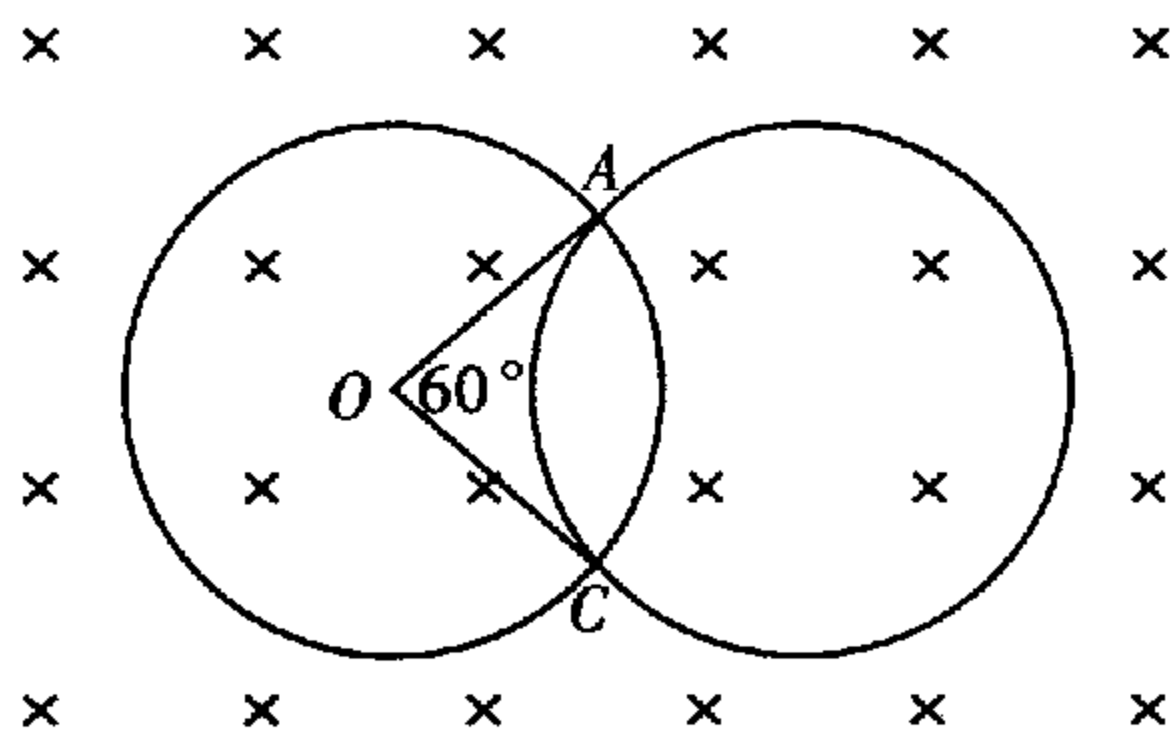


图 12-30

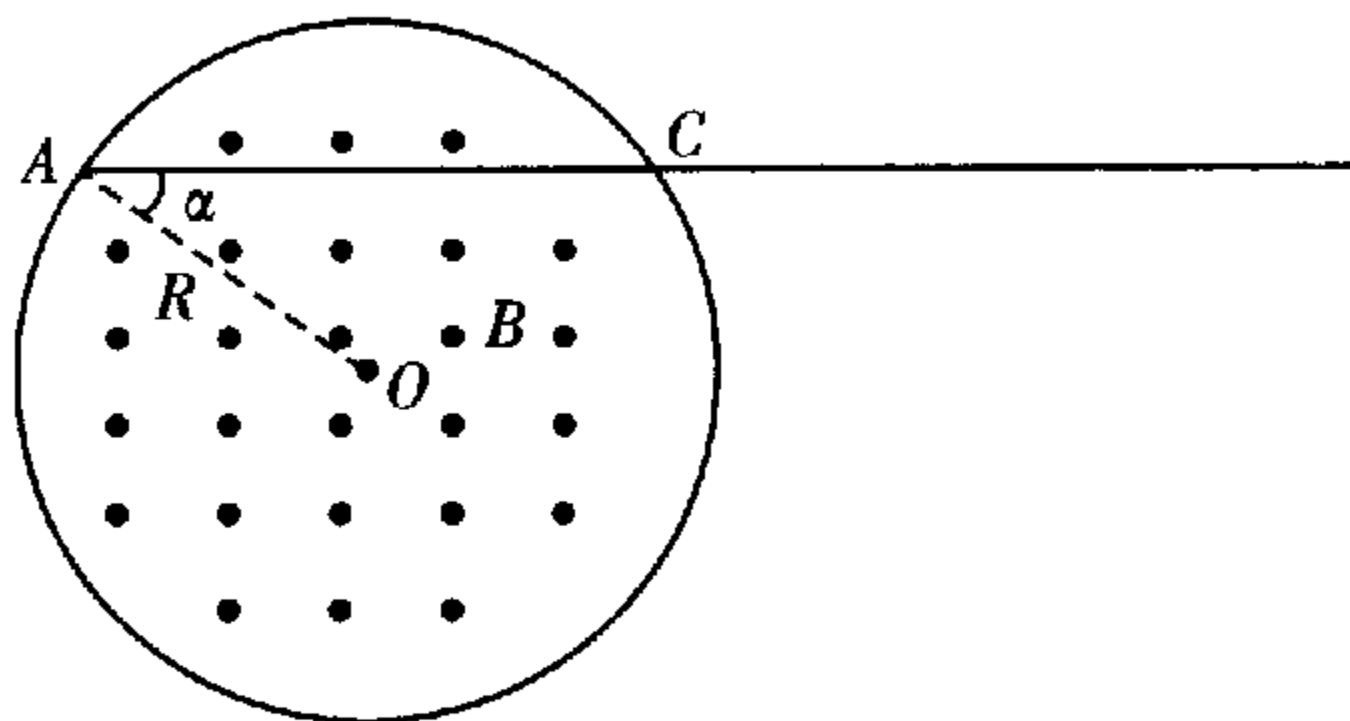


图 12-31

18. 在图12-31中,半径为 R 的圆柱形区域内有匀强磁场. 磁场方向垂直图面指向纸外,磁感应强度

B 随时间均匀变化, 变化率 $\Delta B/\Delta t = K$ (K 为一正值常量). 圆柱形区外空间中没有磁场, 沿图中 AC 弦的方向画一直线, 并向外延长, 弦 AC 与半径 OA 的夹角 $\alpha = \pi/4$. 直线上有一任意点, 设该点与 A 点的距离为 x , 求从 A 沿直线到该点的电动势的大小.

19. 一个半径为 r 的非常小的导体圆环与一个半径为 R ($R \gg r$) 的很大导体圆环中心相距为 R , 开始时两环平面彼此平行并分别与中心连线垂直, 如图 12-32 所示, 保持不变的电流 I 通过固定在大环, 小环以角速度 ω 围绕着一直径匀速转动. 小环的电阻是 Ω , 小环的自感可以忽略不计. 求:
- (1) 小环中的电流强度;
 - (2) 需用多大力矩施于小环, 才能保持它匀速转动;
 - (3) 大环中的感应电动势.

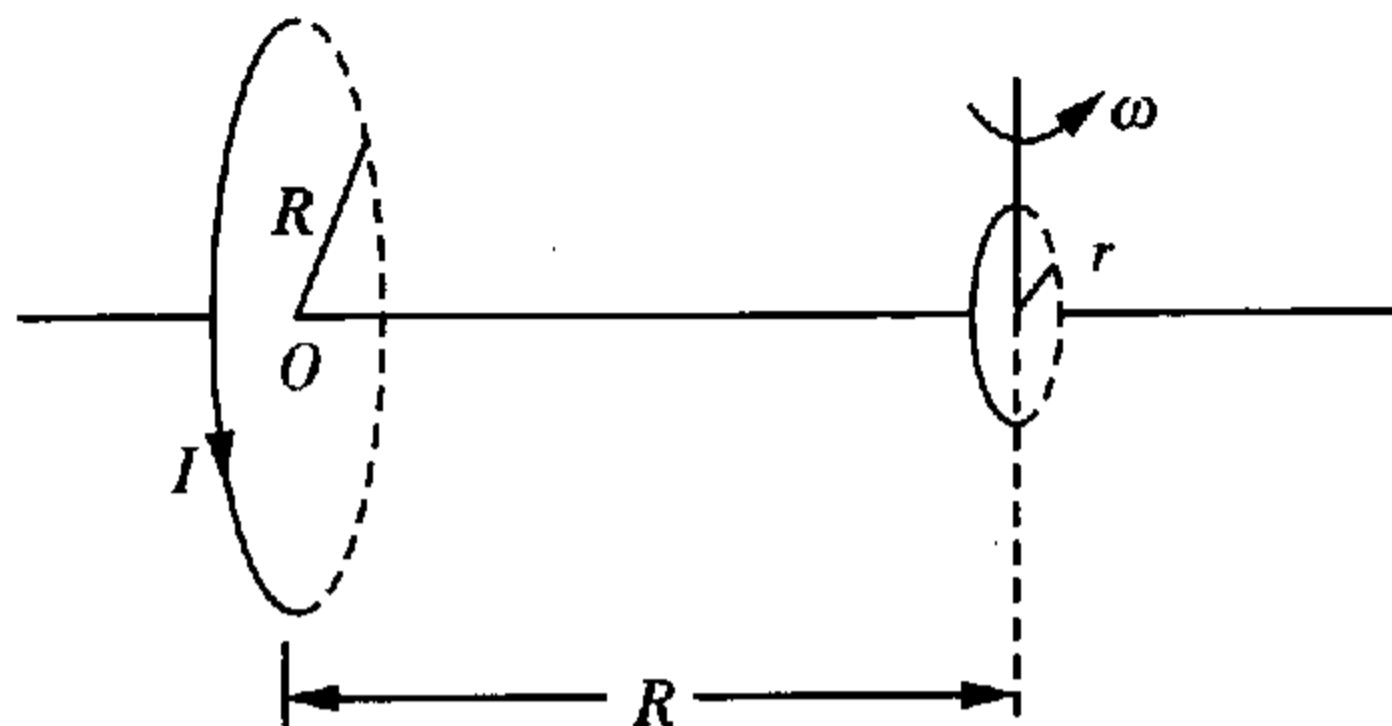


图 12-32

20. 如图 12-33 所示一个细的超导 (零电阻) 圆环放在竖直的圆柱形磁棒上面. 圆环的对称轴与棒的对称轴相同. 在圆环周围的圆柱形对称的磁场可以近似地用磁场矢量的竖直和径向分量 $B_z = B_0(1 - \alpha z)$ 和 $B_r = B_0\beta r$ 表示, 其中 B_0, α 和 β 是常数, 而 z 和 r 分别是竖直和径向的位置坐标.

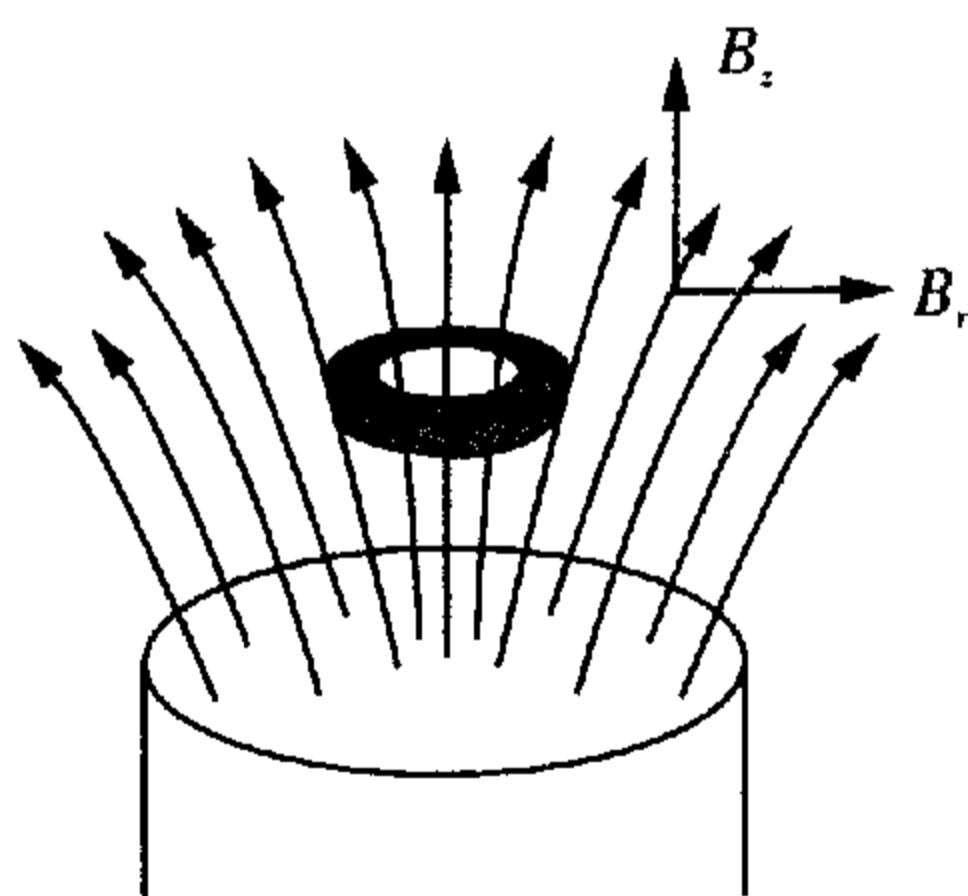


图 12-33

初始时, 圆环中没有电流. 当它被放开开始向下运动时, 保持它的轴仍为竖直. 用下面的数据确定, 圆环随后如何运动? 圆环中的电流是多少?

数据:

圆环的性质:	质量	$m = 50 \text{ mg}$
	半径	$r_0 = 0.5 \text{ cm}$
	电感	$L = 1.3 \times 10^{-8} \text{ H}$

圆环中心的初始坐标:

$z = 0$

$r = 0$

磁场常数:

$B_0 = 0.01 \text{ T}$

$\alpha = 2 \text{ m}^{-1}$

$\beta = 32 \text{ m}^{-1}$

第十三章 狭义相对论基础

【学习目标】

一、力学相对性原理和伽利略变换

如图 13-1, S 系静止, S' 系相对 S 系平动, 对应轴互相平行, $t = t' = 0$ 时, 两坐标系原点重合, t 时刻在两参考系中观察同一事物. 我们有

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad t = t'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

式中 \vec{v} 、 \vec{a} 为绝对速度和绝对加速度, \vec{v}' 、 \vec{a}' 为相对速度和相对加速度.

若 S' 相对 S 系做匀速直线运动, S' 系也为惯性系, $\vec{a}_0 = 0$, 则有

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

又在两系中有 $\vec{F} = \vec{F}' \quad m = m'$

$$\text{因有 } \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\text{故 } \vec{F}' = m' \vec{a}'$$

力学现象对一切惯性系来说, 都要遵从同样的规律. 这是力学相对性原理, 研究力学规律时, 一切惯性系都是等价的, 我们不能在一惯性系中做力学实验来判定这个惯性系是静止还是做匀速直线运动.

若 S' 系仅沿着 S 系 x 轴作匀速直线运动, 其速度为 u , 则我们有

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (13-1)$$

这就是伽利略变换. 它描绘了同一事物在两个不同参考系观察时的时空关系. 实际物体的低速运动都满足伽利略变换.

二、爱因斯坦假设 洛伦兹变换

力学现象满足伽利略变换, 但电磁现象、特别是光现象呢? 当时人们把机械波必须在媒质中才能传播的思想引进光现象中, 认为光只在以太中才能传播, 光相对以太速度为 \vec{c} , 并且沿各个方向相

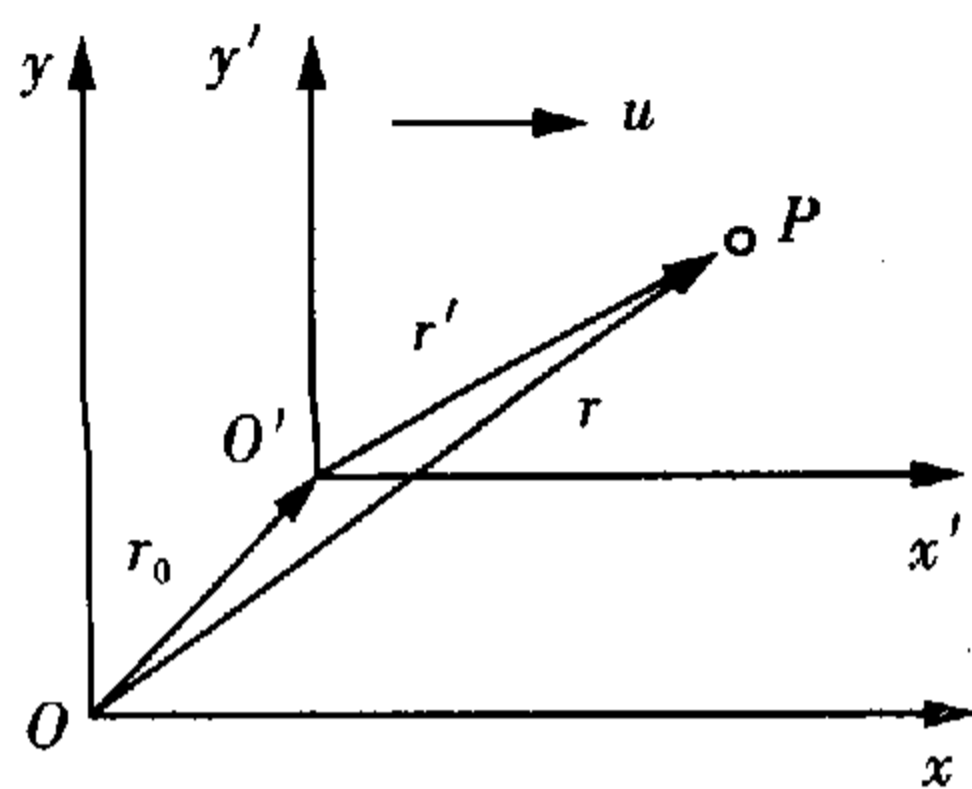


图 13-1

同. 若一参考系相对以太以速度 \vec{u} 做匀速直线运动, 根据伽利略变换, 即在这一运动的参考系中测得的光速为 \vec{v} , 即有 $\vec{v} = \vec{c} - \vec{u}$, 反过来, 若我们在这一运动的惯性系中测得光速 \vec{v} , 我们立即可测得运动参考系相对以太的速度 \vec{u} , 正是基于这个思想, 人们设计了迈克尔逊 - 莫雷实验, 希望在地球上测得光速从而得到地球相对以太的运动速度从而证明以太这个特殊的绝对参考系的存在. 实验的结果是令人失望的, 地球的速度未测到. 在各种解释不能自圆其说之后, 爱因斯坦提出了两条基本原理:

相对性原理: 物理学定律在所有惯性系中都是相同的.

光速不变原理: 在所有惯性系中, 自由空间中的光速具有相同的量值 C .

以这两个原理为依据, 我们可得相对论的坐标变换关系——洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) & x = \gamma(x' + ut') \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & \text{或 } z = z' \\ t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) & t = \gamma(t' + \frac{u}{c^2}x') \end{cases} \quad (13-2)$$

式中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

相应的速度变换关系为

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})} \end{cases} \quad (13-3)$$

三、长度收缩 时间膨胀

一刚性直尺沿 x' 轴放置并随 S' 系运动, S' 系中测得尺长 $l_0 = x'_2 - x'_1$, S 系观察者观察到尺在运动, 必须同时记下尺的两端的坐标 x_1 和 x_2 , 测得 $l = x_2 - x_1$, 利用洛伦兹变换可得

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l_0 \quad (13-4)$$

相对物体为静止的惯性系中测得物体长度是最长的, 称为物体的固有长度. 运动的物体在运动的方向上收缩.

现分别在 S 和 S' 系中观察两个事件的时间间隔 Δt 和 $\Delta t'$ 的关系.

在 S' 系中, 两事件发生在同一地点, 其时间间隔 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, S 系观察两事件发生在不同地点, 时间间隔为 Δt . 由洛伦兹变换可得

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (13-5)$$

同一地点发生两事件的时间间隔最小,称为固有时间,即运动的钟变慢了,从其他电像有相对运动的惯性系测量的两事件时间间隔都延长了.

对洛伦兹变换中 $t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$ 取微分得 $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)$, 对于在 S 系同时不同地(即 $\Delta t = 0$, $\Delta x \neq 0$) 发生的两件事, S' 系观察因 $\Delta t' \neq 0$ 而不是同时发生; 若 S 系中不同时不同地发生的两件事(即 $\Delta t \neq 0, \Delta x \neq 0$), 有可能使 $\Delta t' = 0$, 即在 S' 系观察可能同时, 同时性具有相对性, 但有因果关系的两事件的先后次序因相对论理论要求所有物体运动速度、讯号传输的速度及相互作用速度都不超过光速 C 而不会发生颠倒.

四、相对论力学

相对论中, 动量形式上仍可写为 $\vec{P} = m \vec{v}$, 但质量已不是一个恒量, 而是随物体运动速度不同而发生变化. $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, m_0 为物体静止时的质量, 于是:

$$\vec{P} = m \vec{v} = m_0 \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13-6)$$

这样得到的动量守恒定律是满足洛伦兹变换的. 很明显, 当 $v \ll c$ 时, 它回原为经典力学中的形式.

相对论中运动物体的总能量表示为

$$E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13-7)$$

物体静止时的能量称为物体的静能.

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (13-8)$$

那么物体的动能就为总能与静能之差:

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (13-9)$$

当物体质量发生变化时, 物体能量也要发生变化, 那就有

$$\Delta E = c^2 \Delta m \quad (13-10)$$

相对论中动量和能量之间的一个重要关系式

$$E^2 = E_0^2 + P^2 c^2 \quad (13-11)$$

对应相对论中的质量和动量, 相对论动力学的基本方程可写成

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m \vec{v})}{\Delta t} \quad (13-12)$$

应注意的是, 这时 m 也是 v 的函数.

【解题钥匙】

例 1 试推导洛伦兹坐标变换.

解析 如图 13-2, 对参考系 S 和 S' , 在 $t = t' = 0$ 时, O' 和 O 重合.

考虑到同一事件在 S 和 S' 系中观察, 其结果必须一一对应, 这就要求变换关系呈线性. 否则, 在一惯性系中某时空出现的一事件, 在另一惯性系中, 这一事件将在几个不同时空出现, 违反 S, S' 系的等价性及时空的均匀性. 设想 (x, t) 与 (x', t') 之间的变换形式为

$$x = k(x' + vt') \quad (1)$$

k 是与 x', t' 无关而与 v 有关的恒量, 其值应根据爱因斯坦的狭义相对论的两个基本原则来确定.

根据狭义相对论的相对性原理, 惯性系 S' 和 S 的物理方程应有同样的形式, 所以, 逆变换应为

$$x' = k(x - vt) \quad (2)$$

括号中 v 前面的负号只表示 S 系相对 S' 系的速度沿 x 轴的负方向。

设想 S 和 S' 系坐标原点重合时,从原点发出一个沿 x 轴方向传播的光脉冲,按光速不变原理,对 S 和 S' 系的观察者来说,光速都是 c ,光脉冲波前所在点的空间坐标,对 S 系为

$$x = ct$$

对 S' 系为

$$x' = ct'$$

将上述两式分别代入式①和式②得

$$ct = k(ct' + vt')$$

$$ct' = k(ct - vt)$$

上列两式相乘得

$$c^2 tt' = k^2 tt' (c+v)(c-v)$$

由此得

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

由此①、②两式即可写成

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

从这两个式子中消去 x' 或 x ,便可得到时间的变换式.若消去 x' 得

$$x \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + vt'$$

由此求得 t' 为

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

同样,消去 x 后求得 t 为

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

方法与技巧 洛伦兹变换把空间和时间连在一起,是相对论时空的数学描述,也是长度收缩、时间膨胀等重要公式推导的出发点.对于如此重要的一变换关系式的得到,并没有非常深奥的理论基础和繁杂的数学推导,仅仅从爱因斯坦两条原理出发,通过简单数学运算就得到了.这给我们怎样利用原理解决问题提供了一个很好的示范.

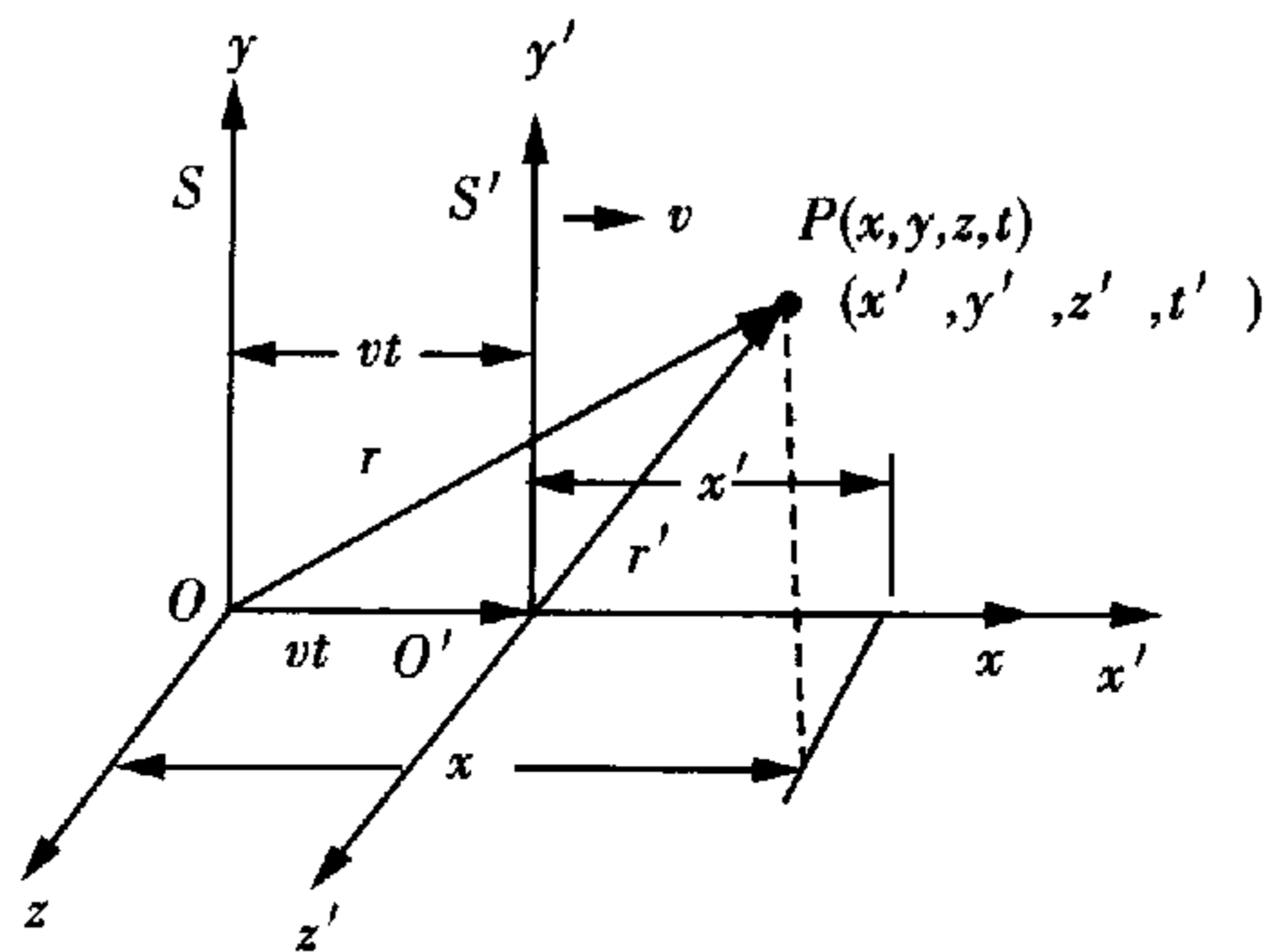


图 13-2

例2 在 $h_0 = 6000 \text{ m}$ 高层大气中产生一 μ 子, μ 子以 $0.998c$ 的速率向地面飞来, 静止的 μ 子的平均寿命为 $2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 问在 μ 子衰变以前, 能否到达地球表面?

解析 地面上的观测者按经典理论计算, μ 子走过的距离为

$$d_1 = v\Delta t = 0.998 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 598.8 \text{ m}$$

$d_1 < h_0$, 因此, 按 μ 子的平均寿命, 它似乎不可能到达地面. 实际上, μ 子的速率 v 与光速 c 可以比拟, 必须考虑相对论效应. μ 子相对地面运动, 在地面上的观测者看来, 它的平均寿命为

$$\Delta t_{\text{地}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.998^2}} = 31.6 \times 10^{-6} \text{ s}$$

地面上的观测者所计算的 μ 子可飞行的距离为

$$d_2 = v\Delta t_{\text{地}} = 0.998 \times 3 \times 10^8 \times 31.6 \times 10^{-6} = 9461 \text{ m}$$

$d_2 > h_0$, 因此, 按 μ 子平均寿命, 它能够到达地面.

这一问题也可以从另一方面来考虑, 即假设有一个与 μ 子相对静止的观测者. 在他看来, μ 子的平均寿命为 $\Delta t_{\mu} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$. 但由于地球相对 μ 子高速运动, 因而在他看来, μ 子产生时与地面的距离应为

$$h = h_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6000 \times \sqrt{1 - 0.998^2} = 379 \text{ m}$$

可飞行的距离

$$d_3 = v\Delta t_{\mu} = 0.998 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 598.8 \text{ m}$$

$d_3 > h$, 因此, 在平均寿命内, μ 子可以到达地面.

方法与技巧 解相对论题目时首先必须确定的是自己在哪一个参考系研究问题. 参考系不同, 空间长度、时间间隔都是不同的. 题目中提到粒子的平均寿命一般都是相对随粒子运动的参考系来说, 即对地面观察者来说时间是要膨胀的. 题目给出了两个解答, 是从两个不同参考系来解同一个问题, 只要我们真正理解了相对论效应, 都会得到正确的解答.

例3 在地面上有一跑道长 100 m , 运动员从起点跑到终点, 用时 10 s , 现从以速度 $0.8c$ 向前飞行的飞船中观测:

(1) 跑道有多长?

(2) 运动员跑过的距离和所用的时间为多少?

解析 以地面参考系为 S 系, 飞船参考系为 S' 系.

(1) 跑道固定在 S 系中, 原长 $l_0 = 100 \text{ m}$. 由于 S' 系相对 S 系高速运动, 因而在 S' 系中观测, 跑道长度为

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \times 0.6 = 60 \text{ m}$$

$$(2) \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

将 $\Delta x = 100 \text{ m}$, $\Delta t = 10 \text{ s}$ 和 $v = 0.8c$ 代入以上两式, 计算得

$$\Delta x' = \frac{100 - 0.8 \times 3 \times 10^8 \times 10}{0.6} \approx \frac{2.4 \times 10^9}{0.6} = -0.4 \times 10^9 \text{ m}$$

计算结果中的负号表示在 S' 系中观测, 运动员是沿 x' 负方向后退.

$$\Delta t' = \frac{10 - \frac{0.8 \times 10^8}{(3 \times 10^8)^2} \times 100}{0.6} \approx \frac{10}{0.6} = 16.6 \text{ s}$$

方法与技巧 这个题目最容易错的就是认为飞船中的观察者观测到运动员跑过的距离就是他观测到的跑道长度 60 m. 这是因对公式 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 的错误理解造成的, l 是在相对运动的参考系中同时测一空间距离的两端而得到的长度. 第(1)问中飞船上的观察者是同时测跑道的两端的, 故可直接用 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, 但第(2)问中运动员起跑和到达终点既不同地也不同时的事件, 这里就不能用(13-4)和(13-5)了. (13-5)式中的 $\Delta t'$ 是发生在某一惯性系中同一地点的不同时间的两事件之间的时间间隔. 故第(2)问只能根据洛伦兹变换式(13-2)来计算了. 在速度为 $0.8c$ 的飞船中看到运动员是在后退应该是预料中的结果.

例4 封闭的车厢中有一点光源 S , 在距光源 l 处有一半径为 r 的圆孔, 其圆心为 O_1 , 光源一直在发光, 并通过圆孔射出. 车厢以高速 v 沿固定在水平地面上的 x 轴正方向匀速运动, 如图 13-3 所示. 某一时刻, 点光源 S 恰位于 x 轴的原点 O 的正上方, 取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点. 在地面参考系中坐标为 x_A 处放一半径为 R ($R > r$) 的不透光的圆形挡板, 板面与圆孔所在的平面都与 x 轴垂直. 板的圆心 O_2 、 S 、 O_1 都等高, 起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕(图中未画出)上. 由于车厢在运动, 将会出现挡板将光束完全遮住, 即没有光射到屏上的情况. 不考虑光的衍射, 试求:

- (1) 车厢参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻.
- (2) 地面参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻.

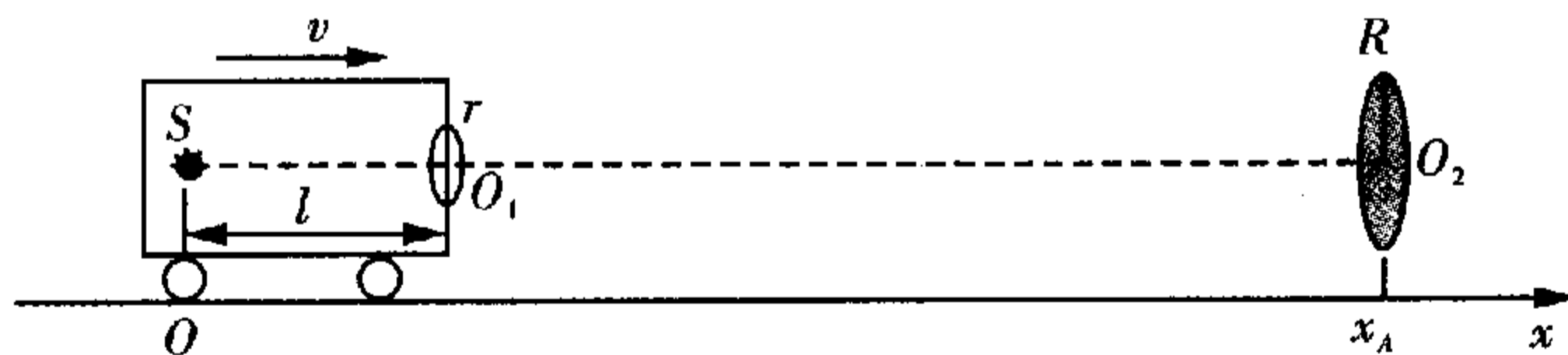


图 13-3

解析 (1) 相对于车厢参考系, 地面连同挡板以速度 v 趋向光源 S 运动. 由 S 发出的光经小孔射出后成锥形光束, 随着离开光源距离的增大, 其横截面积逐渐扩大. 若距 S 的距离为 L 处光束的横截面正好是半径为 R 的圆面, 如图 13-4 所示, 则有

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{L}$$

可得

$$L = \frac{Rl}{r} \quad \text{①}$$

设想车厢足够长, 并设想在车厢前端距 S 为 L 处放置一个半径为 R 的环, 相对车厢静止, 则光束

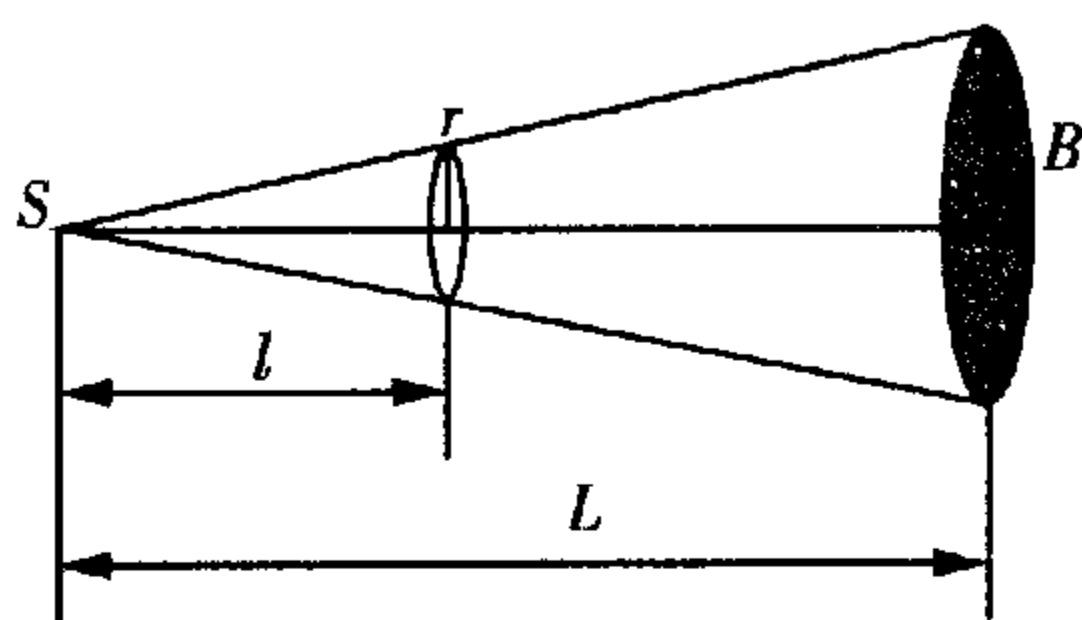


图 13-4

恰好从环内射出,当挡板运动到与此环相遇时,挡板就会将光束完全遮住.此时,在车厢参考系中挡板离光源 S 的距离就是 L . 在车厢参考系中,初始时根据相对论,挡板离光源的距离为

$$x_A = \sqrt{1 - (v/c)^2} L \quad (2)$$

故出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - (v/c)^2} - L}{v} \quad (3)$$

由①、③式得

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - (v/c)^2}}{v} - \frac{Rl}{rv} \quad (4)$$

(2) 相对于地面参考系,光源与车厢以速度 v 向挡板运动. 光源与孔之间的距离缩短为

$$l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (5)$$

而孔半径 r 不变,所以锥形光束的顶角变大,环到 S 的距离即挡板完全遮光时距离应为

$$L' = \frac{Rl'}{r} = \frac{Rl}{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6)$$

初始时,挡板离 S 的距离为 x_A ,出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t' = \frac{x_A - L'}{v} = \frac{x_A}{v} - \frac{Rl}{rv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

方法与技巧 这是第二十二届中学生物理竞赛的复赛题,主要还是时空的变换,在车厢参考系初始时 x_A 要收缩,而 l, L 随车运动,为固有长度. 在地面参考系, x_A 静止,为固有长度,而 l, L 收缩. 此题还须注意,长度收缩只发生在运动方向上,圆孔、挡板半径与运动方向垂直未发生变化.

例 5 设地球是一个半径为 6370 km 的球体. 在赤道上空离地面 1 千多公里处和赤道共面的圆与赤道形成的环形区域内,地磁场可看作是均匀的,其磁感强度为 $B = 3.20 \times 10^{-6}$ T. 某种带电宇宙射线粒子,其静质量为 $m_0 = 6.68 \times 10^{-27}$ kg,其电荷量为 $q = 3.20 \times 10^{-19}$ C. 在地球赤道上空的均匀地磁场中围绕地心做半径为 $R = 7370$ km 的圆周运动.

已知在相对论中只要作用于粒子的力 F 的方向始终与粒子运动的速度 v 的方向垂直,则运动粒子的质量 m 和加速度 a 与力 F 的关系仍为 $F = ma$,但式中的质量 m 为粒子的相对论质量. 问:

(1) 该粒子的动能为多大?

(2) 该粒子在圆形轨道上运动时与一个不带电的静质量为 $m_2 = 4m_0$ 的静止粒子发生碰撞,并被其吸引形成一个复合粒子,试求复合粒子的静质量 m_1 .

解析 (1) 设带电宇宙射线粒子速度为 v ,在地磁场的洛伦兹力作用下做圆周运动,其运动方程为

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

式中 m 为运动粒子的相对论质量,与静止质量的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

该粒子的动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad (3)$$

由式①可求得

$$v = \frac{qBRc}{\sqrt{q^2 B^2 R^2 + m_0^2 c^2}} \quad \text{④}$$

代入数据得

$$v = 2.90 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{⑤}$$

由式②、③得

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad \text{⑥}$$

代入数据,注意到式⑤,得

$$E_k = 1.74 \times 10^{-9} \text{ J} \quad \text{⑦}$$

(2) 用手 p 、 E 分别表示宇宙射线粒子的动量和能量,有

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{⑧}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{⑨}$$

设复合粒子的速度为 v_1 , 动量和能量分别为 p_1 和 E_1 , 有

$$p_1 = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad \text{⑩}$$

$$E_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad \text{⑪}$$

粒子复合过程中动量、能量守恒,有

$$p_1 = p \quad \text{⑫}$$

$$E_1 = E + m_2 c^2 \quad \text{⑬}$$

由以上各式及已知条件 $m_2 = 4m_0$, 得

$$v_1 = \frac{v}{1 + 4 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{⑭}$$

把式⑤代入式⑭,得

$$v_1 = 1.43 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{⑮}$$

由式⑨、⑪和⑬得

$$m_1 = \frac{m_0 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2} \quad \text{⑯}$$

由式⑤、⑮和有关数据得

$$m_1 = 46.4 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{⑰}$$

方法与技巧 相对论中动量的表达式还是与经典力学中的一样,为 $\vec{P} = m \vec{v}$, 只不过质量是随速度而变化的变量, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 但相对论中动能的表达式绝不是 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, 哪怕用相对论中的 m . 相

对论中的动能只能用 $E_k = mc^2 - m_0c^2$ 表示. 相对论中动量守恒、能量守恒定律均成立. 计算能量守恒时要注意到静止物体的静能.

这题是第二十届全国中学生物理竞赛的决赛题. 自 2002 年实施新的考纲以来, 狭义相对论的题目年年考. 而相对论知识对于中学生来说还是比较生疏而难于理解的. 因而我们这本书独辟蹊径, 在有关中学生物理竞赛书中第一次把相对论单独成一章, 以满足学生要求.

例 6 试从相对论能量和动量的角度分析论证:

(1) 一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收.

(2) 光子射到金属表面时, 其能量有可能完全被吸收并使电子逸出金属表面, 产生光电效应.

解析 (1) 设电子处于静止状态时的质量为 m_0 , 光子的频率为 ν , 假定电子能完全吸收光子的能量, 吸收光子后, 电子以速度 v 运动, 则这一过程应遵循动量守恒定律, 有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ①$$

碰撞后系统的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ②$$

由①、②式消去 v , 得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2} \quad ③$$

碰撞前电子与光子的总能量为

$$E_0 = h\nu + m_0 c^2 \quad ④$$

由③、④式有

$$E^2 - E_0^2 = (m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2) - (h\nu + m_0 c^2)^2 = -2h\nu m_0 c^2 \neq 0 \quad ⑤$$

这表明, 所假设的过程不符合能量守恒定律, 因此这一过程实际上不可能发生.

(2) 束缚在金属中的电子和射入金属的光子二者构成的系统在发生光电效应的过程中动量不守恒, 只需考虑能量转换问题. 设电子摆脱金属的束缚而逸出, 需要对它做功至少为 W (逸出功), 逸出金属表面后电子的速度为 v , 入射光子的能量为 $h\nu$, 电子的静止质量为 m_0 , 若能产生光电效应, 则有

$$h\nu \geq \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 \right] + W \quad ⑥$$

逸出电子的速度 v 一般都比光速小很多, 故有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad ⑦$$

忽略高阶小量, 只取⑦式中的前两项, 代入⑥式, 可得到

$$h\nu \geq \frac{1}{2} m_0 v^2 + W \quad ⑧$$

可见, 只要 $h\nu \geq W$ ⑧式就能成立, 光电效应就能产生.

方法与技巧 论证第(1)问时, 我们使用了反证法. 题目是要证明光子与真空中静止自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收. 我们先假设这个物理过程能够发生, 通过合理推导, 得到系统能量减少的结论, 这显然违背了能量守恒定律, 推导过程是没有错的, 那就可能错在开始时的假设——光子与真空中静止自由电子碰撞时光子能量可以完全被电子吸收. 从而题目得证. 反证法是

我们论证物理问题时经常用到的一种方法.

例7 一原子核基态的静质量为 M , 激发态比基态的能量高 ΔE , 已知 $\Delta E \ll MC^2$, 以致 $(\frac{\Delta E}{MC^2})^2$ 项可以略去. (1) 试求下列两种情况下光子的频率: (a) 该核处在基态且静止时吸收一个光子; (b) 该核处在激发态且静止时辐射一个光子. (2) 试论证: 处在激发态的静止核所辐射光的光子, 不能被处在基态的同类静止核吸收.

解析 (1) (a) 设光子被吸前的动量为 $\frac{h\nu_1}{C} \vec{e}_k$, \vec{e}_k 为一单位矢量, 光子被吸收后原子核的动量为 \vec{P}_1 , 则由动量守恒定律得

$$\vec{P}_1 = \frac{h\nu_1}{C} \vec{e}_k$$

$$\text{即 } P_1^2 C^2 = h^2 \nu_1^2$$

$$\text{由能量守恒定律 } \sqrt{(P_1 C)^2 + (MC^2 + \Delta E)^2} = h\nu_1 + MC^2$$

$$\text{两边平方 } (P_1 C)^2 + (MC^2 + \Delta E)^2 = (h\nu_1 + MC^2)^2$$

代入 $P_1^2 C^2 = h^2 \nu_1^2$, 可得

$$2MC^2 h\nu_1 = \Delta E(2MC^2 + \Delta E)$$

$$\text{于是得到所求光子频率为 } \nu_1 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 + \frac{\Delta E}{2MC^2}\right)$$

(b) 设发射的光子动量为 $\frac{h\nu_2}{C} \vec{e}_k$, 发射后原子核的动量为 \vec{P}_2 , 则由动量守恒定律得

$$\vec{P}_2 + \frac{h\nu_2}{C} \vec{e}_k = 0$$

$$\text{即 } P_2^2 C^2 = h^2 \nu_2^2$$

$$\text{由能量守恒定律 } \sqrt{(P_2 C)^2 + (MC^2)^2} + h\nu_2 = \left(M + \frac{\Delta E}{C^2}\right) C^2$$

$$\text{由以上两式得 } 2(MC^2 + \Delta E) h\nu_2 = \Delta E(2MC^2 + \Delta E)$$

于是求得所求光子频率为

$$\nu_2 = \frac{\Delta E(2MC^2 + \Delta E)}{2h(MC^2 + \Delta E)} = \frac{\Delta E}{h} \left(1 + \frac{\Delta E}{2MC^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta E}{MC^2}\right) = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2MC^2}\right)$$

(2) 由上面的结果可见, 处在激发态的静止核所辐射出的光子能量为 $h\nu_2 = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2MC^2}\right)$, 而处在基态的同类静止核所吸收的光子的能量为 $h\nu_1 = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2MC^2}\right)$, 因 $h\nu_2 < h\nu_1$, 故 $h\nu_2$ 不能被吸收.

方法与技巧 题目的结论是很好理解的, 基态静止的核要升到激发态, 除需激发态比基态多 ΔE 的能量外, 因动量守恒, 静止的核吸收有动量的光子后也要运动. 因而核动能会增加, 这时光子所具有的能量除 ΔE 的激发能外, 还应包括吸收光子后的核所增加的动能. 核辐射的情况也是如此. 辐射的光子能量小于 ΔE , 因有一部分转为辐射后核的动能. 方法上注意动量守恒定律、能量守恒定律的应用和一些数学运算的技巧. 再一个注意列相对论能量与动量的关系式 $E^2 = P^2 C^2 + m_0^2 C^4$ 时, 要注意考虑激发态的能量 ΔE .

【解题尝试】

1. 一辆火箭列车,以 $v=0.8c$ 的速度行驶,当驶经地面上的某一时钟时,驾驶员注意到地面上的那只钟指向 $t_0=0$,于是他立即把自己的钟也拨到 $t'_1=0$,后来当他自己的钟指到 $6\ \mu\text{s}$ 时,驾驶员又看他经过的地面上的另一只钟,问此钟的读数为多少?
2. 超音速飞机的驾驶员相对地球以 $v=600\ \text{m/s}$ 的速度飞行. 试问,他要飞行多久,才能使他的表比地球上的钟慢 $1\ \text{s}$?
3. 在一以恒定速度 v 沿平直轨道行驶的车厢中央有一旅客,已知他到车厢两端 A 和 B 的距离都是 L_0 ,今旅客点燃一火柴,光脉冲以速度 c 向各个方向传播,并到达车厢两端 A 和 B ,试从车厢和地面两个参考系分别计算光脉冲到达 A 和 B 的时刻.
4. 一根长为 l_0 的棒,静置在坐标系的 x',y' 平面内,与 x' 轴成 θ_0 角(图 13-5),相对实验室参考系 Oxy ,棒以速度 v 沿 x 轴向右运动,求在此参考系中棒的长度和取向.
5. 宇航员乘一宇宙飞船从地球飞向离地球为 $81y$ 的某星体. 飞船相对地球的速度 $v=0.8c$,问宇航员何时到达这星体?
6. 在 S 系中观察到在同一地点发生的两个事件,第二事件发生在第一事件之后 $2\ \text{s}$. 在 S' 系中观察到第二事件在第一事件后 $3\ \text{s}$ 发生. 求在 S' 系中这两个事件的空间距离.
7. 一只装有无线电发射和接收装置的飞船,正以 $\frac{4}{5}c$ 的速度飞离地球. 当宇航员发射一无线电信号后,信号经地球反射, $60\ \text{s}$ 后宇航员才收到返回信号.
 - (1) 在地球反射信号的时刻,从飞船上测得的地球离飞船多远?
 - (2) 当飞船接收到反射信号时,地球上测得的飞船离地球多远?
8. 一宇宙飞船以 $0.60c$ (c 为真空中光速) 的匀速自地球飞往遥远的星球,它上面和同它联系的地面台站都装有原子钟和无线电收发报机,以便联系. 双方约定,原子钟的时间都从飞船离开地球时算起,飞船上的原子钟在一年后便指令向地球发射一个无线电信号,地面台站收到这个信号后立即向飞船发射一个无线电信号. 试计算双方观测到的各处发射和收到无线电信号的时刻以及当时飞船与地球间的距离.
9. 两个静止质量都为 m_0 的粒子以大小相等、方向相反的速度 v 互相接近并发生完全非弹性碰撞,求碰撞后粒子的质量.
10. (1) 一根长为 l_0 、横截面积为 S 的匀质圆柱体. 在地面上静止时测得其密度为 ρ_0 . 当圆柱体沿轴线方向以速度 $v=0.9c$ 相对于地面做匀速运动时,相对地面上的观测者再计算其密度 ρ 等于多少? (c 为光速)
 (2) 有一个电子,已知它的德布罗意波(物质波)是波长为 λ 、向 x 的正方向传播的平面波. 它的动量 p_x 等于多少? 它的坐标 x 如何?
11. μ 子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命 $\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6}\ \text{s}$. 宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批 μ 子,以 $v=0.99c$ 的速度(c 为真空中的光速)向下运动并衰变. 根据放射性衰变定律,相对给定惯性参考系,若 $t=0$ 时刻的粒子数为 $N(0)$, t 时刻剩余的粒子数为 $N(t)$,

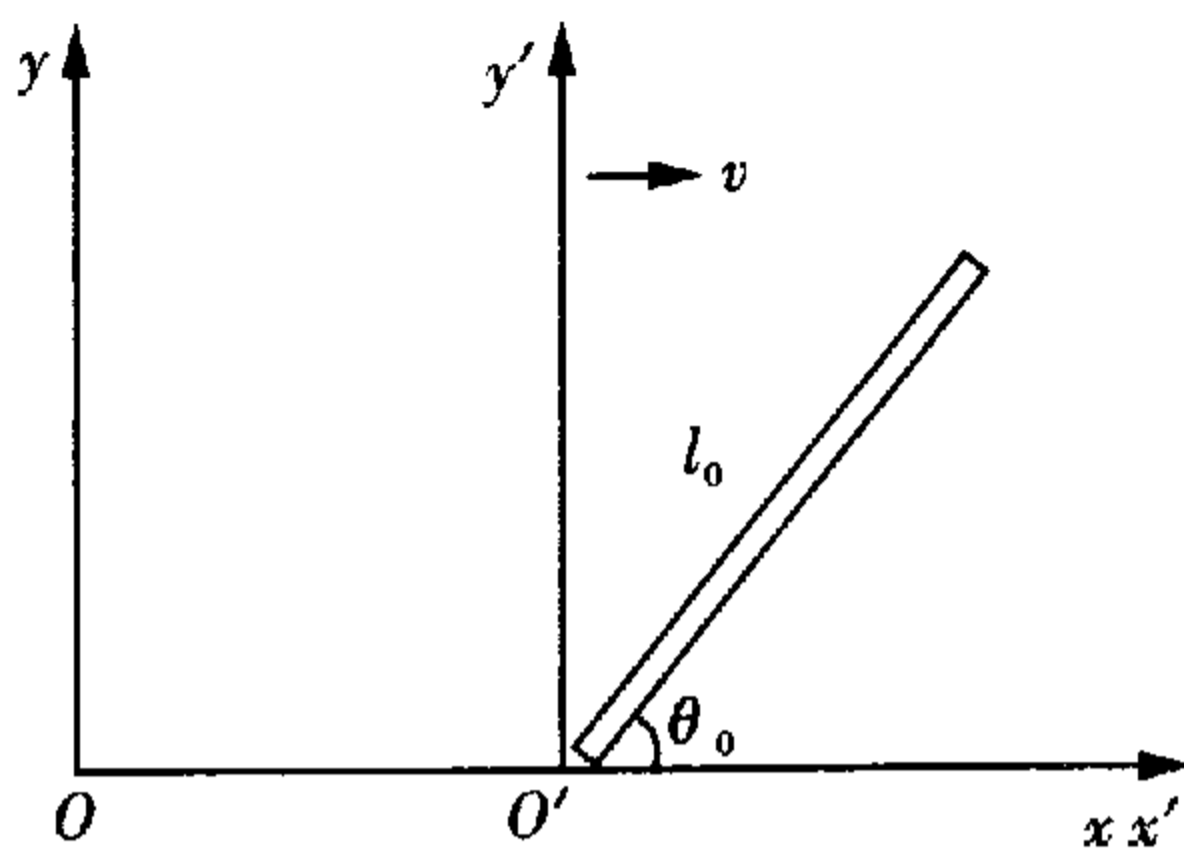


图 13-5

则有 $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$, 式中 τ 为相对该惯性系粒子的平均寿命. 若能到达地面的 μ 子数为原来的 5%, 试估算 μ 子产生处相对于地面的高度 h . 不考虑重力和地磁场对 μ 子运动的影响.

12. 在相对于实验室静止的平面直角坐标系 S 中, 有一个光子, 沿 x 轴正方向射向一个静止于坐标原点 O 的电子. 在 y 轴方向探测到一个散射光子. 已知电子的静止质量为 m_0 , 光速为 c , 入射光子的能量与散射光子的能量之差等于电子静止能量的 $1/10$.
- (1) 试求电子运动速度的大小 v 、电子运动的方向与 x 轴的夹角为 θ ; 电子运动到离原点距离为 L_0 (作为已知量) 的 A 点所经历的时间为 Δt .
- (2) 在电子以 (1) 中的速度 v 开始运动时, 一观察者 S' 相对于坐标系 S 也以速度 v 沿 S 中电子运动的方向运动 (即 S' 相对于电子静止). 试求 S' 测出的 OA 的长度.
13. 在北京正负电子对撞机中, 电子可以被加速到动能为 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV}$.
- (1) 这种电子的速率和光速相差多少 m/s ?
- (2) 这样的—个电子动量多大?
- (3) 这种电子在周长为 240 m 的储存环内绕行时, 它受的向心力多大? 需要多大的偏转磁场?
14. 一个质子的静质量为 $m_p = 1.67265 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个中子的静质量为 $m_n = 1.67495 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个质子和一个中子结合成的氘核的静质量为 $m_0 = 3.34365 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 求结合过程中放出的能量是多少 MeV ? 这能量称为氘核的结合能. 它是氘核静能量的百分之几?
- 一个电子和一个质子结合成一个氢原子, 结合能是 13.58 eV , 这一结合能量是氢原子静能量的百分之几? 已知氢原子的静质量为 $m_H = 1.67323 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
15. 20 世纪 60 年代发现的类星体的特点之一是它发出极强烈的辐射. 这一辐射的能源机制不可能用热核反应来说明. 一种可能的巨大能源机制是黑洞或中子星吞食或吸积远处物质时所释放的引力能.
- (1) 1 kg 物质从远处落到地球表面上时释放的引力能是多少? 释能效率 (即所释放能量与落到地球表面的物质的静能的比) 又是多大?
- (2) 1 kg 物质从远处落到一颗中子星表面时释放的引力能是多少? (设中子星的质量等于一个太阳的质量而半径为 10 km) 释能效率又是多大?
16. 一电子具有 $0.51 \times 10^6 \text{ eV}$ 的静止能量, 若使之加速, 直至具有 $4.59 \times 10^6 \text{ eV}$ 的动能. 问该电子的总能量是多少? 运动中电子的惯性质量是静止质量 m_0 的多少倍? 这时, 该电子的速率是多大?
17. 太阳发出的能量是由质子参与一系列反应产生的, 其总结果相当于下述热核反应:
- $$4\text{}^1_1\text{H} + 2\text{}^0_1\text{e} \rightarrow \text{}^4_2\text{He} + 2\text{}^1_0\text{n} + 2\text{}^0_1\text{e}$$
- 已知一个质子 (${}^1_1\text{H}$) 的静质量是 $m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个氦核 (${}^4_2\text{He}$) 的静质量是 $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 一个正电子 (${}^0_1\text{e}$) 的静质量是 $m_e = 0.0009 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
- (1) 这一反应释放多少能量?
- (2) 这一反应的释能效率多大?
- (3) 消耗 1 kg 质子可以释放多少能量?
- (4) 目前太阳辐射的总功率为 $P = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$, 它一秒钟消耗多少千克质子?
- (5) 目前太阳约含有 $m = 1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ 质子. 假定它继续以上述 (4) 求得的速率消耗质子, 这些质子可供消耗多长时间?

第十四章 光 学

【学习目标】

一、几何光学的基本实验定律

光的直线传播定律:在均匀介质中,光线为一直线.

光的独立传播定律:自不同方向或由不同物体发出的光线相交时,对每一光线的独立传播不产生影响.

光的反射和折射定律:光从一种介质射向另一种介质时,在界面上会同时产生反射和折射两种现象.光的反射遵从反射定律,光的折射遵从折射定律,折射定律的数学表达式是

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

反射定律可看作是折射定律当 $n_2 = -n_1$ 时的特例.当光从光密介质射向光疏介质且入射角大于或等于临界角时,就发生全反射.

二、单球面折射与反射成像

在近轴条件下,折射球面的成像公式为

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

式中 s 是物距, s' 是像距, r 是球面曲经半径, n 和 n' 分别为折射球面的物方折射率和像方折射率.上式可改写成更具普遍性的高斯成像公式:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

其中 $f' = \frac{n'}{n' - n}r$ 和 $f = -\frac{n}{n' - n}r$ 分别为折射球面的像方焦距和物方焦距.

以上成像公式中, s, s', r, f', f 等量均可正可负,本书对线段的符号作如下规定:

1. 轴向线段:从球面顶点算起,沿光轴向左的线段为负值,向右的线段为正值.
2. 横向线段:从光轴算起,向上的横向线段为正,向下的为负.
3. 在图中出现的线段其长度均以绝对值标记.

像长 y' 与物长 y 之比称做垂轴(横向)放大率 β ,对单折射球面成像,有

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}$$

在球面折射成像公式中,令 $r = \infty$,得平面折射成像公式:

$$s' = \frac{n'}{n}s$$

在球面折射成像公式中,令 $n' = -n$,得球面反射成像公式:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$$

球面反射成像的垂轴放大率公式为

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

在平面折射成像公式中,令 $n' = -n$,得平面反射成像公式为

$$s' = -s$$

平面反射成像时垂轴放大率 $\beta = +1$

三、薄透镜的成像

近轴条件下,薄透镜的成像公式为

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$

式中, r_1 和 r_2 分别为组成薄透镜的两个折射球面的曲率半径, n 为透镜的折射率, n_1 和 n_2 分别为透镜两侧介质的折射率, s 和 s' 分别为物距和像距.

利用物方焦距

$$f = -\frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

和像方焦距

$$f' = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

就可以得到薄透镜成像的高斯公式:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

对于空气中的薄透镜, $n_1 = n_2 = 1$, 焦距公式简化为

$$f' = -f = \frac{1}{(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

物像公式变为

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

或者

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

薄透镜成像的垂轴放大率为

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$$

四、光的波动性

光波是一定波长范围内的电磁波. 真空中的光速 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s, 在折射率为 n 的介质中光速

为 $v = \frac{c}{n}$.

可见光的波长在 $0.40 \mu\text{m}$ 到 $0.76 \mu\text{m}$ 之间, 波长长于 $0.76 \mu\text{m}$ 的光波称为红外线, 波长短于 $0.40 \mu\text{m}$ 的光波称为紫外线.

惠更斯-菲涅耳原理: 光波波面上每一点都可看作是一个次级波源, 各次波源是相干光源, 空间某点的光振动是这些相干次波的合振动.

惠更斯-菲涅耳原理是波动光的理论基础. 光的干涉和衍射现象是光的波动性的体现.

杨氏双缝干涉实验如图 14-1 所示, 幕上的干涉条纹是一组等间距的平行直条纹, 强度为极大值的那些点满足条件:

$$x = k \frac{r}{d} \lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

强度为极小值的那些点满足条件:

$$x = (2k + 1) \frac{r}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

条纹间距是

$$\Delta x = \frac{r}{d} \lambda$$

在如图 14-2 所示的薄膜干涉的情况下, 两反射光线的光程差 (考虑半波损失后) 为

$$\begin{aligned} \delta &= 2n_2 h \cos i_2 - \frac{\lambda}{2} \\ &= 2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

因此, 干涉极大还是干涉极小的条件为

$$\text{或 } 2n_2 h \cos i_2 = \begin{cases} (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{极大} \\ k\lambda & \text{极小} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

光通过圆孔、狭缝或其他电像小障碍物时, 由于这些物体限制光波的波阵面, 使光波在传播过程中违背光的直线传播定律, 光线发生弯曲, 进入阴影内, 且影外光的强度分布也出现不均匀, 通常称这种现象为光的衍射. 只有当障碍物或孔的线度跟波长差不多时, 才可以观察到明显的衍射现象. 由于光波波长很短, 通常物体都比它大得多, 故一般不容易看到光的衍射现象. 利用惠更斯-菲涅耳原理可以解释光的衍射.

五、光的量子性

为了解释光电效应的实验规律, 爱因斯坦提出了光量子 (简称光子) 的概念. 单个光子的能量 E 与频率 ν 成正比, 即

$$E = h\nu$$

式中, h 是普朗克常数.

由此他成功地解释了光电效应, 并从理论上得到了光电效应方程:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_m^2 + w$$

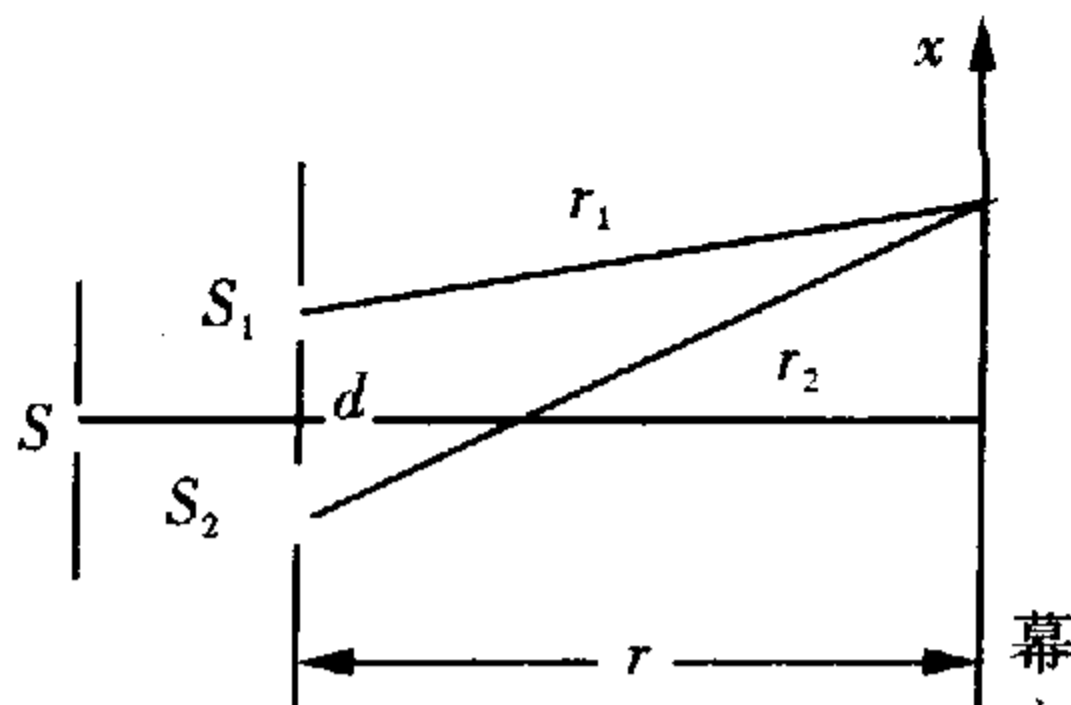


图 14-1

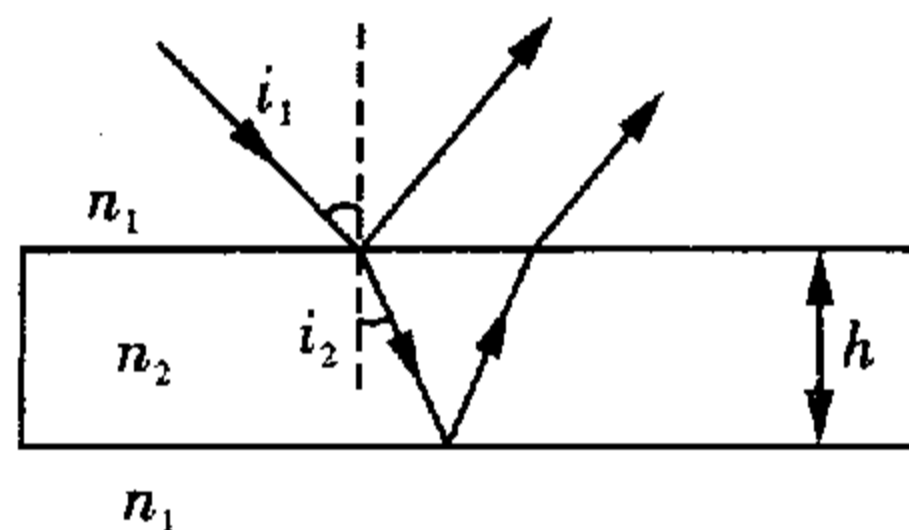


图 14-2

光子既然具有一定的能量,就必须具有质量.按照狭义相对论质量和能量的关系 $E = mc^2$,就可以确定一个光子的质量:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

但光子的静止质量等于零.

光子也具有动量,一个光子的动量大小为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

用光子的概念可以简单而成功地解释康普顿效应,这是对光子假说的有力支持.在这种解释中光的粒子性的图像特别突出.从光子具有动量这一假设出发,还可以直接说明光压的作用.光压就是光子流产生的压强.从光子的观点看,光压的产生是由于光子把它的动量传给物体的结果.光压的数值为

$$P = (1 + \rho) \frac{\phi}{c}$$

式中 ϕ 为入射光强, ρ 为壁的反射系数.

【解题钥匙】

例 1 如图 14-3 所示,内表面只反射而不吸收光的圆筒内有一半径为 R 的黑球,距球心为 $2R$ 处有一点光源 S ,球心 O 和光源 S 皆在圆筒轴线上,如图所示.若使点光源向右半边发出的光最后全被黑球吸收,则筒的内半径 r 最大为多少?

解析 自 S 作球的切线 SM ,并画出 S 经管壁反射形成的虚像点 S' ,及由 S' 画出球面的切线 $S'N$,如图 14-4 所示,由图可看出,只要 $S'M$ 和 $S'N$ 之间有一夹角,则筒壁对从 S 向右的光线的反射光线就有一部分进入球的右方,不会完全落在球上被吸收.

由图可看出,如果 r 的大小恰能使 $S'N$ 与 $S'M$ 重合,如图 14-5,则 r 就是题所要求的筒的内半径的最大值.这时 SM 与 MN 的交点到球心的距

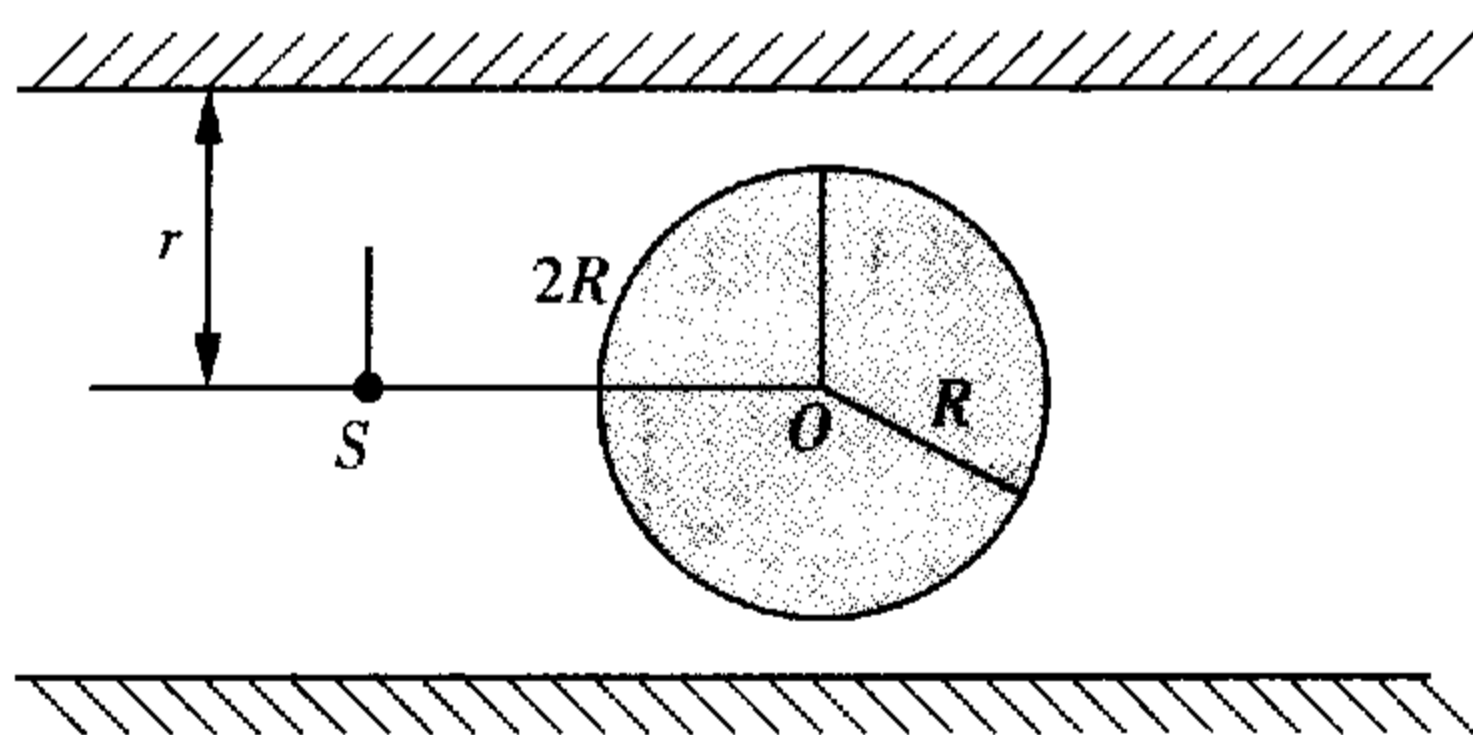


图 14-3

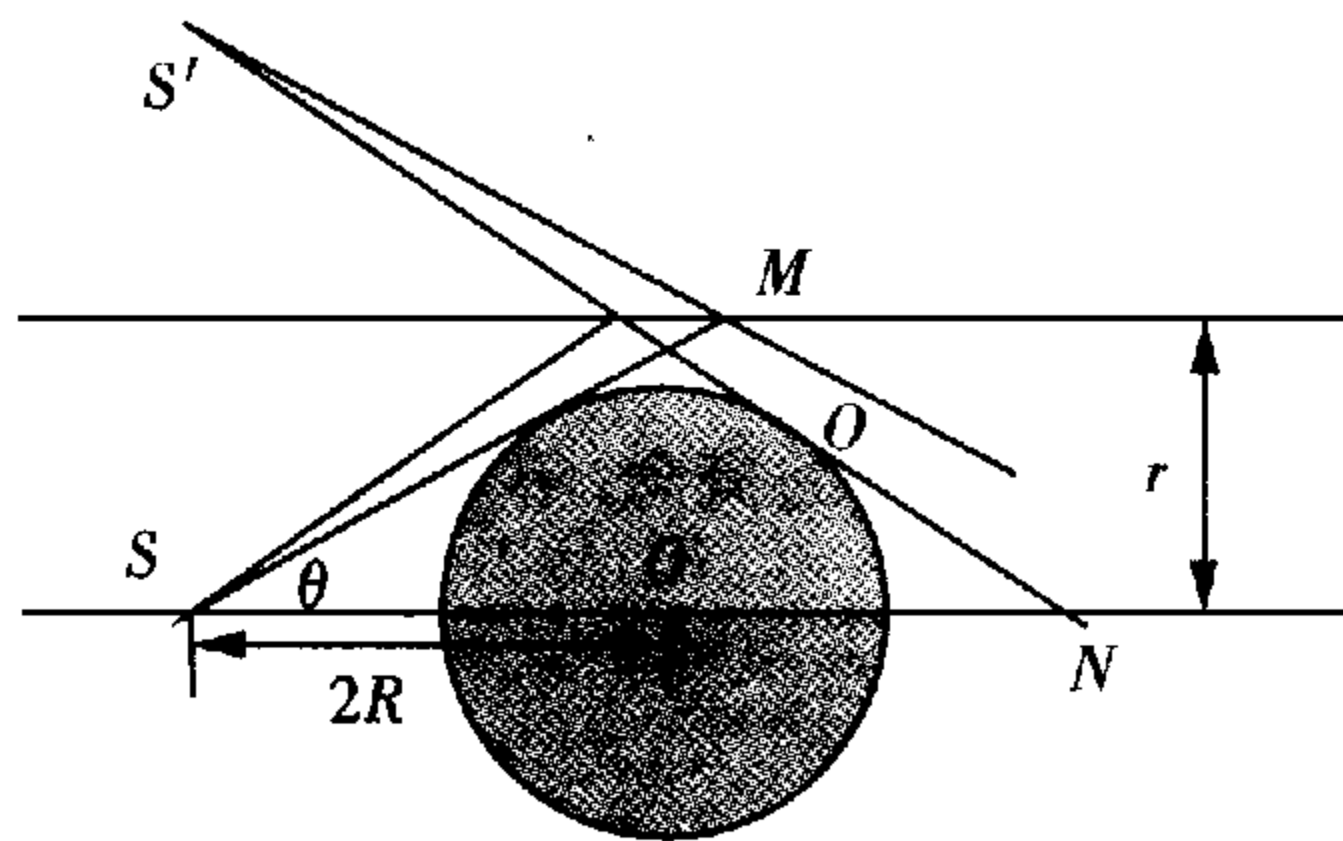


图 14-4

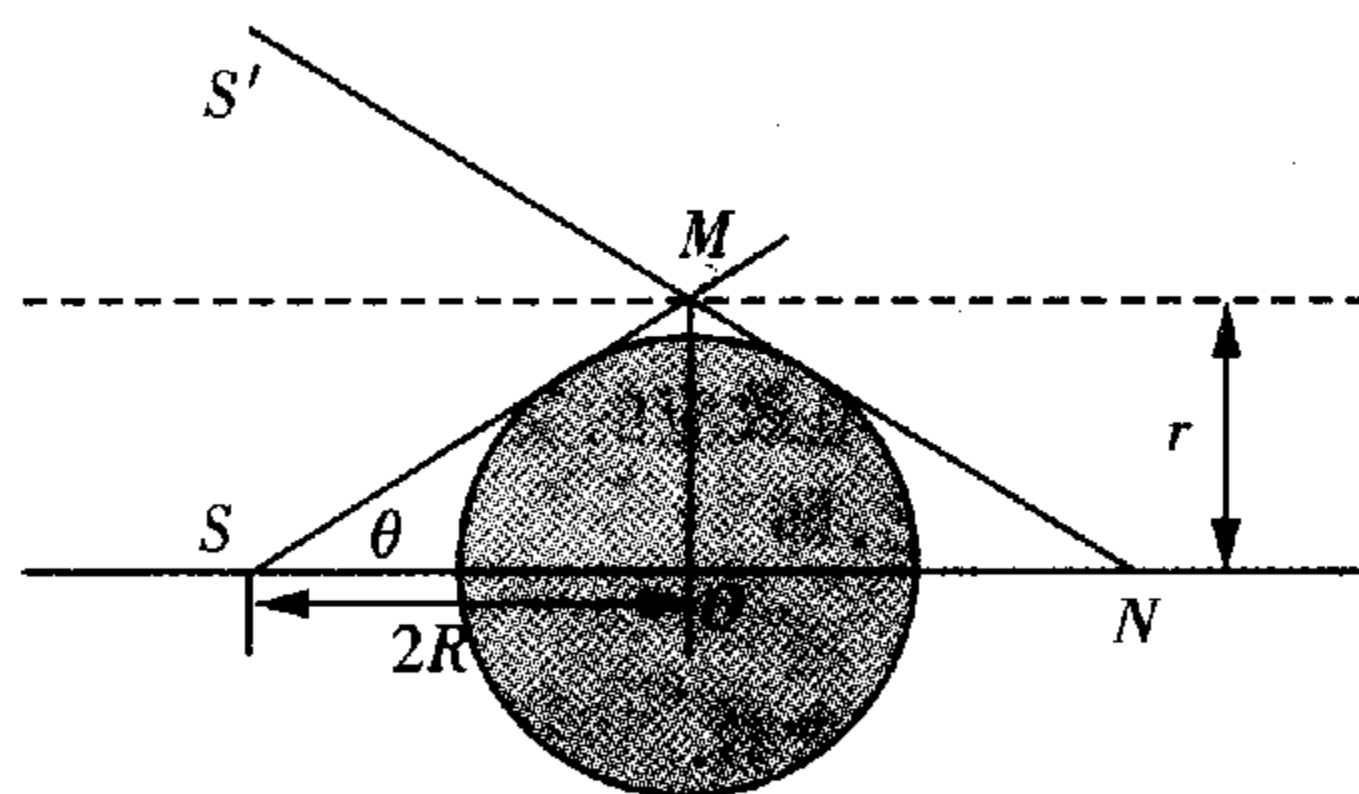


图 14-5

离 MO 就是所要求的筒的半径 r . 由图 14-5 可得

$$r = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} \quad ①$$

由几何关系可知

$$\sin\theta = R/2R \quad ②$$

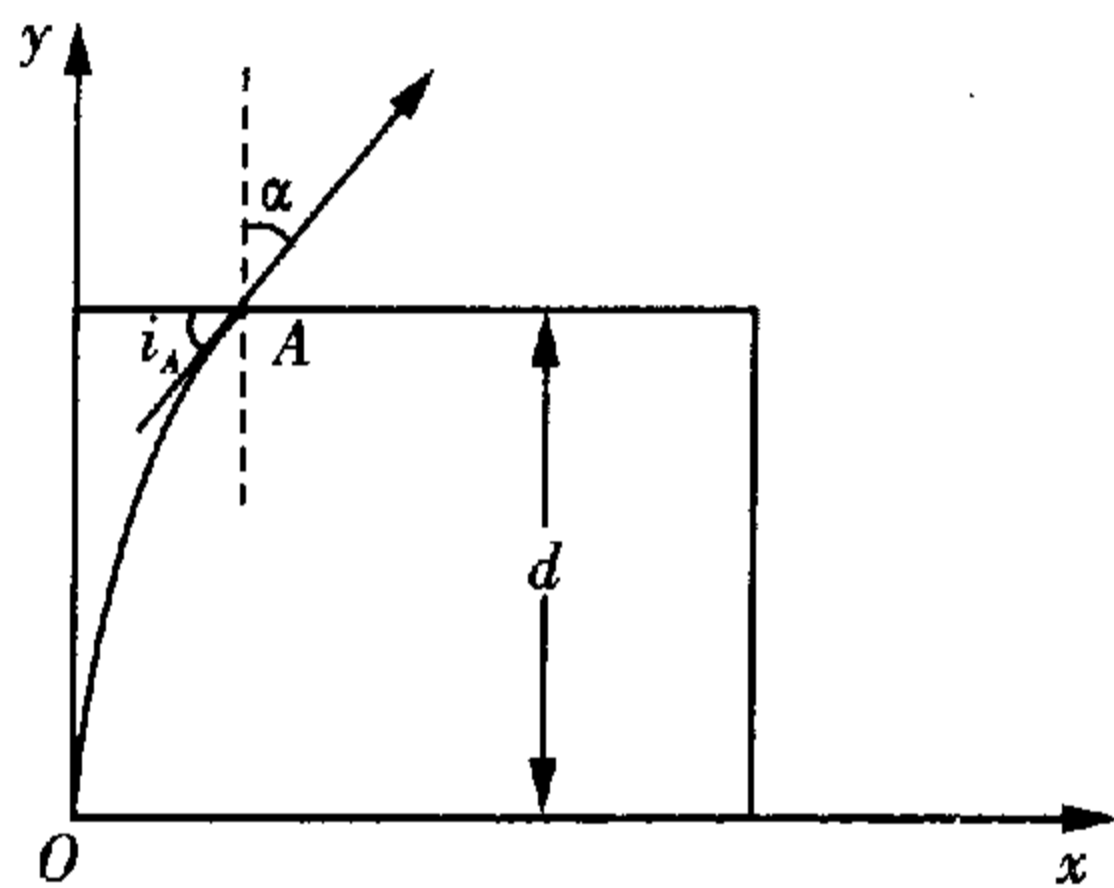
由①、②式得

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \quad ③$$

方法与技巧 求解本题时先要理解,从 S 发出的向右的光线只当经筒壁反射后反射光线能进入球的右方时,这些光线才不会落在球上被吸收. 为了找出这些光线,如图 14-4,可先画出 S 经管壁反射形成的虚像点 S' ,则 $S'M$ 和 $S'N$ 之间的光线都能进入球的右方. 从图 14-4 还可以直观地看出, r 越大,进入球的右方的光线就越多,如果 r 的大小恰能使 $S'N$ 与 $S'M$ 重合,如图 14-5,则 r 就是所要求的筒的内半径的最大值. 另外,有关的几何知识也要能够熟练运用.

例 2 有一块两面平行的透明板,其厚度为 d ,折射率按下式变化:

$$n_x = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}}$$



一束光自 O 点由空气中垂直射入平行板内,并从 A 点以角 α 射出,如图 14-6 所示. 已知 $n_0 = 1.2$, $r = 13 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$. 试求平板的厚度 d .

图 14-6

解析 初看起来,本题似乎难于下手. 我们可以遵循以下的思路来寻求解题的途径:先分析光线在板内的轨迹特征,由此轨迹确定 A 点的空间位置及光线在该点的入射方向,再由 A 点处光线的折射关系建立有关的方程来求解.

我们先分析一下根据本题介质分布情况而建立的一个特殊模型. 设有折射率不同的几层均匀介质,其层间的分界面互相平行,又设有光线依次进入各层介质,如图 14-7 所示. 其中各层介质的折射率分别为 n_1, n_2, n_3, \dots 光线与分界面法线的夹角分别为 i_1, i_2, i_3, \dots 由折射定律可以得到

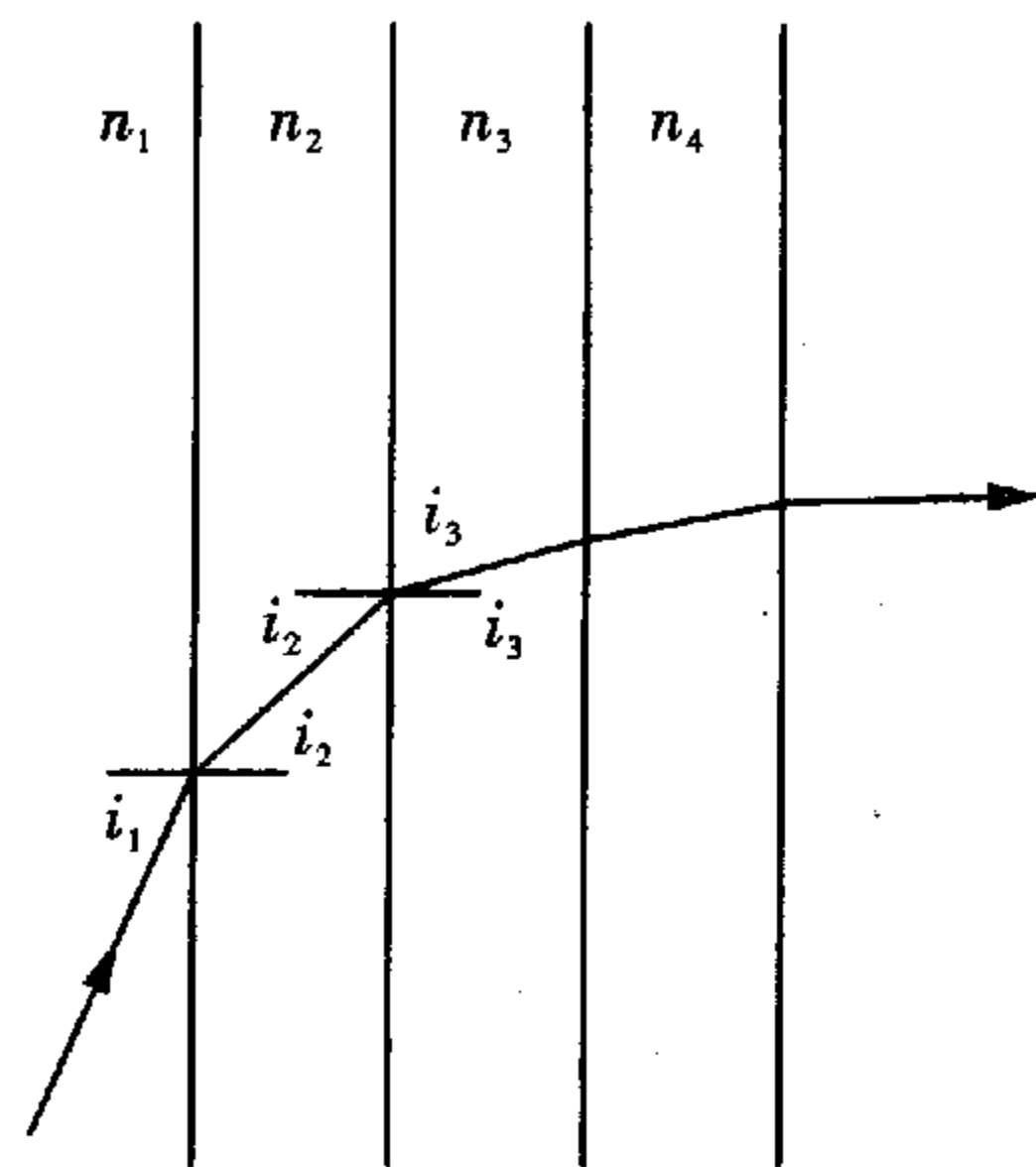


图 14-7

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

即 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

同理可得 $n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$

显然有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots = \text{常数}$$

将上述结论用于本题,可将本题的介质分布看成是层数无限多、层厚趋于零的情况,故仍有

$$n_x \sin i_x = \text{常数}$$

由于 $x=0$ 时,

$$n_x = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}} = n_0$$

又此时 $i_0 = 90^\circ$, $\sin i_0 = 1$, 故上式中的常数即为 n_0 , 则上式变为

$$n_x \sin i_x = n_0$$

将 n_x 的表达式代入上式, 即得

$$\sin i_x = 1 - \frac{x}{r}$$

由图 14-8 可见, 上式表示的是以点 $(r, 0)$ 为圆心, 以 r 为半径的圆的方程, 亦即说明光线在此介质中是沿此圆弧传播的.

光线自题给的 A 点由平板中射入空气中时, 应满足的方程是 (注意此时的介质分界面与 x 轴平行, 而讨论光在平板内传播时, 分层介质的分界面则与 x 轴垂直)

$$\sin \alpha = n_A \sin(90^\circ - i_A)$$

由于

$$n_A = \frac{n_0}{1 - \frac{x_A}{r}}$$

又注意到 A 点在前述的圆周上, 故有

$$\sin(90^\circ - i_A) = \cos i_A = \frac{\sqrt{r^2 - (r - x_A)^2}}{r}$$

联立上述三式可解得

$$\sin \alpha = \frac{n_0}{r - x_A} \sqrt{2rx_A - x_A^2}$$

将题中的已知数值代入上式即可解得

$$x_A = 1 \text{ cm}$$

故平板的厚度为

$$d = y_A = \sqrt{r^2 - (r - x_A)^2} = 5 \text{ cm}$$

方法与技巧 本题属光在非均匀介质中的传播问题. 求解此类问题的关键是利用微元分析法, 即根据折射率分布的对称性将介质分成无限多薄层, 对每一薄层, 可视为均匀介质, 即每一薄层的折射率可视为不变, 从而对光在两相邻薄层分界面上的折射可以应用折射定律, 由此可以导出有关的方程. 光在非均匀介质中的传播一般分为两类问题: 一是已知折射率的分布, 求光线的传播轨迹; 二是已知光线的传播轨迹, 求介质折射率的分布. 本题属前一类问题. 求解本题的关键是先求出光线的传播轨迹, 在此基础上, 其他电像问题均可迎刃而解.

例 3 在 xOy 平面内分布着某种透明光学材料, 已知折射率分布 $n = n(r)$, r 为点到原点的距离. 在距原点 r_0 处的 A 点有一点光源, 若从此点光源发出的光在材料中沿以 O 为焦点的圆锥曲线传播, 求折射率的分布规律 $n(r)$, 已知 $n(r_0) = n_0$.

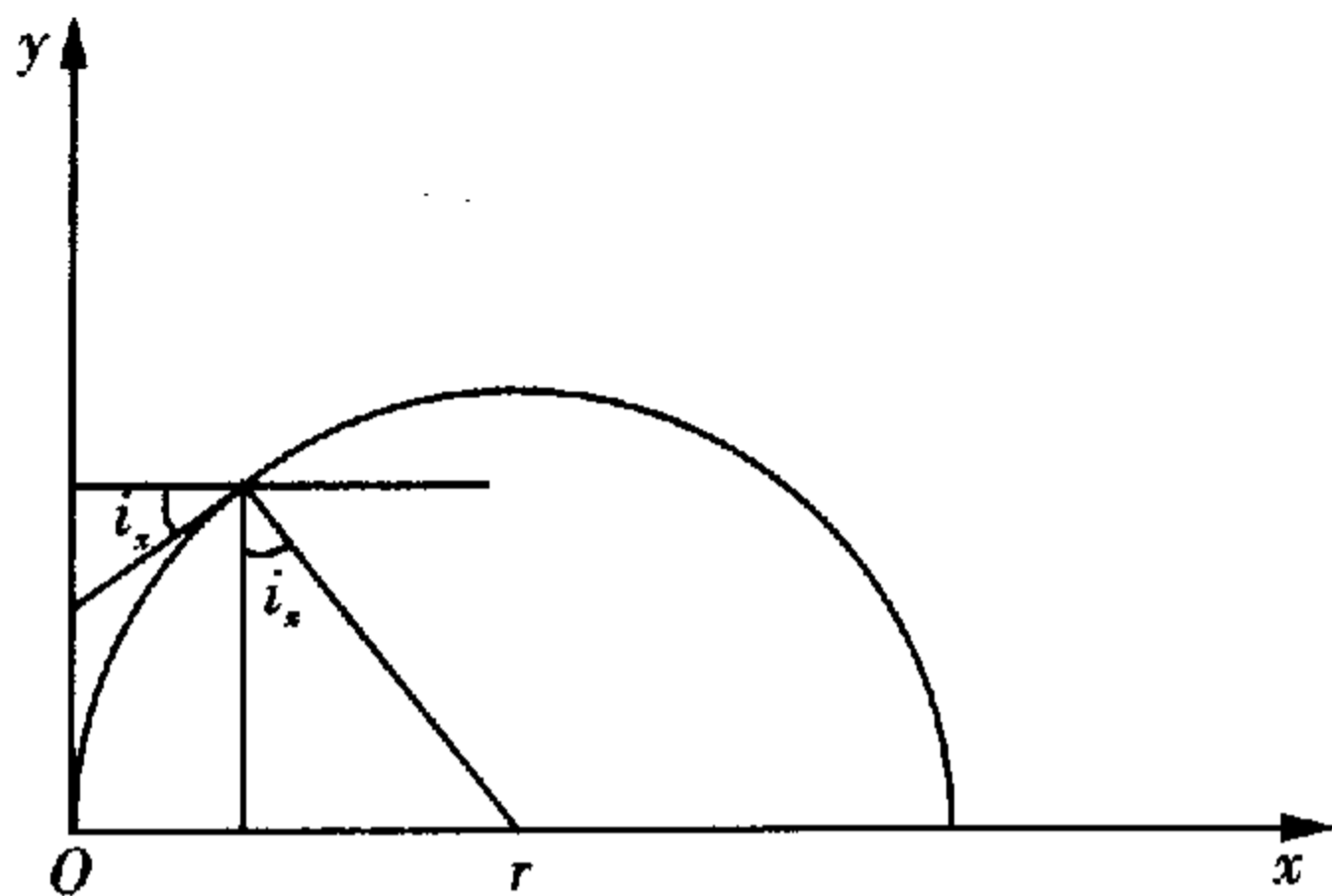


图 14-8

解析 本题属光在非均匀媒质中的传播问题,已知光线的传播轨迹,求折射率的分布,我们仍采用微元分析法来求解.

根据对称性,采用极坐标比直角坐标将更为方便.我们以 O 为极坐标原点,以 x 轴为极轴建立极坐标.将平面以极点为中心,分成一个个同心薄圆环,圆环的宽度 dr 都趋于零,如图 14-9 所示.在各薄层分界处,应用折射定律,有

$$n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i'_0$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i'_1$$

$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i'_2$$

...

根据正弦定理,又有

$$\frac{r_1}{\sin i'_0} = \frac{r_0}{\sin i_1}$$

$$\frac{r_2}{\sin i'_1} = \frac{r_1}{\sin i_2}$$

$$\frac{r_3}{\sin i'_2} = \frac{r_2}{\sin i_3}$$

...

由以上各式可以得出

$$r_0 n_0 \sin i_0 = r_1 n_1 \sin i_1 = r_2 n_2 \sin i_2 = r_3 n_3 \sin i_3 = \dots$$

即 $rn \sin i = \text{常数}$ ①

如果我们进一步设轨迹方程为 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \varphi}$ ②

式中, e 为离心率, p 是极点(焦点)到准线的距离.当 $e < 1$ 时为椭圆, $e > 1$ 时为双曲线, $e = 1$ 时为抛物线.

由①、②两式即可求出 $n(r)$ 的表达式,但需要用到较高深的数学知识,我们不准备这样做,我们可以采用类比的方法来进一步求解本题.本题光线的轨迹为圆锥曲线使我们联想到,经典力学中,在平方反比引力下质点运动的轨迹也是以力心为焦点的圆锥曲线,二者之间一定存在着某种联系.

平方反比引力下质点的运动满足角动量守恒和机械能守恒两个定律,其中角动量守恒定律的表达式为 $\vec{r} \times m \vec{v} = \text{常矢量}$,其大小 $rmv \sin(\vec{r}, \vec{v}) = \text{常数}$,与本题解中的①式形式上完全相同,可见折射率 n 类比于动量 mv .

将 n 类比于 mv ,则 n^2 类比于动能 $T = \frac{1}{2m}(mv)^2$.由机械能守恒定律,在平方反比引力下质点运动的动能为

$$T = E - u(r) = T_0 + u(r_0) - u(r)$$

式中,总能量 E 为常数, $E = T_0 + u(r_0)$,势能函数为

$$u(r) = -\frac{k}{r}, (k \text{ 为常数})$$

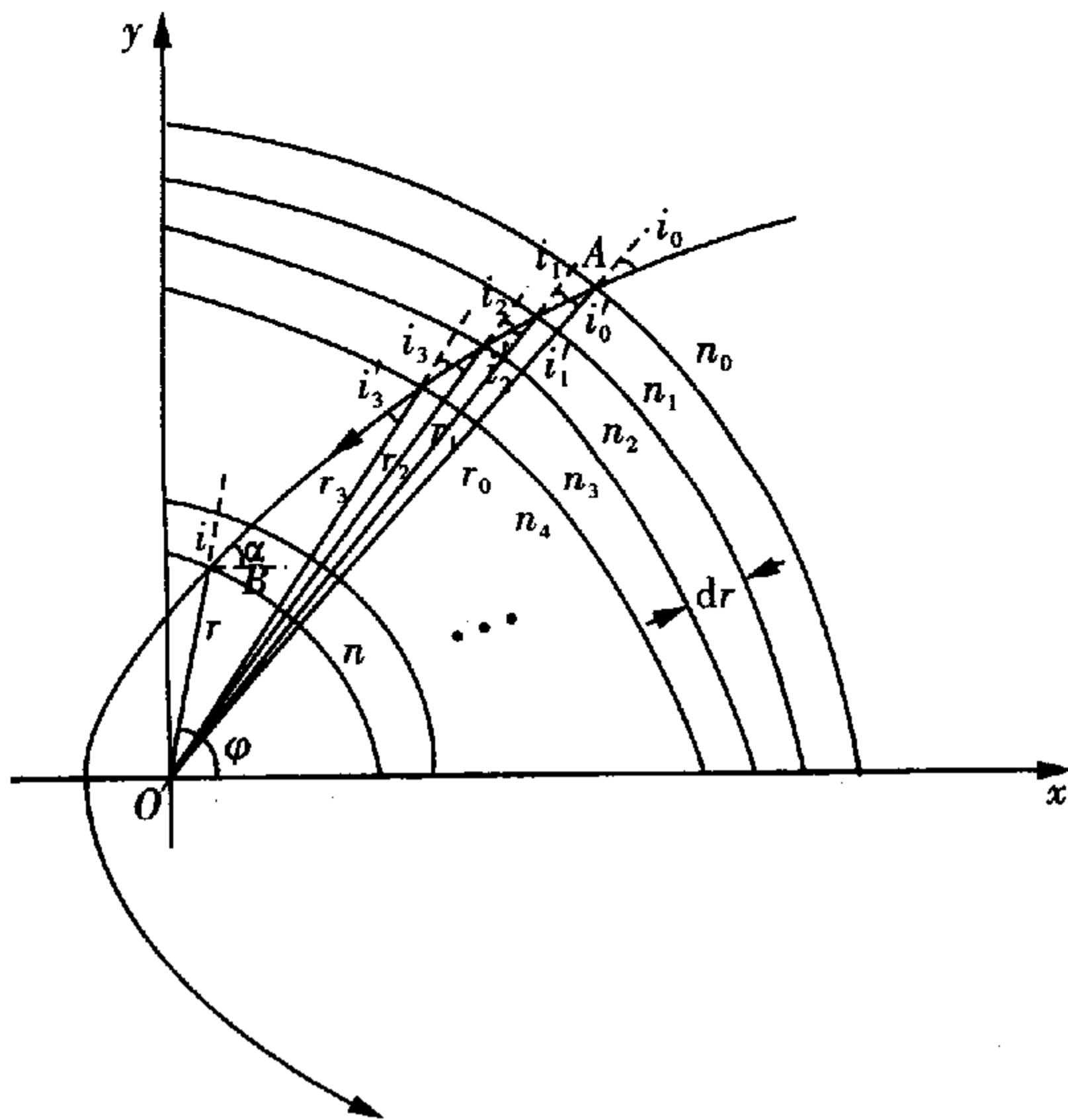


图 14-9

所以,

$$T = T_0 + k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

于是类比得到

$$n^2 = n_0^2 + k' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), k' \text{ 为常数.}$$

故

$$n = n_0 \sqrt{1 + \frac{k'}{n_0^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

令 $a = \frac{k'}{n_0^2}$, 则

$$n = n_0 \sqrt{1 + a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

即为所求. 式中常数 a 可由圆锥曲线的具体形式②式确定, 其结果为

$$a = \frac{2ep}{e^2 - 1 + \frac{2ep}{r_0}}$$

方法与技巧 求解本题的关键是找到①式, 即 $rnsini = \text{常数}$. 从解题过程可以看出, 根据所给问题的对称性, 采用极坐标, 才能在微元分析法的基础上找到这一不变量. 另外, 类比法的应用是求解本题的一个亮点, 避免了复杂的数学计算, 有助于把握物理规律, 开拓读者思维.

例 4 普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝, 由具有圆形截面的纤芯 A 和包层 B 组成, B 的折射率小于 A 的折射率, 光纤的端面与圆柱体的轴垂直, 由一端面射入的光在很长的光纤中传播时, 在纤芯 A 和包层 B 的分界面上发生多次全反射. 现在利用普通光纤测量流体 F 的折射率. 实验方法如下: 让光纤的一端(出射端)浸在流体 F 中, 令与光纤轴平行的单色平行光束与凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心 O , 经端面折射进入光纤, 在光纤中传播. 由 O 点出发的光束为圆锥形, 已知其边缘光线和轴的夹角为 α_0 , 如图 14-10 所示. 最后光从另一端面出射进入流体 F . 在距出射端面 h_1 处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏 D , 在 D 上出现一圆形光斑, 测出其直径为 d_1 , 然后移动光屏 D 至距光纤出射端面 h_2 处, 并测出此时光屏上圆形光斑直径为 d_2 , 如图 14-11 所示.

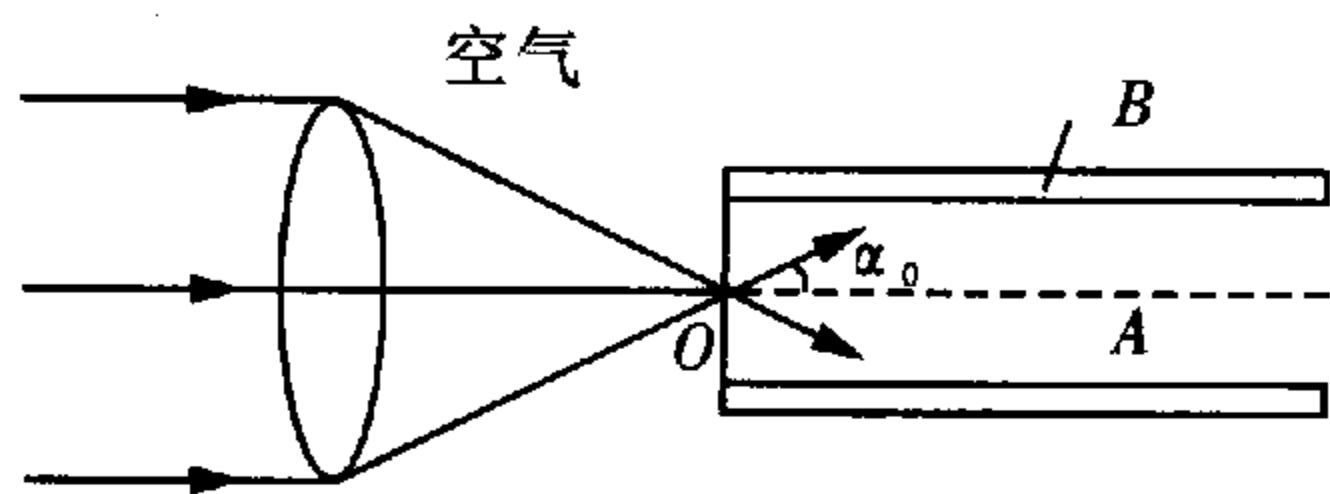


图 14-10

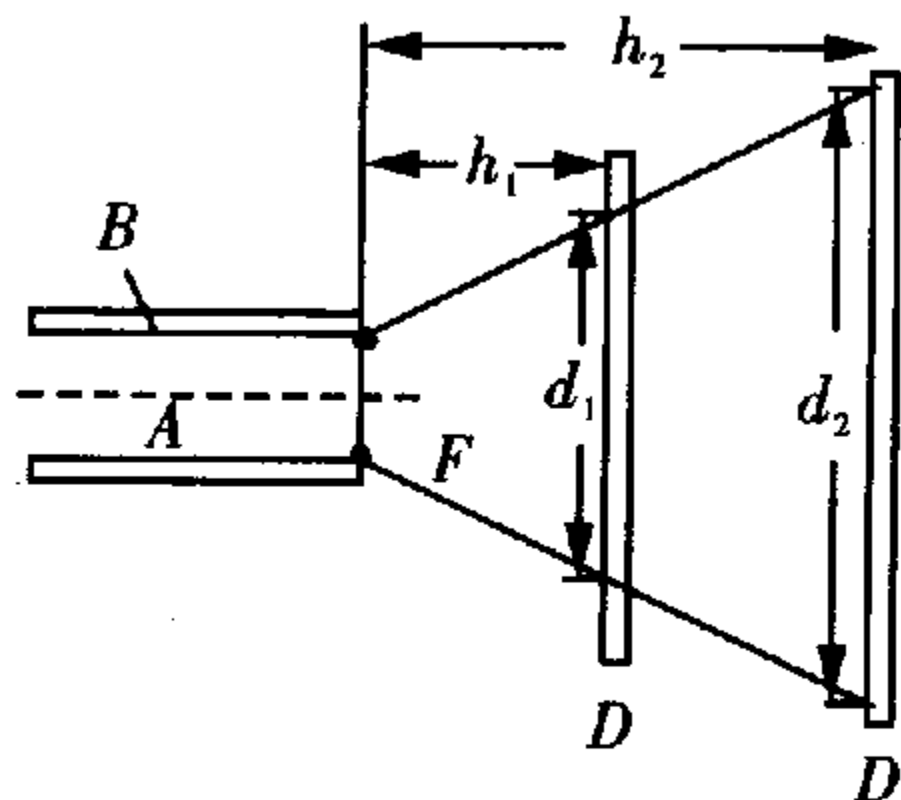


图 14-11

- (1) 若已知 A 和 B 的折射率分别为 n_A 和 n_B , 求被测流体 F 的折射率 n_F 的表达式.
- (2) 若 n_A 、 n_B 和 α_0 均为未知量, 如何通过进一步的实验以测出 n_F 的值?

解析 (1) 由于光纤内所有光线都从轴上的 O 点出发, 在光纤中传播的光线都与轴相交, 位于通过轴的纵剖面内, 图 14-12 为纵剖面内的光路图. 设由 O 点发出的与轴的夹角为 α 的光线, 射至 A, B 的分界面的人射角为 i , 反射角也为 i , 该光线在光纤中多次反射时的入射角均为 i , 射至出射端面时的人射角为 α , 若该光线折射后的折射角为 θ , 则由几何关系和折射定律可得

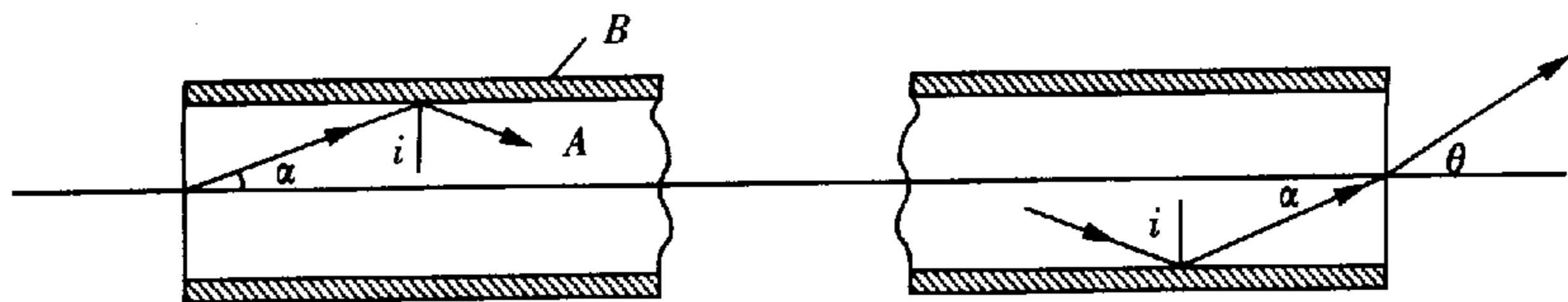


图 14-12

$$i + \alpha = 90^\circ$$

$$n_A \sin \alpha = n_F \sin \theta$$

当 i 大于全反射临界角 i_c 时将发生全反射, 没有光能损失, 相应的光线将以不变的光强射向出射端面. 而 $i < i_c$ 的光线则因在发生反射时有部分光线通过折射进入 B , 反射光强随着反射次数的增多而越来越弱, 以致在未达到出射端面之前就已经衰减为零了. 因而能射向出射端面的光线的 i 的数值一定大于或等于 i_c , i_c 的值由下式决定:

$$n_A \sin i_c = n_B$$

与 i_c 对应的 α 值为

$$\alpha_c = 90^\circ - i_c$$

当 $\alpha_0 > \alpha_c$ 时, 即 $\sin \alpha_0 > \sin \alpha_c = \cos i_c = \sqrt{1 - \sin^2 i_c} = \sqrt{1 - (n_B/n_A)^2}$ 时, 或 $n_A \sin \alpha_0 > \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$ 时, 由 O 发出的光束中, 只有 $\alpha \leq \alpha_c$ 的光线才满足 $i \geq i_c$ 的条件, 才能射向端面, 此时出射端面处 α 的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_c = 90^\circ - i_c$$

若 $\alpha_0 < \alpha_c$, 即 $n_A \sin \alpha_0 < \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$ 时, 则由 O 发出的光线都能满足 $i > i_c$ 的条件, 因而都能射向端面, 此时出射端面处 α 的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_0$$

端面处入射角 α 最大时, 折射角 θ 也达最大值, 设为 θ_{\max} , 由折射定律可知

$$n_F \sin \theta_{\max} = n_A \sin \alpha_{\max}$$

综合以上分析可得, 当 $\alpha_0 < \alpha_c$ 时

$$n_F = \frac{n_A \sin \alpha_0}{\sin \theta_{\max}}$$

当 $\alpha_0 \geq \alpha_c$ 时

$$n_F = \frac{n_A \cos i_c}{\sin \theta_{\max}} = \frac{\sqrt{n_A^2 - n_B^2}}{\sin \theta_{\max}}$$

θ_{\max} 的数值可由图 14-13 中的几何关系求得为

$$\sin \theta_{\max} = \frac{(d_2 - d_1)/2}{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}$$

于是 n_F 的表达式为

$\alpha_0 < \alpha_c$ 时

$$n_F = n_A \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{(d_2 - d_1)/2}$$

$\alpha_0 \geq \alpha_c$ 时

$$n_F = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{(d_2 - d_1)/2}$$

(2) 可将输出端介质改为空气, 光源保持不变, 按同样步骤再做一次测量, 可测得 h'_1, h'_2, d'_1, d'_2 , 这里打撇号的量与前面未打撇号的量意义相同. 已知空气的折射率等于 1, 故有

$\alpha_0 < \alpha_c$ 时

$$1 = n_A \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}}{(d'_2 - d'_1)/2}$$

$\alpha_0 \geq \alpha_c$ 时

$$1 = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}}{(d'_2 - d'_1)/2}$$

将以上两式分别与前述 n_F 的两个表达式相除, 均得

$$n_F = \frac{(d'_2 - d'_1) \sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{(d_2 - d_1) \sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}}$$

此结果适用于 α_0 为任何值的情况.

方法与技巧 求解本题主要应弄清物理过程, 光纤通信是利用全反射将光能从光纤的一端传输到另一端的. 从光纤端面射出进入流体的光线其最大折射角 θ_{\max} 决定圆形光斑在毛玻璃屏 D 上的直径大小. 此外, 应仔细分析题给条件, 题中未指明光纤中圆锥形光束的边缘光线和轴的夹角 α_0 是否大于临界角 α_c , 因此, 应区分 $\alpha_0 < \alpha_c$ 和 $\alpha_0 \geq \alpha_c$ 两种情况分别讨论.

例 5 有一种高脚酒杯, 如图 14-14 所示. 杯内底面为一凸起的球面, 球心在顶点 O 下方玻璃中的 C 点, 球面的半径 $R = 1.50 \text{ cm}$, O 到杯口平面的距离为 8.0 cm . 在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片, P 点距 O 点 6.3 cm . 这种酒杯未斟酒时, 若在杯口处向杯底方向观看, 看不出画片上的景物, 但如果斟了酒, 再在杯口处向杯底方向观看, 将看到画片上的景物. 已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.56$, 酒的折射率 $n_2 = 1.34$. 试通过分析计算与论证解释这一现象.

解析 把酒杯放平, 分析成像问题.

(1) 未斟酒时, 杯底凸球面的两侧介质的折射率分别为 n_1 和 $n_0 = 1$. 在图 14-15 中, P 为画片中心, 由 P 发出经过球心 C 的光线 PO 经过顶点不变方向进入空气中; 由 P 发出的另一近轴光线 PA 在 A 处折射后与轴交于 P' 点, P' 点即为 P 的像点.

采用我们前面规定的符号法则, 物像距公式为

$$\frac{n_0}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_0 - n_1}{R}$$

以 $n_0 = 1, n_1 = 1.56, s = -6.3 \text{ cm}, R = -1.50 \text{ cm}$ 代入, 求得 $S' = 7.9 \text{ cm}$.

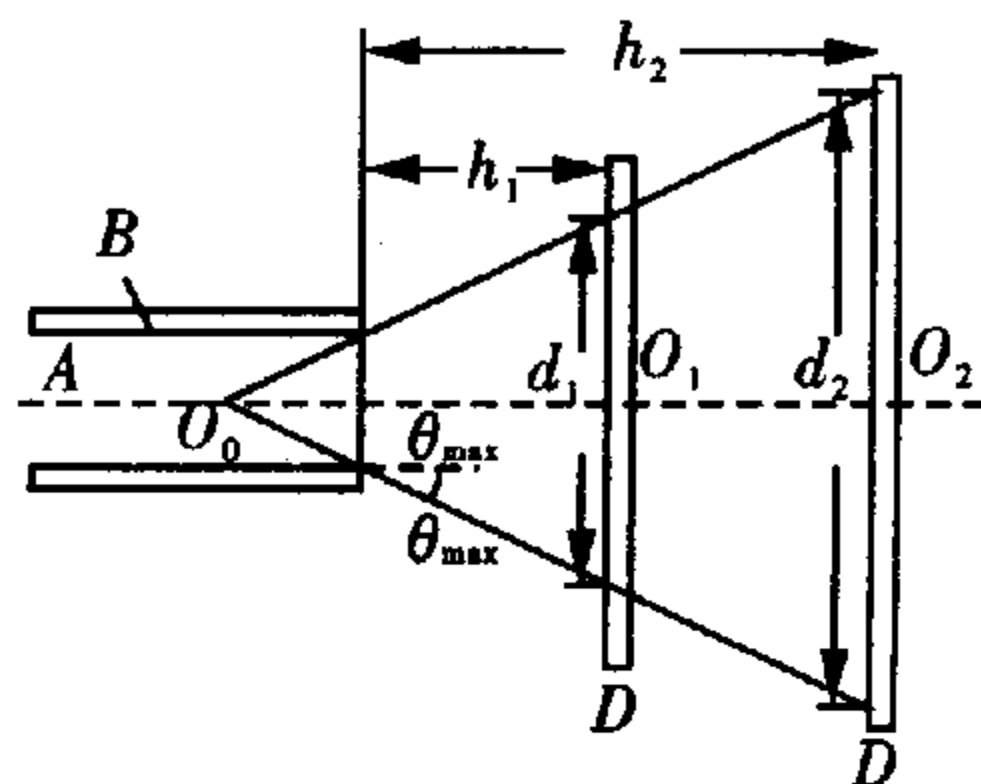


图 14-13

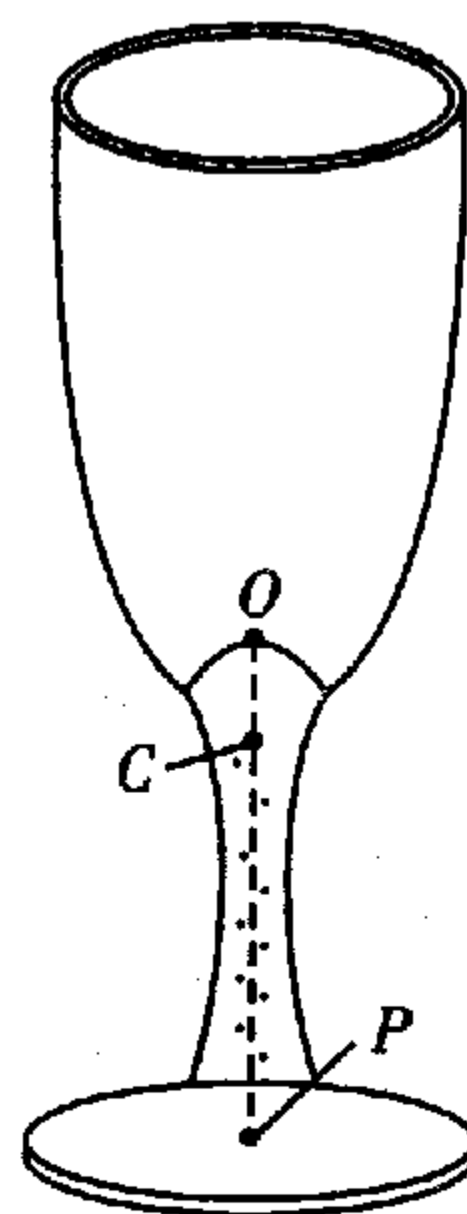


图 14-14

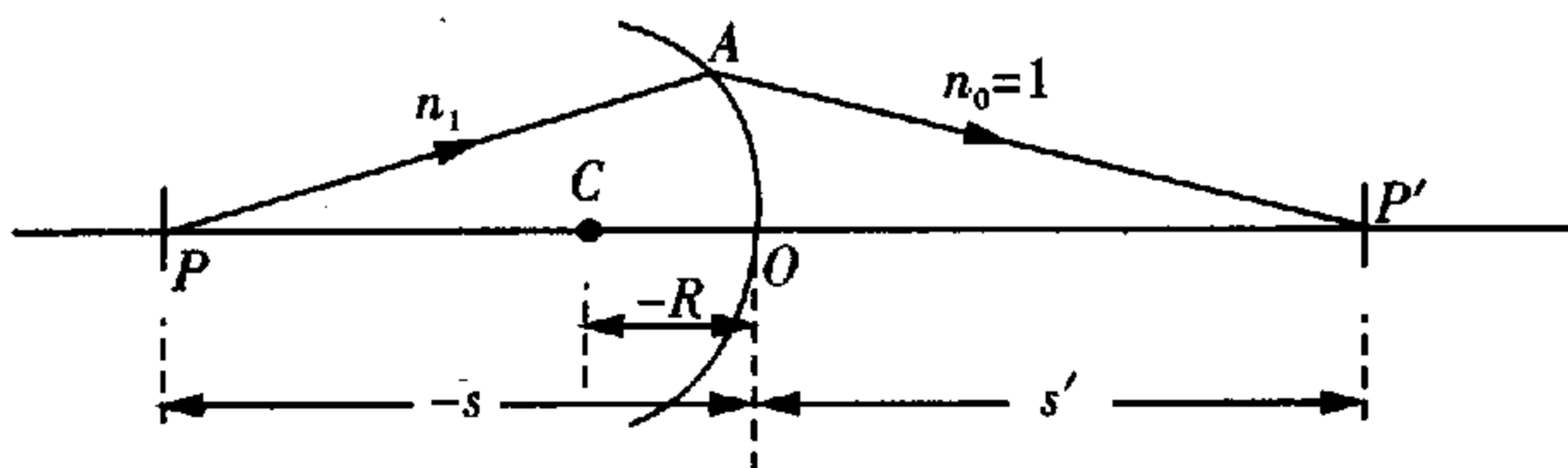


图 14-15

由此可见,未斟酒时,画片上景物所成实像在杯口距 O 点 7.9 cm 处. 已知 O 到杯口平面的距离为 8.0 cm , 当人眼在杯口处向杯底方向观看时,该实像离人眼太近,所以看不出画片上的景物.

(2) 斟酒后,杯底凸球面两侧介质分别为玻璃和酒,折射率分别为 n_1 和 n_2 , 如图 14-16 所示,此时,以 $n_1 = 1.56, n_2 = 1.34, s = -6.3\text{ cm}, R = -1.50\text{ cm}$ 代入物像距公式

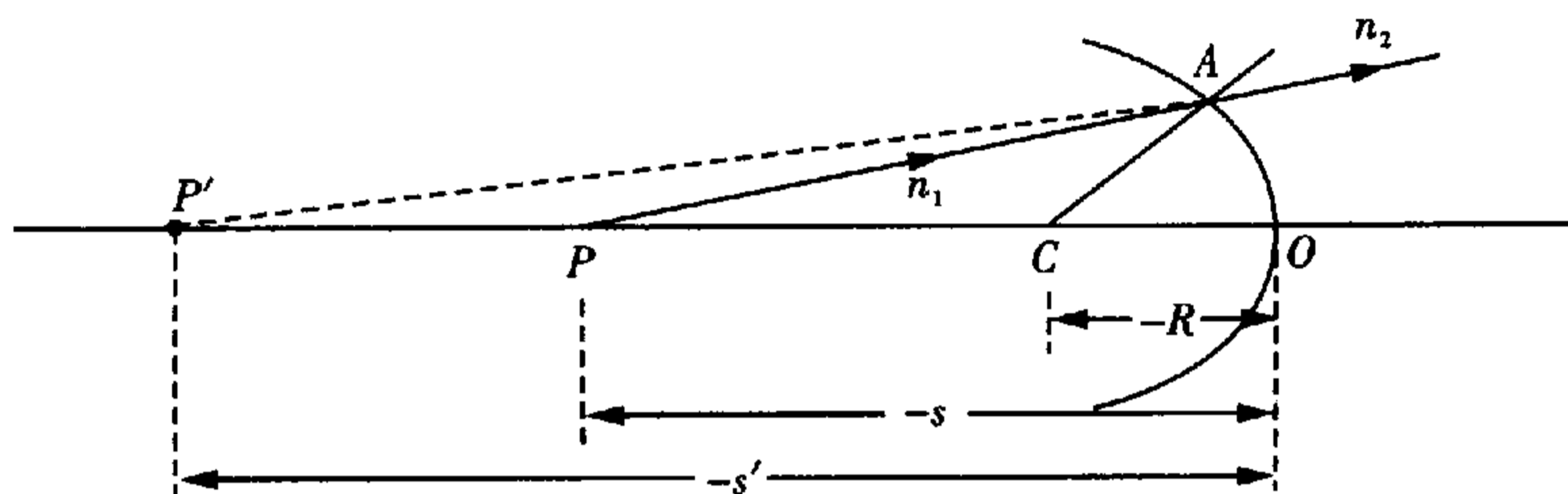


图 14-16

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

解得 $s' = -13\text{ cm}$, P' 为 P 点的虚像点,它位于 O 点左方 13 cm 处.

由此可见,斟酒后画片上景物成虚像于 P' 处,距 O 点 13 cm ,即距杯口 21 cm . 虽然该虚像还要因酒液平表面的折射而向杯口处拉近一段距离,但仍然离杯口处足够远,所以人眼在杯口处向杯底方向观看时,可以看到画片上的虚像.

方法与技巧 本题紧密联系日常生活中的光学现象,粗看起来似乎不易求解,其实是一个简单的单折射球面近轴成像问题. 只要正确运用符号法则于单球面折射成像的物像距公式,求解过程非常简捷明了.

例 6 在折射率为 n 的介质 A 中有一半径为 R 的球形气泡,气体的折射率为 n_0 . 现在在气泡中再放一个与气泡同心的由透明介质 B 构成的球,并令一均匀平行光束射向气泡.

(1) 如果任意一条在介质 A 中射向气泡表面的人射光线在通过各介质界面时的人射角和折射角都满足 $\sin\theta \approx \theta$ 的条件,且该光线再进入介质 A 时能沿原入射光线方向行进,如图 14-17 所示,求介质 B 的折射率 n' 和 B 球的半径 R' 必须满足的关系式.

(2) 如果两球面间的介质不是气体而是一种透明液体(其折射率仍用 n_0 表示),并要求任何入射角和折射角的数值都不大于 0.1 弧度,则符合此条件的入射光束占射至外球面上的光束的百分比为多少?

解析 (1) 图 14-18 中取入射光线中的一根任意的入射光线. 根据题设条件,出射光线与入射光线在同一直线上,通过球心 O 作一与此入射光线平行的直线. 由于入射光线和出射光线是左右对

称的,光学系统(球形气泡和球形介质 B) 又是左右对称的,在 B 球中的光线一定与入射光线平行,因而光路图如图 14-18 所示.

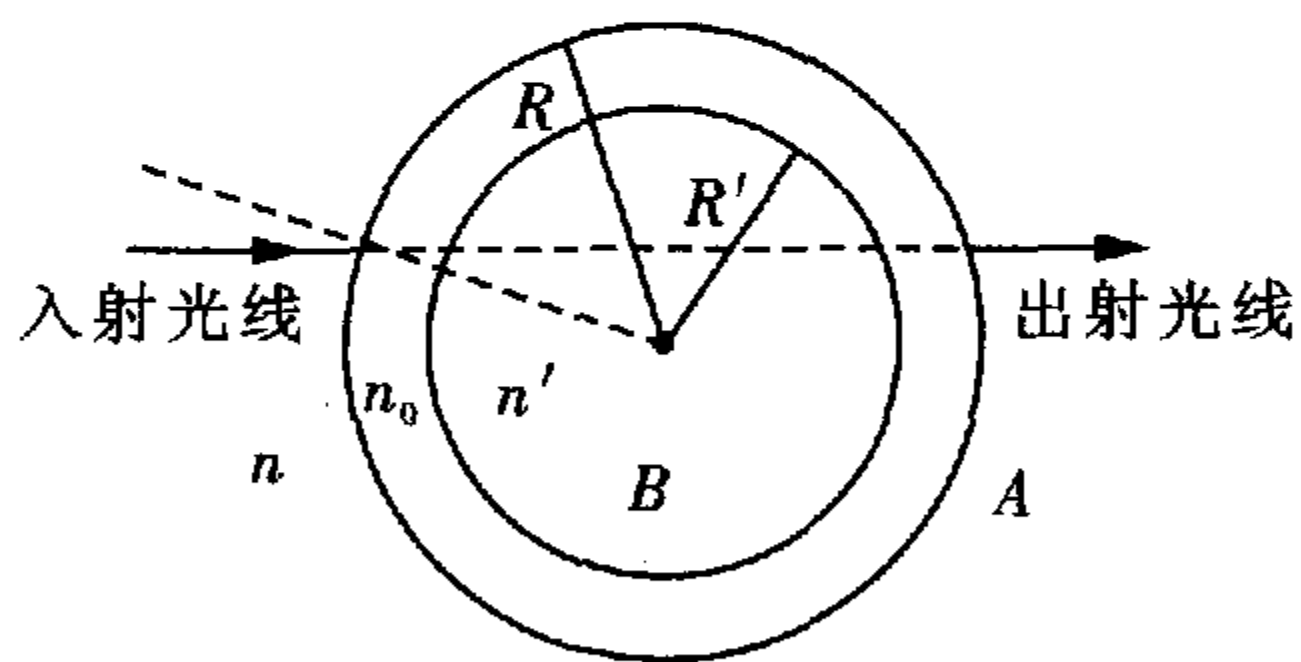


图 14-17

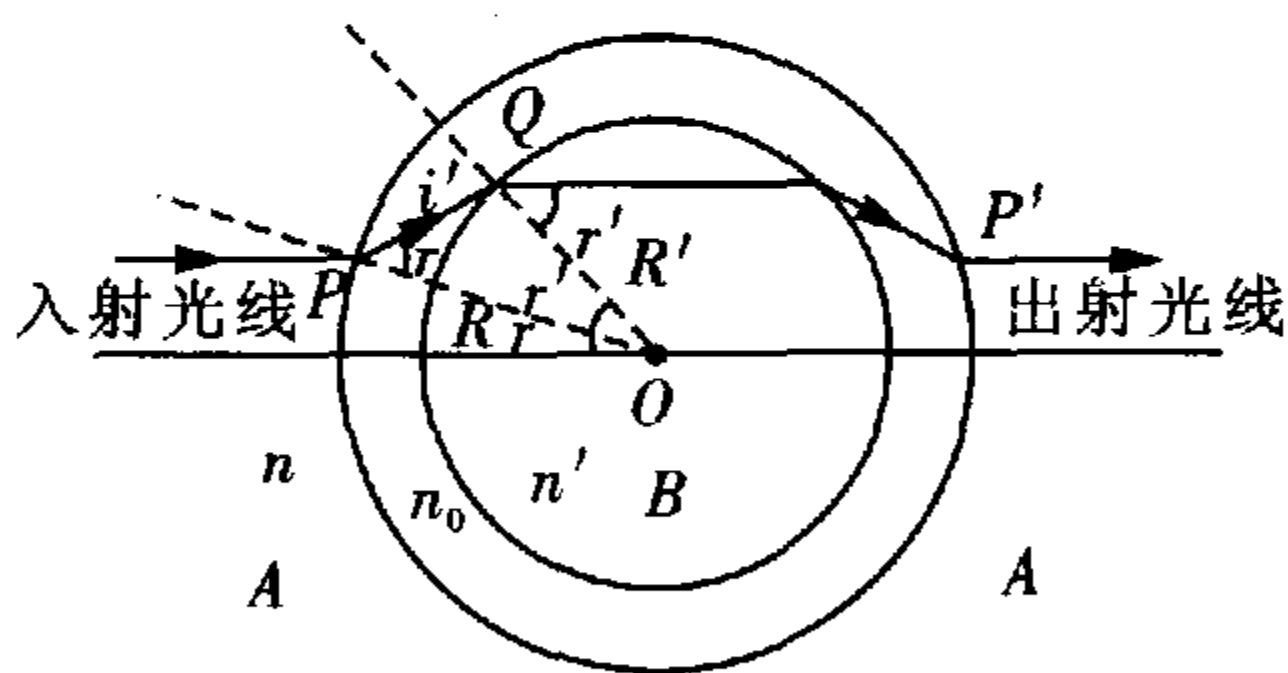


图 14-18

用 i 和 r 分别表示在 A 与气泡的界面上的人射角和折射角, i' 和 r' 分别表示在气泡和 B 球的界面上的人射角和折射角,则根据折射定律和 $\sin\theta \approx \theta$ 的近似,得

$$ni = n_0 r \tag{1}$$

$$n_0 i' = n' r' \tag{2}$$

对 ΔQPO 应用正弦定律,可得

$$i' = \frac{R}{R'} r = \frac{n}{n_0} \frac{R}{R'} i \tag{3}$$

由几何关系得

$$i' = r + r' - i \tag{4}$$

由以上四式可解得 n' 和 R' 应满足的关系式为

$$n' = \frac{n_0 n}{n - (R'/R)(n - n_0)} \tag{5}$$

此关系式与 i 无关,即满足题设要求的任一入射光线经过 4 次折射后都将沿原方向进入介质 A ,就像气泡和 B 球不存在似的.

(2) i, r, i', r' 的数值各不相同,只要其中数值最大的角满足 $\theta = 0.1 \text{ rad}$ 的要求,其他角一定满足 $\theta < 0.1 \text{ rad}$ 的要求.至于哪个角数值最大,有下列两种情况:

(a) 若 $n_0 < n$,光路图如图 14-18 所示,显然 i' 最大.

$$i' = 0.1 \text{ rad}$$

由③式可知,与之相应的 i 的数值为

$$i = \frac{n_0 R'}{n R} \times 0.1 \text{ rad}$$

符合条件的人射平行光束的截面积为

$$A = \pi(Ri)^2 = 0.01 \pi \left(\frac{n_0 R'}{n} \right)^2$$

射至外球面的平行光束的截面积 $A_0 = \pi R^2$,故所求百分比为

$$\frac{A}{A_0} = 0.01 \left(\frac{n_0 R'}{n R} \right)^2 \times 100\%$$

(b) 若 $n_0 > n$,光路图如图 14-19 所示,由图可看出 r' 最大,由②、③式可得.

$$r' = \frac{n_0 i'}{n'} = \frac{n_0 n}{n' n_0} \frac{R}{R'} i$$

令 $r' = 0.1 \text{ rad}$, 则有 $i = \frac{n'R'}{nR} \times 0.1 \text{ rad}$

故所求百分比为

$$\frac{A'}{A_0} = 0.01 \left(\frac{n'R'}{nR} \right)^2 \times 100\%$$

将⑤式代入得

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A_0} &= 0.01 \left[\frac{n_0 R' / R}{n - (R'/R)(n - n_0)} \right]^2 \\ &= 0.01 \left[\frac{n_0 R'}{n(R - R') + n_0 R'} \right]^2 \times 100\% \end{aligned}$$

方法与技巧 求解本题应主要抓住以下两点:一是 $\sin\theta \approx \theta$ 的近轴光线条件,为应用折射定律时近似求解简化计算过程;二是光学系统的对称性及入射光线与出射光线的对称性,从而确定 B 球内光线的传播方向.当然,由于满足近轴条件,本题也可以运用单球面折射的物像距公式逐面进行计算,只要正确运用符号法则,也可以得到与⑤式相同的结果.

例 7 如图 14-20 所示,一个半径为 R 的透明材料制成的球, AB 为其一条直径, AB 两点附近的球表面透光,球表面的其他电像大部分地方均涂黑而不透光.今在球内 B 处有一个小发光泡.

(1) 在球的左侧外部 AB 直线上进行观察时,试讨论像的位置与球的折射率的关系.

(2) 若球的折射率为 n ,像在球的右侧,则小泡的像距 B 点多远?

(3) 在(2)中像的垂轴放大率为多少?

(4) 若在球的左侧贴近 A 处置一平面镜,其镜面与 AB 垂直,与球面相切,试求 n 为何值时,可使(2)中所成的虚像,再经过此系统的作用最后在球的右侧形成实像.

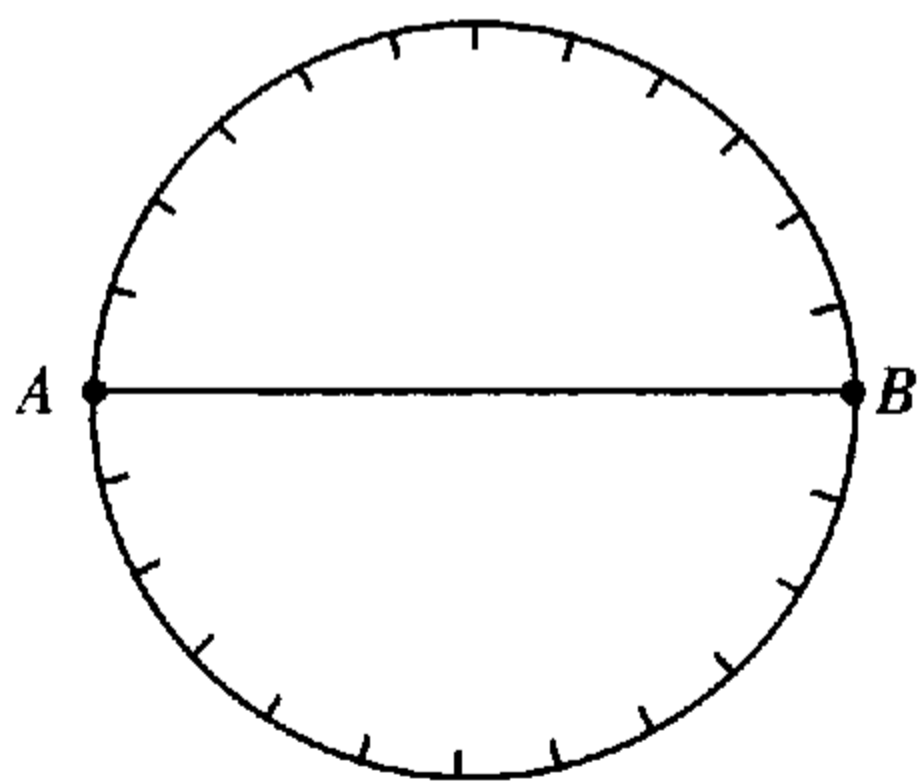


图 14-20

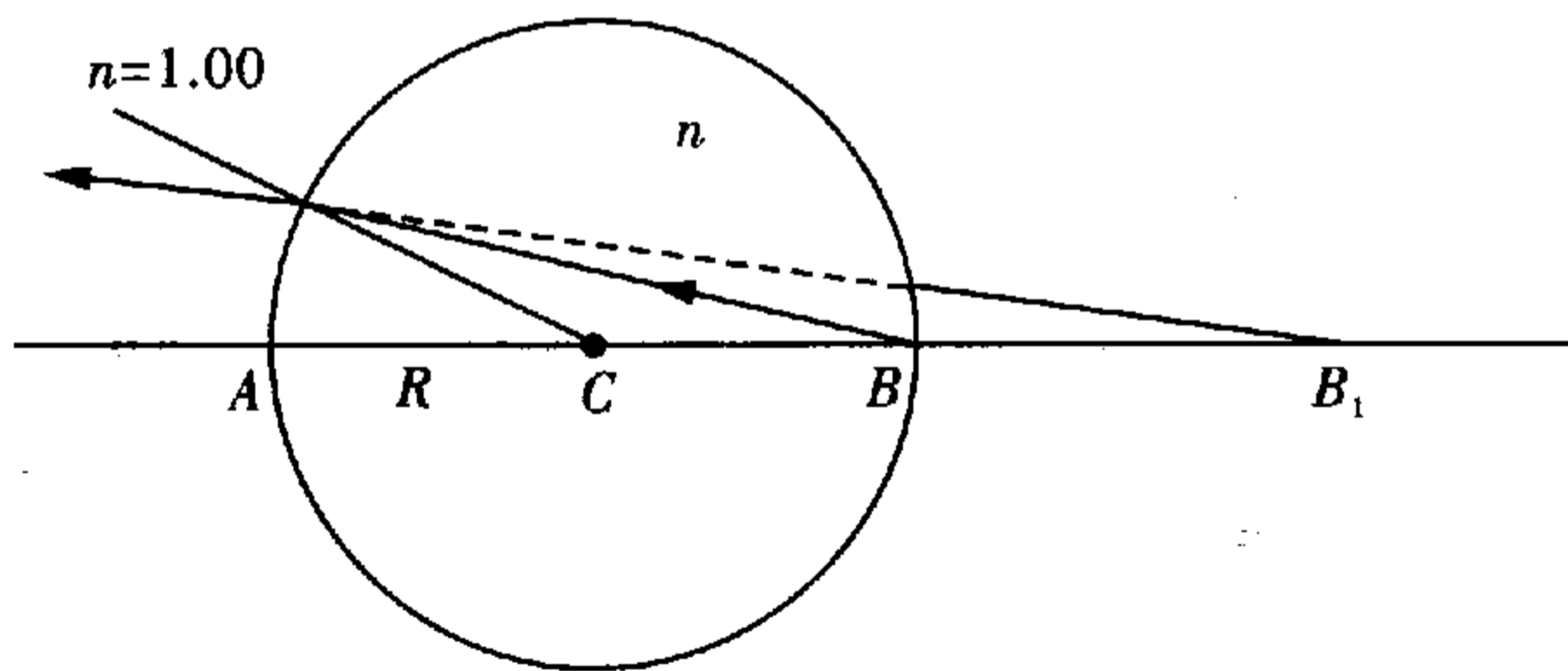


图 14-21

解析 (1) 光线自右至左,为单折射球面近轴成像问题.如图 14-21,设球的折射率为 n ,其物距为 $s = 2R$,设像距为 s' ,则由成像公式,有

$$\frac{1}{s'} - \frac{n}{2R} = \frac{1-n}{R}$$

即

$$s' = \frac{2R}{2-n}$$

由此可见,当 $n=2$ 时, $s' = \infty$,不成像(或成像于无限远处); $n > 2$ 时, $s' < 0$,成实像(在 A 点左侧); $n < 2$ 时, $s' > 0$,成虚像(在 A 点右侧),又 $n > 1$,故 $s' > 2R$,即当 $1 < n < 2$ 时,像必在 B 点右侧,如图中的 B_1 .

(2) 在 $1 < n < 2$ 时, 虚像点 B_1 离物点 B 的距离为 $\overline{BB_1} = \frac{2R}{2-n} - 2R = \frac{2n-2}{2-n}R$.

(3) 在(2)中像的垂轴放大率 $\beta = \frac{ns'}{n's} = \frac{n \cdot \frac{2R}{2-n}}{1 \cdot 2R} = \frac{n}{2-n}$.

(4) 若如图 14-22, 在 A 处置一平面镜, 则共有四次成像过程:

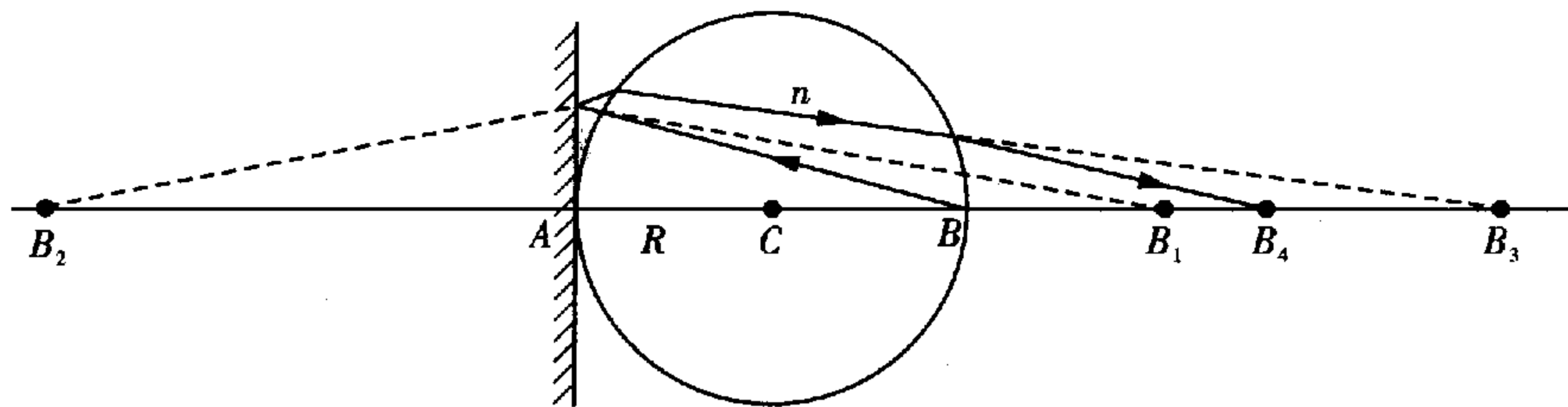


图 14-22

第一次经左半球面的折射成虚像于 B_1 , 其物距 $s_1 = 2R$, 由前面的结果知, 此时的像距 $s'_1 = \frac{2R}{2-n}$.

虚像 B_1 位于 B 点右侧的条件为 $1 < n < 2$.

第二次 B_1 经平面镜反射成像(B_2), 其物距 $s_2 = s'_1 = \frac{2R}{2-n}$, 则像距 $s'_2 = -s_2 = -\frac{2R}{2-n}$.

第三次 B_2 再经左半球面折回成像(B_3), 这时物距 $s_3 = s'_2 = -\frac{2R}{2-n}$, 由成像公式有

$$\frac{n}{s'_3} - \frac{1}{s_3} = \frac{n-1}{R}$$

由此求出 $s'_3 = \frac{2nR}{3n-4}$.

第四次 B_3 经右半球面成像(B_4), 物距 $s_4 = s'_3 - 2R = \frac{2nR}{3n-4} - 2R = \frac{(8-4n)R}{3n-4}$, 于是由

$$\frac{1}{s'_4} - \frac{n}{s_4} = \frac{1-n}{-R}$$

得到

$$s'_4 = \frac{(8-4n)R}{-n^2+8n-8}$$

按题意, 最后的像在球的右侧(实像), 这要求 $s'_4 > 0$, 即

$$\frac{2-n}{-n^2+8n-8} > 0$$

由前面已知, $1 < n < 2$, 故上式左端分子大于零, 因此有

$$-n^2+8n-8 > 0$$

其解为

$$4-2\sqrt{2} < n < 4+2\sqrt{2}$$

又已知 $n < 2$, 故取

$$n > 4-2\sqrt{2}.$$

最后得符合本题条件的 n 值为: $4 - 2\sqrt{2} < n < 2$.

方法与技巧 本题是一个光在连续几个球面界面近轴折射与反射成像问题,用逐次成像法(又叫追迹法)求解这类问题显得思路清晰、层次分明,容易把握.但在计算时应注意每次成像时的物距、像距都是从该次成像时的球面顶点算起的.另外,要特别注意符号法则的正确运用.

例 8 凸透镜后面距离 $L = 4 \text{ cm}$ (大于焦距)处放置一块垂直于主光轴的平面镜,透镜前面垂直于主光轴放一页方格纸,如图 14-23.当这页方格纸相对透镜移动两个位置时(这两个位置相距 $l = 9 \text{ cm}$),纸上得到其方格的像.试求凸透镜的焦距.

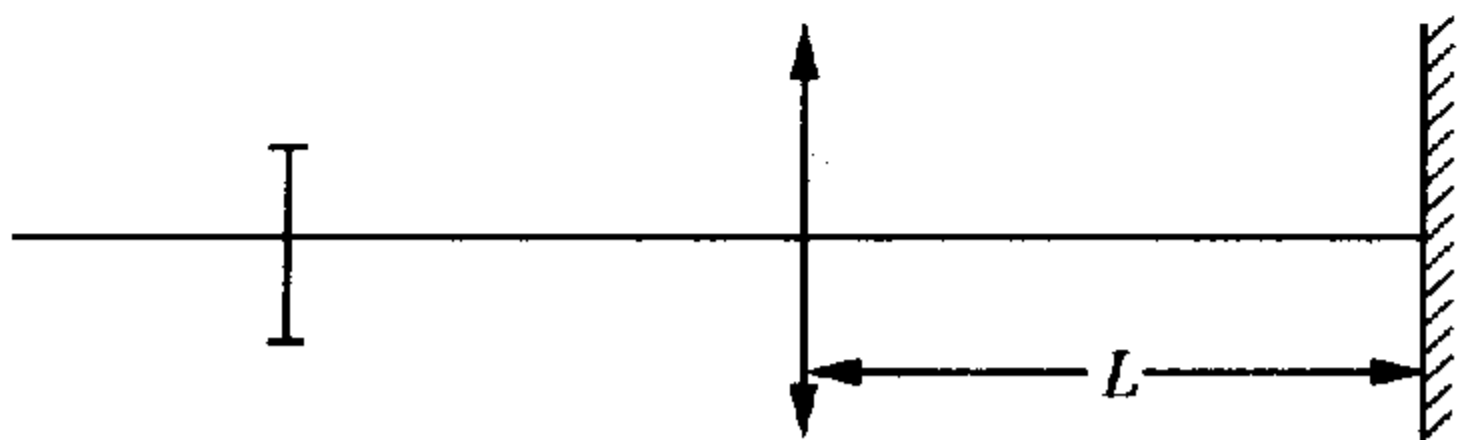


图 14-23

解析 由题可知,方格纸经系统成的每一个像都是经过三次成像过程而形成的:先经透镜折射成像,再经平面镜反射成像,光线返回后又经透镜折射成像.

设透镜焦距为 f' ,三次成像过程的物距与像距分别为 s_1, s'_1, s_2, s'_2 和 s_3, s'_3 ,利用逐次成像法由成像公式分别可以写出

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

$$s'_2 = -s_2$$

$$\frac{1}{s'_3} - \frac{1}{s_3} = -\frac{1}{f'}$$

注意到由题给条件,应有 $s_2 = s'_1 - L, s_3 = s'_2 + L$ 和 $s_3 = s_1$ (物与最后像重合),联立求解以上几个方程,求得 s_1 所满足的方程为

$$(2f' - 2L)s_1^2 + (2f'^2 - 4Lf')s_1 - 2f'^2 = 0$$

这是一个关于未知数 s_1 的一元二次方程,解得

$$s_1 = \frac{-(2f'^2 + 4Lf') \pm \sqrt{(2f'^2 - 4Lf')^2 + 4 \cdot (2f' - 2L) \cdot 2Lf'^2}}{2 \cdot (2f' - 2L)} = \frac{-(2f'^2 - 4Lf') \pm 2f'^2}{2 \cdot (2f' - 2L)}$$

所以, s_1 的两个解为

$$s_{1a} = -\frac{Lf'}{L-f'}, s_{1b} = -f'$$

s_1 具有两个解,与题中方格纸相对透镜移动两个位置时,纸上均得到方格的像相一致.按题意,

$$|s_{1a} - s_{1b}| = l$$

去掉绝对值符号后,分两种情况:

若

$$s_{1a} - s_{1b} = -\frac{Lf'}{L-f'} + f' = l$$

得 f' 所满足的方程为

$$f'^2 - lf' + Ll = 0$$

以 $l=9\text{ cm}$, $L=4\text{ cm}$ 代入, 得到

$$f^2 - 9f' + 36 = 0$$

此方程无实数解.

若

$$s_{1a} - s_{1b} = -\frac{Lf'}{L-f'} + f' = -l$$

则 f' 所满足的方程为

$$f^2 + lf' - lL = 0$$

代入数值后即

$$f^2 + 9f - 36 = 0$$

解得 $f' = 3\text{ cm}$ 或 -12 cm .

题中的透镜是凸透镜, f' 应为正值, 故舍去第二个解, 最后得

$$f' = 3\text{ cm}.$$

方法与技巧 利用物与像重合的特殊情况, 可用单透镜一次成像解此题, 将非常简捷.

显然, 一种可能的情况是, 方格纸经透镜成的像如果落在平面镜处, 则经平面镜反射后再经透镜成的像一定在方格纸上, 所以三次成像过程可以化简为透镜一次折射成像过程, 设物距为 s_1 , 则像距 $s'_1 = L = 10\text{ cm}$, 根据成像公式

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

求得

$$s_1 = -\frac{Lf'}{L-f'}$$

另一种可能的情况是, 方格纸经透镜成的像位于平面镜的曲率中心上(无限远处), 这样才能保证经透镜折射后的光被平面镜反射后沿原路返回, 再经透镜折射, 根据光路的可逆性质, 最后像必然落在方格纸上, 所以三次成像过程也可以简化为透镜一次折射成像过程. 仍设物距为 s_1 , 则像距 $s'_1 = \infty$, 由成像公式容易知道, 此时 $s_1 = -f'$.

由于 $L > f'$, 因而 $\frac{Lf'}{L-f'} > f'$, 于是由题意得到

$$(-f') - \left(-\frac{Lf'}{L-f'}\right) = l$$

即

$$f^2 + lf' - lL = 0$$

或

$$f^2 + 9f' - 36 = 0$$

解此方程并取正解得到

$$f' = 3\text{ cm}$$

显然, 利用这种简捷方法解题要求读者对有关知识内容有较深的理解和思路灵活才行. 应提醒读者注意的是: 初学者应掌握常规的解题技巧, 因为并非所有的题都有巧法.

例 9 如图 14-24 所示, L_1 和 L_2 为两个共轴的薄凸透镜, OO' 为其主轴. L_1 的焦距 $f'_1 = 10\text{ cm}$, 孔径为 $d_1 = 4.0\text{ cm}$, L_2 的焦距 $f'_2 = 5.0\text{ cm}$, 孔径为 $d_2 = 2.0\text{ cm}$. 两镜相距 $a = 30\text{ cm}$. AB 为一与透镜

共轴的直径为 $d = 2.0 \text{ cm}$ 的均匀发光圆盘, 它有清晰的边缘, 把它放在 L_1 左侧 20 cm 处, 它在 L_2 右侧垂直于 OO' 的光屏 P 上成像.

(1) 求光屏应放在何处.

(2) 现发现光屏上的像的中间部分较亮, 边缘部分较暗. 为了使像的边缘部分也能和中间部分一样亮, 但又不改变像的位置和大小, 可以在 OO' 上插放一个共轴的薄凸透镜 L_3 . 求 L_3 应放在何处, 孔径至少要多大, 焦距应是多少.

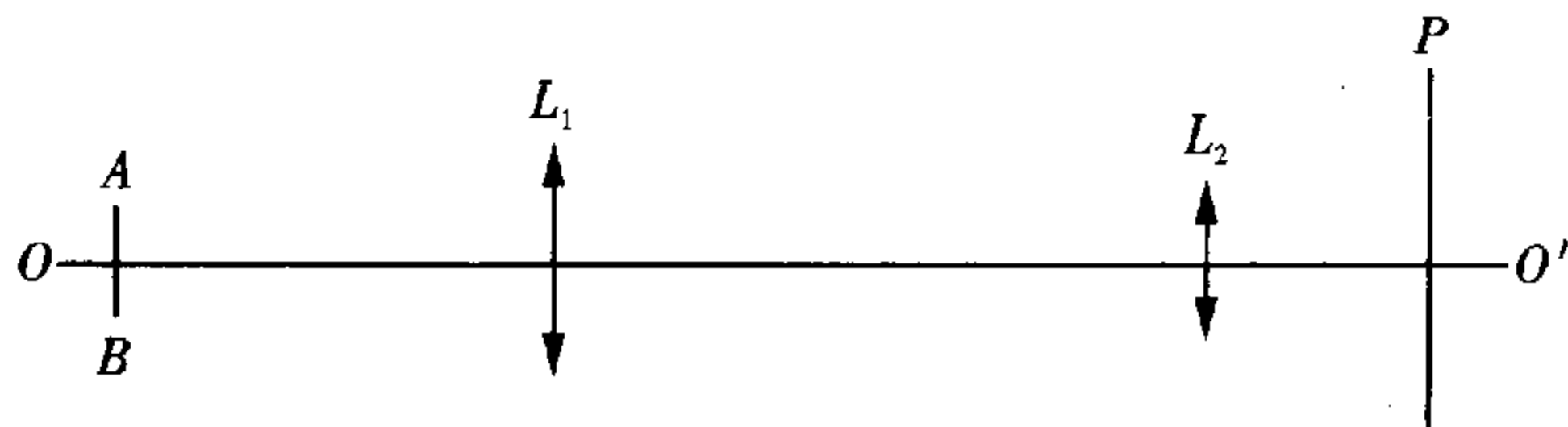


图 14-24

解析 (1) 发光圆盘经 L_1 折射后成像 $A'B'$ 在 L_1 右侧, 根据物距 s_1 、像距 s'_1 与焦距 f'_1 的关系,

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}$$

由 $s_1 = -20 \text{ cm}$, $f'_1 = 10 \text{ cm}$, 求得像距 $s'_1 = 20 \text{ cm}$

像的直径为 $d' = \left| \frac{s'_1}{s_1} \right| d = 2.0 \text{ cm}$

$A'B'$ 通过 L_2 成像 $A''B''$ 在光屏 P 上, 根据物距 s_2 、像距 s'_2 与焦距 f'_2 的关系,

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2}$$

由 $s_2 = s'_1 - a = -10 \text{ cm}$, $f'_2 = 5.0 \text{ cm}$, 求得像距 $s'_2 = 10 \text{ cm}$

所以光屏应放在 L_2 右侧 10 cm 处.

(2) 原来光学系统的物像关系如图 14-25 所示. 如果要插放一凸透镜而保持像 $A''B''$ 的位置和大小都不变, 则此透镜 L_3 必须放在中间像 $A'B'$ 处, 这样对 L_3 来说, 物距等于零, 像距也等于零, 即 $A'B'$ 的位置和大小都不因光束通过 L_3 而改变. L_3 的孔径只要等于或大于 $A'B'$, 则射至 $A'B'$ 的全部光束就都能通过. 所以 L_3 的孔径应等于或大于 2.0 cm .

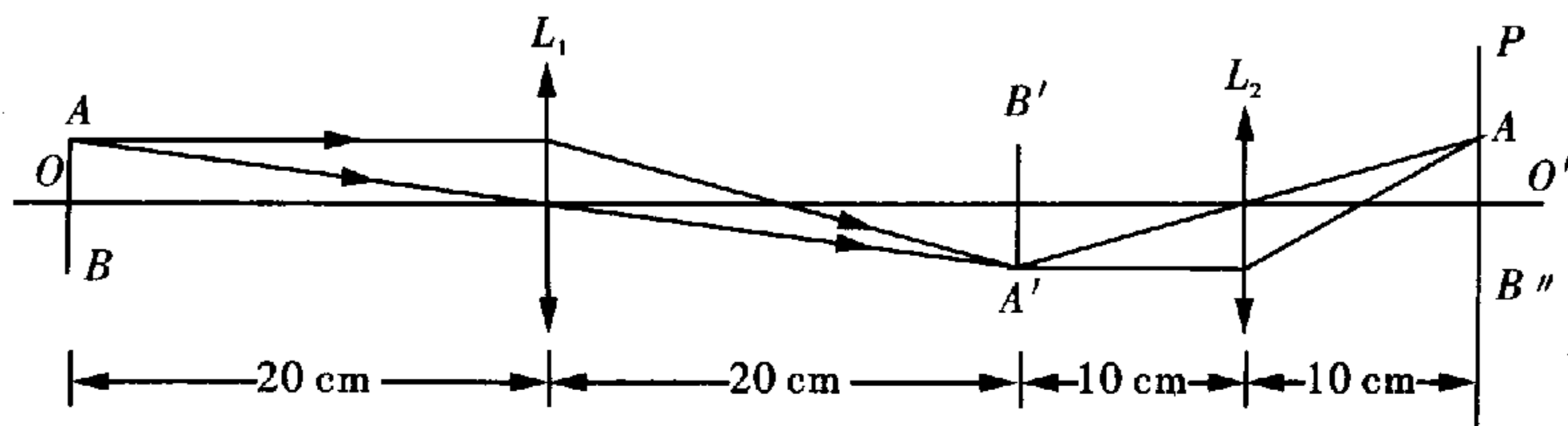


图 14-25

像的明暗程度由投射到光屏上像点的光束大小决定. 用作图法可知, 由圆盘中心发出、通过 L_1 的光束正好能全部进入 L_2 , 而从边缘部分发出, 通过 L_1 的光束只有一部分进入 L_2 , 如图 14-26 所示. 因而像 $A''B''$ 的边缘部分较中心部分暗. L_3 的作用在于使边缘部分光束通过 L_3 后向主轴偏折, 使

之能进入 L_2 , 即可达到像各部分明暗均匀的效果.

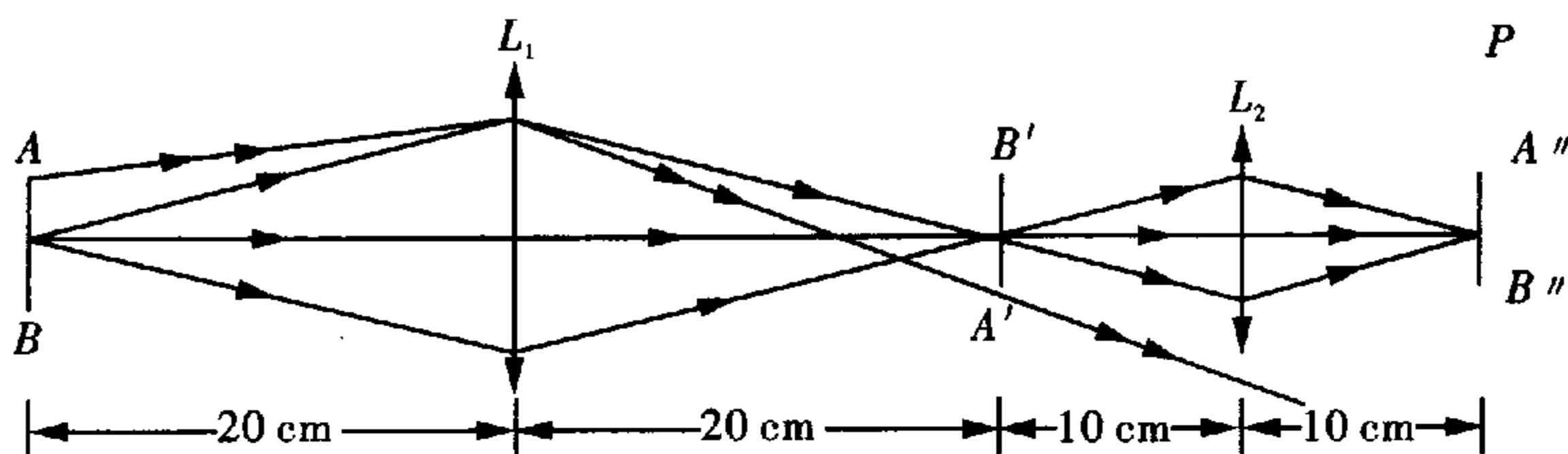


图 14-26

如果 L_1 和 L_2 相对 L_3 处于共轭位置, 而且透镜 L_1 经过 L_3 后所成的像的大小恰好等于 L_2 的孔径, 即 L_2 正好是 L_1 的像, 则由 L_1 处射出的所有光线都将到达 L_2 上相应的位置, 即全部能通过 L_2 , 像 $A''B''$ 就会明暗均匀. 从以上的观点考虑, 可算出 L_3 的焦距如下:

$$\frac{1}{s'_3} - \frac{1}{s_3} = \frac{1}{f'_3}$$

$$s_3 = -20 \text{ cm}, s'_3 = 10 \text{ cm}, \text{解得 } f'_3 = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

L_1 的像的直径等于 $|\frac{s'_3}{s_3}| \cdot d_1 = 2.0 \text{ cm}$, 正好等于 L_2 的直径, 符合要求.

方法与技巧 求解本题的难点在于正确理解为什么在未加 L_3 之前, 像的中间部分较亮, 边缘部分较暗, 屏上像的明亮程度由什么因素决定, 这样才能按题给要求有的放矢地解决问题, 达到像各部分明暗均匀的效果.

例 10 三个薄透镜 L_1 、 L_2 与 L_3 , 依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜, 焦距分别为 $f'_1 = -f'_2 = f'_3 = f'$, 它们构成一个共轴光学系统, 相邻透镜间的距离均为 d , 各透镜的光心分别为 O_1 、 O_2 、 O_3 , 如图 14-27 所示. 在透镜 L_1 左方, 位于主光轴上的物点 P , 经过此光学系统最终成像于 L_3 右方的 Q 点. 若距离 $\overline{PO_2} = \overline{O_2Q}$, 则物点 P 与透镜 L_1 的距离应为多少?

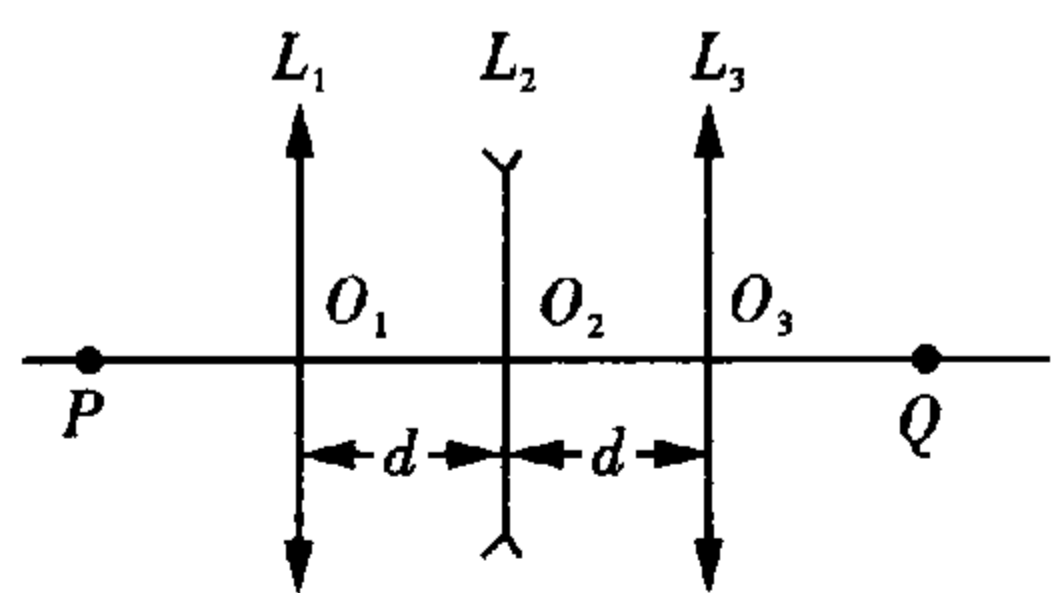


图 14-27

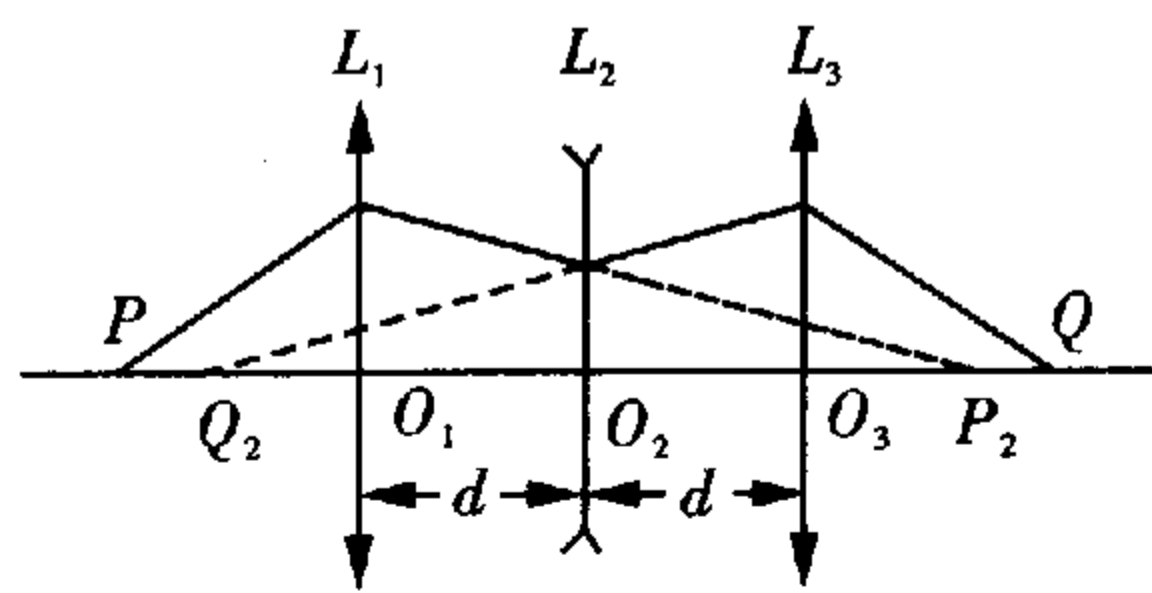


图 14-28

解析 (1) 因该系统对凹透镜 L_2 而言是一左右对称的光学系统. 依题意, 物点 P 与像点 Q 处于对称的位置上, 即对凹透镜 L_2 而言, 物点及经它成像后的像点应分居 O_2 的两侧, 且它们离 L_2 的距离相等, 即

$$s_2 = -s'_2$$

代入凹透镜 L_2 的物像公式

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = -\frac{1}{f'}$$

解得

$$s_2 = -s'_2 = 2f' > 0$$

物距为正值、像距为负值表明：物点 P 经透镜 L_1 成像后，作为凹透镜 L_2 的物点 P_2 位于它的右侧，因而是虚物，经凹透镜 L_2 成像于它的左侧，为一虚像，虚物点 P_2 与虚像点 Q_2 对凹透镜 L_2 位于对称位置(图 14-28)。

参照图 14-28，对凸透镜 L_1 而言，其像距 s'_1 可表示为

$$s'_1 = d + s_2 = d + 2f'$$

代入凸透镜 L_1 的物像公式

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

解出

$$s_1 = -\frac{f'(d+2f')}{f'+d}$$

(2) 由凹透镜 L_2 的物像公式， L_2 的像距 s'_2 可表示为

$$s'_2 = \frac{f's_2}{f'-s_2} = \frac{f'}{\frac{1}{s_2} - 1} < 0$$

当物点 P_2 由右向左逐渐趋近于 O_2 时，即物距 s_2 由正值逐渐减小而趋于零时，像距 s'_2 则由负值逐渐增大趋于零，即像点 Q_2 由左向右亦趋近于 O_2 ，即 $s_2 \rightarrow 0$ 时 $s'_2 \rightarrow 0$ ，当 $s_2 = 0$ 时， $s'_2 = 0$ 。即对凸透镜 L_1 而言，像距 $s'_1 = d$ ，参见图 14-29。代入 L_1 的物像公式得到

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

解得

$$s_1 = -\frac{f'd}{d-f'}$$

此结果表明，当物点 P 经透镜 L_1 后恰成像于透镜 L_2 的光心 O_2 上，由系统的对称性，可知经透镜 L_3 后，将成像于对称点 Q 。像距 s'_3 的数值为

$$s'_3 = \frac{f'd}{d-f'}$$

这也可以从另一角度来考虑，当 P 通过 L_1 成的像正好在 L_2 的光心 O_2 处时，它经 L_2 成的像仍在原处，即 $s_2 = 0, s'_2 = 0$ ，这样也可以得到上面的结果。

综合以上讨论可知，当物距 $s_1 = -\frac{f'(d+2f')}{f'+d}$ 与 $s_1 = -\frac{f'd}{d-f'}$ 时均为本题的解，但对后者，透镜间距 d 必须满足条件：

$$d > f'$$

方法与技巧 本题的第一个解 $s_1 = -\frac{f'(d+2f')}{f'+d}$ 也可直接用逐次成像法求出。如下：

设透镜 L_1, L_2, L_3 的物距与像距分别为 s_1, s'_1, s_2, s'_2 与 s_3, s'_3 ，分别应用成像公式可得

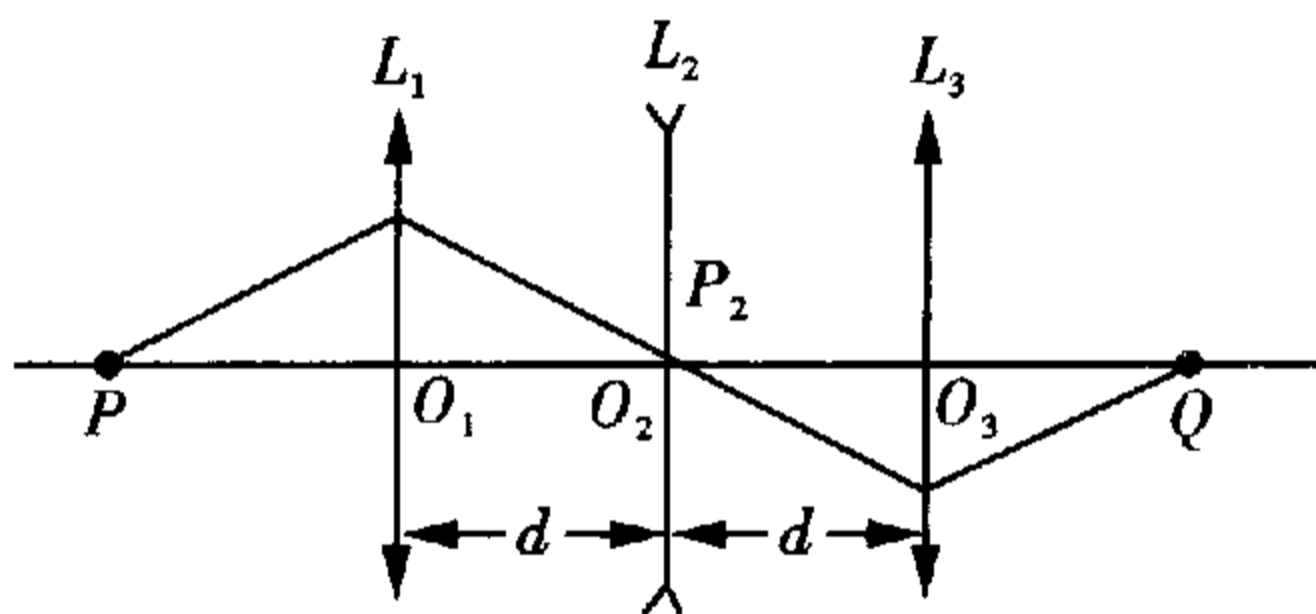


图 14-29

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = -\frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'_3} - \frac{1}{s_3} = \frac{1}{f'}$$

利用图 14-29 并依题意,有

$$s_2 = s'_1 - d$$

$$s_3 = s'_2 - d$$

$$s'_3 = -s_1$$

将以上关系代入前面三个物像公式后,我们得到

$$\begin{cases} \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s'_1 - d} = -\frac{1}{f'} \\ \frac{1}{-s_1} - \frac{1}{s'_2 - d} = \frac{1}{f'} \end{cases}$$

联立求解这三个方程,消去 s'_1 与 s'_2 后,即可求出 s_1 .

譬如,比较第一式与第三式可知 $s'_1 = -(s'_2 - d)$, 或 $s'_2 = d - s'_1$, 再代入第二式得到

$$\frac{1}{d - s'_1} - \frac{1}{s'_1 - d} = -\frac{1}{f'}$$

求得 $s'_1 = d + 2f'$

最后再代入第一式即可求得本题的第一个解即 $s_1 = -\frac{f'(d + 2f')}{f' + d}$.

例 11 在焦距为 20.00 cm 的薄凸透镜的主轴上离透镜中心 30.00 cm 处有一小发光点 P , 一个厚度可以忽略的光楔 C (顶角 α 很小的三棱镜) 放在发光点与透镜之间, 垂直于主轴, 与透镜的距离为 2.00 cm, 如图 14-30 所示. 设光楔的折射率 $n = 1.5$, 楔角 $\alpha = 0.028$ 弧度. 在透镜另一侧离透镜中心 46.25 cm 处放一平面镜 M , 其反射面向着透镜并垂直于主轴. 问最后形成的发光点的像相对发光点的位置在何处? (只讨论近轴光线, 小角度近似适用, 在分析计算过程中应作出必要的光路图).

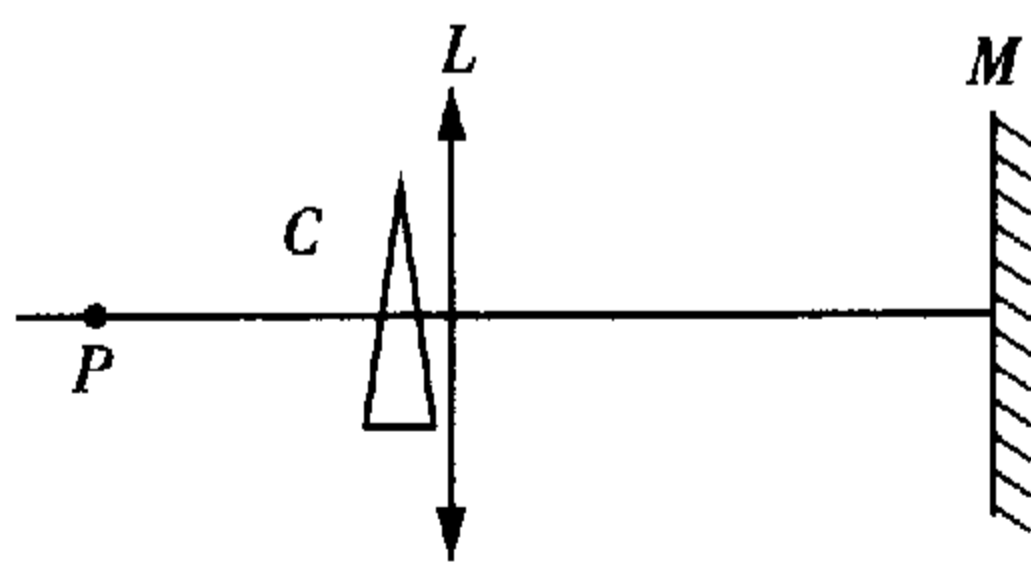


图 14-30

解析 本题共有五次成像过程

(1) 光楔使入射光线偏折, 其偏向角为

$$\theta = (n - 1)\alpha = (1.5 - 1) \times 0.028 \text{ 弧度} = 0.014 \text{ 弧度}$$

因 θ 与入射角大小无关, 各成像光线经光楔后都偏折同样角度 θ . 又因光楔厚度可忽略, 所以作光路图时可画成一使光线产生偏向角 θ 的薄平板, 见图 14-31.

光点 P 经光楔成一虚像点 P'_1 . 对近轴光线, P'_1 在 P 正上方, 到 P 的距离为 h , 离光楔距离 $b = 28.00$ cm.

$$h = \theta b = (n - 1)\alpha b = 0.39 \text{ cm.}$$

(2) P'_1 为透镜 L 的实物, 像点 P'_2 的位置可由下式求出:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'}$$

以 $s_1 = -30.00 \text{ cm}$, $f' = 20.00 \text{ cm}$ 代入, 得

$$s'_1 = 60.00 \text{ cm}$$

将 PP'_1 视为与光轴垂直的小物, 由垂轴放大率公式

$$\beta_1 = \frac{s'_1}{s_1}$$

可求得

$$h'_2 = \beta_1 h = -0.78 \text{ cm}$$

即像点 P'_2 在光轴下方与光轴的距离为 0.78 cm , 与透镜中心的距离为 60.00 cm 处. 见图 14-32.

(3) P'_2 在平面镜之后, 对平面镜是虚物, 经平面镜成实像, 像点 P'_3 与 P'_2 对称于平面镜.

$$d = 13.75 \text{ cm}$$

$$h'_3 = h'_2 = -0.78 \text{ cm}$$

(4) P'_3 作为透镜的实物, 经透镜折射后再次成像, 设像点 P''_2 , 此时物距 $s_2 = 32.50 \text{ cm}$, 像距 $s''_2 = -52.00 \text{ cm}$. P''_2 在透镜左侧, 主轴上方, 见图 14-33.

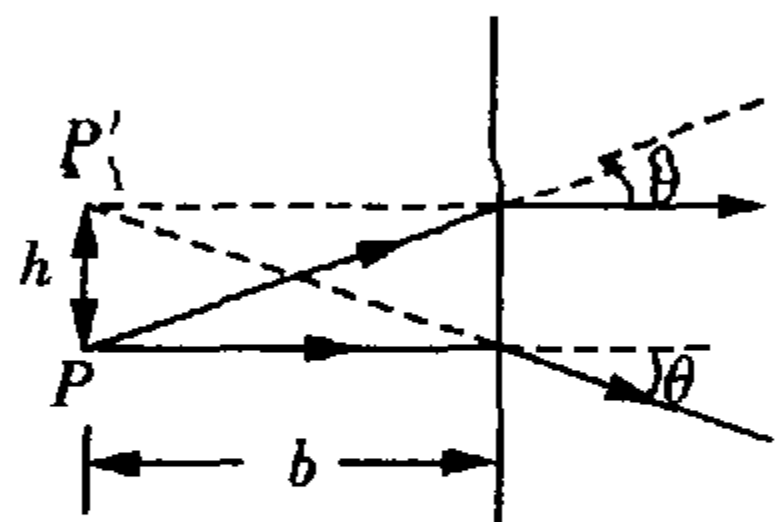


图 14-31

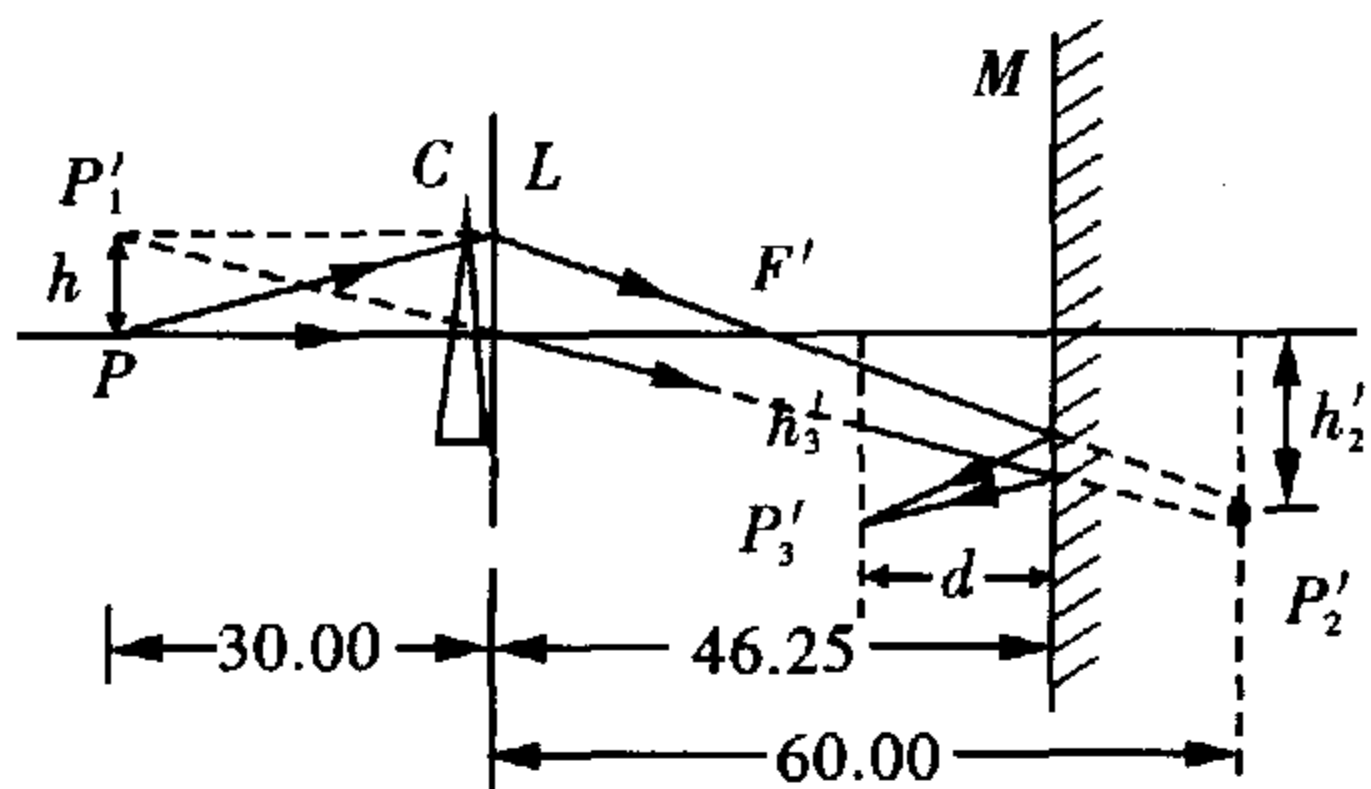


图 14-32

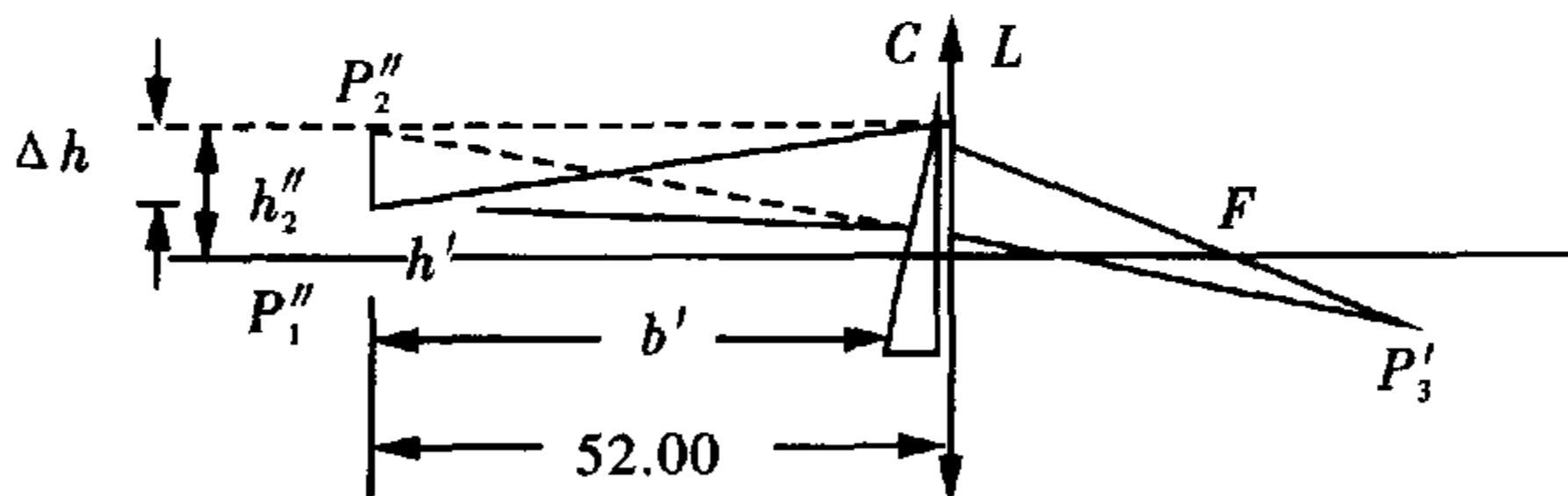


图 14-33

$$h'' = \beta_2 h'_2 = 1.25 \text{ cm}$$

(5) 第二次经透镜折射后成像的光线还要经光楔偏折, 再次成像, 像点 P''_1 在 P''_2 正下方, 离光楔距离为 50 cm , 离光轴的距离为 h' .

$$\Delta h = \theta b' = 0.70 \text{ cm}$$

$$h' = h''_2 - \Delta h = 0.55 \text{ cm}$$

像点 P''_1 在光轴上的垂足与 P 的距离为

$$\Delta S = b' - b = 22.00 \text{ cm}$$

即最后的像点在发光点 P 左侧光轴上方, 到光轴的距离为 0.55 cm , 其在光轴上的垂足到 P 的距离为 22.00 cm .

方法与技巧 本题的光学系统虽较复杂, 但却是一道典型的光通过共轴球面系统的近轴成像问题. 只要我们对一个一个简单系统依次进行成像计算, 并且足够细心, 就不难得到正确结果. 当然, 必要的光路图应该画出, 这对于分析和计算都很有帮助.

例 12 目前, 大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上

的长条状,通常称为激光二极管条.但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束,光能分布很不集中,不利于传输和应用.为了解决这个问题,需要根据具体应用的要求,对光束进行必需的变换(或称整形).如果能把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束,对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的.为此,有人提出了先把多束发散光会聚到一点,再变换为平行光的方案,其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明.

如图 14-34, S_1 、 S_2 、 S_3 是等距离(h)地排列在一直线上的三个点光源,各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为 $\alpha = \arctan(1/4)$ 的圆锥形光束.请使用三个完全相同的、焦距为 $f' = 1.50h$ 、半径为 $r = 0.75h$ 的圆形薄凸透镜,经加工、组装成一个三者在同一平面内的组合透镜,使三束光都能全部投射到这个组合透镜上,且经透镜折射后的光线能全部会聚于 z 轴(以 S_2 为起点,垂直于三个点光源连线,与光束中心线方向相同的射线)上距离 S_2 为 $L = 12.0h$ 处的 P 点.(加工时可对透镜进行外形的改变,但不能改变透镜焦距.)

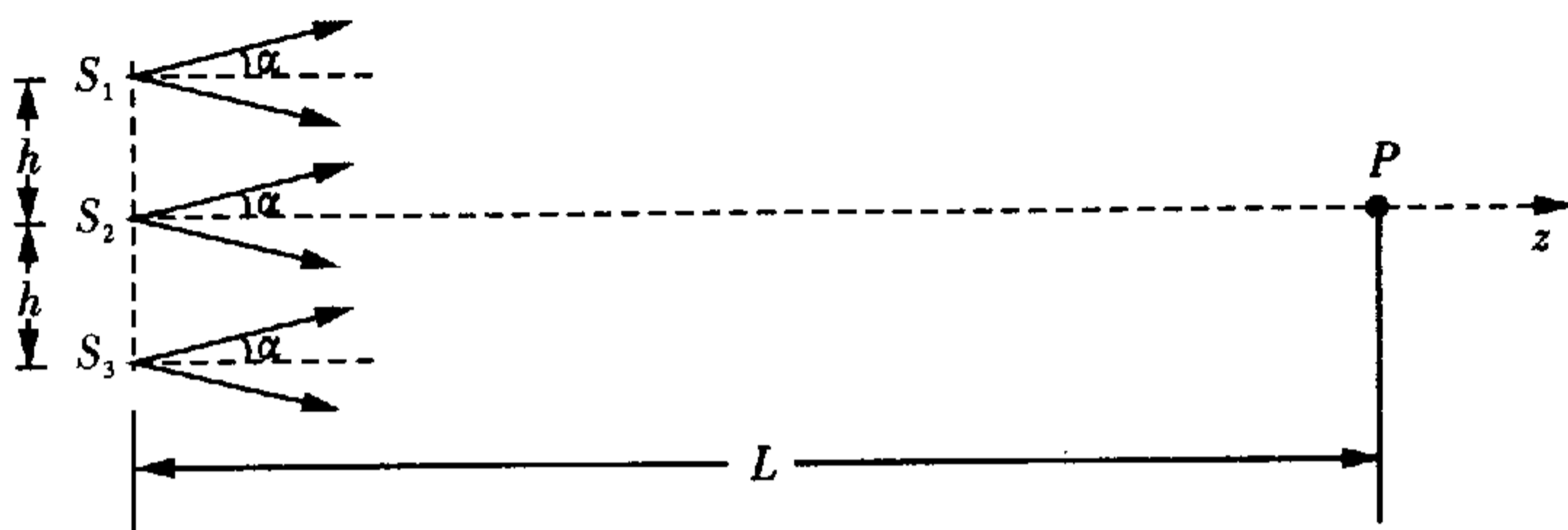


图 14-34

- (1) 求出组合透镜中每个透镜光心的位置.
- (2) 说明对三个透镜应如何加工和组装,并求出有关数据.

解析 (1) 考虑到使 3 个点光源的 3 束光分别通过 3 个透镜都成实像于 P 点的要求,组合透镜所在的平面应垂直于 z 轴,三个光心 O_1 、 O_2 、 O_3 的连线平行于 3 个光源的连线, O_2 位于 z 轴上,如图 14-35 所示.图中 MM' 表示组合透镜的平面, S'_1 、 S'_2 、 S'_3 为三个光束中心光线与该平面的交点. $S_2O_2 = u$ 就是物距.根据透镜成像公式:

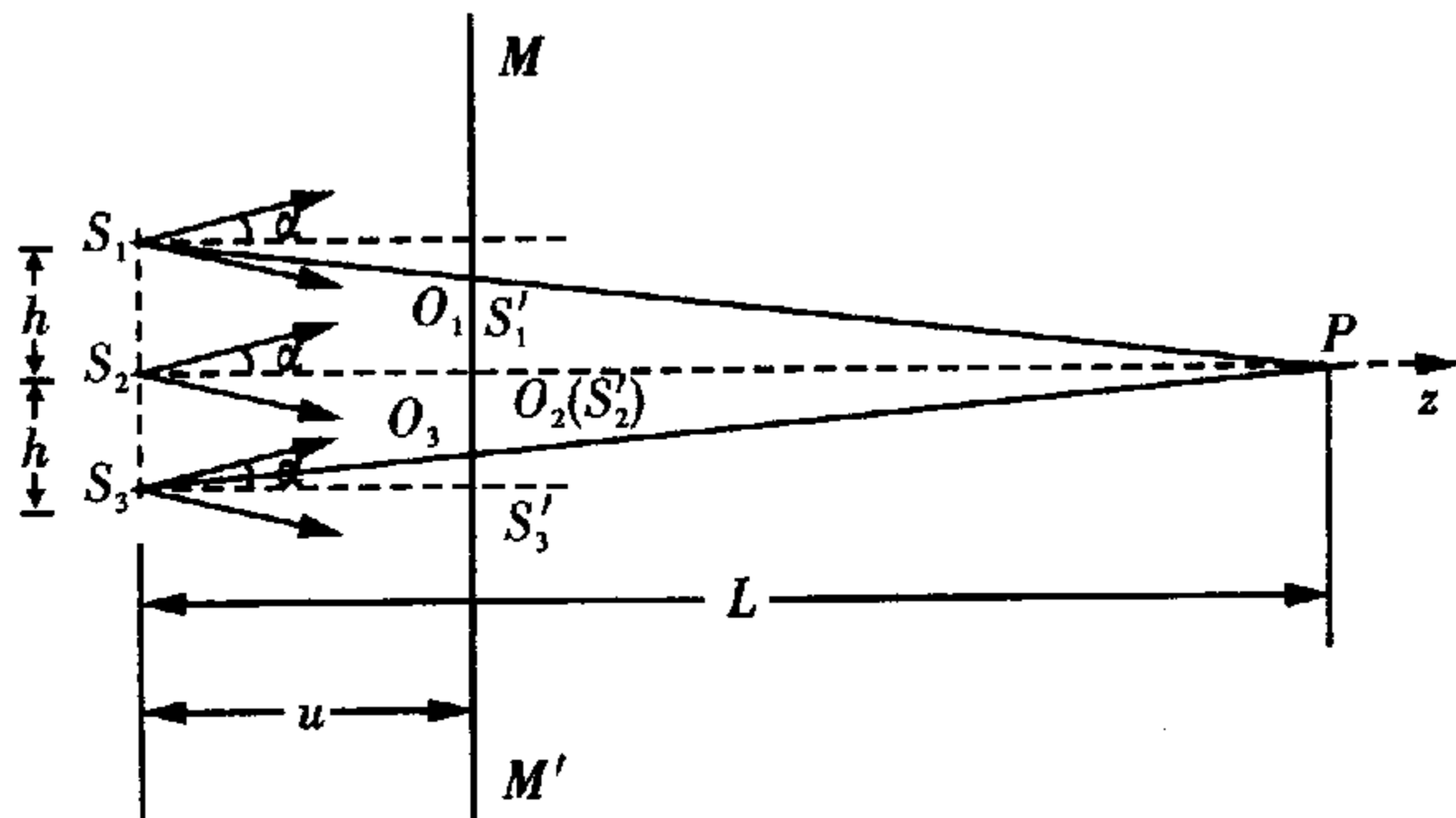


图 14-35

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{L-u} = \frac{1}{f'}$$

①

可解得

$$u = \frac{1}{2}[L \pm \sqrt{L^2 - 4f'L}]$$

因为要保证经透镜折射后的光线都能全部会聚于 P 点, 来自各光源的光线在投射到透镜之前不能交叉, 必须有 $2u \tan \alpha \leq h$ 即 $u \leq 2h$. 在上式中取“-”号, 代入 f' 和 L 的值, 算得

$$u = (6 - 3\sqrt{2})h \approx 1.757h \quad (2)$$

此解满足上面的条件.

分别作 3 个点光源与 P 点的连线, 为使 3 个点光源都能同时成像于 P 点, 3 个透镜的光心 O_1 、 O_2 、 O_3 应分别位于这 3 条连线上(如图 14-35), 由几何关系知, 有

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_2 O_3} = \frac{L-u}{L}h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)h \approx 0.854h \quad (3)$$

即光心 O_1 的位置应在 S'_1 之下与 S'_1 的距离为

$$\overline{S'_1 O_1} = h - \overline{O_1 O_2} = 0.146h \quad (4)$$

同理, O_3 的位置应在 S'_3 之上与 S'_3 的距离为 $0.146h$ 处. 由③式可知组合透镜中相邻薄透镜中心之间距离必须等于 $0.854h$, 才能使 S_1 、 S_2 、 S_3 都能成像于 P 点.

(2) 现在讨论如何把三个透镜 L_1 、 L_2 、 L_3 加工组装成组合透镜.

因为三个透镜的半径 $r = 0.75h$, 将它们的光心分别放置到 O_1 、 O_2 、 O_3 处时, 由于 $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_2 O_3} = 0.854h < 2r$, 透镜必然发生相互重叠, 必须对透镜进行加工, 各切去一部分, 然后再将它们粘起来, 才能满足③式的要求. 由于对称关系, 我们只需讨论上半部分的情况.

图 14-36 画出了 L_1 、 L_2 放在 MM' 平面内时相互交叠的情况(纸面为 MM' 平面). 图中 C_1 、 C_2 表示 L_1 、 L_2 的边缘, S'_1 、 S'_2 为光束中心光线与透镜的交点, W_1 、 W_2 分别为 C_1 、 C_2 与 $\overline{O_1 O_2}$ 的交点. 以 S'_1 为圆心的圆 1 和以 S'_2 (与 O_2 重合) 为圆心的圆 2 分别是光源 S_1 和 S_2 投射到 L_1 和 L_2 时产生的光斑的边缘, 其半径均为

$$\rho = u \tan \alpha = 0.439h \quad (5)$$

根据题意, 圆 1 和圆 2 内的光线必须能全部进入透镜. 首先, 圆 1 的 K 点(见图 14-36)是否落在 L_1 上? 由几何关系可知 $\overline{O_1 K} = \rho + \overline{O_1 S'_1} = (0.439 + 0.146)h = 0.585h < r = 0.75h$ ⑥

故从 S_1 发出的光束能全部进入 L_1 . 为了保证全部光束能进入透镜组合, 对 L_1 和 L_2 进行加工时必须保留圆 1 和圆 2 内的透镜部分.

下面举出一种对透镜进行加工、组装的方法. 在 O_1 和 O_2 之间作垂直于 $O_1 O_2$ 且分别与圆 1 和圆 2 相切的切线 QQ' 和 NN' . 若沿位于 QQ' 和 NN' 之间且与它们平行的任意直线 TT' 对透镜 L_1 和 L_2 进行切割, 去掉两透镜的弓形部分, 然后把它们沿此线粘合就得到符合所需组合透镜的上半部. 同理,

对 L_2 的下半部和 L_3 进行切割, 然后将 L_2 的下半部和 L_3 粘合起来, 就得到符合需要的整个组合透

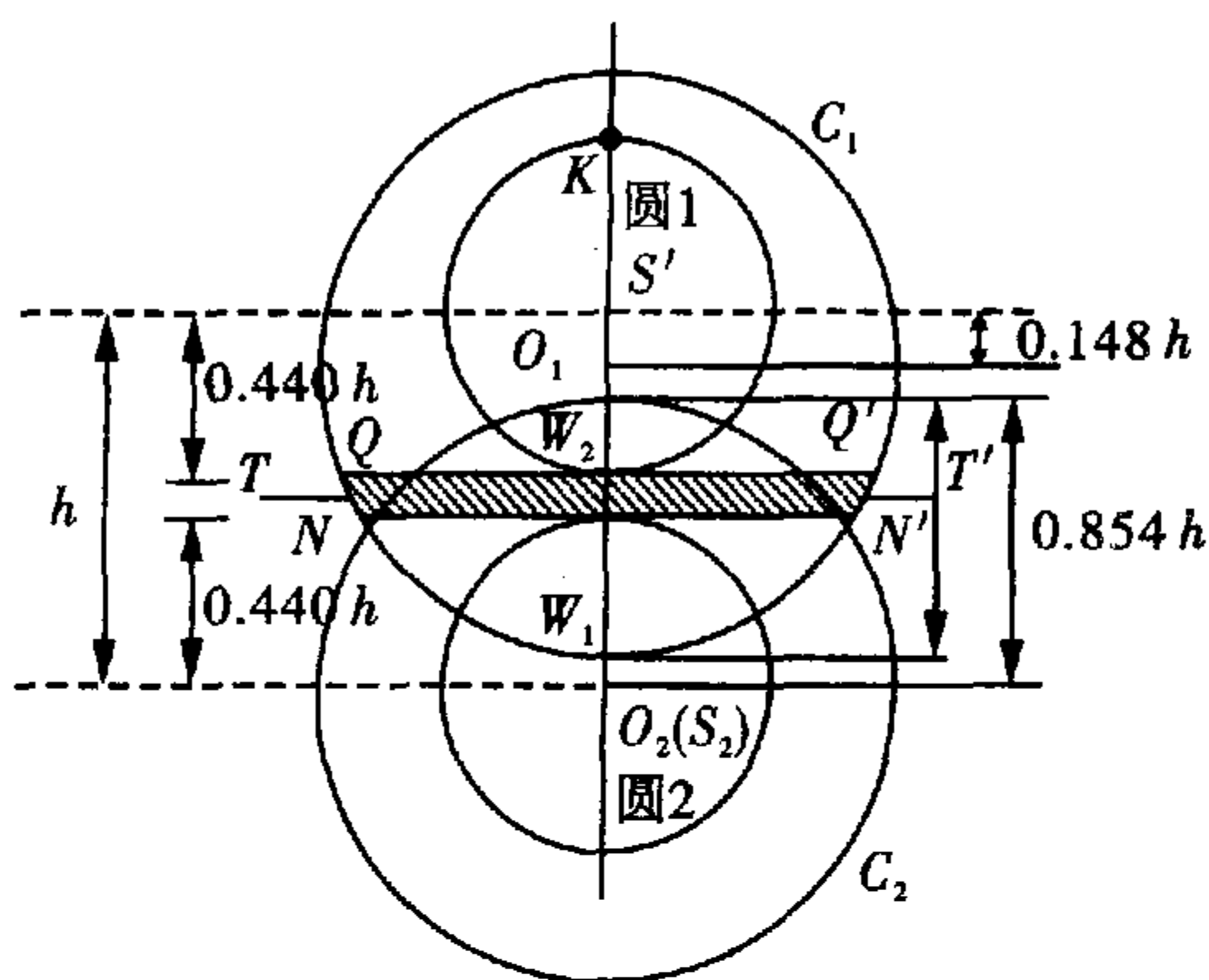


图 14-36

镜. 这个组合透镜可以将 S_1, S_2, S_3 发出的全部光线都会聚到 P 点.

现在计算 QQ' 和 NN' 的位置以及对各个透镜切去部分的大小应符合的条件. 设透镜 L_1 被切去部分沿 O_1O_2 方向的长度为 x_1 , 透镜 L_2 被切去部分沿 O_1O_2 方向的长度为 x_2 , 如图 14-36 所示, 则对任意一条切割线 TT' , x_1, x_2 之和为

$$d = x_1 + x_2 = 2r - \overline{O_1O_2} = 0.646h \quad (7)$$

由于 TT' 必须在 QQ' 和 NN' 之间, 从图 14-36 可看出, 沿 QQ' 切割时, x_1 达最大值 (x_{1M}), x_2 达最小值 (x_{2m}), $x_{1M} = r + s'_1 \overline{O_1} - \rho$ 代入 r, ρ 和 $S'_1 \overline{O_1}$ 的值, 得

$$x_{1M} = 0.457h \quad (8)$$

代入 (7) 式, 得

$$x_{2m} = d - x_{1M} = 0.189h \quad (9)$$

由图 14-36 可看出, 沿 NN' 切割时, x_2 达最大值 (x_{2M}), x_1 达最小值 (x_{1m}), $x_{2M} = r - \rho$.

代入 r 和 ρ 的值, 得

$$x_{2M} = 0.311h \quad (10)$$

$$x_{1m} = d - x_{2M} = 0.335h \quad (11)$$

由对称性, 对 L_3 的加工与对 L_1 相同, 对 L_2 下半部的加工与对上半部的加工相同.

方法与技巧 本题的难点在第 2 问, 即如何将三个透镜 L_1, L_2, L_3 组装成组合透镜. 这里介绍另外一种较简便而又不失完整与准确性的解答方案, 即在得出 (5) 式和 (6) 式的基础上, 虽然没有再给出 (7) ~ (11) 式, 但只要进一步说明将图 14-36 中三个圆锥光束照射到透镜部分全部保留, 透镜其他电像部分可根据需要磨去 (或切割掉), 再说明将加工后的透镜组装成透镜组合时必须保证 $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = 0.854h$. 这样的解答也是可以的.

例 13 一位近视眼朋友不戴眼镜时, 能看清的物体都在距眼睛 $a = 20$ cm 以内. 他发现, 如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片, 通过小圆孔不戴眼镜看远处的物体时也能看得清晰些.

(1) 若小圆孔直径为 D , 试根据几何光学原理求出当近视眼直视远处的一个点物时, 眼的视网膜上产生的光斑的直径.

(2) 再考虑小圆孔的衍射效应, 求小圆孔直径最恰当的大小. 计算时可取可见光的平均波长为 600 nm.

[提示]

(1) 人眼是一个结构比较复杂的光学系统, 在本题中, 可将人眼简化成一个焦距 f' 可调的薄透镜和一个可成像的视网膜, 透镜的边缘为瞳孔, 两侧介质均为空气, 视网膜与透镜的距离为 b .

(2) 小圆孔的存在对透镜成像的影响介绍如下: 在几何光学中, 从远处物点射向透镜的、平行于光轴的平行光束将会聚于透镜的焦点上, 这就是像. 如果在透镜前放一直径为 D 的小圆孔, 则将发生光的衍射, 在焦点处像屏上将出现如图 14-37 所示的衍射图样, 其中央是一个明亮的圆斑, 圆斑外周是一组亮度逐渐减弱的亮暗相间的同心圆环, 由于这些圆环亮度比中央圆斑弱得多, 观察时可以不予考虑. 中央圆斑的半径对薄透镜中心的张角 $\Delta\theta$ 的大小与 D 有关. 理论计算得到

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

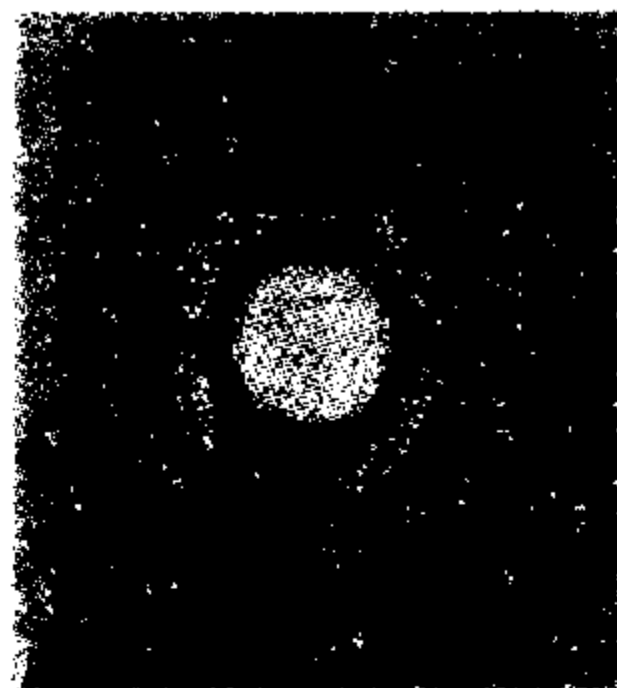


图 14-37

式中 λ 是所用光的波长, 这圆斑就是有小圆孔时观察到的物点的“像”, 如图 14-38 所示. 由上式可见, D 越大, 像斑就越小, 点物的像就越接近一个点, 物体的像越清晰; 反之, D 越小, 点物的衍射像斑就越大, 物体的像就越不清晰. 如果观察屏不在焦点处而在焦点附近, 屏上将出现类似的衍射图样, 其中央亮斑对透镜中心的张角 $\Delta\theta$ 可近似地用上式计算.

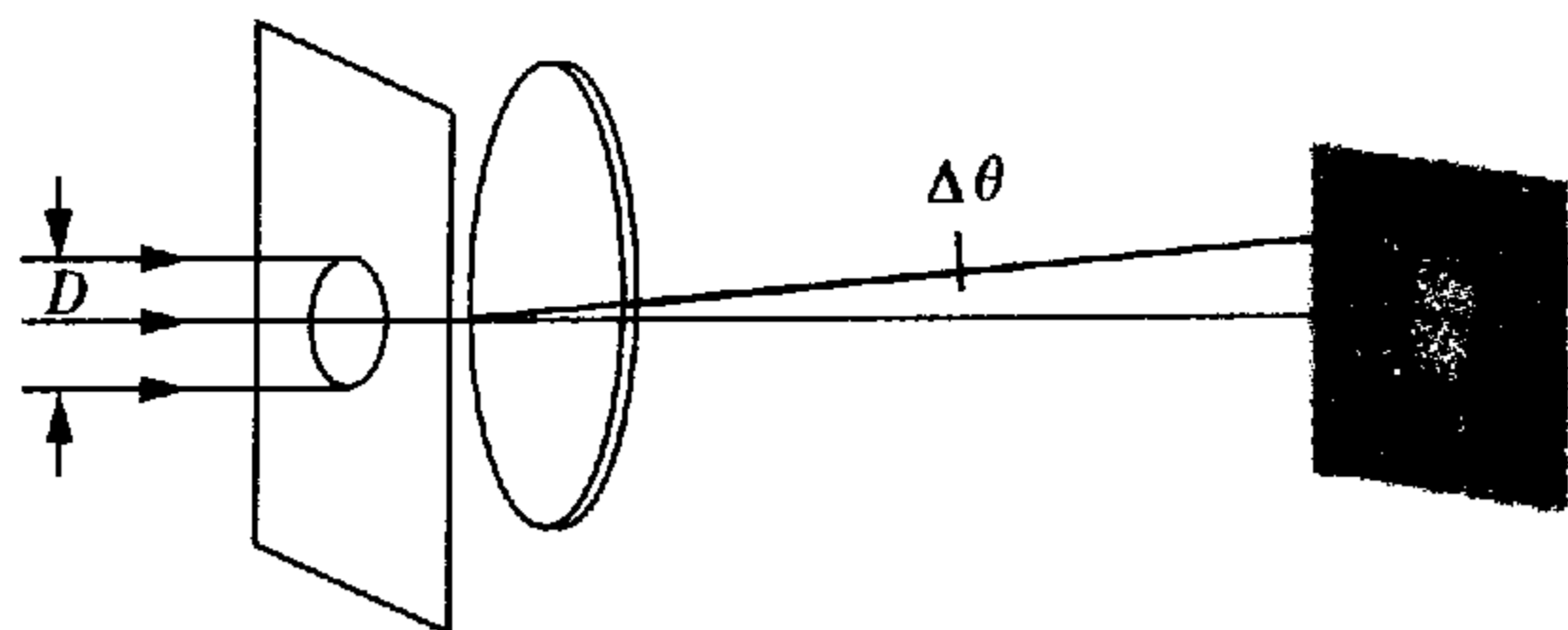


图 14-38

解析 (1) 图 14-39 是近视眼能看清的最远的物时的成像光路图. 对近视眼, 通过眼睛调节, 能看清的物到眼睛的最大距离为 a , 位于光轴上的物点, 将成像在视网膜上; 离眼睛无限远, 位于光轴上的物点, 只能成像在焦点 f' , 在视网膜上是一个光斑, 这光斑就是物点在视网膜上的模糊的“像”. 如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片, 小孔使视网膜上的光斑变小, 如图 14-40 所示.

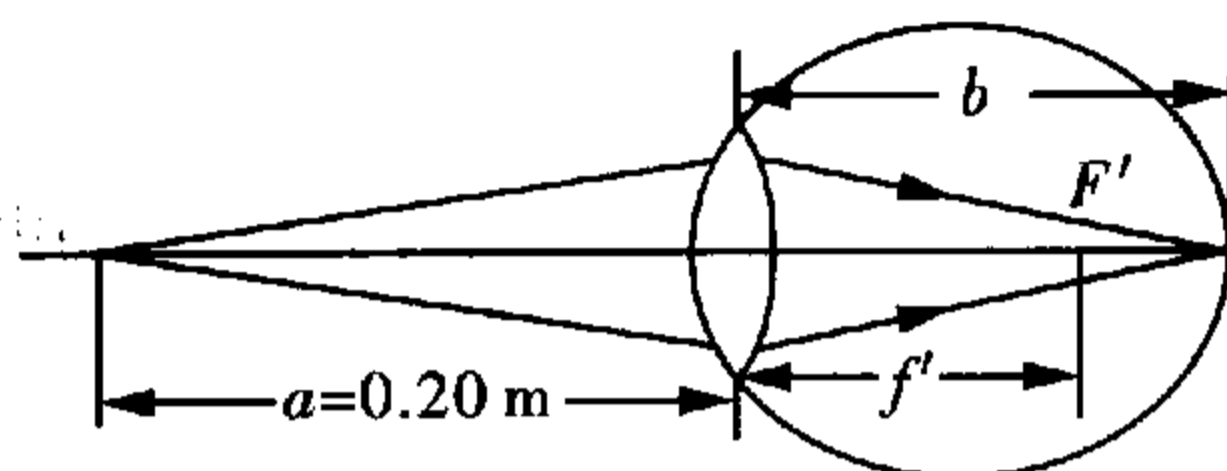


图 14-39

光斑越小, 即模糊像点越小, 眼睛感觉到的像越清晰. 因此, 在靠近眼睛处放一个小于瞳孔的小圆孔会使模糊像斑比由瞳孔决定的模糊像斑小, 能看得清晰些.

下面计算视网膜上光斑的直径. 由图 14-39, 根据透镜公式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f'}$$

可求得此时的焦距为

$$f' = \frac{ab}{a+b}$$

当眼睛处于图 14-40 状态观察远物时, 从光轴上一物点射来的平行光, 经过直径为 D 的小孔后将会聚于焦点 f' , 在视网膜上出现直径为 D' 的光斑, 如图 14-40 所示.

由几何关系和式②, 可得光斑的直径 D' 为

$$D' = \frac{b-f'}{f'} D = \frac{b}{a} D \quad \text{③}$$

由式③可知, 从几何光学的角度考虑, D 越小, D' 越小.

(2) 现在考虑衍射问题, 入射的平行光束经小孔后在透镜后的视网膜上产生衍射圆斑, 设其直径为 D'' , 则根据题给公式的近似, 可得

$$D'' = 2b\Delta\theta = 2.44 \frac{\lambda b}{D} \quad \text{④}$$

由式④可知, D 越小, D'' 越大. 将使“像点”变得更为模糊. 所以不能用太小的圆孔. 最恰当的圆孔直径

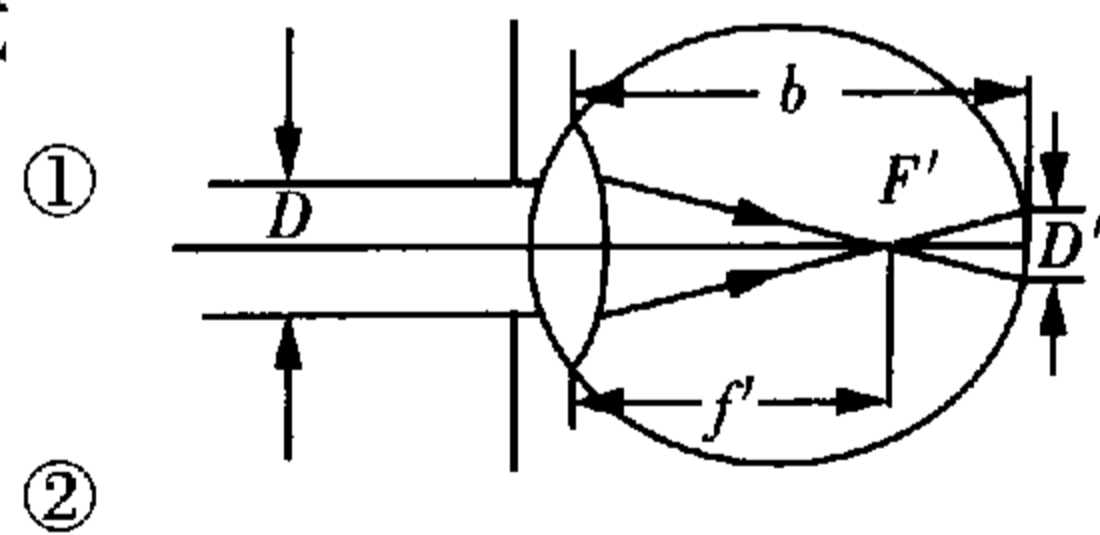


图 14-40

D 的大小应使视网膜上几何光学模糊光斑和衍射光斑一样大, 即

$$D' = D'' \quad (5)$$

此时“像”最为清晰. 设此时小孔的直径为 D_0 , 则有

$$\frac{b}{a} D_0 = 2.44 \frac{\lambda b}{D_0} \quad (6)$$

$$D_0 = \sqrt{2.44 \lambda a} \quad (7)$$

以 $\lambda = 600 \times 10^{-9} \text{ m}$, $a = 0.20 \text{ m}$ 代入得

$$D_0 = 0.54 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (8)$$

方法与技巧 人眼是一个最常见的光学仪器, 是一个结构比较复杂的共轴光学系统, 具有很高的精度和灵敏度. 在本题中, 为了讨论问题的方便, 把眼睛简化为一个两侧介质均为空气的变焦距薄凸透镜和一个可成像的视网膜. 求解本题的关键是要正确理解小孔的存在对透镜成像的影响. 至于圆孔衍射的有关知识, 题中已给出详细的提示, 不是求解本题的障碍所在.

例 14 如图 14-41 所示, 焦距 $f' = 10 \text{ cm}$ 的薄凸透镜沿其直径剖切为二, 再沿切口的垂直方向将两半移开一小距离 $\delta = 1.0 \text{ mm}$. 在透镜左方, 在对称轴上与透镜相距 20 cm 处放一单色点光源 Q , 其波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$, 在透镜右方与透镜相距为 $L = 50 \text{ cm}$ 处, 与对称轴垂直地放一屏幕. 试求幕上出现的干涉条纹的数目.

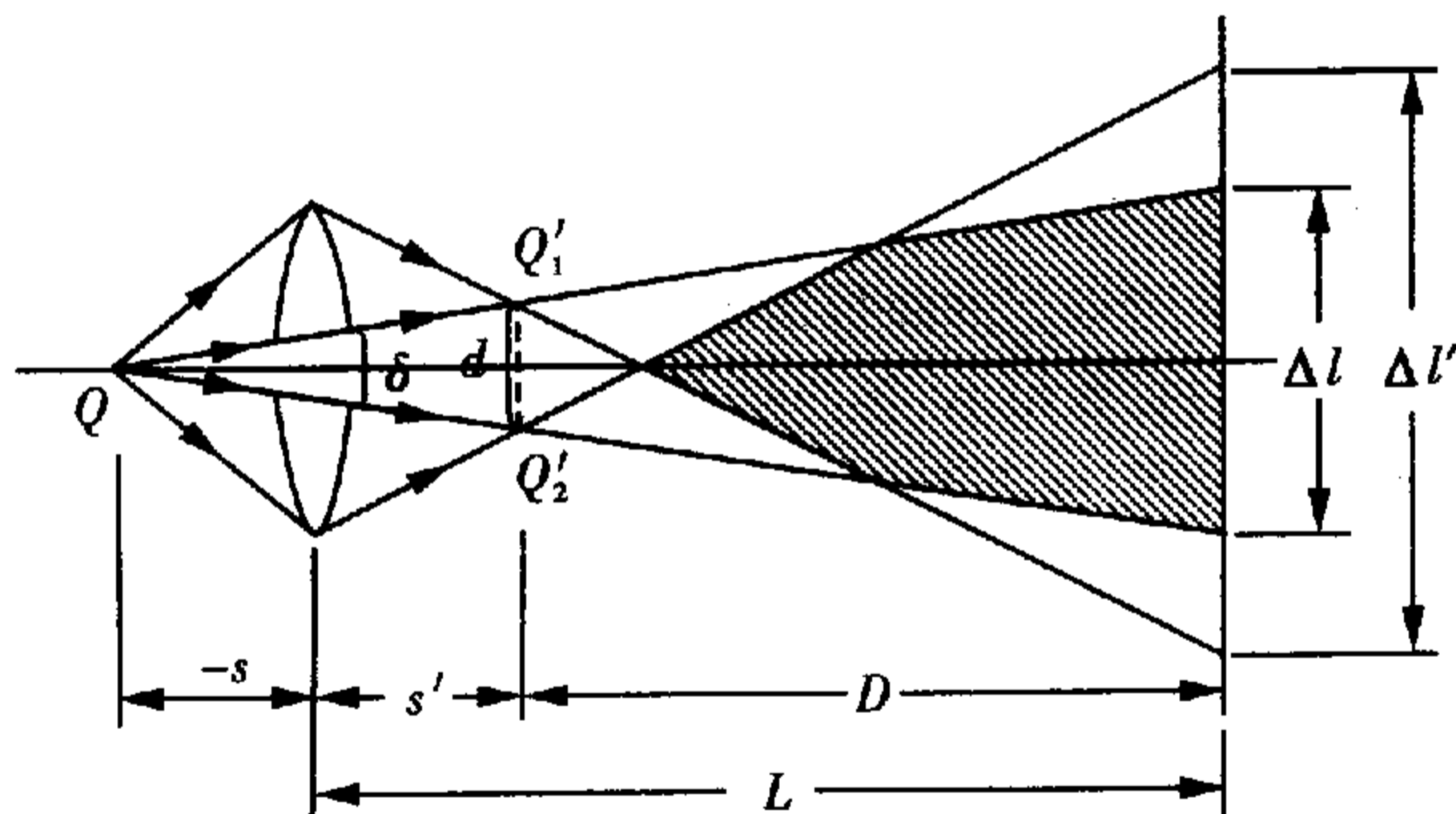


图 14-41

解析 如图 14-41, 点光源 Q 发出的光经透镜上、下两半后, 分别成像于 Q_1' 和 Q_2' . 这是两个相干的点光源, 它们发出的两束相干光在图中画斜线的区域内重叠, 在重叠区域内的屏幕上可以观察到干涉条纹.

点光源 Q 经透镜上、下两半后, 分别成像于 Q_1' 和 Q_2' , 由薄透镜成像公式, 两个实像的像距 s' 均为

$$s' = \frac{sf'}{s+f'} = 20 \text{ cm}$$

Q_1' 与 Q_2' 之间的距离 d 可由几何关系求出, 为

$$\frac{d}{\delta} = \frac{-s+s'}{-s}$$

把 s' 代入, 得

$$d = \frac{-s+s'}{-s} \delta = \frac{\delta}{-s} \left(-s + \frac{sf'}{s+f'} \right) = \frac{\delta s}{s+f'} = 0.2 \text{ cm}$$

Q'_1 和 Q'_2 为相干光源, 它们在幕上产生的干涉条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda = \frac{L-s'}{d} \lambda = \frac{L - \frac{sf'}{s+f'}}{\frac{\delta s}{s+f'}} \lambda = \frac{\lambda}{\delta s} [L(s+f') - sf'] = 7.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

如图 14-41 幕上两束光重叠的范围为

$$\Delta l = \frac{\delta}{-s} (-s + L) = 0.35 \text{ cm}$$

因此, 幕上出现的干涉条纹的数目为

$$N = \frac{\Delta l}{\Delta x} = 46.7$$

即出现 46 条干涉条纹.

方法与技巧 在上述计算中实际上已假设图 14-41 中的 $\Delta l' > \Delta l$. 如果实际情形相反, 即 $\Delta l' < \Delta l$, 则幕上两束相干光重叠的范围将是 $\Delta l'$ 而不是 Δl , 出现的条纹数目应由 $N = \frac{\Delta l'}{\Delta x}$ 算出.

$\Delta l'$ 的大小与透镜的直径 $2R$ 的大小有关, 其间的关系是

$$\begin{aligned} \Delta l' &= \frac{2R + \delta - d}{S'} \left(D - \frac{d}{2R + \delta - d} s' \right) \\ &\approx \frac{2R}{s'} \left(D - \frac{d}{2R} s' \right) \end{aligned}$$

若 $2R = 5 \text{ cm}$, 利用题目给的数据得出

$$\Delta l' \approx 12 \text{ cm}$$

显然, 因 $\Delta l' > \Delta l$ (上面算出 $\Delta l = 0.35 \text{ cm}$), 故上述计算适用. 但若 R 或者 D 较小, 使得 $\Delta l' < \Delta l$, 则应

由 $N = \frac{\Delta l'}{\Delta x}$ 计算幕上的干涉条纹数目.

例 15 一曲率半径为 $R = 2.75 \times 10^3 \text{ m}$ 的平凹透镜覆盖在平板玻璃上, 如图 14-42 所示. 在空气隙中充满折射率为 1.62 的 CS_2 液体, 图中央 P 点处液膜的最大厚度 $h = 1.82 \mu\text{m}$. 今垂直投射波长 $\lambda = 589 \text{ nm}$ 的钠黄光. 试求:

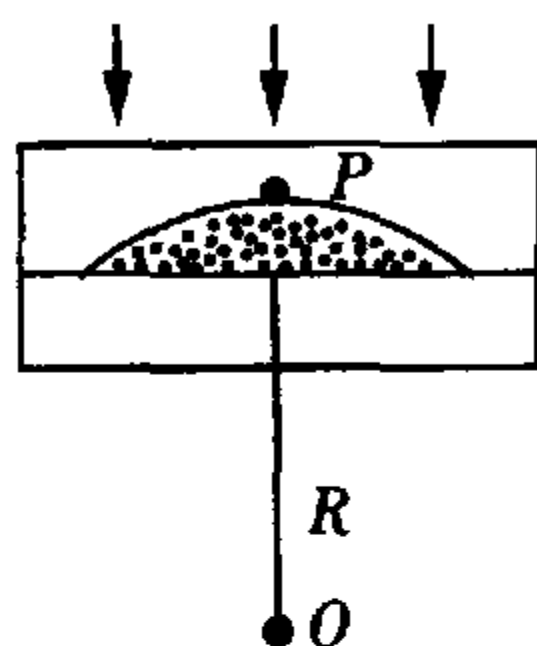


图 14-42

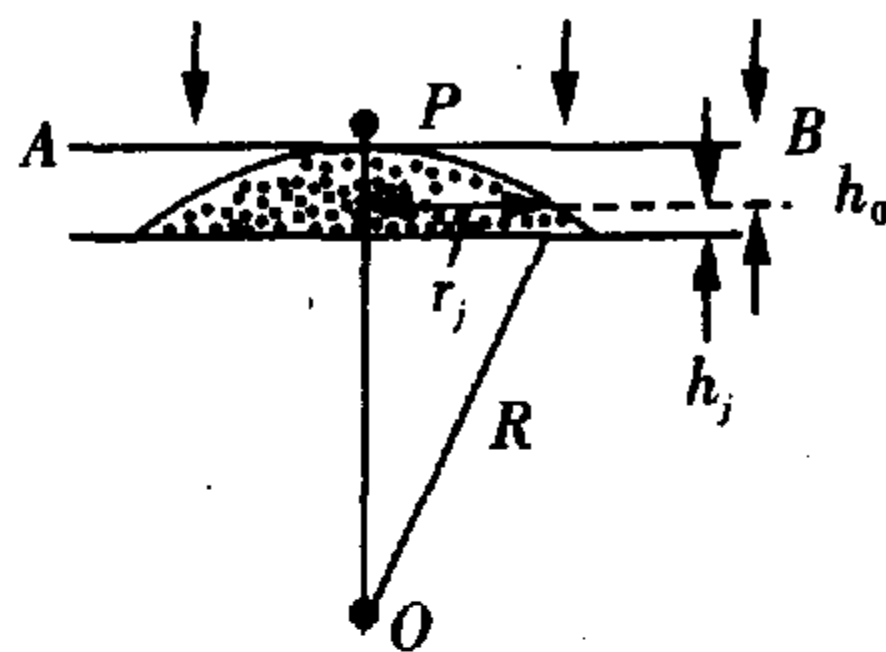


图 14-43

- (1) 干涉条纹的形状和分布;
- (2) 最多能观察到的暗条纹数;
- (3) 零级暗纹的位置.

解析 (1) 在 CS_2 液膜表面看到以中央处 P 点为中心的一组同心的明暗相间的圆环形条纹. 如图 14-43, 过 P 点和与平凹透镜底面平行的参考平面 AB . 第 j 级暗圆环所对应的光程差公式为

$$2nh_j = j\lambda$$

第 j 级暗环的半径 r_j 为

$$\frac{r_j^2}{2R} = h_0$$

即

$$r_j = \sqrt{2Rh_0}$$

而且 $h_j = h - h_0$

综合以上的结果, 得 j 级暗环的半径为

$$r_j = \sqrt{R\lambda} \sqrt{\frac{2h}{\lambda} - \frac{j}{n}}$$

在已知条件下,

$$\frac{2h}{\lambda} = \frac{2 \times 1.82 \times 10^{-6}}{589 \times 10^{-9}} = 6.18$$

故

$$r_j = \sqrt{R\lambda} \sqrt{6.18 - \frac{j}{n}}$$

可见随着级次 j 的增大, 条纹半径逐渐减小, 条纹间距也随着越来越小.

(2) 观察到的最高级次为

$$r_j = 0$$

$$\text{即 } j = \frac{2h}{\lambda} n = 10.01$$

最多能看到 10 条暗条纹.

(3) 当 $j=0$ 时, 对应零级暗条纹. 它位于视场的最外围, 其暗环半径为

$$r_0 = \sqrt{2Rh} = \sqrt{2 \times 2.75 \times 10^3 \times 1.82 \times 10^{-6}} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

方法与技巧 本题属薄膜干涉的典型例题, 求解此类问题, 应先计算出液体薄膜上、下两表面的反射光之光程差. 就本题而言, 光程差为

$$\delta = 2nh_j - \frac{\lambda}{2}$$

其中, $\frac{\lambda}{2}$ 是由于液体折射率大于玻璃折射率而引进的额外光程差, 于是干涉极小的条件为

$$2nh_j - \frac{\lambda}{2} = (2j-1) \frac{\lambda}{2} \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

或

$$2nh_j = j\lambda$$

在此基础上, 再根据有关几何知识, 求出暗环半径的解析表达式, 即可分析出干涉条纹的形状和分布. 这是求解本题的关键.

例 16 块规是机加工里用的一种长度标准,它是一钢质长方体,它的两个端面经过抛平磨光,达到相互平行.图 14-44 中, G_1 、 G_2 是同规号的两个块规, G_1 长度是标准的, G_2 是要校准的.校准方法如下:把 G_1 和 G_2 放在钢质平台上,使面和面严密接触, G_1 、 G_2 上面用一透明平板 T 压住.如果 G_1 和 G_2 的高度(即长度)不等,微有差别,则在 T 和 G_1 、 G_2 之间分别形成尖劈形空气薄层,它们在单色光垂直照射下各产生干涉条纹.

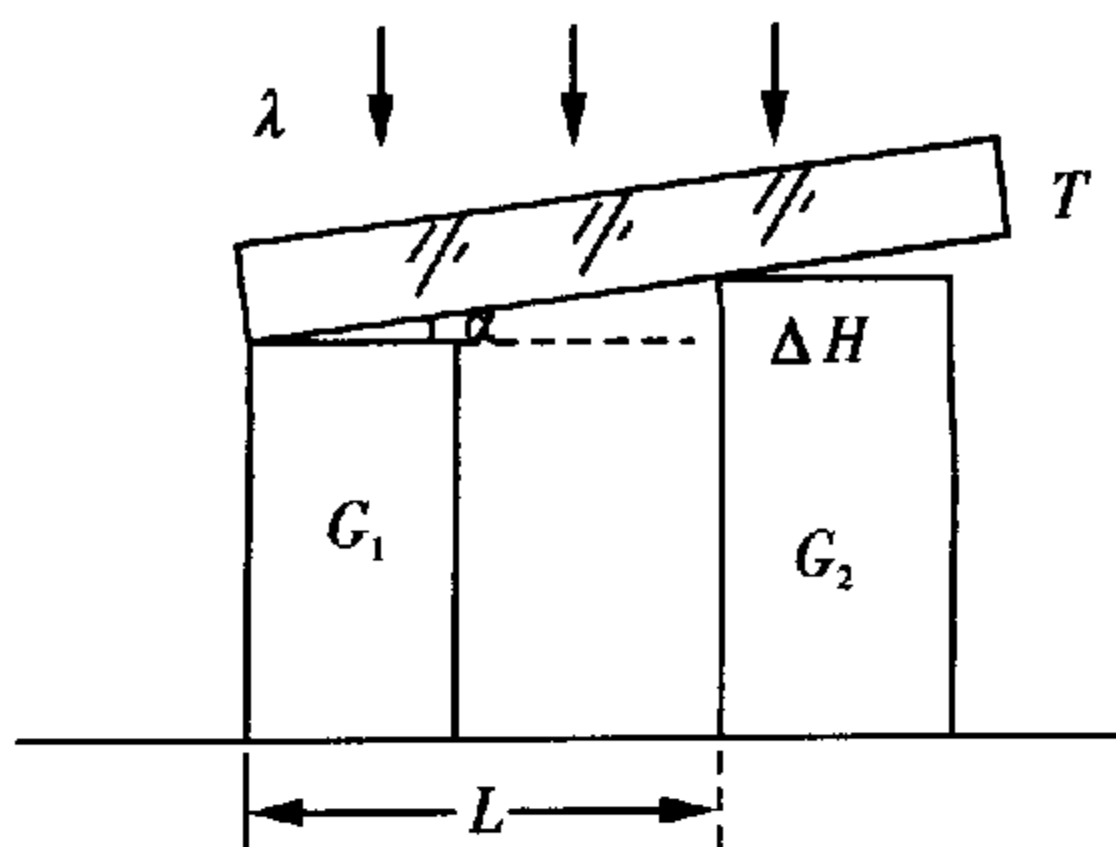


图 14-44

(1) 设入射光的波长为 5893 \AA , G_1 和 G_2 相隔 $L = 5 \text{ cm}$, T 和 G_1 、 G_2 间的干涉条纹间距都是 0.5 mm , 试求 G_2 和 G_1 的高度之差, 怎样判断它们谁长谁短?

(2) 如果 T 和 G_1 间的干涉条纹的间距是 0.5 mm , 而 T 和 G_2 间的是 0.3 mm , 则说明什么问题?

解析 (1) 如图 14-45, 空气薄层为尖劈形, 其折射率近似为 1.0, 空气层上表面和下表面的反射光叠加后产生干涉极大的条件是

$$2h - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

相邻两干涉极大处空气层的厚度差为

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2}$$

由于劈的棱角 α 很小, 故条纹间距 Δx 与相应的厚度变化之间的关系为

$$\Delta h \approx \alpha \cdot \Delta x$$

由此可得

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

在本题(1)中, 两个劈形空气层的干涉条纹间距相等, 均为 0.5 mm , 因此两空气层的棱角也必然相等, 均为 $\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot \Delta x}$, 于是 G_2 和 G_1 的高度差

$$\Delta H \approx \alpha \cdot L = \frac{\lambda}{2\Delta x} L = 29.47 \text{ \mu m}.$$

当然, 要判断哪块高, 就不是图上画的那么显而易见了, 仅靠静态条纹的性质是无法做出判断的. 为此, 轻压盖板 T 的中部, 两处条纹疏密变化正好相反, 条纹变密的一端块规长, 条纹变疏的一端块规短.

(2) 这说明 G_2 上下两表面有不平行度, 致使其上表面不严格平行 G_1 的上表面, 造成两边空气层劈角不等, 劈角差(用以量度不平行度)为

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \left(\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1} \right) \frac{\lambda}{2} = 3.93 \times 10^{-4} \text{ 弧度} = 1.35'$$

方法与技巧 尖劈形薄膜干涉在实践中有着广泛的应用, 在计算两相干光的光程差的基础上分析干涉条纹的性质是求解的基本方法. 题中判断 G_1 和 G_2 的高低, 则需要利用条纹的动态变化规律,

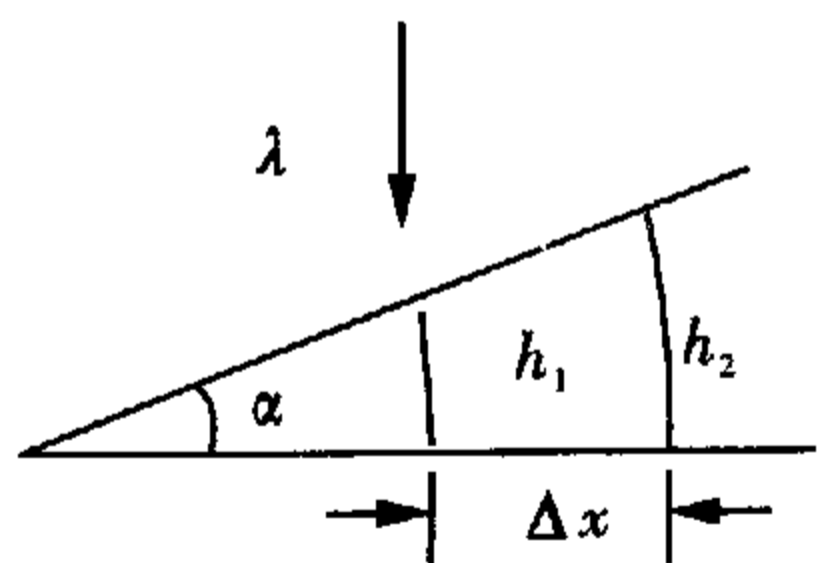


图 14-45

这就要求读者全面掌握并能灵活运用有关知识.

例 17 如图 14-46 所示,在真空中有一个折射率为 n ($n > n_0$, n_0 为真空的折射率)、半径为 r 的质地均匀的小球. 频率为 ν 的细激光束在真空中沿直线 BC 传播,直线 BC 与小球球心 O 的距离为 l ($l < r$),光束于小球体表面的 C 点经折射进入小球(小球成为光传播的媒质),并于小球表面的 D 点又经折射进入真空. 设激光束的频率在上述两次折射后保持不变,求在两次折射过程中激光束中一个光子对小球作用的平均力的大小.

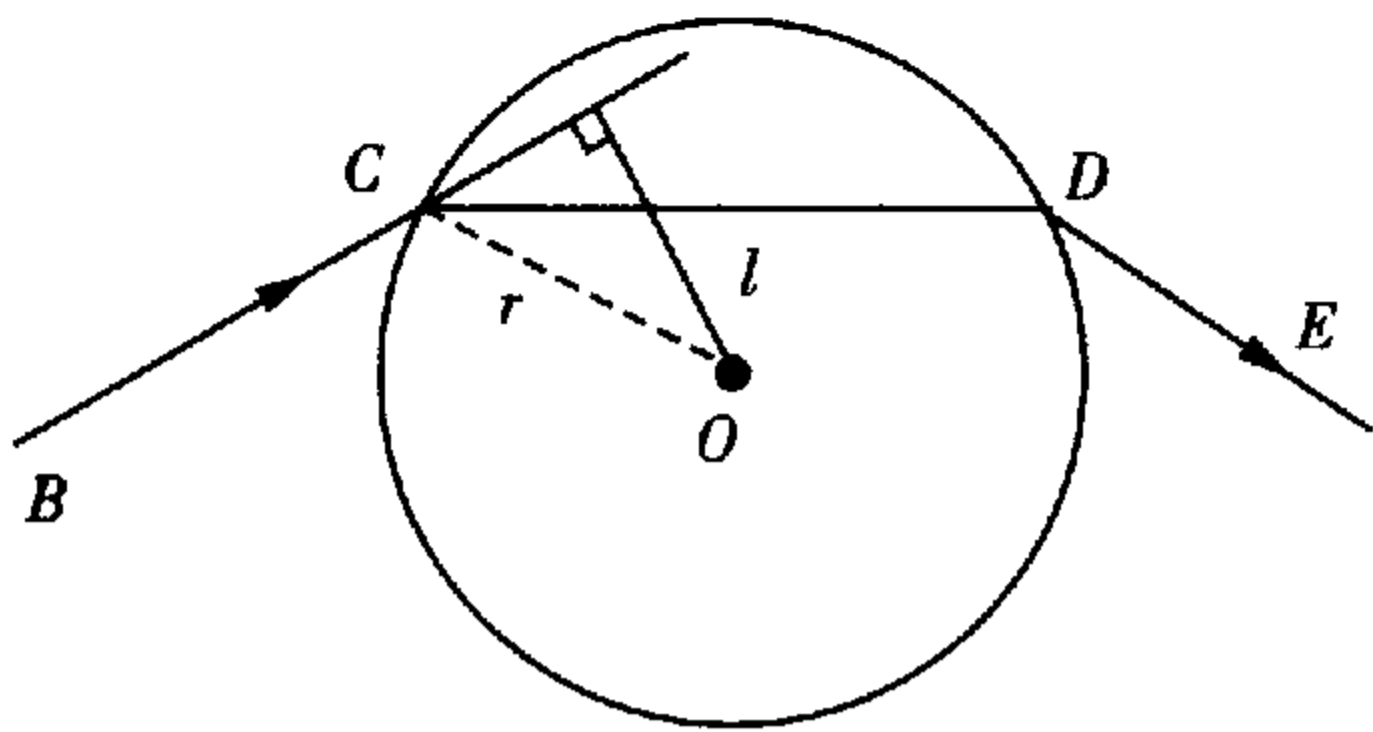


图 14-46

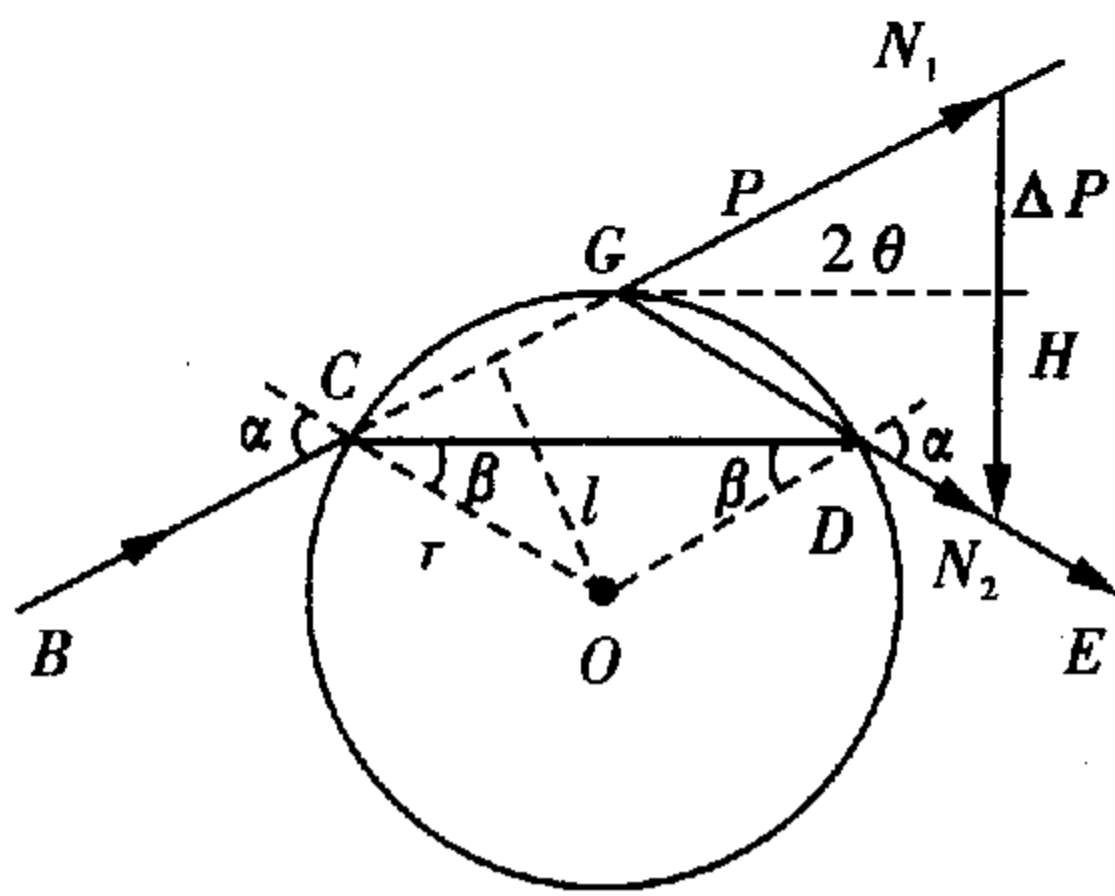


图 14-47

解析 在由直线 BC 与小球球心 O 所确定的平面中,激光光束两次折射的光路 $BCDE$ 如图 14-47 所示. 图中入射光线 BC 与出射光线 DE 的延长线交于 G 点. 按照光的折射定律,有

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta$$

式中 α 和 β 分别是相应的人射角和折射角,由几何关系还可知

$$\sin \alpha = \frac{l}{r}$$

激光光束经两次折射,其频率 ν 保持不变,故在两次折射前后,光束中一个光子的动量的大小 p 和 p' 相等,即

$$p = \frac{h\nu}{c} = p' \quad \text{式中 } c \text{ 为真空中的光速, } h \text{ 为普朗克常数. 因射入小球的光束中光子的动量 } p \text{ 沿 } BC$$

方向,射出小球的光束中光子的动量 p' 沿 DE 方向,光子动量的方向由于光束的折射而偏转了一个角度 2θ ,由图中几何关系可知

$$2\theta = 2(\alpha - \beta)$$

若取线段 GN_1 的长度正比于光子动量 p , GN_2 的长度正比于光子动量 p' ,则线段 N_1N_2 的长度正比于光子动量的改变量 Δp . 由几何关系得

$$\Delta p = 2p \sin \theta = 2 \frac{h\nu}{c} \sin \theta$$

ΔGN_1N_2 为等腰三角形,其底边上的高 GH 与 CD 平行,故光子动量的改变量 Δp 的方向沿垂直于 CD 的方向,且由 C 指向球心 O .

光子与小球作用的时间可认为是光束在小球内的传播时间. 即

$$\Delta t = \frac{2r \cos \beta}{cn_0/n}$$

式中 cn_0/n 是光在小球内的传播速率.

按照牛顿第二定律,小球对光子的作用的平均力大小为

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{n_0 h \nu \sin \theta}{nr \cos \beta}$$

按照牛顿第三定律,光子对小球的作用的平均力大小 $F = f$,即

$$F = \frac{n_0 h \nu \sin \theta}{nr \cos \beta}$$

力的方向由 O 指向 G . 将前面得到的有关表达式代入上式,经过演算最后可得

$$F = \frac{n_0 h \nu}{nr^2} \left[1 - \sqrt{\frac{r^2 - l^2}{(nr/n_0)^2 - l^2}} \right]$$

方法与技巧 激光对小球有力的作用,是激光束中光子将动量传递给小球的结果. 光子具有动量,是对光的微粒性的有力支持. 求解本题最重要之处是确定光子的动量的改变量 ΔP 的大小与方向,另外,也要注意综合运用相关力学知识与几何知识.

例 18 图 14-48 所示,波长为 λ_0 的光子与一运动自由电子相碰,碰后电子静止,原光子消失,产生一个波长为 λ_1 的光子,后者的运动方向与原光子的运动方向成 $\theta = 60^\circ$ 角. 之后此光子又与一个静止的自由电子相碰,碰后此光子消失,同时产生一个波长为 $\lambda_2 = 0.125 \text{ nm}$ 的光子. 后者的运动方向又与碰前光子的运动方向成 $\theta = 60^\circ$ 角,如图 14-49 所示. 试求第一个运动电子的德布罗意波长.

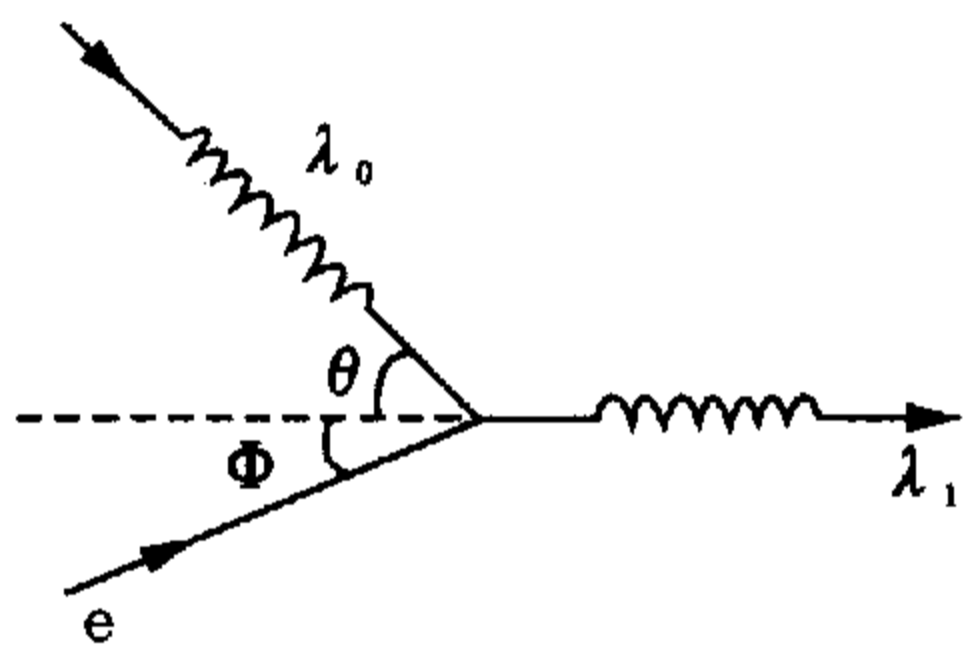


图 14-48

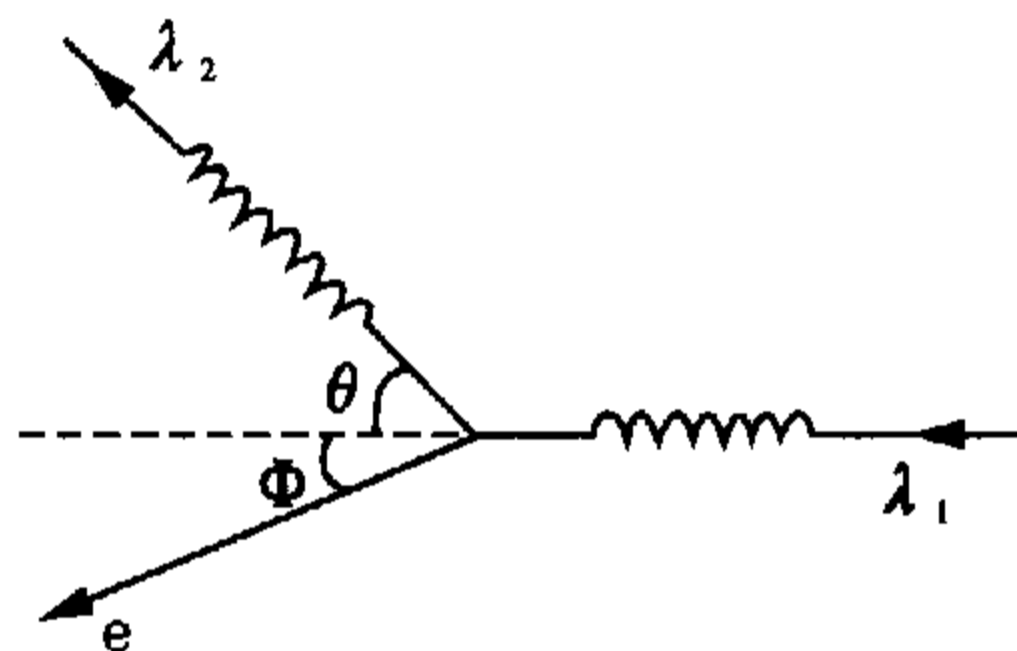


图 14-49

解析 电子的德布罗意波长为 $\lambda_e = \frac{h}{p_e}$, 其中 p_e 为电子的动量. 只要求出运动电子碰前的动量 p_e , 即可求得 λ_e . 两次碰撞过程均遵守能量守恒和动量守恒定律. 光子能量为 $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, 光子动量为 $\frac{h}{\lambda}$. 列出两个碰撞过程的能量守恒和动量守恒的表达式, 并利用关于动量和能量的相对论公式, 即可求解.

第一次碰撞过程的能量守恒与动量守恒可表示为

$$\begin{cases} h\nu_0 + E_e = h\nu_1 + m_0 c^2 \\ \frac{h}{\lambda_0} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{h}{\lambda_1} \\ \frac{h}{\lambda_0} \sin \theta - p_e \sin \phi = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} h\nu_0 + E_e = h\nu_1 + m_0 c^2 & \text{①} \\ h\nu_0 \cos \theta + cp_e \cos \phi = h\nu_1 & \text{②} \\ h\nu_0 \sin \theta - cp_e \sin \phi = 0 & \text{③} \end{cases}$$

式中 E_e 为碰前电子的总能量, m_0 为电子的静止质量, p_e 为碰前电子的动量. 动量与能量的相对

论关系为

$$p_e^2 c^2 = E_e^2 - m_0^2 c^4 \quad (4)$$

由以上四式可解出 ν_0 与 ν_1 之间的关系

由②、③式, 消去 ϕ , 得

$$(p_e c)^2 = (h\nu_1)^2 - 2(h\nu_1)(h\nu_0)\cos\theta + (h\nu_0)^2 \quad (5)$$

把④式代入, 得

$$E_e^2 - m_0^2 c^4 = (h\nu_1)^2 - 2h^2 \nu_1 \nu_0 \cos\theta + (h\nu_0)^2$$

再与①式联立, 消去 E_e , 得

$$[(h\nu_1)^2 + (h\nu_0)^2 + (m_0 c^2)^2 - 2h^2 \nu_1 \nu_0 + 2hm_0 c^2(\nu_1 - \nu_0)] - m_0^2 c^4 = h^2 \nu_1^2 - 2h^2 \nu_1 \nu_0 \cos\theta + h^2 \nu_0^2$$

$$\text{即 } m_0 c^2(\nu_1 - \nu_0) = h\nu_1 \nu_0(1 - \cos\theta)$$

$$\text{或 } \frac{1}{\nu_0} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

利用 $\lambda = \frac{c}{\nu}$, 上式可改写为

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \quad (6)$$

注意到第二次碰撞相当于第一次碰撞的逆过程(比较图 14-48 与图 14-49). 故①、②、③、④式同样适用于第二次碰撞过程, 只需将 λ_2 代替 λ_0 即可. 因而⑥式也适用于第二次碰撞过程(以 λ_2 代替 λ_0), 有

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \quad (7)$$

对于两次碰撞, λ_1 与 θ 均相同, 比较⑥、⑦两式, 有 $\lambda_0 = \lambda_2 = 0.125 \text{ nm}$

代入⑥式, 得 $\lambda_1 = 0.1238 \text{ nm}$

$$\text{由⑤式, 得 } p_e^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_0} \cos\theta + \frac{1}{\lambda_0^2} \right)$$

$$\text{因 } p_e = \frac{h}{\lambda_e}$$

$$\text{代入, 得 } \frac{1}{\lambda_e^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda_1 \lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0^2}$$

把 λ_e 和 λ_1 的值代入, 得 $\lambda_e = 0.124 \text{ nm}$

方法与技巧 本题考察光与物质相互作用的微观过程. 通过本题的求解, 我们了解到在微观现象中, 能量守恒和动量守恒两个守恒定律也严格地适用, 大量的其他电像实验也都证实了这个结论.

本题的现象称为康普顿效应, 求解本题一是用到光量子概念, 二是引用了经典力学中粒子弹性碰撞的概念, 对两次碰撞过程分别应用上述两个守恒定律, 康普顿效应就可以得到解释. 康普顿效应一直被认为是光的微粒性的有力证据之一.

【解题尝试】

1. 有一块透明光学材料, 由折射率略有不同的许多相互平行的、厚度 $d = 0.1 \text{ mm}$ 的薄层紧密连接构成, 图 14-50 表示各薄层互相垂直的一个截面, 若最下面一层的折射率为 n_0 , 从它往上数第 K 层的折射率为 $n_K = n_0 - Kv$, 其中 $n_0 = 1.41$, $v = 0.025$, 今有一光线以入射角 $i = 60^\circ$ 射向 O 点, 求此光

线在这块材料内能达到的最大深度.

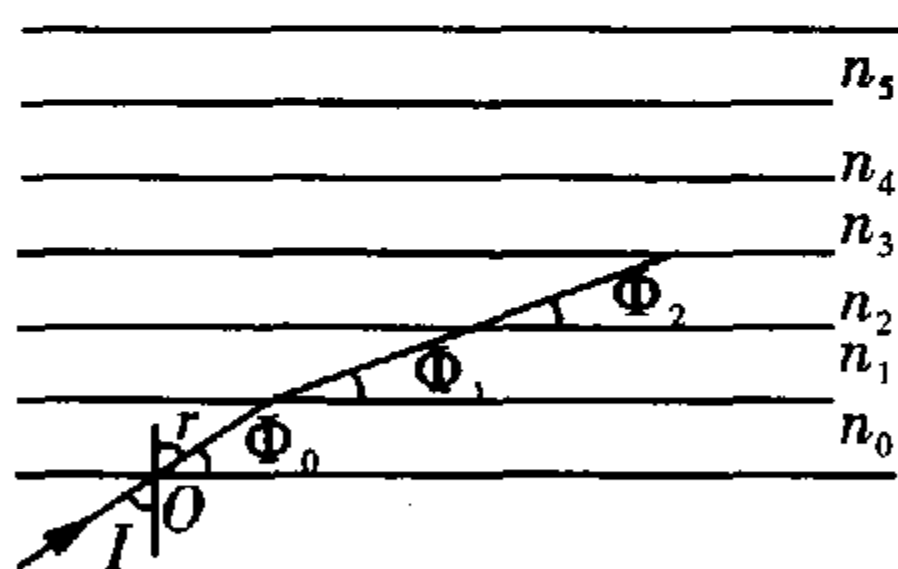


图 14-50

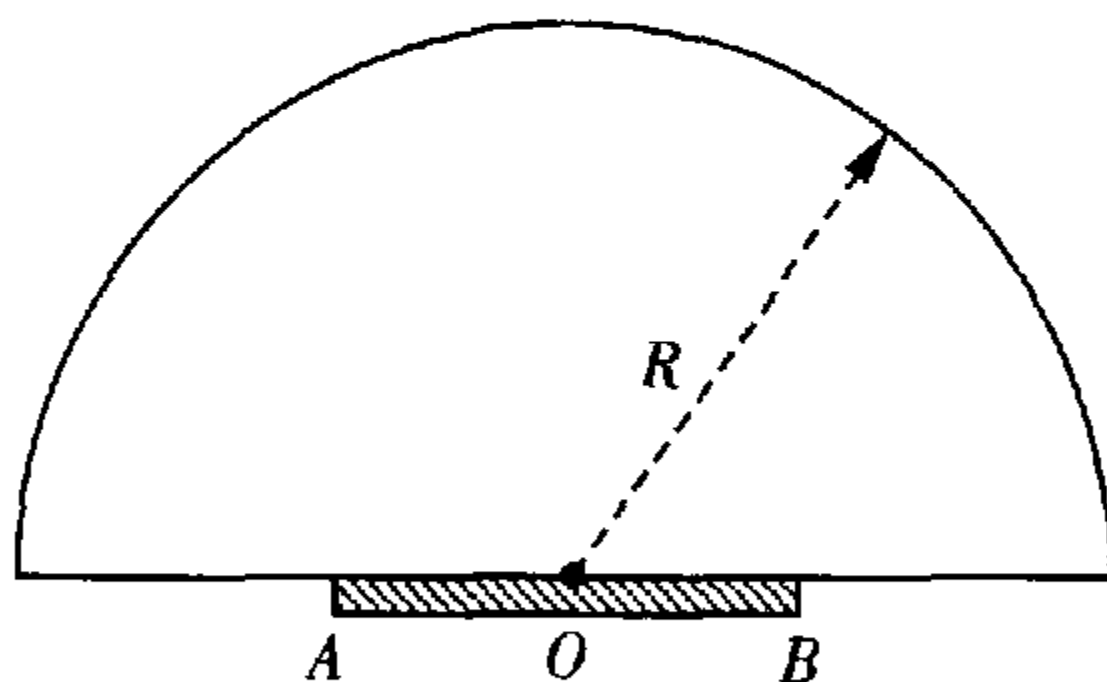


图 14-51

2. 有一半导体砷化镓发光管,它发出波长为 $0.9 \mu\text{m}$ 的红外光. 发光区为直径 AB 等于 3 mm 的圆盘, 发光面上覆盖一折射率 $n = 3.4$ 的半球形介质, 如图 14-51 所示. 问: 要使发光区发出的全部光线在球面上都不发生全反射, 介质半球的半径 R 至少应该多大?
3. 有一光导纤维, 光芯为折射率 $n = 1.500$ 的透明度极好的介质, 其截面半径为 r ; 光芯外面包层的折射率 $n' = 1.400$. 有一半导体激光器 S , 位于光纤轴线的延长线上, 发出半角宽为 30° 的光束. 为便于此光束全部进入光纤, 在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同、半径为 R 的球冠 QAQ' , 端面附近的结构如图 14-52 所示(包层未画出). S 可看作点光源, 光纤放在空气中, 空气的折射率 n_0 按 1.000 计算.

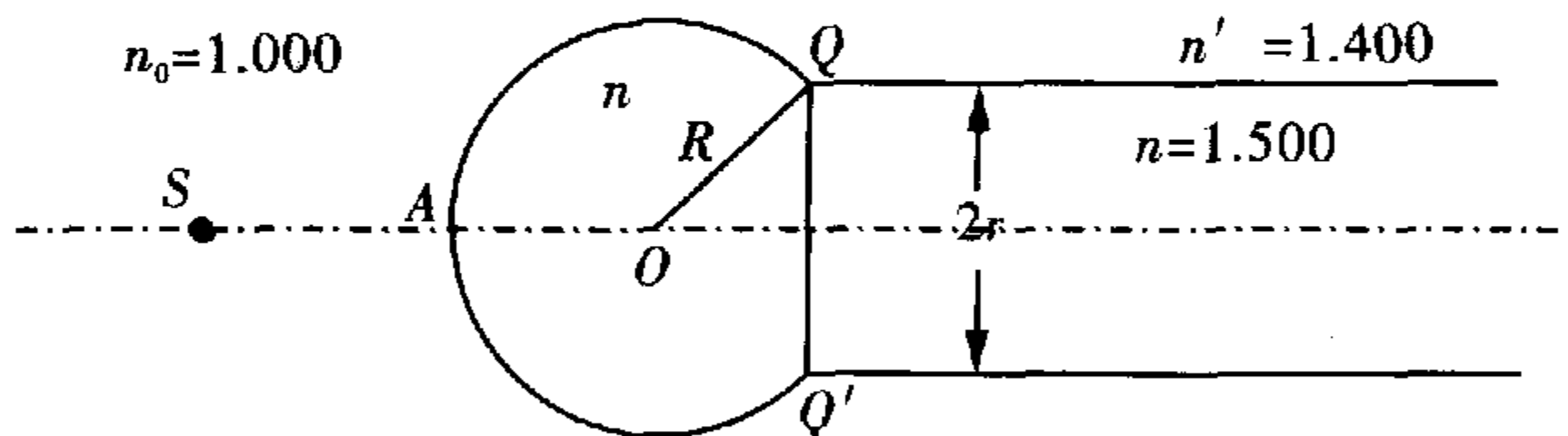


图 14-52

- (1) 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上, 则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件?
- (2) 如果 $R = 1.8r$, 光源 S 与 A 点的距离为 R , 入射线与轴的夹角用 α 表示, 则 α 角分别为 $\alpha_1 = 30^\circ$ 、 $\alpha_2 = 25^\circ$ 和 $\alpha_3 = 20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?
4. 利用同心球面镜组在屏上得到太阳的像(图 14-53). 为了用薄凸透镜得到太阳同样大小的像, 试问此透镜焦距应该为多少? 两球面镜的曲率半径分别为 $R_1 = 12 \text{ cm}$ 和 $R_2 = 30 \text{ cm}$.

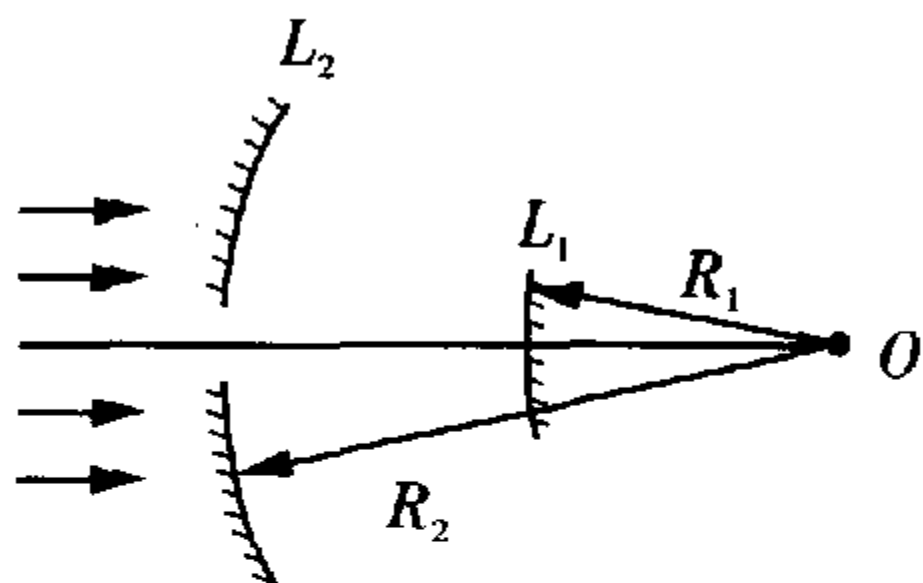


图 14-53

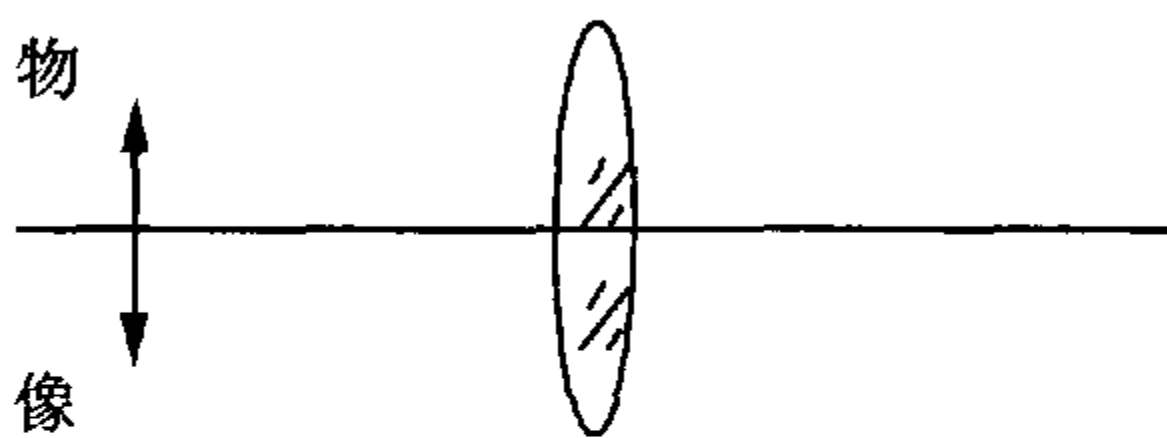


图 14-54

5. 如图 14-54 所示, 一个双凸薄透镜的两个球面的曲率半径为 r ($r > 0$), 透镜的折射率为 n . 考察由透镜表面反射所形成的实像, 试问物放在轴上何处可使反射像与物位于同一平面内(不考虑多重

反射)?

6. 薄凸透镜放在空气中时, 两侧焦点与透镜中心的距离相等. 如果此薄透镜两侧的介质不同, 其折射率分别为 n_1 和 n_2 , 则透镜两侧仍各有一焦点(设为 F 和 f'), 但 Ff' 和透镜中心的距离不相等, 其值分别为 f 和 f' . 现有一薄凸透镜 L , 已知此凸透镜对平行光束起会聚作用, 在其左右两侧介质的折射率及焦点的位置如图 14-55 所示.

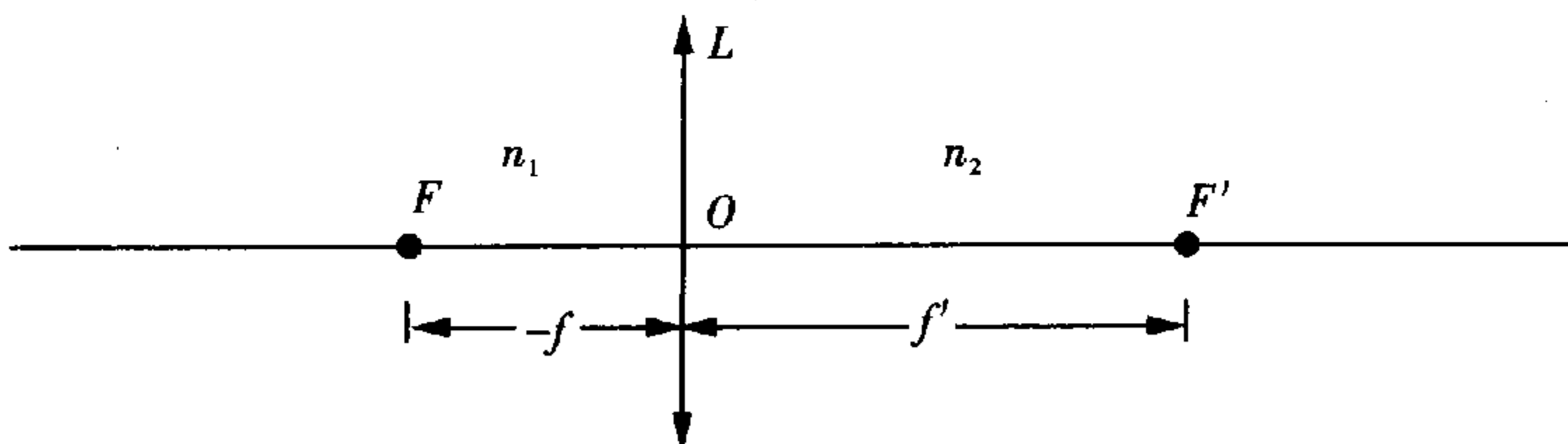


图 14-55

(1) 试求出此时物距 s , 像距 s' , 焦距 f, f' 四者之间的关系式.

(2) 若有一近轴光线射向透镜中心, 已知它与透镜主轴的夹角为 θ_1 , 则与之相应的出射线与主轴的夹角 θ_2 多大?

(3) f, f', n_1, n_2 四者之间有何关系?

7. 如图 14-56 所示, 在薄壁玻璃水槽外壁贴着由同种玻璃制成的平凸薄透镜, 透镜在空气中的焦距为 f'_0 . 已知水、玻璃和空气的折射率分别为 $n_1 = \frac{4}{3}, n = \frac{3}{2}, n_2 = 1$, 在透镜光轴上距内壁为 f'_0 处有一物点 P , 试求:

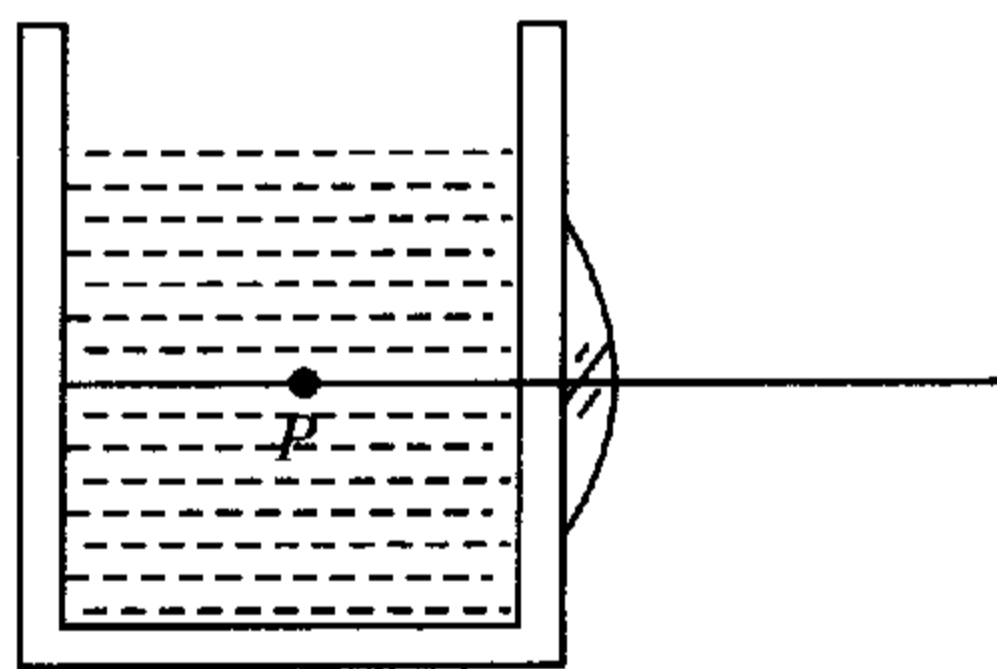


图 14-56

(1) 像的位置和垂轴放大率;

(2) 若将透镜贴在水槽内壁, 结果如何?

8. 图 14-57 中 L 为凸透镜, 焦距 $f' = 30\sqrt{3}$ cm. 有一单色平行光束, 其方向与透镜的主轴平行. 现于透镜前方放一正三棱镜. 缓缓转动三棱镜, 当入射光的入射角和出射光的出射角相等时, 在透镜的焦面上距焦点 $y = 30$ cm 处形成一像点. 据此求三棱镜材料对此单色光的折射率 n .

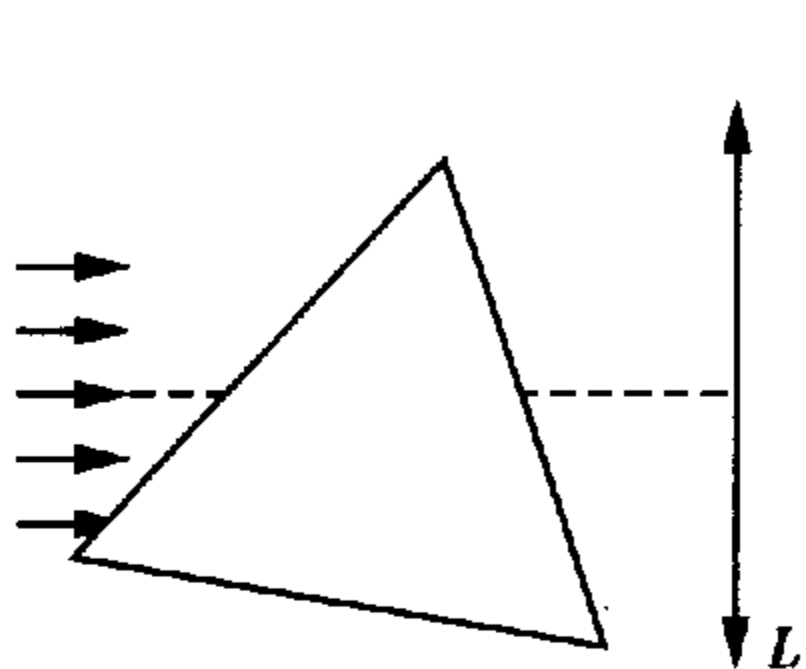


图 14-57

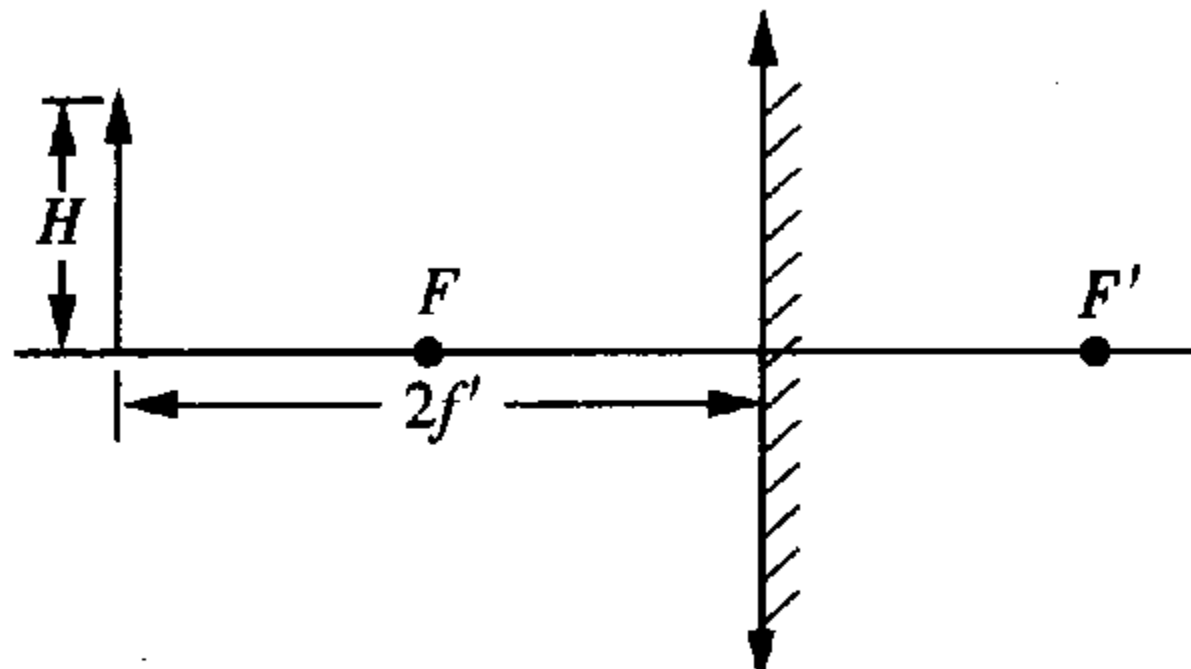


图 14-58

9. 一平凸薄透镜焦距为 f' , 其平面上镀了银, 现在其凸面一侧距它 $2f'$ 处, 垂直于主轴放置一高为 H 的物, 其下端在透镜的主轴上(如图 14-58).

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像, 并标明该像是虚还是实.

(2) 用计算法求出此像的位置和大小.

10. 两个焦距分别为 f'_1 和 f'_2 的薄凸透镜 L_1 和 L_2 , 相距为 d , 被共轴地安置在光具座上.
- (1) 若要求入射光线和与之对应的出射光线相互平行, 问该入射光线应满足什么条件?
- (2) 根据所得结果, 分别画出各种可能情况下的光路示意图.
11. 两个光学元件共轴放置, 位置固定不动, 每个光学元件都可能是薄透镜或平面反射镜. 一小物垂直于主轴, 已知当小物位于两元件之间的任何位置时, 由这光学系统成的像是有限多个, 且两个最后的像大小相同. 试通过对各种可能情况的分析, 论证什么样的光学系统能满足上面的要求, 什么样的光学系统不能满足上面的要求.
12. 图 14-59 中, 三棱镜的顶角 α 为 60° , 在三棱镜两侧对称位置上放置焦距均为 $f' = 30.0 \text{ cm}$ 的两个完全相同的凸透镜 L_1 和 L_2 . 若在 L_1 的前焦面上距主光轴下方 $y = 14.3 \text{ cm}$ 处放一单色点光源 S , 已知其像 S' 与 S 对该光学系统是左右对称的. 试求该三棱镜的折射率.

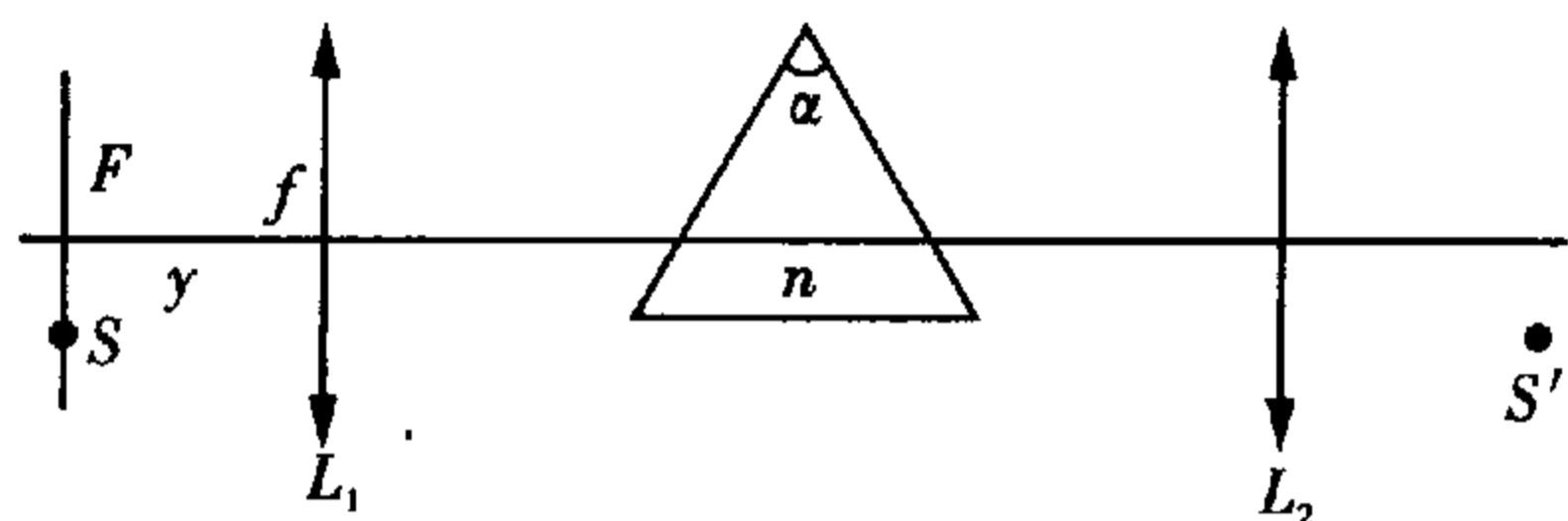


图 14-59

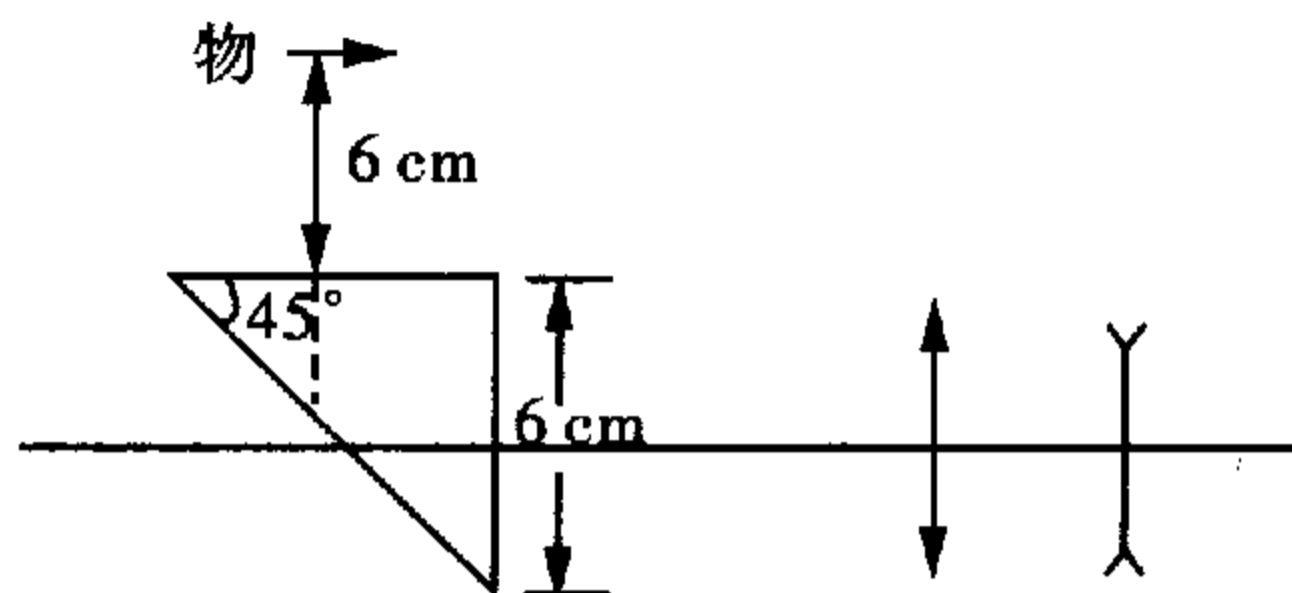


图 14-60

13. 图 14-60 所示的是一个等边直角棱镜和两个薄透镜所组成的光学系统. 棱镜折射率为 1.5, 凸透镜的焦距为 20 cm, 凹透镜的焦距为 10 cm, 两透镜间距为 5 cm, 凸透镜距棱镜边的距离为 10 cm, 求图中长度为 1 cm 的物体所成像的位置和大小.
14. 图 14-61 是非涅耳双棱镜干涉实验的示意图, 其中棱镜的折射率为 n , 棱镜很小的顶角为 θ , 狭缝 S_0 与 BC 平行, 且 $S_0A \perp BC$. 由 S_0 发出的单色光通过双棱镜分为两束, 好像是直接来自两个虚像的相干光源 S_1 和 S_2 . S_0 到 BC 的距离为 L_1 , BC 到与它平行的屏 M 的距离为 L_2 .
- (1) 证明: S_1 和 S_2 之间的距离 $d = 2L_1\theta(n-1)$;
- (2) 若 $n = 1.5$, $\theta = 6'$, $L_1 = 20 \text{ cm}$, $L_2 = 2 \text{ m}$, 照射光波长为 500 nm, 求屏上第 2 级明纹 (O 的上方或下方的第 2 条明纹) 距 O 点多远?

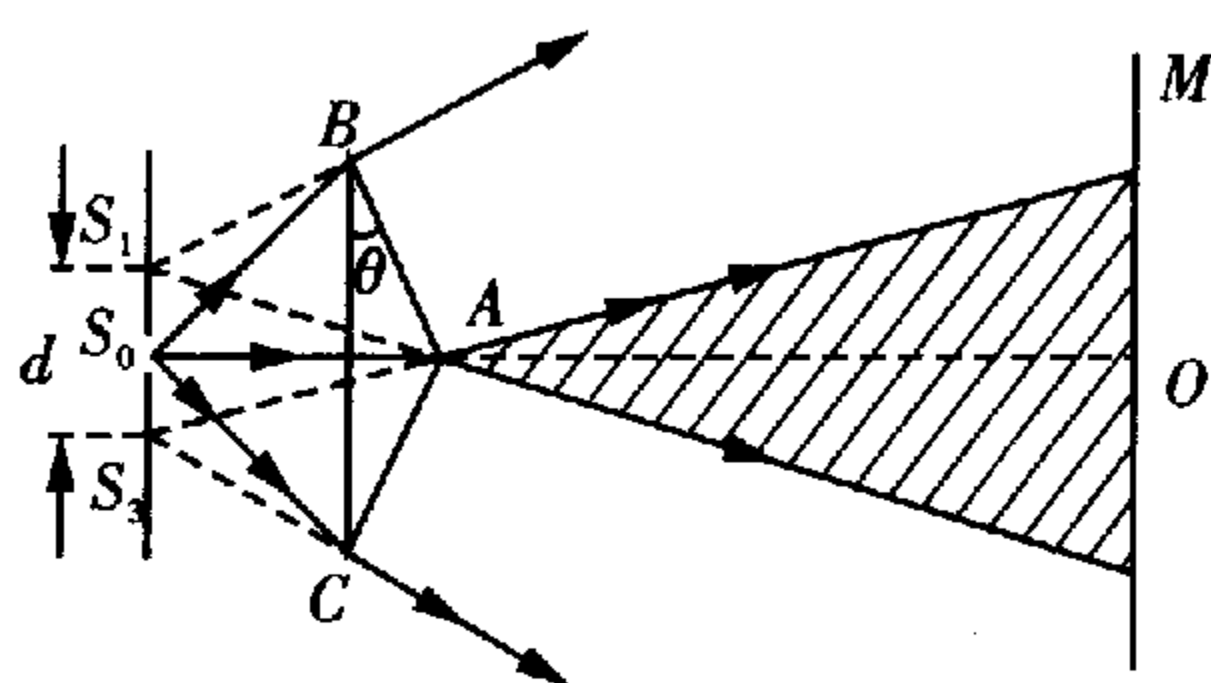


图 14-61

15. 图 14-62 中示出的是: 两平面玻璃板在一边相接, 在与此边距离 20 cm 处夹一直径为 0.05 mm 的细丝, 以构成两玻璃片间的空气尖劈薄膜. 若用钠黄光 ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) 垂直照射. 问: 两相邻干涉

条纹的间距是多少? 这一实验有何实际意义?

16. 为了证明光的微粒性,有人用强度极弱($n_0 = 1000$ 量子/秒)的 x 光照射直径为 $d = 0.6 \mu\text{m}$ 的铋层,从铋层到点状光源的距离 $L = 0.2 \text{ mm}$,平均每隔 $t = 30$ 分钟,铋层就损失一个光电子. 证明根据光量子概念推导出的正是这样的时间值.
17. 一理想的凸透镜. 它容许入射光完全透过. 此透镜直径 $D = 10 \text{ cm}$,焦距 $f' = 15 \text{ cm}$,水平放置. 四束激光沿竖直方向对称地入射到透镜靠边缘处. 已知四束激光的总功率 $W = 1.2 \text{ J/s}$,求激光对透镜之作用力.
18. 处在激发态的氢原子向能量较低的状态跃迁时会发出一系列不同频率的光,称为氢光谱. 氢光谱线的波长 λ 可以用下面的巴耳末 - 里德伯公式来表示:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

n, k 分别表示氢原子跃迁前后所处状态的量子数 $k = 1, 2, 3, \dots$, 对于每一个 k , 有 $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$, R 称为里德伯常量, 是一个已知量. 对于 $k = 1$ 的一系列谱线其波长处在紫外线区, 称为赖曼系; $k = 2$ 的一系列谱线其波长处在可见光区, 称为巴耳末系.

用氢原子发出的光照射某种金属进行光电效应实验, 当用赖曼系波长最长的光照射时, 遏止电压的大小为 U_1 , 当用巴耳末系波长最短的光照射时, 遏止电压的大小为 U_2 . 已知电子电荷量的大小为 e , 真空中的光速为 c , 试求: 普朗克常量和该种金属的逸出功.

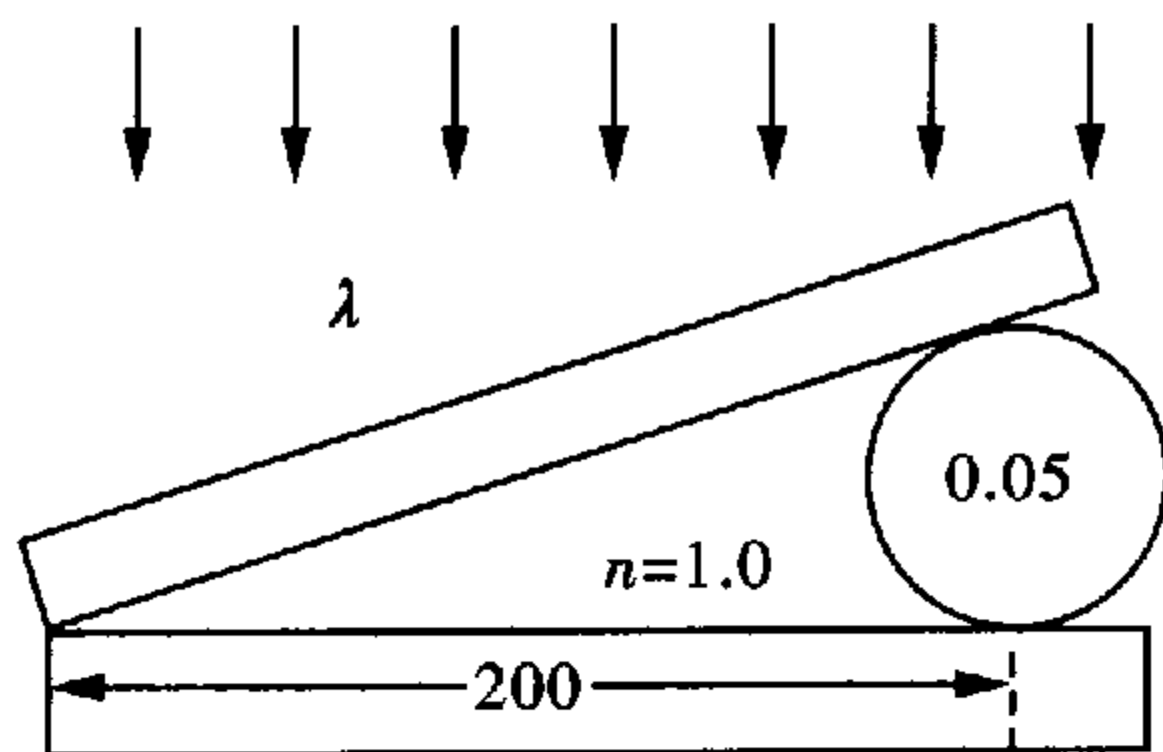


图 14 - 62

第十五章 近代物理

【学习目标】

一、原子的核式结构

1911年,卢瑟福提出了原子的核式结构模型,在这个结构中,有一个带正电的中心体原子核,所带正电的数值是原子序数乘单元电荷值,原子核外散布着带负电的电子.原子质量的绝大部分是原子核的质量.此结构模型较好地解释了 α 粒子散射实验,并由实验数据可估计出原子核的半径约为 10^{-15} m到 10^{-14} m之间,原子的半径约为 10^{-10} m.

二、氢原子光谱规律

1885年,巴尔末得出了氢原子光谱线波长的经验公式(即巴尔末公式):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

式中 $R = 1.096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$,称为里德伯常数.1889年,里德伯发现氢原子光谱的所有波长可用一个普遍的经验公式表示出来:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots$$

上式称为里德伯方程,也叫广义巴尔末公式.

实验发现,所有原子都有其独特的光谱,这些原子光谱均是分离的线状谱,具有确定的波长值.用卢瑟福的经典原子结构模型无法解释这种现象.另外,该经典模型还无法解释原子的稳定性,由此,导致了玻尔氢原子理论的产生.

三、玻尔模型理论

1913年,玻尔将卢瑟福的原子核式结构模型、描述氢原子光谱的里德伯方程及普朗克、爱因斯坦的量子化概念巧妙地联系起来,提出了开创性的三假设:

1. 定态假设:原子中的电子绕核作圆周运动,并不向外辐射能量,其轨道半径只能取一系列不连续值,对应的原子处于稳定的能量状态.

2. 跃迁假设:电子从一个定态轨道(设对应的原子定态能量为 E_{n_2})跃迁到另一定态轨道(设定态能量为 E_{n_1})上时,会辐射或吸收一定频率的光子,能量由这两种定态的能量差决定,即

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}$$

3. 角动量子化假设:电子绕核运动,其轨道半径不是任意的,只有电子的轨道角动量(轨道半径 r 和电子动量 mv 的乘积)满足下列条件的轨道才是允许的.

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

式中的正整数 n 称为量子数.

将以上三个假设应用于氢原子,可以从理论上导出里德伯方程,成功地解释氢原子的能级和氢光谱的实验规律.

氢原子的能级公式为

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = E_1 \frac{1}{n^2}$$

其中 $E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$, 为氢原子的第一能级,也称氢原子的基态能, $n > 1$ 的能态称为氢原子的激发态, $n \rightarrow \infty$ 时, $E_n = 0$, 此时电子远离原子核成为自由电子,整个体系称为原子的电离态.

里德伯常数的理论值为 $R_{\text{理}} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1.0973731 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 与实验值 $R_{\text{实}} = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

比较,相对误差为 $\frac{|R_{\text{理}} - R_{\text{实}}|}{R_{\text{实}}} = \frac{5}{10000}$. 而当时光谱学的实验精度已达到万分之一.

误差原因:在推导过程中,假设原子核是静止不动的. 这相当于把原子核的质量视为无限大,实际上原子核的质量并不是无限大,原子中的电子和原子核都绕着其质心运动,这个运动可以等效地看作质量为 μ 的粒子绕着静止的原子核运动, μ 为体系的折合质量, $\mu = \frac{Mm}{M+m}$, 其中 m 和 M 分别为电

子和原子核的质量. 修正后的里德伯常数为: $R = R_{\infty} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}$, 式中的 R_{∞} 即为 $R_{\text{理}}$. 将氢原子和电子的

质量代入得: $R_H = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 理论值和实验值符合得非常好.

四、原子的受激辐射——激光

原子辐射有两种情形:

1. 自发辐射:处于激发态 E_2 的原子不稳定(寿命 $\tau \approx 1 \times 10^{-8} \text{ s}$), 自发地跃迁到低能级 E_1 上, 同时辐射光子 ($h\nu = E_2 - E_1$). 普通光源发光就属于这种辐射. 它辐射的光子彼此独立, 发射方向和初位相都不相同, 所以我们可以从各个方向看到它的光.

2. 受激辐射:原子处于激发态 E_2 时, 恰好有能量为 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子趋近它, 原子就可能受此外来光子的激励而跃迁到能态 E_1 上, 同时发射出一个和外来光子完全一样的光子.

激光就是由受激辐射产生的:原子因入射光子的激励而受激辐射一个完全相同的光子, 光子数变为两个, 如果这两个光子再激励其他原子发生受激辐射, 就会产生越来越多的相同的光子, 使光得到加强, 实现了光放大, 形成强烈的激光束, 激光具有高单色性、高相干性、高亮度, 并且方向性极好.

五、物质的二象性 不确定关系

1924年, 德布罗意从光的波粒二象性推断实物粒子, 如电子、质子等也具有波动性, 即实物粒子也具有二象性. 同实物粒子相联系的波称为德布罗意波, 其波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

式中 $p = mv$ 是实物粒子的动量. 实物粒子的波动性已经被大量实验所证实.

在经典力学的概念中, 一个粒子的位置和动量是可以同时精确测定的. 在量子理论发展后, 揭示出, 要同时测出微观物体的位置和动量, 其精密度是有一定限制的. 这个限制来源于物质的二象性.

海森伯从量子理论推理,测量一个微粒的位置时,如果不确定范围是 Δx ,那么同时测得其动量也有一个不确定范围 Δp , Δx 与 Δp 的关系为

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

此式称为海森伯不确定关系,其中 h 为普朗克常数. 这公式表示出同时测定一个微粒的位置和动量的精密度的极限.

不确定关系是普遍原理,它不但存在于位置和动量之间,也存在于能量与时间之间. 一个体系(例如原子体系)处于某一状态,如果时间有一段 Δt 不确定,那么它的能量也有一个范围 ΔE 不确定,二者的乘积有如下关系:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

六、原子核的基本性质

1. 原子核的电荷、质量和大小

原子核带正电荷,其电量 Q 等于基本电荷 e 的整数倍,即 $Q = Ze$. 正整数 Z 称为原子核的电荷数,也为该元素的原子序数. 原子核的质量几乎是原子质量单位的整数倍,即 $M_{核} = Au$. A 为原子核的质量数,一个原子质量单位 $1u$ 的数值为

$$1u = 1.660566 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

原子核接近球形,其半径大小为

$$R \approx R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

实验测得 $R_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$. 所以原子核的质量密度几乎相同,约为 $2 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

2. 原子核的组成

1919年,卢瑟福用 α 粒子轰击氮核(${}^{14}_7\text{N}$)发现质子,1932年,查德威克用 α 粒子轰击铍核(${}^9_4\text{Be}$)发现中子. 由此,人们确知原子核由质子和中子组成. 质子和中子统称核子. 原子核的质量数 A 等于其核子数(质子数 Z + 中子数 N),质子数 Z 即为原子序数.

质子数 Z 相同、中子数 N 不同的原子互称同位素;质量数 A 相同、质子数 Z 不同的原子互称同量异位素.

3. 质能方程、质量亏损和原子核的结合能

爱因斯坦由相对论得出的质能方程为

$$E = mc^2$$

式中 c 为光速,如果物质的质量增加 Δm ,则其能量也相应增加 ΔE ,反之亦然,即有

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

在原子核中,原子核由核子组成,但原子核的质量却小于核内核子质量之和,原子核的质量 M 与组成它的核子的质量总和的差值称为质量亏损.

$$\begin{aligned} \Delta m &= (Zm_p + Nm_n) - M_{核} \\ &= (ZM_H + Nm_n) - M_{原} \end{aligned}$$

由上面得知,自由核子在结合成原子核时能量减少了 $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$,即有能量释放出来,这能量即为该核的结合能. 那么,如果要将核子分解成自由核子,必须提供同样数值的能量. 可见,核子之间有引力相互作用,称为核力,核力只在很短的距离内发生作用.

原子核中平均每个核子的结合能叫平均结合能,用 ε 表示为

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{A}$$

不同原子核的平均结合能不同,轻核和重核的平均结合能都较小,中等质量数的原子核其平均结合能最大,这说明中等质量的核结合最为紧密,核最稳定.因此,要获得原子核能,可通过两个途径:重核裂变成中等核或轻核聚变成较重核,反应前后两种核的平均结合能之差就是释放出来的能量.

原子核、原子反应堆就是利用重核(${}_{92}^{235}\text{U}$ 或 ${}_{92}^{238}\text{U}$)裂变原理制成的,氢弹则是根据轻核聚变原理制成的.

七、原子核衰变

原子核由于放出某种粒子而转变成新核的过程叫衰变,对任何一个放射性原子核,它发生衰变的精确时刻无法确定,但将足够多的同一种放射性核作为一个整体,其衰变则十分有规律.设 $t=0$ 时原子核的数目为 N_0 ,则 t 时刻尚未发生衰变的原子核数目为

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

式中 λ 称为衰变常数,是反映衰变快慢的物理量.当放射性原子核衰变掉原有核的一半时,所需的时间称半衰期 T ,即 $t=T$ 时, $N = \frac{N_0}{2}$,由上式可得

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

或者 $N/N_0 = (1/2)^{t/T}$

T 与 λ 一样,都是放射性原子核的特征常数,均由核内部本身的因素决定,与原子所处的物理状态或化学状态无关.

八、核反应方程和核反应能

原子核反应是原子核受一个粒子撞击而放出一个或几个粒子的过程.核反应过程遵守下列守恒定律:①电荷守恒;②核子数守恒;③动量守恒;④总质量和联系的总能量守恒等.利用这些守恒定律,可以写出核反应方程式.

核反应能 Q 定义为反应后粒子的动能超出反应前粒子动能的差值.根据总质量和联系的总能量守恒,由反应前后核和粒子的静质量可得出反应能 Q 的计算公式,根据动量守恒,也可由入射粒子和出射粒子的动能及这两种粒子运动方向的夹角 θ 值得出反应能 Q .

九、基本粒子

基本粒子之间的相互作用有四种:强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和万有引力相互作用.例如:核子之间的核力吸引作用即为强相互作用,而原子核的 β 衰变即为弱相互作用,原子核与电子结合成原子即为电磁相互作用,万有引力作用因为强度太小,在研究基本粒子时可忽略.

除了电磁相互作用的传播子 γ 光子和万有引力作用的传播子 g (尚未发现)外,其余所有的粒子按它们之间的相互作用可分为两类:

强子:参与强相互作用的粒子,强子又分为重子(核子、超子)和介子两类,质子(为核子)是最早发现的强子,强子具有内部结构.

轻子:不参与强相互作用的粒子,电子是最早发现的轻子,实验表明,轻子是点粒子,迄今尚未发现它有任何结构.

每一种基本粒子都有自己的反粒子,正反粒子相遇时,会发生湮灭现象,如

$${}^0_{-1}e + {}^0_1e \rightarrow \gamma + \gamma$$

即电子与正电子相遇时,会湮灭产生两个光子.

1963—1964 年间,盖尔曼提出了夸克模型. 1965—1966 年,我国的一批理论物理学家提出了与此类似的“层子”模型. 现在,这两种名称(夸克和层子)常常并提,下面我们还用夸克这一名称. 有六种不同的夸克,分别是上夸克(u)、下夸克(d)、奇异夸克(s)、粲夸克(c)、底夸克(b)和顶夸克(t). 夸克模型认为所有的重子都是由三种夸克组成,所有反重子都是由三种反夸克组成,所有介子都是由一种夸克和一种反夸克组成. 但是,单独的夸克至今未曾测到,这还有待于人们进一步去探索.

【解题钥匙】

例 1 原子核俘获一个 μ^- 子(μ^- 子质量是电子质量的 207 倍,电荷与电子相同)形成 μ 原子,应用玻尔理论于 μ 原子,假设原子核静止. 试求:

(1) μ^- 子的第一轨道半径. 已知原子核的质子数为 Z , 氢原子的第一玻尔轨道半径 $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$.

(2) 电离能.

(3) 从第二轨道到第一轨道跃迁时所放射的光子的波长.

(4) 设原子核的质量数 $A = 2Z$ (即中子数 N 等于质子数 Z), 问当 A 大于什么值时, μ^- 子轨道将进入原子核内. 已知原子核半径的公式为 $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ m}$.

解析 (1) 对这个问题的分析如同类氢离子的情形完全一样. 设 μ^- 子质量为 m_μ ($m_\mu = 207 m_e$), 处在第 n 条轨道上, 其半径为 r_n , 速度为 v_n , 能量为 E_n , 根据库仑定律和牛顿定律, 有

$$\frac{m_\mu v_n^2}{r_n} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

原子体系的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m_\mu v_n^2 - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

应用玻尔量子化条件, 有

$$m_\mu v_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

从以上三式可求出 μ^- 子量子化的轨道半径和量子化的能量公式为

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 h^2}{4\pi^2 m_\mu ze^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_\mu e^4 z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 h^2}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

以 $m_\mu = 207 m_e$ 代入, 并注意到氢原子的第一玻尔轨道半径 $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$, 氢原子的

基态能量 $E_0 = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$, 可将 μ^- 子的轨道半径和能级公式改写为

$$r_n = \frac{n^2}{207Z} a_0$$

$$E_n = \frac{207Z^2}{n^2} E_0$$

令 $n=1$ 得 μ^- 子的第一轨道半径为

$$r_1 = \frac{1}{207Z} a_0 = \frac{1}{207Z} \times 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(2) μ 原子的电离能为

$$E_{\text{电离}} = -E_1 = -207Z^2 E_0 = (207Z^2) \times 13.6 \text{ eV}$$

(3) 应用频率法则,

$$\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{hc} = \frac{207Z^2}{hc} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) E_0 = -\frac{3}{4} \frac{207Z^2}{hc} E_0$$

求得从第二轨道跃迁到第一轨道时所放射的光子的波长为

$$\lambda = -\frac{4}{3} \frac{hc}{207Z^2 E_0} = \frac{1}{(207Z^2)} \times 1.22 \times 10^2 \text{ nm}$$

(4) 在第一轨道半径的表达式中, 令 $Z = \frac{A}{2}$, 得到

$$r_1 = \frac{2}{207A} a_0$$

要使 μ^- 子进入原子核内, 则要满足下式

$$r_1 < R$$

将题中的各已知量代入, 可解得

$$A > 94$$

方法与技巧 玻尔理论不但适用于氢原子, 也适用于类氢离子和类氢原子, 求解本题时, 先建立 μ 原子的经典模型, 即 μ^- 子在库仑力作用下绕核旋转, 再利用玻尔的三个量子化假设来求解, 与应用玻尔理论求解氢原子问题完全相似.

例 2 1995 年, 美国费米国家实验室 CDF 实验组和 DO 实验组在质子反质子对撞机 TEVATRON 的实验中, 观察到了顶夸克, 测得它的静止质量 $m_t = 1.75 \times 10^{11} \text{ eV}/c^2 = 3.1 \times 10^{-25} \text{ kg}$, 寿命 $\tau = 0.4 \times 10^{-24} \text{ s}$, 这是近十几年来粒子物理研究最重要的实验进展之一.

(1) 正反顶夸克之间的强相互作用势能可写为 $V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$, 式中 r 是正反顶夸克之间的距离, $a_s = 0.12$ 是强相互作用耦合常数, k 是与单位制有关的常量, 在国际单位制中 $k = 0.319 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m}$. 为估算正反顶夸克能否构成一个处在束缚态的系统, 可把束缚状态设想为正反顶夸克在彼此间的吸引力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动. 如能构成束缚态, 试用玻尔理论确定系统处于基态中正反顶夸克之间的距离 r_0 , 已知处于束缚态的正反顶夸克粒子满足量子化条件为

$$2mv\left(\frac{r}{2}\right) = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

式中 $mv\left(\frac{r}{2}\right)$ 为一个粒子的动量 mv 与其轨道半径 $\frac{r}{2}$ 的乘积, n 为量子数, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 为普朗克常量.

(2) 试求正反顶夸克在上述设想的基态中做匀圆周运动的周期 T . 你认为正反顶夸克的这种束缚态能存在吗?

解析 (1) 相距为 r 的电量为 Q_1 与 Q_2 的两点电荷之间的库仑力 F_Q 与库仑势能 V_Q 分别为

$$E_Q = k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad V_Q = -k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

现在已知正反顶夸克之间的强相互作用势能为

$$V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$$

根据直接类比可知, 正反顶夸克之间的强相互作用力为

$$F(r) = -k \frac{4a_s}{3r^2}$$

设正反顶夸克绕其连线的中点做匀速圆周运动的速率为 v , 因二者相距 r , 二者所受的向心力均为 $F(r)$, 二者的运动方程均为

$$\frac{m_t v^2}{\frac{r}{2}} = k \frac{4a_s}{3r^2}$$

以题给的量子化条件

$$2m_t v \left(\frac{r}{2} \right) = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

代入, 可以求得量子化的圆周运动半径和量子化的速度为

$$r = \frac{3n^2 h^2}{8\pi^2 m_t a_s k} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v = \frac{\pi}{nh} \left(k \frac{4a_s}{3} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

粒子处于基态时, 取量子数 $n = 1$, 得

$$r_0 = \frac{3h^2}{8\pi^2 m_t a_s k} = 1.4 \times 10^{-17} \text{ m}$$

$$v_0 = \frac{\pi}{h} \left(k \frac{4a_s}{3} \right) = 2.4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

(2) 由 v_0 和 r_0 可算出正反顶夸克做匀速圆周运动的周期 T_0 为

$$T_0 = \frac{2\pi(r_0/2)}{v_0} = \frac{h^3}{2\pi^2 m_t \left(k \frac{4a_s}{3} \right)^2} = 1.8 \times 10^{-24} \text{ s}$$

由此可知 $\frac{\tau}{T_0} = 0.2$

因正反顶夸克的寿命只有它们组成的束缚系统的周期的 $\frac{1}{5}$, 故正反顶夸克的束缚态通常是不存在的.

方法与技巧 本题设想的正反顶夸克束缚态也是一种类氢原子结构, 也可以用玻尔理论来分析讨论. 当然, 先要找到正反顶夸克之间的强相互作用力的表达式, 再建立经典模型, 才能运用题给的量子化条件.

例3 有两个处于基态的氢原子A、B, A静止, B以速度 v_0 与之发生碰撞. 已知: 碰撞后二者的速度 v_A 和 v_B 在一条直线上, 碰撞过程中部分动能有可能被某一氢原子吸收, 从而该原子由基态跃迁到激发态, 然后, 此原子向低能态跃迁, 并发出光子. 如欲碰后发出一个光子, 试论证: 速度 v_0 至少需要多大(以m/s表示)? 已知电子电量为 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子质量为 $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 氢原子的基态能量为 $E_1 = -13.58 \text{ eV}$.

解析 为使氢原子从基态跃迁到激发态, 需要能量最小的激发态是 $n=2$ 的第一激发态. 已知氢原子的能量与其主量子数的平方成反比, 即有

$$E_n = K \frac{1}{n^2}$$

又知基态($n=1$)的能量为 -13.58 eV , 即

$$E_1 = K \frac{1}{1^2} = -13.58 \text{ eV}$$

所以 $K = -13.58 \text{ eV}$

$n=2$ 的第一激发态的能量为

$$E_2 = K \frac{1}{2^2} = -13.58 \times \frac{1}{4} \text{ eV} = -3.39 \text{ eV}$$

为使基态的氢原子激发到第一激发态, 所需能量为

$$E_{\text{内}} = E_2 - E_1 = (-3.39 + 13.58) \text{ eV} = 10.19 \text{ eV}$$

这就是氢原子从第一激发态跃迁到基态时发生的光子的能量, 即

$$h\nu = E_{\text{内}} = 10.19 \text{ eV} = 10.19 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.632 \times 10^{-18} \text{ J}$$

式中 ν 为光子的频率. 从开始碰撞到发射出光子, 根据动量和能量守恒定律有

$$mv_0 = mv_A + mv_B + \text{光子的动量}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2) + h\nu$$

光子的动量 $P_\nu = \frac{h\nu}{c}$. 由上面的第二式可推得 $mv_0 > \frac{2h\nu}{v_0}$, 因 $v_0 \ll c$, 所以 $mv_0 \gg \frac{h\nu}{c}$, 故上面第一式中光子的动量与 mv_0 相比较可忽略不计, 第一式变为

$$mv_0 = mv_A + mv_B = m(v_A + v_B)$$

于是, 符合动量与能量守恒的 v_0 的最小值可推求如下:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2) + h\nu = \frac{1}{2}m(v_A + v_B)^2 - mv_A v_B + h\nu = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_A(v_0 - v_A) + h\nu$$

$$mv_A^2 - mv_A v_0 + h\nu = 0$$

经配方得

$$m(v_A - \frac{1}{2}v_0)^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 + h\nu = 0$$

$$\frac{1}{4}mv_0^2 = h\nu + m(v_A - \frac{1}{2}v_0)^2$$

由此可以看出, $v_A = \frac{1}{2}v_0$ 时, v_0 达到最小值 $v_{0\text{min}}$, 此时

$$v_A = v_B$$

$$v_{0\min} = 2\sqrt{\frac{h\nu}{m}}$$

代入有关数值,得

$$v_{0\min} = 6.25 \times 10^4 \text{ m/s}$$

即 B 原子的速度至少应为 $6.25 \times 10^4 \text{ m/s}$.

方法与技巧 求解本题时注意以下几点:

(1) 依题意,基态氢原子碰撞后被激发,再向低能级跃迁时,只发出一个光子,由此可以推断碰撞吸收能量后的氢原子一定处于 $n=2$ 的第一激发态,这是求解本题的关键.

(2) 在确定氢原子的能级公式 $E_n = \frac{-13.58 \text{ eV}}{n^2}$ 的基础上求出发射光子的能量 $h\nu$.

(3) 根据经典力学中粒子的弹性碰撞模型列出碰撞过程中的动量与能量守恒方程.

例 4 已知基态 He^+ 的电离能为 $E = 54.4 \text{ eV}$.

(1) 为使处于基态的 He^+ 进入激发态,入射光子所需的最小能量应为多少?

(2) He^+ 从上述最低激发态跃迁回基态时,如考虑到该离子的反冲,则与不考虑反冲相比,它所发射的光子波长的百分变化有多大? (离子 He^+ 的能级 E_n 与 n 的关系和氢原子能级公式类似. 电子电荷取 $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子和中子质量均取 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 在计算中,可采用合理的近似.)

解析 (1) 电离能表示 He^+ 的核外电子脱离氦核的束缚所需要的能量,而题中所问的最小能量对应于核外电子由基态能级跃迁到第一激发态,所以

$$E_{\text{最小}} = E\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 52.4 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 40.8 \text{ eV}$$

(2) 解法一 如果不考虑离子的反冲,由第一激发态跃迁回基态发射的光子有关系式:

$$E_{\text{最小}} = h\nu_0$$

现在考虑离子的反冲,光子的频率将不是 ν_0 而是 ν ,则由能量守恒得

$$E_{\text{最小}} = h\nu + \frac{1}{2}Mv^2$$

式中 $\frac{1}{2}Mv^2$ 为反冲离子的动能.

又由动量守恒得

$$Mv = \frac{h\nu}{c}$$

式中 Mv 是反冲离子动量的大小,而 $\frac{h\nu}{c}$ 是发射光子的动量的大小. 于是,波长的相对变化为

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu}$$

由前面几式可得

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{Mv} = \frac{Mv}{2Mc^2} = \frac{h\nu}{2Mc^2}$$

由于 $Mc^2 \gg h\nu \gg h(\nu - \nu_0)$

所以

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{2Mc^2} - \frac{h(\nu_0 - \nu)}{2Mc^2} \approx \frac{h\nu_0}{2Mc^2}$$

代入数据:

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{40.8 \times 1.60 \times 10^{-19}}{2 \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} = 5.4 \times 10^{-9}$$

即百分变化为 0.00000054%.

解法二 在不计反冲时,所发射光子频率为 $\nu_0 = E_{\text{最小}}/h$,对应的波长是

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$$

在计及反冲时,光子的频率设为 ν , He^+ 的反冲速度为 v ,则由能量守恒和动量守恒分别得到

$$h\nu + \frac{1}{2}Mv^2 = h\nu_0$$

$$\frac{h\nu}{c} = Mv$$

两式联立可得

$$h\nu + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{1}{2M} = h\nu_0$$

利用 $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ 和 $\nu = \frac{c}{\lambda}$,上式化为

$$\lambda^2 - \lambda_0\lambda - h\lambda_0/(2Mc) = 0$$

把上式视为关于 λ 的一元二次方程,其解是

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + \frac{4h\lambda_0}{2Mc}} \right] = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 \pm \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{2h\nu_0}{Mc^2}} \right]$$

显然, λ 为正值要求舍去上式中取负号的解,由于 $2h\nu_0/(Mc^2) \ll 1$,按公式 $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$,取

一级近似,即保留到展开公式的 x 一次项,我们有

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 + \lambda_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{Mc^2} \right) \right] = \lambda_0 + \frac{\lambda_0 h\nu_0}{2Mc^2}$$

于是

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{2Mc^2}$$

代入数值,得

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 5.4 \times 10^{-9}, \text{即 } 0.00000054\%.$$

方法与技巧 从本题的结果可以看出,考虑到离子的反冲与不考虑反冲相比,发射光子波长的相对变化非常小.在氢原子的情况也与此类似.所以,一般情况下,若只考虑光的发射,常常忽略核的反冲.

但若讨论共振吸收时,核的反冲就不能忽略.在有些实验中,为了减小核的反冲,把原子核制备在固体中,一块固体的质量比原子的质量大得多,反冲极微弱,就可以忽略了.

例 5 由阴极 K 发射的电子经加速电极 A 加速后垂直射向一开有两条平行狭缝的屏,电子自狭

缝出射后打到一荧光屏上,如图 15-1 所示,由于电子具有波动性,荧光屏上将出现明暗相间的条纹. 设加速电极 A 与阴极 K 之间的电压为 U , 两平行狭缝之间的距离为 d , 试问:

(1) 在整个装置的轴线与荧光屏的交点 O 处, 将出现暗条纹还是亮条纹?

(2) 设位于轴线外侧的第一条亮条纹出现在 θ 角处的 P 点, 若加速电压 U 不很大, 写出 θ 的表达式(以 d 、 U 及其他恒量表示).

(3) 在加速电压很大的情况下, θ 的表达式又怎样?

解析 (1) 考虑电子的波动性, 屏上的图样与光的双狭缝干涉图样相同, 屏上 O 点处干涉相长, 为亮条纹.

(2) 若加速电压 U 不很大, 电子被加速后的速度也不很大, 设加速后电子的速度为 v , 则

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = eU$$

式中 m_0 为电子的静止质量, e 为电子电荷的绝对值, 求得

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

根据德布罗意公式, 电子束的波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2em_0U}}$$

已知屏上 P 点为第一条亮条纹的位置, 则

$$\overline{PO} = \frac{r_0}{d}\lambda$$

其中 r_0 为双狭缝到屏上 O 点的距离. 由图中可以看出

$$\tan\theta = \frac{\overline{PO}}{r_0}$$

所以 $\tan\theta = \frac{\lambda}{d}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda}{d}\right) = \arctan\left(\frac{h}{d\sqrt{2m_0eU}}\right) \approx \frac{h}{d\sqrt{2m_0eU}}$$

(3) 若加速电压 U 很大, 电子被加速后的速度也很大, 必须考虑相对论修正. 此时加速后的电子的动量 p 求出如下:

加速电压所做的功等于电子动能的增加, 即

$$mc^2 - m_0c^2 = eU$$

式中 m 为加速后电子的质量, 上式可改写成

$$E = mc^2 = m_0c^2 + eU$$

E 为加速后电子的能量. 由相对论普遍关系式

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4$$

可求得加速后电子的动量

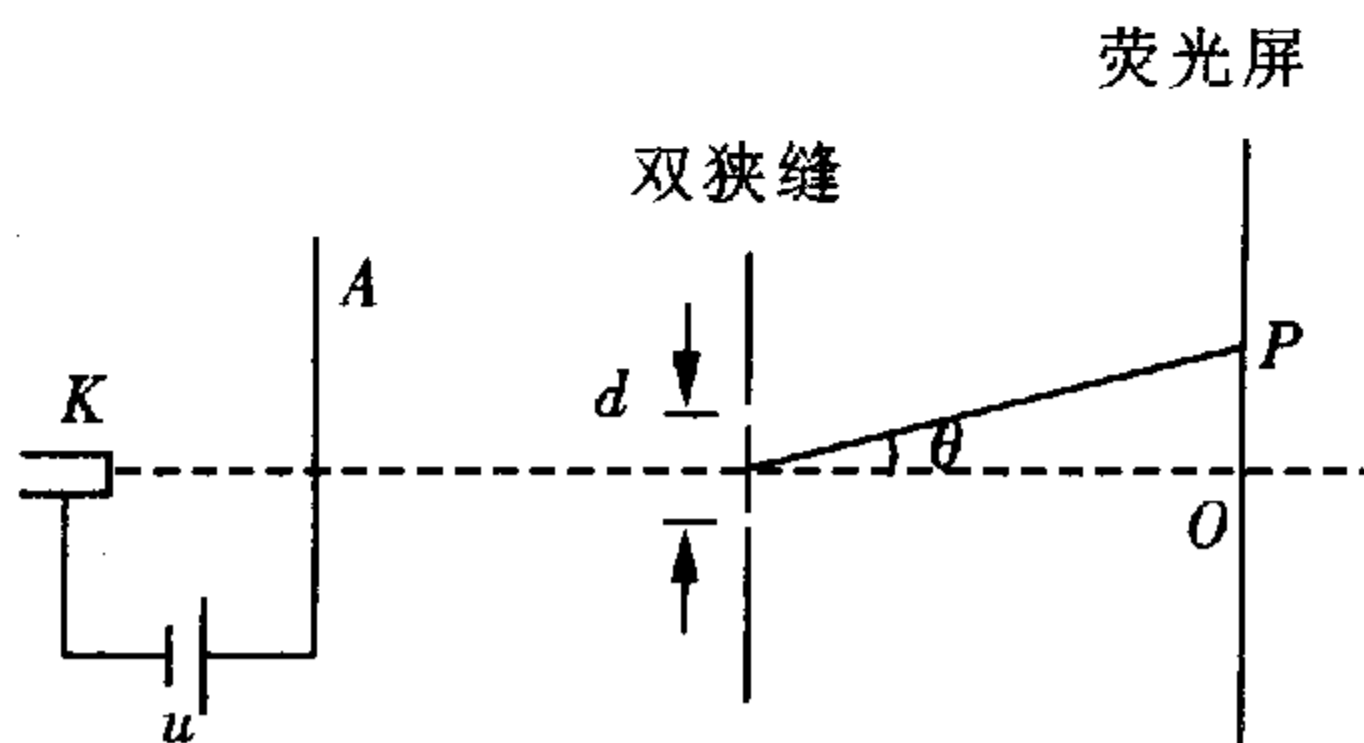


图 15-1

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{(m_0 c^2 + eU)^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{2m_0 eU} \cdot \sqrt{1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}}$$

于是电子的德布罗意波长:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}}} \approx \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} \left(1 - \frac{eU}{4m_0 c^2}\right)$$

最后得到

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda}{d}\right) = \arctan\left[\frac{h}{d \sqrt{2m_0 eU}} \left(1 - \frac{eU}{4m_0 c^2}\right)\right] \approx \frac{h}{d \sqrt{2m_0 eU}} \left(1 - \frac{eU}{4m_0 c^2}\right)$$

方法与技巧 电子、质子等实物粒子也具有波粒二象性. 本题电子束的双缝干涉图样的观察证实了电子具有波动性. 需要着重理解的是, 实物粒子的波动性并不是大量粒子相互作用的结果, 单个粒子也具有波动性. 因为如果在实验中我们减小入射电子束的强度, 即使把电子束强度减小到一个一个电子通过双缝, 只要经过足够长的时间, 所得的干涉图样也还是一样, 这说明每一个电子通过双缝时和其他电子无关, 干涉图样不是电子之间的相互作用而产生的.

例 6 如图 15-2 所示, 将炉子中的一群原子加热到某一温度 T , 并让这些原子沿水平方向通过炉子侧面上一个直径为 D 的小孔射出 (D 的尺寸与原子尺度相当), 从而形成一束原子束. 当这束原子行经水平长度为 L 的距离时, 估算这束原子束的直径. 设原子的质量为 M .

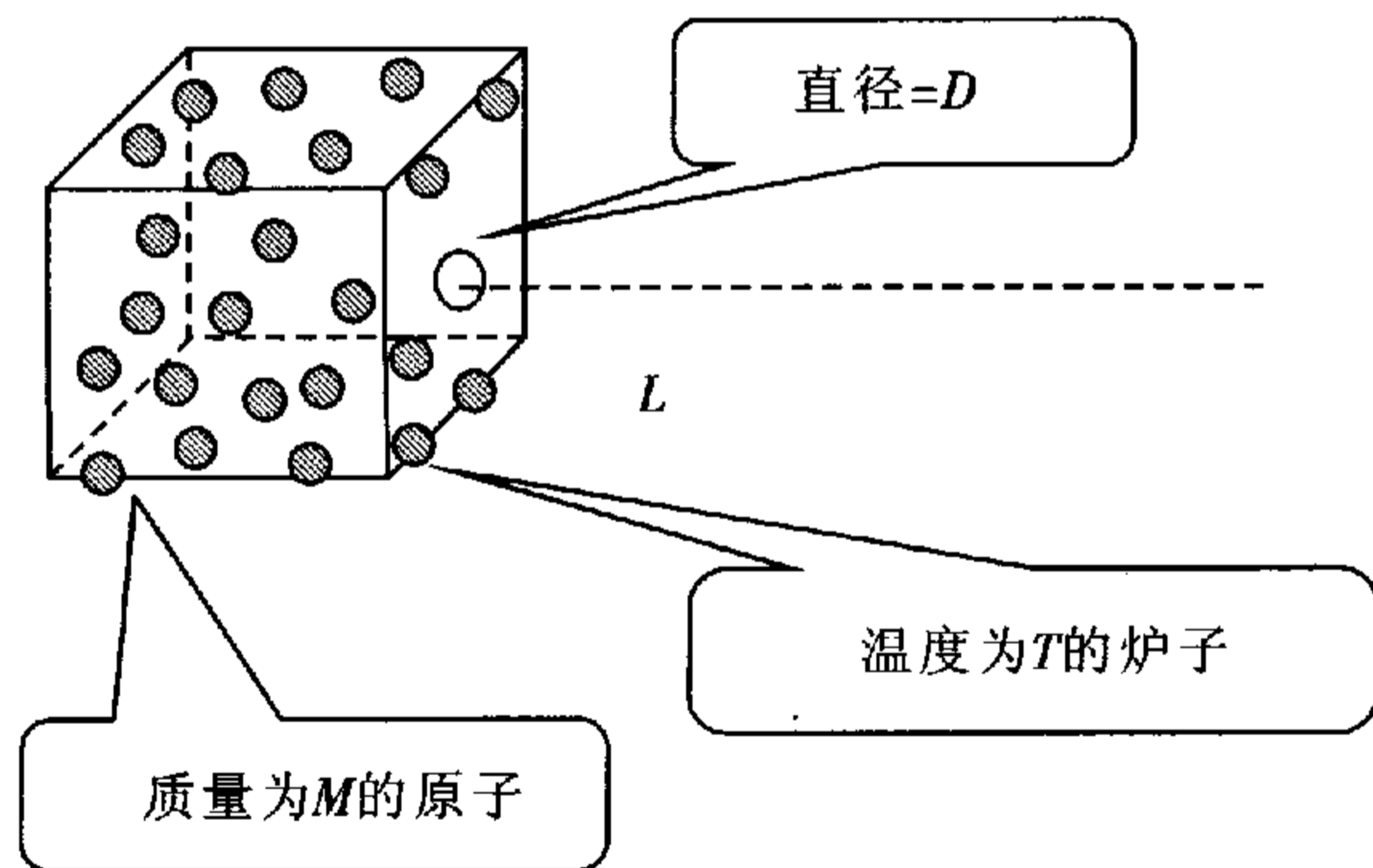


图 15-2

解析 当原子束通过直径为 D 的孔时, 由量子力学不确定关系, 其动量的 y 分量为 $\Delta p_y \approx \hbar/D$, 或 h/D , 或 $\hbar/2D$

相应的速度分量为

$$\Delta v_y \approx \hbar/MD, \text{ 或 } h/MD, \text{ 或 } \hbar/2MD$$

原子束的直径增大了量值 $\Delta D = 2\Delta v_y t$, 其中 t 为行进时间.

当炉温为 T 时, 原子离孔时的动能为

$$E_k = (1/2)Mv^2 = (3/2)kT, \text{ 或 } (1/2)kT, \text{ 或 } kT$$

$$v = \sqrt{3kT/M}, \text{ 或 } \sqrt{2kT/M}, \text{ 或 } \sqrt{kT/M}$$

原子束以速度 v 行进距离 L , 需时 $t = L/v$, 故

$$\Delta D = 2\Delta v_y t \approx 2(L/v)(\hbar/MD) = 2L\hbar/(MD \sqrt{3kT/M}) = 2L\hbar/(D \sqrt{3MkT})$$

或以上述相应其他量代入的表式. 因而原子束行进距离 L 后的新直径为

$$D_{\text{new}} = D + 2Lh / (D \sqrt{3MkT})$$

或以上述其他量代入的表式.

方法与技巧 本题中的原子应看作是微观粒子. 微观粒子具有波粒二象性, 其动量(或速度)与位置是不能同时精确测定的, 受到不确定关系的限制. 不确定关系的精确表达式为 $\Delta p, \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}$, 因本题只要求估算, 故可取 $\Delta p, \Delta y \approx \frac{\hbar}{2}$, 或 $\Delta p, \Delta y \approx \hbar, h$ 均可. 同样的, 由于估算, 原子的动能 $E_k = \frac{3}{2}kT$ 也可取 $E_k \approx \frac{1}{2}kT$ 或 kT .

例 7 假定地球形成时同位素 ^{238}U 和 ^{235}U 已经存在, 但不存在它们的衰变产物. ^{238}U 和 ^{235}U 的衰变被用来确定地球的年龄 T .

(a) 同位素 ^{238}U 以 4.50×10^9 年为半衰期衰变, 衰变过程中其余放射性衰变产物的半衰期比这都短得多, 作为一级近似, 可忽略这些衰变产物的存在. 衰变过程终止于铅的同位素 ^{206}Pb . 用 ^{238}U 的半衰期、现在 ^{238}U 的数目 ^{238}N 表示出由放射衰变产生的 ^{206}Pb 原子的数目 ^{206}n (运算中以 10^9 年为单位为宜).

(b) 类似的, ^{235}U 在通过一系列较短半衰期产物后, 以 0.710×10^9 年为半衰期衰变, 终止于稳定的同位素 ^{207}Pb . 写出 ^{207}n 与 ^{235}N 和 ^{235}U 半衰期的关系式.

(c) 一种铅和铀的混合矿石, 用质谱仪对它进行分析, 测得这种矿石中铅同位素 ^{204}Pb , ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对浓度比为 1.00: 29.6: 22.6. 由于同位素 ^{204}Pb 不是放射性的, 可以用作分析时的参考. 分析一种纯铅矿石, 给出这三种同位素的相对浓度之比为 1.00: 17.9: 15.5. 已知比值 $^{238}N: ^{235}N$ 为 137: 1, 试导出包含 T 的关系式.

(d) 假定地球的年龄 T 比这两种铀的半衰期都大得多, 由此求出 T 的近似值.

(e) 显然上述近似值并不明显大于铀同位素中较长的半衰期, 但用这个近似值可以获得精确度更高的 T 值. 由此在精度 2% 以内估算地球的年龄 T .

解析 (a) $N = N_0 2^{-t/\tau}$

其中 N_0 为原始原子数, τ 为半衰期.

$$n = N_0 - N_0 2^{-t/\tau} = N_0 (1 - 2^{-t/\tau})$$

用现在原子数 N 表示, 则为

$$n = N(2^{t/\tau} - 1) \quad \text{①}$$

所以 $^{206}n = ^{238}N(2^{t/4.50} - 1)$

其中 t 以 10^9 年为单位.

(b) 同理 $^{207}n = ^{235}N(2^{t/0.710} - 1)$

$$(c) \frac{^{206}n}{^{207}n} = \frac{^{238}N}{^{235}N} \cdot \frac{2^{t/4.50} - 1}{2^{t/0.710} - 1}$$

$$\text{即 } \frac{29.6 - 17.9}{22.6 - 15.5} = 137 \frac{2^{T/4.50} - 1}{2^{T/0.710} - 1}$$

$$\text{或 } 0.0120(2^{T/0.710} - 1) = (2^{T/4.50} - 1) \quad \text{②}$$

(d) 既设 $T \gg 4.50$, 在上式中可略去 1, 而有

$$0.0120 \cdot 2^{T/0.710} = 2^{T/4.50}$$

即 $0.0120 = 2^{T(1/4.50 - 1/0.710)}$

$$T = \frac{\lg 0.0120}{\lg 2 \cdot \left(\frac{1}{4.50} - \frac{1}{0.71}\right)} = 5.38$$

$$T = 5.38 \times 10^9 \text{ 年}$$

(e) T 并不 $\gg 4.5 \times 10^9$ 年, 但 $> 0.710 \times 10^9$ 年. 以 T 的近似值(称为 $T^* = 5.38 \times 10^9$ 年)代入(c)中未略去 1 的方程②的 $2^{T/4.50}$ 项中, 计算 $2^{T/0.71}$ 项中的 T , 以得到 T 的较好近似值, 再重复以上运算, 得出更好的 T 近似值.

$$0.0120(2^{T/0.71} - 1) = 2^{T^*/4.50} - 1$$

$$2^{T/0.71} - 1 = \frac{2^{5.38/4.50} - 1}{0.0120} = 107.5$$

得 $T = 0.71 \frac{\lg 92.2}{\lg 2} = 4.80$

再取 $T^* = 4.80$

$$2^{T/0.71} - 1 = \frac{2^{4.80/4.50} - 1}{0.0120} = 91.2$$

$$T = 0.71 \frac{\lg 92.2}{\lg 2} = 4.63$$

再作一次运算得 $T = 4.58$, 故 T 的更精确答案在 4.5×10^9 年到 4.6×10^9 年范围内(两个值都算对).

方法与技巧 因为 ^{238}U (或 ^{235}U) 经过一系列衰变后, 最后成为稳定的 ^{206}Pb (或 ^{207}Pb). 如果考虑到衰变的中间产物, 那么我们可以得到下式:

$$n + \sum N_f = N_0 - N$$

但其中中间产物 $\sum N_f$ 因年代久远, 同 n 相比, 量很少, 作为近似讨论, 可以忽略, 故得①式. 另外, (e) 中用迭代法求解 T 的近似值的方法也值得读者注意.

例 8 研究原子核的下列粗糙模型:

假定原子核是一个立方体, 有 $n \times n \times n$ 个核子, 每个核子被其他核子的核力所吸引(强相互作用), 由于这种力的作用距离很小, 我们假定每个核子只与其最邻近的核子之间有相互作用. 每个核子—核子对由于这种结合而对核的总结合能的贡献是一个常数.

原子核内有核电荷 Ze , 它在原子核内产生斥力. 根据量纲分析, 核的总静电势能正比于 $\frac{Z^2}{d}$, 其中 d 为原子核的线度. 在这个粗糙的模型中, 我们可以假定 Z 正比于原子核中的核子数 A .

已知元素周期表中元素 Fe ($A = 56$) 附近的原子核是非常稳定的, 它们的核子具有的平均结合能最大, 都约为 8.78 MeV/核子 .

试根据上述模型和已知的事实, 给出任一原子核内每个核子的平均结合能 \bar{E} 与 n 之间的关系式.

解析 想象在一个广阔的空间内有很多核子均匀规则地排列着, 与一个核子在前后左右上下周围相邻的核子共有 6 个, 所以这个核子参与 6 个核子—核子对的强相互作用. 对于题述的 n^3 个核子, 我们可以想象将其置于上述的广阔空间之内, 则如上计算共有 $6n^3$ 个核子—核子对强相互作用. 但实际上这个“核立方体”外并无核子, 这个核立方体有 6 个外侧面, 每个外侧面内有 n^2 个核子, 由于

这个侧面以外再无核子,故对应于此侧面内的每个核子均应减去朝外的一个核子—核子对强相互作用,即减去 n^2 个,对于 6 个外侧面而言,总共应减去 $6n^2$ 个. 由上计算则尚有 $(6n^3 - 6n^2)$ 个核子—核子对强相互作用. 又由于这种成对的作用是在两个核子之间存在的,上面的计算是按一个一个核子独立计算后累加的,因此上述的累加中已把每对作用都计算了两次,可见核内的这种强相互作用的实际对数应为 $3n^3 - 3n^2$. 设每个核子—核子对强相互作用结合时释放出的能量为 a ,则此核形成时,由于强相互作用应放出的总能量为 $3an^2(n-1)$.

另一方面,核的总静电势能正比于 $\frac{Z^2}{d}$,而 Z 正比于核子数 A ,即正比于 n^3 , d 为核的线度,显然正比于 n ,由此,核的总静电势能正比于 n^5 . 设其比例系数为 b ,则核的总静电势能为 bn^5 . 即此核形成时由于静电势能的增加需吸收的能量为 bn^5 .

由上面两方面可得到原子核形成时释放的总结合能为

$$E = 3an^2(n-1) - bn^5 \quad \text{①}$$

每个核子的平均结合能为

$$\bar{E} = \frac{E}{n^3} = 3a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bn^2 \quad \text{②}$$

上式中 a, b 为与 n 无关的常数. 下面我们进一步来确定常数 a, b 之值.

根据元素 Fe 附近的原子核中核子的平均结合能差不多都相等这一事实,应有:当 n 有微小变化 Δn 时,由上式求出的平均结合能的值不变,即

$$3a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bn^2 = 3a\left(1 - \frac{1}{n + \Delta n}\right) - b(n + \Delta n)^2$$

在 Δn 很小时,近似地有

$$\frac{1}{n + \Delta n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\Delta n}{n}\right)$$

代入前式中,整理,并略去 $(n + \Delta n)^2$ 展开式中的 $(\Delta n)^2$ 项,得到

$$3a - 2bn^3 = 0$$

又根据元素 Fe 的核子平均结合能为 8.78 MeV 这一事实,有

$$3a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bn^2 = 8.78 \text{ MeV}$$

另有 $n^3 = 56$

综合以上三式,可解得

$$a = 4.814 \text{ MeV}$$

$$b = 0.129 \text{ MeV}$$

由此,将 a, b 之值代入平均结合能 \bar{E} 的表达式中,得到本题所给模型中核子的平均结合能为

$$\bar{E} = \left[14.443\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 0.129n^2 \right] \text{ MeV}$$

附注:熟悉函数求导数的读者不难看出,根据元素 Fe 的核子平均结合能最大,即表示核子的平均结合能随 n 变化的函数在该处的一阶导数为零,即

$$\frac{d}{dn} \left[3a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bn^2 \right] = 0$$

所以

$$\frac{3a}{n^2} - 2bn^2 = 0$$

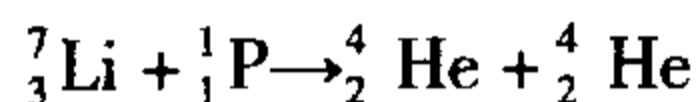
与前面所得到的结果相同.

方法与技巧 原子核的结合能与质量数 A 成正比,这说明原子核中的核子只同周围几个核子起作用,这正如液体中的分子亦只同附近的分子有作用. 又一种情况是,原子核的密度是常数,不随 A 改变,这也正如液滴的密度是常数,不随液滴的大小变化,所以原子核用液滴来比拟是符合它的一些情况的.

本题的原子核模型,就是一种简化的液滴模型. 式①是原子核结合能的半经验公式. 式中的 $3an^3$ 项是结合能的主要部分,它与核子数 n^3 成正比,从而与体积成正比,称为体积能; $-3an^2$ 项是关于原子核表面的修正项,与表面上的核子数(n^2)成正比,从而也就同表面成正比,称为表面能; $-bn^2$ 项是关于原子核中质子的库仑排斥能量的修正项,称为库仑能.

例 9 在用质子(${}^1_1\text{P}$)轰击固定锂(${}^7_3\text{Li}$)靶的核反应中:(1)计算放出 α 粒子的反应能.(2)如果质子的动能为 1 MeV,问在垂直质子束方向观测到 α 粒子的动能有多大? 有关原子核的质量如下: ${}^1_1\text{H}$, 1.007825; ${}^4_2\text{He}$, 4.002603; ${}^7_3\text{Li}$, 7.015999.

解析 (1)核反应方程如下:



静质量 M_0 M_1 M_3 M_2

动能 E_0 E_1 E_3 E_2

由总质量和总能量守恒:

$$M_0 + \frac{E_0}{c^2} + M_1 + \frac{E_1}{c^2} = M_2 + \frac{E_2}{c^2} + M_3 + \frac{E_3}{c^2}$$

则由反应能 Q 的定义得

$$Q = (E_2 + E_3) - (E_0 + E_1) = [(M_0 + M_1) - (M_2 + M_3)]c^2$$

$$= [(7.015999 + 1.007825) - 2 \times 4.002603] \times 931.5 = 17.35 \text{ MeV} \quad \text{①}$$

[其中: $1u \cdot c^2 = (1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (2.997925 \times 10^8 \text{ m/s})^2$

$$= 931.5 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$= 931.5 \text{ MeV}]$$

(2)设锂靶是静止的,根据动量守恒可知,反应所产生的两个相同的 α 粒子(${}^4_2\text{He}$ 核)应沿入射质子的方向对称分开. 如图 15-3 所示.

由动量守恒定律有

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

矢量 \vec{P}_1 、 \vec{P}_2 、 \vec{P}_3 合成的三角形,两底角皆为 θ ,又因 $M_2 = M_3$,因而有 $E_2 = E_3$.

已知反应能 $Q = 17.35 \text{ MeV}$

且 $Q = E_2 + E_3 - E_1$,其中 $E_1 = 1 \text{ MeV}$,可得

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{2}(Q + E_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times (17.35 + 1) \text{ MeV}$$

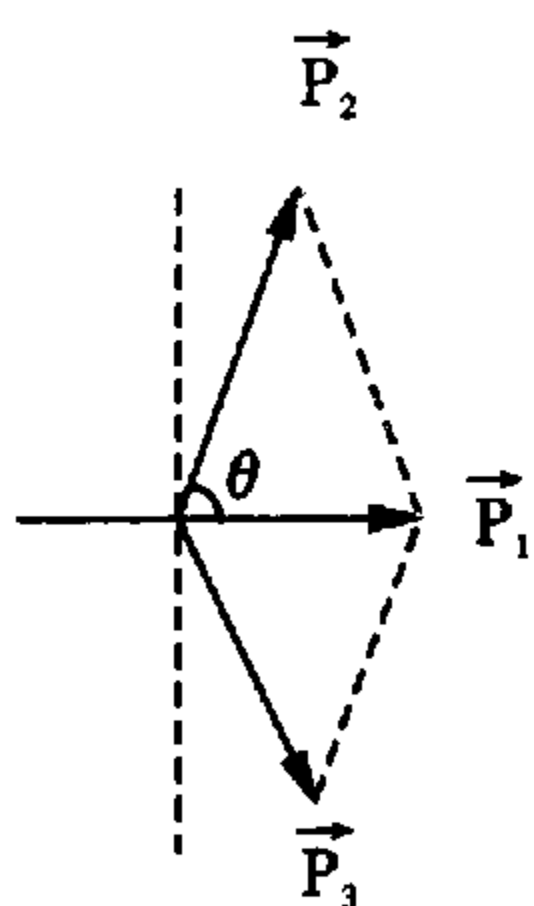


图 15-3

$$= 9.175 \text{ MeV}$$

即反应所生成的 α 粒子其动能为 9.175 MeV.

设 α 粒子飞出方向与沿入射质子的方向之间的夹角为 θ , 则

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\theta$$

由于 $P^2 = 2ME$, 可得

$$M_3E_3 = M_1E_1 + M_2E_2 - 2M_1M_2E_1E_2\cos\theta$$

代入反应能 Q 的定义式:

$$Q = E_2 + E_3 - E_1$$

$$= \left(1 + \frac{M_2}{M_3}\right)E_2 - \left(1 - \frac{M_1}{M_3}\right)E_1 - \frac{2\sqrt{M_1M_2E_1E_2}}{M_3}\cos\theta \quad (2)$$

把上式中质量之比改为质量数之比, 这一更改不影响准确度, 就有

$$Q = \left(1 + \frac{A_2}{A_3}\right)E_2 - \left(1 - \frac{A_1}{A_3}\right)E_1 - \frac{2\sqrt{A_1A_2E_1E_2}}{A_3}\cos\theta \quad (2)$$

以 $A_1 = 1, A_2 = A_3 = 4$ 代入, 即得

$$Q = 2E_2 - \frac{3}{4}E_1 - \sqrt{E_1E_2}\cos\theta$$

所以

$$\cos\theta = \frac{2E_2 - Q - \frac{3}{4}E_1}{\sqrt{E_1E_2}} = \frac{(2 \times 9.175 - 17.35 - \frac{3}{4} \times 1)}{\sqrt{1 \times 9.175}} = 0.0825$$

$$\theta = 85^\circ 16'$$

由此可知, 在垂直于质子束的方向上观察到的 α 粒子其动能近似就是 9.175 MeV.

方法与技巧 反应能 Q 定义为反应后粒子的动能超出反应前粒子的动能的差值. 本题导出了计算反应能两个公式, 即①式和②式. ①式表明, 反应能可以由已知的粒子的静质量来计算, 它等于反应前粒子静质量超过反应后粒子的静质量的差数乘以 c^2 ; ②式表明, 反应能也可以通过粒子动能的测量得出, ②式称为 Q 方程. 有些原子核反应是放出能量的 (Q 为正值), 有些是吸收能量的 (Q 为负值), 分别称为放能和吸能核反应.

例 10 质量不为零的 ω 介子静止时衰变为三个质量相同的 π 介子. 即 $\omega \rightarrow 3\pi$. 试讨论每次衰变产生的三个 π 介子的动能 T_1, T_2, T_3 可能取的全部值. 通常表示每一组动能值 (T_1, T_2, T_3) 的方法如下: 作一个等边三角形 $A_1A_2A_3$, 取其高 Q 为三个 π 介子的动能之和, $Q = T_1 + T_2 + T_3$. 在三角形内取一点 P , 令 P 点到顶点 A_i 的对边的距离为 T_i ($i=1, 2, 3$), 则每一点对应一组动能值 (T_1, T_2, T_3). 衰变时可以实现的全部 (T_1, T_2, T_3) 的可能取值, 可以用 P 点的可能存在的区域来表示. 这个区域称为运动学允许区. 试在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中找出 $\omega \rightarrow 3\pi$ 的运动学允许区 (设衰变后 π 介子的速度比光速小得多).

解析 设衰变产生的 3 个 π 介子的动量为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, 相应的动能为 T_1, T_2, T_3 , 则它们必须满足下列条件:

能量守恒

$$T_1 + T_2 + T_3 = m_0c^2 - 3m_\pi c^2 = Q \quad (1)$$

动量守恒

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \quad (2)$$

三角形 $A_1A_2A_3$ 内部任一点均已满足①式, 现只需求满足②式的 P 点的位置范围.

由②式可知

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos\theta_{12}$$

式中 $p_i = |\vec{p}_i|$, 于是有

$$\cos\theta_{12} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2}$$

因 $|\cos\theta_{12}| \leq 1$, 于是条件②成为

$$\left(\frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{③}$$

由题意知, 可以使用非相对论的关系:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

上式改为

$$\frac{(T_3 - T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2} \leq 1$$

即

$$(T_3 - T_1 - T_2)^2 \leq 4T_1T_2 \quad \text{④}$$

现在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中取一点 P , 表示其位置用极坐标系 (ρ, φ) 比较方便, 取三角形的垂心 O 为坐标系的原点, OA_3 为极轴的正方向, $\overline{OA_3} = \overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \frac{2}{3}Q$, 则由图 15-4 知

$$T_1 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(60^\circ - \varphi) \quad T_2 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(60^\circ + \varphi) \quad T_3 = \frac{Q}{3} + \rho \cos\varphi$$

将这些结果代入④式, 得

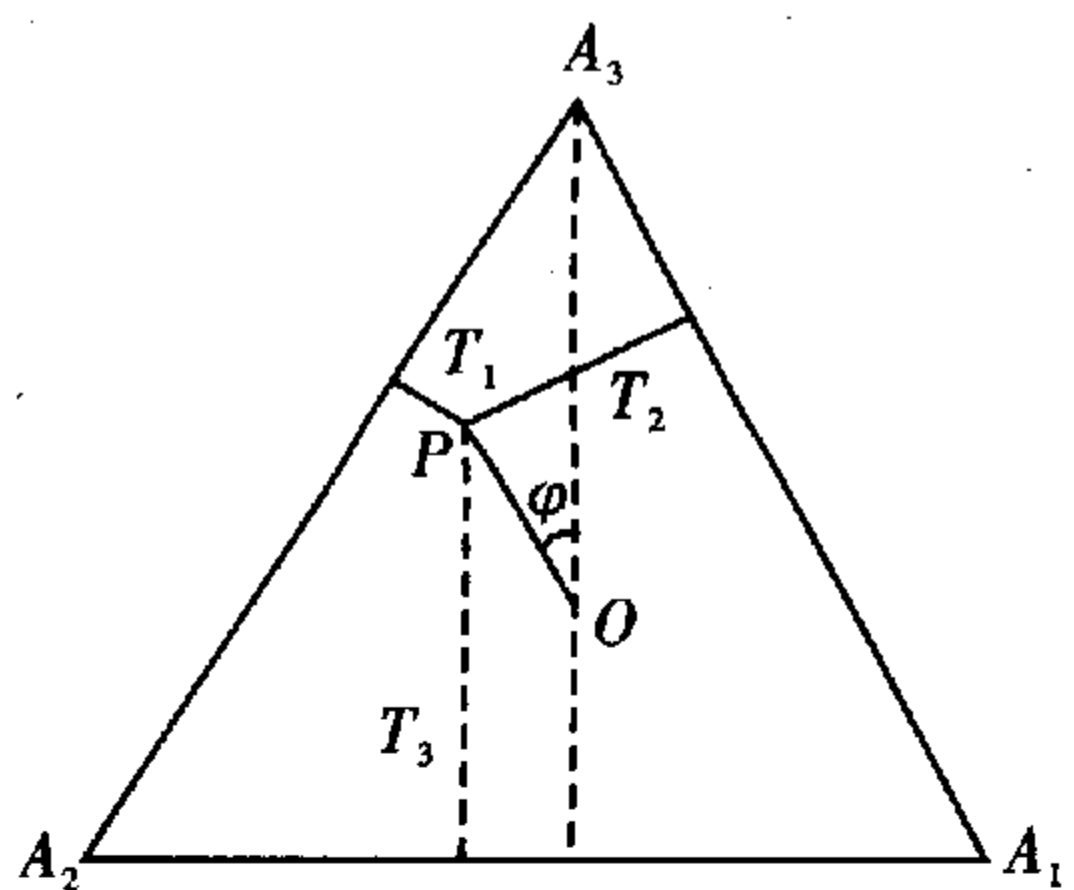


图 15-4

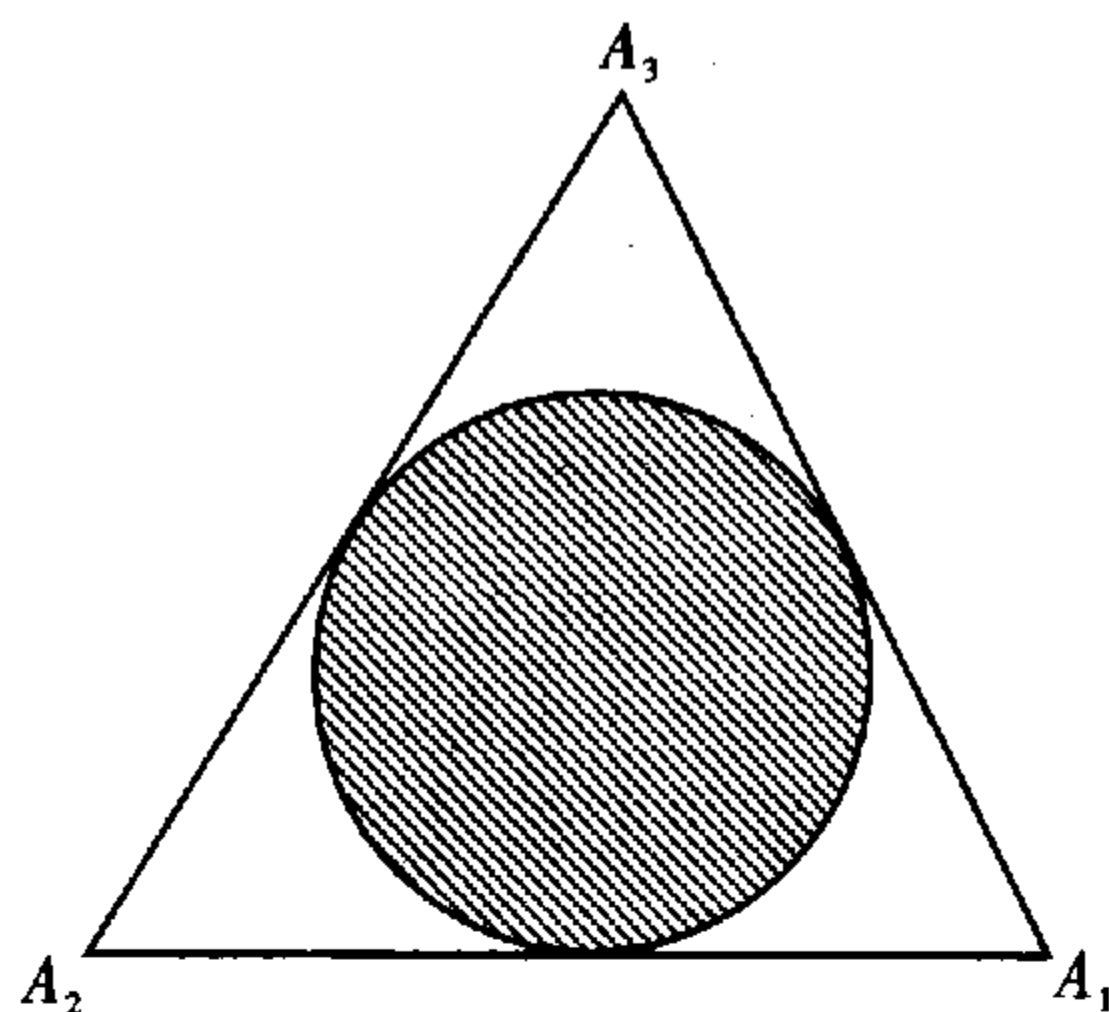


图 15-5

$$\text{④式左边} = \left(-\frac{Q}{3} + 2\rho \cos\varphi\right)^2$$

$$\text{④式右边} = \frac{4Q^2}{9} + \frac{4}{3}Q\rho \cos\varphi - 4\rho^2 \cos^2\varphi - 3\rho^2$$

$$\text{于是得 } 0 \leq \frac{1}{3}Q^2 - 3\rho^2$$

即 $\rho \leq \frac{Q}{3}$

于是得 3 个 π 介子的运动学允许区为 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 的内切圆的圆周及圆内, 即图 15-5 中的阴影区.

方法与技巧 本例介绍的方法求粒子的运动学允许区有很重要的理论与实际意义. 求解本题, 重要的是依据 ω 介子在衰变过程中动量、能量均守恒, 由此列出相关方程, 在此基础上导出④式之条件. 当然, 必要的数学运算技巧和相关几何知识要熟练掌握并能灵活运用.

【解题尝试】

1. 有一个质量为 m 、半径为 r 的实心小球, 以速度 v_0 靠近另一个质量为 M 、半径为 R 的实心大球, 取大球中心为坐标原点, x 轴平行于 v_0 方向, 小球的中心离 x 轴的距离为 b , 如图 15-6 所示.

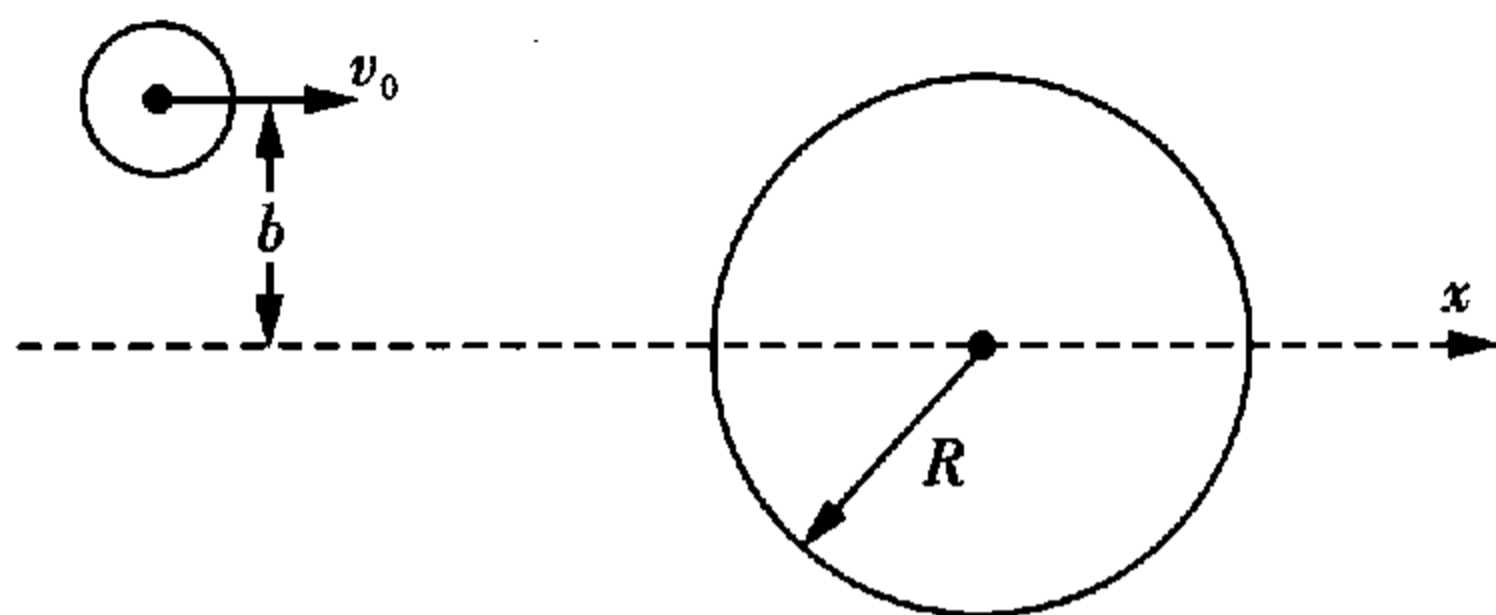


图 15-6

- (1) 设 $M \gg m$, 大球原处于静止, 且两球间碰撞为弹性碰撞, 试近似地求出小球与大球相互作用后的速度.
- (2) 假定 α 粒子的散射符合上述模型. 有一块厚度为 d 、面积为 S 的金箔, 受到速度为 v_0 的 α 粒子束沿垂直于金箔表面方向的轰击. 如果把入射的 α 粒子和金原子看成是上述的小球和大球, 垂直于粒子束的单位面积上单位时间内入射的 α 粒子数为 I_0 , 金箔单位体积内的金原子数为 n_0 , 求在相对于 x 轴(即入射粒子束的速度方向)的 θ 和 $(\theta + \Delta\theta)$ 角 ($\Delta\theta$ 很小, 且 $\theta \neq 0$) 之间单位时间内散射的粒子数.
2. 用能量为 12.5 eV 的电子去激发基态氢原子, 受激发的氢原子向低能级跃迁时, 会出现哪些波长的光谱线?
3. 一个氢放电管发光, 在其光谱中测得一条谱线的波长为 $4.86 \times 10^{-7} \text{ m}$. 试计算这是氢原子中电子从哪一个能级向哪一个能级(用量子数 n 表示)跃迁时发出的? 已知氢原子基态 ($n=1$) 的能量为 $E_1 = -13.6 \text{ eV} = -2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$, 普朗克常量为 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
4. 试计算由于氢原子在辐射时反冲产生的光子波长的变化, 电子从第二轨道跃迁到第一轨道时, 氢原子获得多大速度?
5. 与氢原子相似, 可以假设氦的一价正离子 (He^+) 与锂的二价正离子 (Li^{++}) 核外的那一个电子也是绕核作圆周运动. 试估算:
 - (1) He^+ 、 Li^{++} 的第一轨道半径;
 - (2) 电离能量、第一激发能量;
 - (3) 赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值.
6. 带电粒子在威耳逊云室(一种径迹探测器)中的轨迹是一串小雾滴, 雾滴的线度约为 $1 \mu\text{m}$. 当观察

能量为 1000 eV 的电子径迹时其动量与经典力学动量的相对偏差约为多少?

7. 一个由日本和印度物理学者组成的工作小组做了如下实验:

将 6×10^4 kg 铁放在很深的矿井中,以完全隔断宇宙射线的影响,在铁旁有很多很多探测器,只要铁核中有核子(质子和中子)发生衰变,这个事件总能被记录下来.

实验从 1980 年冬开始到 1982 年夏结束,历时 1.5 年,一共记录了 3 个核子衰变的事例.

已知 N_0 个平均寿命为 τ 的粒子经过 t 时间后的数目为 $N = N_0 e^{-t/\tau}$ 个,根据以上事实,试估算出核子的平均寿命.

(已知核子的质量 $m = 1.66 \times 10^{-27}$ kg,当 $0 < x \leq 1$ 时, $e^{-x} \approx 1 - x$)

8. μ 子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命 $\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6}$ s. 宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批 μ 子,以 $v = 0.99c$ 的速度(c 为真空中的光速)向下运动并衰变. 根据放射性衰变定律,相对给定惯性参考系,若 $t = 0$ 时刻的粒子数为 $N(0)$, t 时刻剩余的粒子数为 $N(t)$,则有 $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$,式中 τ 为相对该惯性系粒子的平均寿命. 若能到达地面的 μ 子数为原来的 5%, 试估算 μ 子产生处相对于地面的高度 h . 不考虑重力和地磁场对 μ 子运动的影响.

9. 放射性鉴年法. 在地球的外层大气中,由于宇宙射线而发生的核反应 ${}^{14}_7\text{N} + n \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + p$ 会产生放射性核素 ${}^{14}_6\text{C}$. ${}^{14}_6\text{C}$ 发生 β^- 衰变的半衰期为 5730 年,因此,地球大气层中与活着的生物体中的 CO_2 , 除含有稳定核素 ${}^{12}_6\text{C}$ (99.63%) 和 ${}^{13}_6\text{C}$ (0.37%) 外,还含有少量的 ${}^{14}_6\text{C}$. 在活着的生物体内,放射性碳与稳定的碳的比值约为 1.3×10^{-12} . 生物体死亡后,它停止吸收 CO_2 , 因此,由于 ${}^{14}_6\text{C}$ 的衰变,这一比值将会减少. 假定我们发现一块古时候埋在地下的骨片,当从骨片中分离出 100 g 碳时,测出这一样品中 ${}^{14}_6\text{C}$ 的放射性强度为 6.5 次核衰变每秒. 放射性强度定义为放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数目,用 R 表示为

$$R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$$

试估计该古生物体的死亡年代.

10. 用放射源钋(Po)发射的 α 粒子打在铍核(${}^9_4\text{Be}$)上,产生一种新的粒子和另一生成物. 这些新粒子组成的粒子流有以下特点:

(1) 在任意方向的磁场中都不偏转.

(2) 让它与含氢物质中的静止氢核相碰撞,可以把氢核击出,被击出氢核的能量为 $E_H = 4.7$ MeV, 让它与含氮物质中的静止氮核相碰撞,也可以把氮核击出,被击出氮核的能量为 $E_N = 1.2$ MeV. 碰撞可视为对心完全弹性碰撞,且已知氢核与氮核的质量比为 1:14.

试根据以上数据求出新粒子质量与氢核质量之比,对此新粒子是什么粒子作出判断,并写出 α 粒子轰击 ${}^9_4\text{Be}$ 的核反应方程式.

11. 在一个原子反应堆中,用石墨(碳)作减速剂使快中子减速. 已知碳核质量是中子质量的 12 倍,假设把碳核与中子的每次碰撞都看成是弹性正碰,且认为碰撞前碳核都是静止的.

(1) 设碰撞前中子的动能为 E_0 ,问经过一次碰撞中子损失的动能是多少?

(2) 至少经过多少次碰撞后,中子的动能才小于 $10^{-6}E_0$?

(已知: $\lg 13 = 1.114$, $\lg 11 = 1.041$)

12. 已知太阳每秒辐射 3.8×10^{26} J 的能量. 问:

(1) 太阳每秒钟损失多少质量?

(2) 假设太阳放射出的能量是由于“燃烧氢”的核反应 $4 {}^1_1\text{H} + 2e \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\nu$ 提供,这一核反应放出

28 MeV 的能量. 式中 e 为电子, ν 为中微子. 中微子是一种质量远小于电子质量、穿透力极强的中性粒子. 试计算地球上在与太阳光垂直的每平方米面积上每秒钟有多少中微子(ν)到达.

(3) 假设原始的太阳全部由 ${}^1_1\text{H}$ 和电子组成, 且仅有 10% 的 ${}^1_1\text{H}$ 可供“燃烧”, 试估算太阳的寿命.

已知: 太阳质量 $M_{\text{日}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, 日地距离 $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, 电子电量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

13. 试计算 $1 \text{ g } {}^{235}_{92}\text{U}$ 裂变时全部释放的能量约等于多少煤在空气中燃烧所放出的热能(煤的燃烧热 $a \approx 33 \times 10^6 \text{ J/kg}$, $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$).
14. 太阳中能量来源的一种途径是 4 个质子和 2 个电子结合成一个 α 粒子, 并释放能量. 若质子质量 $m_p = 1.007277u$, 电子质量 $m_e = 0.000549u$, α 粒子的质量 $m_\alpha = 4.00150u$, 则上述核反应所释放的能量为多少(已知 $1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$)?
15. 用 α 粒子打击 ${}^9_4\text{Be}$ 产生 ${}^{12}_6\text{C}$ 并放出一个新粒子.
- (1) 写出核反应方程.
- (2) 如果 α 粒子的速率为 $1.5 \times 10^7 \text{ m/s}$, 放出的新粒子以 $4 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的速率并垂直于 α 粒子前进方向飞出, 求 ${}^{12}_6\text{C}$ 的速率.
- (3) 若此反应是放热反应, 放出能量为 5.7 MeV , 问此反应前后的质量差是多少?

参 考 答 案

第 一 章

$$1. v = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$$

$$2. (1) T = \frac{2VL}{V^2 - v^2}, (2) T = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - v^2}} \quad (3) \frac{2VL}{V^2 - v^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2} \sin^2 \theta}$$

$$3. \omega = \frac{2v \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(R+r) \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$4. S = 34.4 \text{ m}, a = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

$$5. S = \frac{\pi v_0^4}{g^2 \cos^3 \alpha} \sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v_0^2}\right) \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2} \cos^2 \alpha\right)}$$

$$6. v = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$7. v_{A1} = \frac{1}{2}v, v_{A2} = 5v/6, v_{A3} = \frac{\sqrt{17}}{6}v$$

$$8. t = 75\text{s}$$

$$9. x^2 + \left(y + h - \frac{v_0^2}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h\right) - d^2, \text{ 则瞄准点轨道为一圆}$$

$$10. \textcircled{1} v_0^2 < gl \sin 2\alpha, L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$\textcircled{2} v_0^2 \geq gl \sin 2\alpha \quad \sin 2\alpha \geq \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gl} \quad L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \sin 2\alpha < \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gl}$$

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\left(\alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin \alpha}}{v_0}\right)$$

$$11. v_M = \frac{\omega r}{a} \sqrt{\frac{(2a-r)r}{1-e^2}}$$

$$12. \textcircled{1} 0 < \frac{v_2}{v_1} < \frac{d^2 - c^2}{d^2 + c^2} \quad \text{无解} \quad \textcircled{2} \frac{d^2 - c^2}{d^2 + c^2} \leq \frac{v_2}{v_1} < 1 \quad v_{\min} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} v_1$$

$$\textcircled{3} 1 < \frac{v_2}{v_1} \leq \frac{d^2 + c^2}{d^2 - c^2} \quad v_{\min} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} v_2 \quad \textcircled{4} \frac{d^2 + c^2}{d^2 - c^2} < \frac{v_2}{v_1} \quad \text{无解}$$

$$\textcircled{5} \frac{v_2}{v_1} < 0 \quad v_{\min} = \frac{\sqrt{(v_1 + v_2)^2 c^2 + (v_1 - v_2)^2 d^2}}{2c}$$

第二章

1. $m_1/m_2 = \frac{11}{19}$

2. $\textcircled{1} v = \omega \sqrt{L^2 + R^2}$ $\textcircled{2} P = \frac{m\omega^3 R(R^2 + L^2)}{L}$ $\textcircled{3} f = \frac{m\omega^2 k \sqrt{L^2 + R^2}}{L}$

3. $\textcircled{1} \cos\alpha = \frac{L}{8R} + \sqrt{\left(\frac{L}{8R}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ $\textcircled{2} N_1 = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} mg$ $N_2 = mg \tan\alpha$

4. $\textcircled{1} \theta = \arctan \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1}$ $\textcircled{2} \tan\theta = 1 + \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}$ 当 $M \gg m$ 时, $\tan\theta \geq \frac{1}{\mu}$

5. $k = \frac{Mg(\sqrt{2} + 1)}{2\pi^2 R}$

6. $\Delta l = \frac{\rho g l_0}{2k}$

7. mgh/L

8. $N_i = \frac{\sin \frac{i\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} G$

9. $P = 208 \text{ N}$

10. $F = \frac{mg}{\pi}$

11. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)r < R \leq \left(\frac{32\sqrt{3}}{33} - 1\right)r$

12. $a = \frac{m}{2M + m}g$ $N = \frac{2Mm}{2M + m}g$, $T = \frac{4(M + m)}{2M + m}g$

13. $a = \frac{(M + m) \sin\theta}{M + m \sin^2\theta} g$

14. $a_A = 15.2 \text{ m/s}^2$ $a_B = 2.7 \text{ m/s}^2$ (均垂直向上)

15. $F_0 = \frac{1}{3} CL^3 \omega^2$

16. $F = \frac{mv_0^2}{L} + \frac{m}{L} xg$

17. $t = 0.6 \text{ s}$

18. $\Delta s = \frac{Mv_0^2}{2(\mu_1 + \mu_2)(M + m)g}$

19. (1) $a = 2g \sqrt{\frac{y}{4y + k}}$ (2) $y \leq \frac{\mu^2 k}{4}$ (3) 在任意点 (4) $x \geq \frac{k}{2}, y \geq \frac{k}{4}$ 或 $x \leq \frac{k}{6}, y \leq \frac{k}{6}$.

20. $m_2 < m_1 \cos 2\alpha$

21. $\mu_{\min} = \frac{1}{3}$

22. 可以, 没有极限

23. 70.5°

24. $\mu = \frac{1}{\pi} \ln 2 = 0.22$

25. 随遇平衡

26. $m' = \frac{mR \cot(\frac{\theta}{2})}{L \sin \theta (\mu + \mu \cos \theta - \sin \theta)} = \frac{25Rm}{8L(2\mu - 1)}$

若 $\mu < \frac{1}{2}$, 则无论 m' 多大, 系统不能平衡

27. $0 \leq \omega < 0.445 \sqrt{\frac{k}{m}}$

28. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{r\omega^2}{g} = 4028$

29. $F_2/F_1 = 535$

第三章

1. $W_{\text{折}} = \frac{1}{3} mgh$

2. $h = \frac{1}{3} H$

3. $W = \frac{1}{2} \mu MgL\alpha$

4. (1) $x_0 = \frac{\mu}{1+\mu} l$ (2) $v = \sqrt{\frac{gl}{1+\mu}}$

5. $h = 4.9 \text{ m}$

6. $Q = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (R\omega)^2$

7. $H = \frac{m}{k} \ln \frac{6}{5}, v_t = \frac{5}{6} v_0$

8. (1) $M_f = 3.92 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ (2) $J = 0.242 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (3) $T = 48.6 \text{ N}$

9. (1) 水平时, $\beta = \frac{3g}{2l}$, 竖直时 $\beta = 0$ (2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, v_c = \omega \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3gl}$ $a_c = \frac{3}{2} g$

(3) $N = \frac{5}{2} mg$

10. $m: M = 1:4$

11. $v = \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{l}} g$

12. $2 \geq \frac{H}{h} \geq 1.4$

13. (1) $t = 7.07 \text{ s}, n = 53$ (2) $F = 176.7 \text{ N}$

14. (1) $l_0 = 13 \text{ m}$ (2) $v_m = 18 \text{ m/s}, a_m = 4 \text{ g}$

15. $0.088P$

16. $v_m = 0.5 \text{ m/s}$

17. $v = \frac{\sqrt{Lg}}{2}$

18. $N = \frac{1}{2}mg + \frac{7\sqrt{2}}{16}m\omega^2 R$

19. $d_1 = d_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ $d_2 = d_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

20. $v = 220 \text{ m/s}$

第四章

1. 地面下 100 km 处的重力加速度比地表处的大 0.7%.

2. 辅助引擎工作越早,火箭最终获得的能量越大,对主引擎来说也是一样.推进的最佳方式是在尽量短时间内以最大的排量使用引擎.

3. (1) 7.4 km/s (2) 1.13 倍 (3) 10.7 km/s

4. $5.3 \times 10^8 \text{ m}$

5. $M/m = 3 \times 10^5$

6. $v > \sqrt{\frac{3GM}{4OR}}$

7. (1) $v = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$ (2) 3月1日之后 38 天,即 4月7日

8. (1) 略

(2) $\frac{4\pi^2}{G} = 1$

(3) $M(a) = \frac{r^3}{T^2} = 0.93 \times 10^{11} M_\odot$

(4) $\frac{GmM(r)}{r^2} = mv^2/r$

当 $r > R$ 时, $v = \sqrt{\frac{GM(R)}{r}}$

(5) $\frac{GM(r)}{r} = v^2 = C(\text{定值})$

整个银河系的质量大于 $5.6 \times 10^{11} M_\odot$,其中发光物质小于 $1.4 \times 10^{11} M_\odot$,大部分为不发光物质,例如黑洞、中微子或其他尚未发现的粒子等.

9. 该理论是错误的,证明略

10. 物体做匀加速运动,加速度为 $\frac{2}{3}\pi GPR$,最终由于碰撞而停留在 O 处.

$$11. \rho = \frac{(n+1)^3 \omega^2 R - g}{n(n+1)g - \frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)\omega^2 R} \frac{m}{R}$$

$$12. \frac{m}{M_0} = 0.999 \approx 1$$

$$13. R = 1.26 \times 10^4 \text{ km}$$

$$14. \text{飞船在 } P \text{ 点向外喷气,使飞船获得一径向向里的速度 } \Delta v = (k-1)\sqrt{\frac{GM}{KR}}$$

(1) $k < 2 \Rightarrow E < 0$, 飞船沿椭圆轨道运动

(2) $k = 2 \Rightarrow E = 0$, 飞船沿抛物线运动

(3) $k > 2 \Rightarrow E > 0$, 飞船沿双曲线运动

$$15. \theta = 22.5^\circ, v = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)\frac{GM}{R}}$$

第五章

$$1. T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2g\sin\alpha}}$$

$$2. \text{干涉相长 } x = 50.5 - k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 49, + 50$$

$$\text{干涉相消 } x = 50 - k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 50$$

$$3. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$4. (1) t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2) v_c = -\sqrt{\frac{k}{m}}l, y_c = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

$$5. T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{k}}$$

$$6. (1) N = \text{int}\left(\frac{x_0 + x_c}{2x_c}\right) \quad (2) T = N\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3) x_N = (-1)^N(x_0 - 2Nx_c)$$

$$(4) \omega = 4kNx_c(x_0 - Nx_c)$$

$$7. T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

$$8. \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \text{ 或 } \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

$$9. v = \frac{(2n+1)s}{2kt} \quad (n=0, 1, 2, \dots, \quad k=1, 2, 3)$$

10. 略

第六章

$$1. 2.7 \times 10^{19}$$

$$2. (1) m_A = 1 \text{ kg} \quad (2) 300\text{K}, \text{先等压降温后定容降温.}$$

3. $\Delta L = L - L_1 = \left[\frac{3mg}{P_0 S + 3mg} + \frac{mg}{KL} \right] L$

4. 向上移动

5. $\frac{9P_0 + 4\rho gh}{20\rho h}, \sqrt{\frac{9P_0 + 6\rho gh}{140\pi^2 \rho h^2}}$

6. 327K 时气球上浮

7. 27 次、3.4 分钟

8. (1) 两盘均不加重或加等质量重物 (2) $V''_1 : V''_2 = 3 : 1$

9. 40 g

10. $h + 2 \frac{\rho gh L}{P_0}$

11. 右移 $x = 0.2 \text{ cm}$

第七章

1. 16°C

2. $\Delta l = \frac{mv_0^2}{7P_0 S}$

3. 不同, A 管中水银温度略高于 B 管

4. 0.08m, 410.5K

5. $\frac{2}{5}H, \frac{7}{5}T_0$

6. $\Delta T = -3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$

7. $P = P_0 + \Delta P = 3.3 \times 10^5 \text{ Pa}$

8. $W' = 25 \times 10^2 \text{ J}, Q = 87 \times 10^2 \text{ J}$

9. $W' = 0.25 nRT_1$

10. $T = \frac{3}{5}T_0 + \frac{2 MgV_0}{5 nRA}, V = \frac{2}{5}V_0 + \frac{3 nRT}{5 Mg}A$

11. $W' = 250 \text{ J}$

12. $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m_0 v^2}{3k}$

13. $\frac{3}{8}Q_0$

14. $T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{2P_0 as}}$

第八章

1. 略

2. 略

3. $T = T_0 + \frac{gl}{2c}$

4. 373K, 2mol, 1.0atm
5. $B = 50\%$
6. 114.5°C
7. $1.79 \times 10^5 \text{Pa}$
8. $2.30 \times 10^3 \text{J}$
9. A 断 B 不断
10. (1) $27.2^\circ\text{C}; 1\text{atm}, 2.46\text{L}$ (2) $22\text{J}; (3) 80\text{J}; (4) 58\text{J}$

第九章

1. 略

$$2. (1) f = \frac{2kq_1\theta_1}{\pi R_1^2}; (2) F = \frac{Kq_2\theta_2}{2R_2^2}$$

$$3. \text{两者周期相同 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{3\epsilon_0}q\rho_e + \frac{4\pi G}{3}m\rho_m}}$$

$$4. F = \frac{\theta^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} (R^2 - h^2)$$

$$5. W = 2mgh$$

$$6. E = \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\pi\epsilon_0 h}$$

7. 1%

$$8. (1) F = -\frac{(\epsilon_r - 1)\theta^2 ld}{2\epsilon_0 A [(\epsilon_r - 1)x + l]^2} \quad (2) F = \frac{\epsilon_0 A (\epsilon_r - 1) V^2}{2ld}$$

$$9. C = \frac{8\pi K R_1^2 R_2^2 \epsilon_0}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$10. U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2R\frac{a^2}{d}\cos\theta}} \right] + \frac{aU_0}{R}$$

$$11. U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{\frac{R_1}{d}Q}{\sqrt{r^2 + (\frac{R_1}{d})^2 - 2r\frac{R_1}{d}\cos\theta}}, \quad -Q, \text{内表面上.}$$

$$12. U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{br_1'} + \frac{a}{br_2'} - \frac{1}{r_2} \right)$$

(r_1 为 Q 到任意点 P 的距离, r_2 为 Q 对平面的像电荷 $-Q$ 到 P 点距离, r_1' 为 Q 相当半球面的象电荷 $-Q'$ 到 P 点距离, r_2' 为 $-Q'$ 对平面的像 Q' 到 P 点的距离)

$$13. (1) U_I = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] \epsilon \quad U_{II} = U_{III} = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] \epsilon \quad (2) W_R = \frac{1}{3} C \epsilon^2$$

$$14. \bar{U} = \frac{\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R_1^2 + L^2}}$$

15. 当 P 点点电荷为正时, $\cos^2 \theta > \frac{1}{3}$ 时稳定, $\cos^2 \theta < \frac{1}{3}$ 时不稳定.

当 P 点点电荷为负时, 结论正好与上相反 [提示: 设 P 点的点电荷沿任一方向 (此方向与 X 轴正方向夹角为 θ) 有一微小位移, 分析其受力在这个方向的分量是指向 O 点还是背离 O 点].

16. $x = \frac{2}{9}(\sqrt{10} - 1)d$

17. (1) $|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{13Q}{60a^2}$, (2) $|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{109}}{120a^2}Q$

18. (1) 外力做正功 $A = \frac{1}{2}CV_0^2$,

(2) 外力做正功 $A = \frac{1}{4}CV_0^2$ 电容器内能的改变 $\Delta W = -\frac{1}{4}CV_0^2$

19. $v_3 = \sqrt{\frac{2Kq^2}{3lm}}$

20. (1) $W_K = \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{2k-2}CV^2$ (2) $W = \frac{1}{63} \frac{Q^2}{C}$

第十章

1. $\frac{5}{48}R$ 2. $\frac{47}{22}R$ 3. $R_{AB} = \frac{3\sqrt{21}}{21}r$ 4. $R_{AB} = \frac{5\sqrt{7}-7}{12}aR_0$ 5. (2) $R_{2,4}^{(5)} = \frac{388}{627}R$

6. $\rho = (2 + \sqrt{2})\pi\sigma V_0/I_0$ 7. $\frac{5}{6}\Omega$ 8. 10 W

9. (1) 2.5 W

(2) 奇号电阻 $P_{2m-1} = \frac{5}{2^{2m-2}}W (m = 1, 2, \dots, 50)$

偶号电阻 $P_{2m} = \frac{5}{2^{2m-1}}W (m = 1, 2, \dots, 49)$

10. $\frac{2\epsilon}{2R + nr}$

11. $I_x = 2A$, 由上至下

12. (1) $R_1 = 12\Omega$ $R_3 = 10\Omega$ $R_4 = 2\Omega$ (2) $P = 2.88 W$

13. (1) $Q = \frac{2}{7}C_0\epsilon^2$ (2) $I = \frac{\epsilon}{2R}$

14. $C_{AB} = 2.9 \mu F$

15. (1) $I_D = 2mA$ (2) $P_1 = 0.016 W$

16. $\frac{15}{16}E^2 C$

第十一章

1. (1) 逆方向看, 电子运动的轨迹为一逆时针方向旋转、螺距不增加的螺旋运动, 螺距为 $h =$

$$(v_0 \cos \alpha + \frac{eE}{m}t) \frac{2\pi m}{eB}; \quad (2) d = 2r = \frac{2mv_0 \sin \alpha}{eB}$$

$$2. x = v_0 t - [R \sin(\omega t + \alpha) - x_0'] \quad y = y_0' - R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x = 0.63 \text{ m} \quad y = 0.80 \text{ m} \quad z = 0$$

$$v = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \alpha = 27^\circ$$

$$3. T = \frac{\omega R}{2\pi} (QB + m\omega)$$

$$4. T = \pi \sqrt{\frac{m}{(1+\alpha)K}} \quad \text{其中 } \alpha = \frac{\Delta l}{l} = \left[\sqrt{1 + \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi K l_0^2}} - 1 \right] / \left[\sqrt{1 + \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi K l_0^2}} + 1 \right]$$

$$5. (1) d \geq \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad d = \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad \alpha_0 = 0 \quad v_p = \frac{E}{B}$$

$$d > \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad v_p = \left[\frac{q^2 E^2 d^2}{(qBd \pm \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh})^2} + \frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh \pm qBd \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh}}{mqEd} \right)$$

$$v_0 = d \sqrt{\frac{qE}{2hm}} \quad v_{0n} = \frac{1}{2n+1} \left(d \sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n \frac{E}{B} \right) \quad v_{0n} = \frac{1}{2n-1} \left(d \sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n \frac{E}{B} \right)$$

$$6. r = \frac{mv_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{BB_1}} \quad \sin \alpha_{0L} = \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$$

7. $M = m$ 必定是中子

$$8. (2) v = \frac{BRg}{E} \quad (3) \text{圆周运动} \quad R_2 = R$$

$$9. a_m = g \quad v_m = \frac{1}{B} \left(\frac{mg}{\mu q} + E \right)$$

$$10. \frac{m_a}{m_b} = \frac{17}{7}, \frac{7}{5}, \frac{1}{7}$$

$$11. (1) h = \frac{qB^2 L^2}{2mE} - L \quad (2) x = R(\varphi - \sin \varphi) \quad y = R(1 - \cos \varphi)$$

$$12. v = \frac{qBR}{m} \tan \frac{\pi}{n}$$

$$13. v_0 = \frac{mg}{qB}$$

$$14. (1) I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1}$$

$$15. (1) v_n = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2a}{5(2n-1)} \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (2) t = 44 \frac{\pi m}{qB}$$

$$16. \frac{q}{m} = 1.6 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

$$17. M = \frac{\pi BE(b^2 - a^2)d}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

18. (1) $T_0 = 2 \frac{L}{v}$ (2) 略 (3) $\theta < \arctan \frac{\pi R}{L}$

19. $v_1 = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{T} \cdot \frac{3}{10} \pi$ $v_2 = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8}$ $v_3 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin \frac{3}{10} \pi}{\sin \frac{\pi}{5}}$

第十二章

1. (1) $v = \frac{BLCU}{m_1 + m_2 + B^2 L^2 C}$ (2) $\Delta W = \frac{(m_1 + m_2) CU^2}{2(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)}$

2. $W_s : W_k = 1 : 10^{-3}$ 主要转换为焦耳热

3. $i = \frac{B_0}{r} \cdot \frac{56 - 41C}{8} \times 10^{-3}$

4. (1) $x_1 = -0.035 \text{ m}$ (2) $x_2 = 0.483 \text{ m}$

5. $W = 8.0 \times 10^{-3} \text{ J}$

6. (1) $v_1 = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}})$ (2) $x = \frac{mRv_0}{B^2 l^2}$

7. $\bar{I}_2 = \frac{\sqrt{3} a^2 B}{6RT}$

8. $a_1 = \frac{B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2Rm}$ $a_2 = \frac{2MgR - B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2(M + m)R}$

9. (1) $\omega_{\text{球}} = \frac{qB}{2m \tan \theta_0}$ (2) 略

10. $\rho < 1.0 \times 10^{-26} \Omega \cdot \text{m}$

12. $\Delta x = \mu_0 \frac{\pi I_0^2 N^2 R}{2kx_0^2}$

13. (1) $U = nBlv / (3n + 2)$ (2) $U_e - U_f = [(n + 1)(3n + 2) + \sqrt{2} - 1] BLv$

14. $U_A - U_B = -\sqrt{3} a^2 K / 32$

15. (1)(2) $I_R = \frac{\pi D^2 K}{16r}$ (3) $I_g = \frac{\pi D^2 K}{8r}$

16. (1) $U_a - U_c = 0$ (2) $U_b - U_c = -\frac{1}{8} \omega B x_c^2 \tan \alpha$

17. 左环 $F = \frac{9\sqrt{3}}{5r} k (B_0 - kt_0) R^3$. 方向向左, 右环受力大小同左环, 方向向右

18. 任意点在磁场区域内 $\varepsilon = \frac{KR}{2\sqrt{2}} x$

任意点在磁场区域外 $\varepsilon = \frac{kR^2}{2} [1 + \arctan \frac{x - \sqrt{2}R}{x}]$

19. (1) $i = \frac{\mu_0 \pi r^2 I \omega}{4\sqrt{2} R \Omega} \sin \alpha t$



$$(2) \tau = \frac{\mu_0 \pi^2 r^4 I^2}{32 K^2 \Omega} \omega \sin^2 \omega t$$

$$(3) \varepsilon = -\frac{\mu_0 \pi^2 r^4 \omega^2 I}{32 R^2 \Omega} \cos^2 \omega t$$

20. 圆环作简谐振动. $z(t) = \frac{g}{\omega^2} (\cos \omega t - 1)$ $I = \frac{1}{L} B_0 x \pi r_0^2 A (\cos \omega t - 1)$

第十三章

1. $10 \mu\text{s}$

2. $5 \times 10^{11} \text{s}$

3. 对于车箱, $t'_A = t'_B = \frac{L_0}{C} = T$

对于地面, $t_A = T \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$ $t_B = T \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$

4. $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0}$. $\tan \theta = \tan \theta_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

5. 地球参考系 $t_2 - t_1 = 10a$

飞船参考系 $t'_2 - t'_1 = 6a$

6. $\Delta x' = -6.71 \times 10^8 \text{m}$

7. (1) 飞船上测量, 地球离飞船距离 $9 \times 10^9 \text{m}$

(2) 地球上测量, 飞船离地球距离 $2.7 \times 10^{10} \text{m}$

8.

	飞船观测结果	地面观测结果
飞船发射信号时刻	$t'_s = 1.0 \text{年}$	$t_s = 1.25 \text{年}$
	$l'_s = 0.60 \text{光年}$	$l_s = 0.75 \text{光年}$
地面收到和发射信号时刻	$t'_E = 2.5 \text{年}$	$t_E = 2.0 \text{年}$
	$l'_E = 1.5 \text{光年}$	$l_E = 1.2 \text{光年}$
飞船收到信号时刻	$t'_r = 4.0 \text{年}$	$t_r = 5.0 \text{年}$
	$l'_r = 2.4 \text{光年}$	$l_r = 3.0 \text{光年}$

9. $\frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

10. (1) $\rho = 5.26\rho_0$ (2) $P_x = \frac{h}{\lambda}$, 坐标 x 值不确定.

11. $h = 1.24 \times 10^4 \text{m}$

12. (1) $v = 0.42c$ $\theta = 36.1^\circ$ $\Delta t = 2.4 L_0/c$ (2) $L = 0.91 L_0$
 13. (1) 5.02 m/s (2) $P \approx 1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 (3) $F = 1.2 \times 10^{-11} \text{ N}$ $B = 0.25 \text{ T}$
 14. $\eta_D = 0.12\%$ $\eta_H = 1.45 \times 10^{-6}\%$
 15. (1) $(\Delta E)_E = 6.3 \times 10^7 \text{ J}$ $\eta_E = 7 \times 10^{-8}\%$
 (2) $1.3 \times 10^{16} \text{ J}$ $\eta = 14\%$ 此释能效率是太阳热核反应释能效率(0.69%)的约 20 倍.
 16. $E = 5.10 \times 10^6 \text{ eV}$ 10 倍 $v = 0.995c$
 17. (1) $4.15 \times 10^{-12} \text{ J}$ (2) $\eta = 0.69\%$ (3) $6.20 \times 10^{14} \text{ J/kg}$
 (4) $6.29 \times 10^{11} \text{ kg/s}$ (5) $7.56 \times 10^{10} \text{ a}$

第十四章

- $h = (k+1)d = 2.2 \text{ mm}$
- $R > 5.1 \text{ mm}$
- (1) $x \leq R$; (2) 三根光线均能经过全反射在光纤中传播.
- $f' = R_1 R_2 / [2(R_2 - R_1)] = 10 \text{ cm}$
- 物放在轴上距透镜 $r/(2n-1)$ 处.
- (1) $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$; (2) $\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1$; (3) $\frac{f'}{f} = -\frac{n_2}{n_1}$
- (1) $s' = -3f'_0$, 即在透镜左侧 $3f'_0$ 处, $\beta = 4$ 为正立虚像;
 (2) $s' = -f'_0$, 即该像与物点 P 重事, $\beta = \frac{4}{3}$ 仍为正立虚像.
- $n = \sqrt{2} \approx 1.414$
- (1) 略; (2) 像高 $\frac{H}{3}$, 为倒立实像.
- (1) 入射光线必须通过主轴上一确定的点, 它与 L_1 相距 $s_1 = -f'_1 d / [d - (f'_1 + f'_2)]$, 当 $s_1 > 0$ 时, 它在 L_1 右方, 当 $s_1 < 0$ 时, 它在 L_1 左方;
 (2) 略
- 分别考虑以下各种情况:
 (1) 两平面反射镜相向放置时, 不能满足题目要求;
 (2) 焦距为 f' 的薄透镜 L 和平面反射镜 M 共轴放置时, 只有当薄透镜 L 为凸透镜, 且 L 与 M 两者相距等于透镜焦距时, 才能满足题目要求;
 (3) 焦距分别为 f'_1 和 f'_2 的两个薄透镜共轴放置时, 只有当 $f'_1 = f'_2 > 0$ 即两个焦距相等的薄凸透镜, 且两者相距 $D = 2f'_1 = 2f'_2$ 时, 才能满足题目要求.
- $n = 1.65$
- 在凹透镜左侧 10 cm 处, 为倒立虚像, 像高 0.5 cm .
- (1) 证明略; (2) $6.3 \times 10^{-3} \text{ m}$
- 1.1777 mm ; 提供了一种测量细丝直径或薄片厚度的实验方法.
- 证明略
- $F = (W/c)(1 - f' / \sqrt{f'^2 + (D/2)^2}) = 2.1 \times 10^{-10} \text{ N}$, 方向与入射激光方向相同.

18. $h = 2e(U_1 - U_2)/RC, \quad A = e(U_1 - 3U_2)/2.$

第十五章

1. (1) 碰撞后速度大小近似为 v_0 , 其方向由散射角 θ 确定, $\theta = 2\arccos^{-1} \frac{b}{R+r}$;

(2) $\Delta N = \frac{\pi}{2} I_0 n_0 s d (R+r)^2 \sin\theta \cdot |\Delta\theta|$

2. $\lambda_1 = 6.565 \times 10^{-7} \text{ m}, \lambda_2 = 1.025 \times 10^{-7} \text{ m}, \lambda_3 = 1.215 \times 10^{-7} \text{ m}.$

3. 这条谱线是电子从 $n=4$ 的能级跃迁到 $n=2$ 的能级时发出的.

4. $\Delta\lambda \approx 6.67 \times 10^{-7} \text{ nm};$ 反冲速度的大小 $v = 3.26 \text{ m/s}$

5. (1) $\frac{r_{\text{He}^+}}{r_{\text{H}}} = \frac{1}{2}, \frac{r_{\text{Li}^{++}}}{r_{\text{H}}} = \frac{1}{3};$

(2) $\frac{E_{\text{电离He}^+}}{E_{\text{电离H}}} = 4, \frac{E_{\text{电离Li}^{++}}}{E_{\text{电离H}}} = 9;$

(3) $\frac{\lambda_{\text{He}^+}}{\lambda_{\text{H}}} = \frac{1}{4}, \frac{\lambda_{\text{Li}^{++}}}{\lambda_{\text{H}}} = \frac{1}{9}$

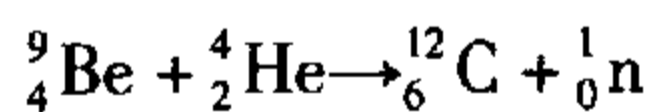
6. $\frac{\Delta P}{P} \approx 3.1 \times 10^{-6}$

7. $\tau = 1.8 \times 10^{31} \text{ yr}$

8. $h = 1.24 \times 10^4 \text{ m}$

9. $t = 1.12 \times 10^4 \text{ yr}$

10. $\frac{m}{m_{\text{H}}} = 1.03$, 为中子. 核反应方程式为



11. (1) $\Delta E = \frac{48}{169} E_0$, (2) 42 次

12. (1) $4.2 \times 10^9 \text{ kg/s};$ (2) $6 \times 10^{14} \text{ 个/m}^2;$ (3) $1.1 \times 10^{10} \text{ yr}$

13. $2.6 \times 10^3 \text{ kg}$

14. $2.68 \times 10^7 \text{ eV}$

15. (1) ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^2_0\text{n};$ (2) $6 \times 10^6 \text{ m/s};$ (3) $1.69 \times 10^{-23} \text{ kg}$

图书在版编目(CIP)数据

解题金钥匙系列·高中物理 / 黄生训等主编. —长沙:湖南师范大学出版社, 2006. 4

(奥赛经典丛书)

ISBN 7-81081-536-9

I. 解... II. 黄... III. 物理课—高中—解题
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086446 号

解题金钥匙系列·高中物理

◇主 编:黄生训 刘旭华 周石伦 彭圣儒

◇丛书策划:周玉波 陈宏平 何海龙

◇丛书组稿:何海龙

◇责任编辑:莫 华

◇责任校对:胡晓军

◇出版发行:湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 8853867 8872751 传真/0731. 8872636

◇经销:湖南省新华书店

◇印刷:望城湘江印刷厂

◇开本:730×960 1/16

◇印张:19.5

◇字数:523千字

◇版次:2006年4月第1版 2006年4月第1次印刷

◇印数:1—6000册

◇书号:ISBN 7-81081-536-9/G·278

◇定价:19.00元
