

高等学校教材



国防科工委802 2 0164791 3

普通物理学

2

(第五版)

胡盘新 汤毓骏 宋开欣 修订



高等教育出版社

高等学校教材

普通物理学

第二册

GF71/16

(第五版)

程守洙 江之永 主编

胡盘新 汤毓骏 宋开欣 修订



高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

普通物理学 第二册(第五版)/程守洙,江之永主编.
--5版. --北京:高等教育出版社,1998
高等学校教材
ISBN 7-04-006424-3

I. 普... II. ①程... ②江... III. 普通物理学-高等学校-教材 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 02827 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.5 字数 370 000

1961年8月第1版

1998年6月第5版 1998年6月第1次印刷

印数 0 001—30 106

定价 15.30 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

内 容 提 要

本书是在程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第三版)的基础上,根据1995年国家教委颁布的工科本科大学物理课程教学基本要求,结合读者多年使用此书的建议和意见,以及当前国内外物理教材改革的动态修订而成的.此次修订保留了第三版的体系、风格及特色,改写了部分内容,调整了个别章节,增加了阅读材料,充实了应用类题目,在内容现代化、加强应用性、扩大知识面、提高科学素养等方面均有进一步增强.

本书中的电磁学量和单位

量的名称	符号	单位名称	符号	量纲	备注
电流	I	安培	A	I	
电荷量	Q, q	库仑	C	TI	
电荷线密度	λ	库仑每米	C/m	$L^{-1}TI$	
电荷面密度	σ	库仑每平方米	C/m^2	$L^{-2}TI$	
电荷体密度	ρ	库仑每立方米	C/m^3	$L^{-3}TI$	
电场强度	E	伏特每米	V/m 或 N/C	$LMT^{-3}I^{-1}$	1 V/m = 1 N/C
电势	V, φ	伏特	V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	
电势差、电压	U	伏特	V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	
电容率	ϵ	法拉每米	F/m	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	
真空电容率	ϵ_0	法拉每米	F/m	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	
相对电容率	ϵ_r	—	—	—	
电偶极矩	p, p_e	库仑米	C·m	LTl	
电极化强度	P	库仑每平方米	C/m^2	$L^{-2}TI$	
电极化率	χ_e	—	—	—	
电位移	D	库仑每平方米	C/m^2	$L^{-2}TI$	
电位移通量	Ψ	库仑	C	TI	
电容	C	法拉	F	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	1 F = 1 C/V
电流密度	δ	安培每平方米	A/m^2	$L^{-2}I$	
电动势	\mathcal{E}	伏特	V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	
电阻	R	欧姆	Ω	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	1 Ω = 1 V/A
电导	G	西门子	S	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	1 S = 1 A/V
电阻率	ρ	欧姆米	$\Omega \cdot m$	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	
电导率	γ	西门子每米	S/m	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	
功率	P	瓦特	W	L^2MT^{-3}	
磁感应强度	B	特斯拉	T	$MT^{-2}I^{-1}$	1 T = 1 Wb/m ²
磁导率	μ	亨利每米	H/m	$LMT^{-2}I^{-2}$	
真空磁导率	μ_0	亨利每米	H/m	$LMT^{-2}I^{-2}$	
相对磁导率	μ_r	—	—	—	
磁通量	Φ	韦伯	Wb	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	1 Wb = 1 V·s

(续)

量的名称	符号	单位名称	符号	量纲	备注
磁化强度	M	安培每米	A/m	$L^{-1}I$	
磁化率	χ_m	—	—	—	
磁场强度	H	安培每米	A/m	$L^{-1}I$	
磁矩	p_m	安培平方米	$A \cdot m^2$	L^2I	
自感	L	亨利	H	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	1 H=1 Wb/A
互感	M	亨利	H	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	
电场能量	W_e	焦耳	J	ML^2T^{-2}	
磁场能量	W_m	焦耳	J	ML^2T^{-2}	
电磁能密度	w	焦耳每立方米	J/m^3	$ML^{-1}T^{-2}$	
磁阻	R_m	每亨利	1/H	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	
磁通势	F_m	安培	A	I	

责任编辑	张思攀
封面设计	季思九
责任绘图	李维平
版式设计	周顺银
责任校对	李 静
责任印制	宋克学

目 录

第三篇 电场和磁场

第八章 真空中的静电场	3
§ 8-1 电荷 库仑定律	3
§ 8-2 电场 电场强度	12
§ 8-3 高斯定理	30
§ 8-4 静电场的环路定理 电势	43
§ 8-5 等势面 电场强度与电势梯度的关系	53
§ 8-6 带电粒子在静电场中的运动	61
思考题	69
习 题	71
阅读材料 F 电子的发现和电子电荷量的测定	79
第九章 导体和电介质中的静电场	83
§ 9-1 静电场中的导体	83
§ 9-2 空腔导体内外的静电场	91
§ 9-3 电容器的电容	95
§ 9-4 电介质及其极化	106
§ 9-5 电介质中的静电场	114
§ 9-6 有电介质时的高斯定理 电位移	118
§ 9-7 * 电场的边值关系	126
§ 9-8 电荷间的相互作用能 静电场的能量	131
§ 9-9 铁电体 压电体 永电体	142
思考题	145
习 题	148
阅读材料 G 静电现象的应用	155
第十章 恒定电流和恒定电场	160
§ 10-1 电流密度 电流连续性方程	160

§ 10-2	恒定电流和恒定电场 电动势	164
§ 10-3	欧姆定律 焦耳-楞次定律	169
§ 10-4	一段含源电路的欧姆定律 * 基尔霍夫定律	174
§ 10-5	* 金属导电的经典电子理论	186
思考题	189
习 题	191
阅读材料 H	接触电势差 温差电现象	198
第十一章	真空中的恒定磁场	206
§ 11-1	磁感应强度 磁场的高斯定理	206
§ 11-2	毕奥-萨伐尔定律	212
§ 11-3	毕奥-萨伐尔定律的应用	216
§ 11-4	安培环路定理	224
§ 11-5	安培环路定理的应用	228
§ 11-6	带电粒子在磁场中所受作用及其运动	232
§ 11-7	带电粒子在电场和磁场中运动的应用	237
§ 11-8	磁场对载流导线的作用	249
§ 11-9	平行载流导线间的相互作用力 电流单位“安培”的定义	258
§ 11-10	磁力的功	260
思考题	264
习 题	266
阅读材料 I	生物磁学	276
第十二章	磁介质中的磁场	280
§ 12-1	磁介质 顺磁质和抗磁质的磁化	280
§ 12-2	磁化强度 磁化电流	285
§ 12-3	磁介质中的磁场 磁场强度	289
§ 12-4	* 磁场的边值关系	296
§ 12-5	铁磁质	299
§ 12-6	* 磁路定理	308
思考题	316
习 题	317
阅读材料 J	地球的磁场	321

第十三章	电磁感应和暂态过程	325
§ 13-1	电磁感应定律	325
§ 13-2	动生电动势	334
§ 13-3	感生电动势 有旋电场	347
§ 13-4	涡电流	352
§ 13-5	自感和互感	355
§ 13-6	电感和电容电路的暂态过程	362
§ 13-7	磁场的能量	370
思考题	376
习 题	380
阅读材料 K	磁效应及其应用	388
第十四章	麦克斯韦方程组 电磁场	395
§ 14-1	位移电流	395
§ 14-2	麦克斯韦方程组	402
§ 14-3	电磁场的物质性	407
§ 14-4	电磁场的统一性 电磁场量的相对性	408
思考题	415
习 题	416
阅读材料 L	磁流体波	417
附录 I	矢量(第二部分)	422
附录 I	电磁量的单位制	432
习题答案	442

第三篇 电场和磁场

人类对电磁现象的接触和认识是非常早的. 最初曾认为电现象和磁现象是互不相关的, 直到 1819 年奥斯特发现了电流对磁针的作用, 1820 年安培发现了磁铁对电流的作用, 才开始认识到电和磁的关系. 1831 年, 法拉第发现电磁感应定律, 使人们对电和磁的关系有了更为深刻的认识. 法拉第最先提出电场和磁场的观点, 认为电力和磁力两者都是通过场起作用的. 麦克斯韦在前人成就的基础上, 于 1865 年建立了系统的电磁场理论, 并指出光是一种电磁波——在空间传播的交变电磁场, 使光学成为电磁场理论的组成部分. 本篇主要介绍电场和磁场的一些基本特性, 以及电场和磁场对宏观物体(即实物)的作用和相互影响, 以便对电磁场的物质性和电磁场的规律有较深刻的认识.

电磁学是研究电荷和电流产生电场和磁场的规律, 电场和磁场的相互联系, 电磁场对电荷和电流的作用, 电磁场对实物的作用及所引起的各种效应等. 电磁现象是自然界中普遍存在的一种现象, 它涉及的方面很广泛, 从人们的日常生活到一般的生产部门, 从各种新技术的开发和应用到尖端的科学研究, 无一不和电磁学有关. 因此, 电磁学部分是大学物理中很重要的基础内容.

电磁学内容按性质来分, 主要包括“场”和“路”两部分. 鉴于中学物理对路有较多的讨论, 本书偏重于从场的观点来进行阐述. “场”不同于实物物质, 它具有空间分布, 这样的对象从概念到描述方法, 对初学者来说都是新的. 在本书中, 对有关矢量场的基本特性及其描述方法——引入“通量”和“环流”两个概念及相应的通量定理和环路定理——在第八章真空中的静电场中便可遇到, 这些概念和描述方法贯穿在后面各个章节之中, 从这个意义上讲, 真空

中的静电场是整个电磁学课程的基础和重点,期望初学者通过对静电场内容的学习,能逐渐适应于接受用“通量”和“环流”及相应的定理来描述物质存在的另一种形式——场,因为打好这个基础将对全书的学习裨益匪浅.

第八章 真空中的静电场

相对于观察者为静止的电荷所激发的电场,称为静电场.本章我们研究真空中静电场的基本特性,并从电场对电荷有力的作用,电荷在电场中移动时电场力将对电荷做功这两个方面,引入描述电场的两个重要物理量:电场强度和电势.同时介绍反映静电场基本性质的场强叠加原理、高斯定理和场强环路定理,并讨论电场强度和电势两者之间的积分形式的关系和微分形式的关系.最后,简单介绍电荷在静电场中所受作用及其运动情况.

§ 8-1 电荷 库仑定律

1. 电荷

人们对于电的认识,最初来自人为的摩擦起电现象和自然界的雷电现象.例如,公元3世纪,晋朝张华的《博物志》中就记载着:“今人梳头、解著衣,有随梳解结,有光者,亦有咤声.”这里记载了摩擦起电引起闪光和噼啪之声.据目前所知,这是世界上关于摩擦起电的较早的记录.事实上,两个不同质料的物体,例如丝绸和玻璃棒,经互相摩擦后,都能吸引羽毛、纸片等轻微物体.这表明两个物体经摩擦后,处于一种特殊状态,我们把处于这种状态的物体称为带电体,并说它们分别带有电荷.

实验证明,物体所带的电荷有两种,而且自然界也只存在这两种电荷.为了区别起见,分别称为正电荷和负电荷.带同号电荷的物体互相排斥,带异号电荷的物体互相吸引,这种相互作用称为电性力.电性力与万有引力有些相似,但万有引力总是相互吸引的,

而电性力却随电荷的异号或同号有吸引与排斥之分. 根据带电体之间的相互作用力的强弱, 我们能够确定物体所带电荷的多寡. 表示物体所带电荷多寡程度的物理量称为电荷量, 用符号 q 表示. 正电荷的电荷量取正值, 负电荷的电荷量取负值.

2. 电荷守恒定律

为什么摩擦可使物体带电? 这可根据物质的电结构加以说明. 我们知道, 常见的宏观物体(实物)都由分子、原子组成, 而任何元素的原子都由一个带正电的原子核和一定数目的绕核运动的电子所组成, 原子核又由带正电的质子和不带电的中子组成. 每一个质子所带正电荷量和电子所带负电荷量是等值的, 通常用 $+e$ 和 $-e$ 来表示(参看表 8-1). 在正常情况下, 原子内的电子数和原子核内的质子数相等, 从而整个原子呈电中性. 由于构成物体的原子是电中性的, 因此, 通常的宏观物体将处于电中性状态, 物体对外不显示电的作用, 当两种不同质料的物体相互紧密接触时, 有一些电子

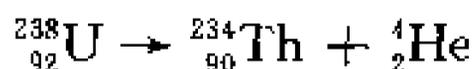
表 8-1 电子、质子和中子的电荷量和质量

	电荷量/C	质量/kg
电 子(e)	$1.602\ 177 \times 10^{-19}$	$9.109\ 389 \times 10^{-31}$
质 子(p)	$1.602\ 177 \times 10^{-19}$	$1.672\ 623 \times 10^{-27}$
中 子(n)	0	$1.674\ 928 \times 10^{-27}$

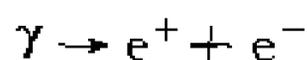
会从一个物体迁移到另一个物体上去, 结果使两物体都处于带电状态. 因此所谓起电, 实际上是通过某种作用破坏了物体的电中性状态, 使该物体内电子不足或过多而呈带电状态. 例如, 通过摩擦可使两物体间接触面增大且更紧密, 同时, 还可使接触面的温度升高, 促使更多的电子获得足够的动能, 易于在两物体的接触面间迁移, 从而使物体明显处于带电状态.

实验证明, 无论是摩擦起电的过程, 还是其他方法使物体带电的过程, 正负电荷总是同时出现的, 而且这两种电荷的量值一定相

等. 当两种等量的异号电荷相遇时, 则互相中和, 物体就不带电了. 由此可见, 当一种电荷出现时, 必然有相等量值的异号电荷同时出现; 一种电荷消失时, 也必然有相等量值的异号电荷同时消失. 在一个与外界没有电荷交换的系统内, 无论进行怎样的物理过程, 系统内正、负电荷量的代数和总是保持不变, 这就是由实验总结出来的电荷守恒定律, 是物理学中的基本定律之一. 随着近代物理学的不断发展, 这个定律在微观物理过程中得到了精确验证. 例如在下列典型的放射性衰变过程中



具有放射性的铀核 ${}_{92}^{238}\text{U}$ 含有92个质子, 它的原子序数 $Z=92$. 此铀核自发发射 $Z=2$ 的一个 α 粒子(即 ${}_2^4\text{He}$), 而蜕变为 $Z=90$ 的钍核 ${}_{90}^{234}\text{Th}$. 在这个过程中, 蜕变前的电荷量总和($+92e$)就与蜕变后的电荷量总和相同. 又如, 一个高能光子在重核附近可以转化为电子偶(一个正电子和一个负电子), 光子的电荷量为零, 电子偶的电荷量的代数和也为零; 反之, 电子偶也能湮没为光子, 湮没前后, 电荷量的代数和仍相等. 其反应可表为



至于在宏观带电体中的起电、中和、静电感应和电极化等现象中, 其系统所带电荷量的代数和也保持不变, 电荷守恒定律也是成立的.

3. 电荷的量子化

到目前为止的所有实验表明, 电子或质子是自然界带有最小电荷量的粒子, 任何带电体或其它微观粒子所带的电荷量都是电子或质子电荷量的整数倍. 这个事实说明, 物体所带的电荷量不可能连续地取任意量值, 而只能取某一基本单元的整数倍值. 电荷量的这种只能取分立的、不连续量值的性质, 称为电荷的量子化, 这

个基本单元或称电荷的量子就是电子或质子所带的电荷量. 虽然如此, 由于电荷的基本单元(即电子电荷量 e) 很小, 因而宏观过程中涉及的电荷量总是包含着大量的基本单元. 例如在通常 220 V、100 W 的灯泡中, 每秒通过钨丝的电子数就有 3×10^{18} 个, 致使电荷的量子性在研究宏观现象的实验中表现不出来, 就象我们在喝水时并不感觉到水是由分子、原子等微观粒子组成的一样. 所以, 在研究宏观电现象时, 可以不考虑电荷的量子化, 仍把带电体上的电荷看作是连续分布的. 本世纪 50 年代以来, 各国理论物理工作者陆续提出了一些关于物质结构更深层次的模型, 1964 年美国的盖尔曼(M. Gell-Mann)和兹维格(G. Zweig)提出了夸克模型, 他们认为强子是由更基本的粒子(夸克)构成的. 我国理论物理工作者对夸克理论作出了不少贡献, 提出了层子模型, 认为强子是由更深层次的“层子”构成的. 夸克理论认为, 夸克带有分数电荷, 它们所带的电荷量是电子电荷量的 $\pm \frac{1}{3}$ 、 $\pm \frac{2}{3}$. 强子由夸克组成, 在理论上已是无可置疑的, 只是迄今为止, 尚未在实验中找到自由状态的夸克. 不过今后即使真的发现了自由夸克, 仍不会改变电荷量子化的结论.

量子化是微观世界一个基本概念, 我们将看到在微观世界中, 能量、角动量等也是量子化的.

4. 库仑定律

物体带电后的主要特征是带电体之间存在相互作用的电性力. 一般说来, 作用力与带电体的形状、大小和电荷分布、相对位置以及周围的介质等因素都有关系, 要用实验直接确立电性力对这些因素的依赖关系是困难的. 为了使所讨论的问题简单起见, 在静电现象的研究中, 我们经常用到点电荷的概念, 它是从实际带电体抽象出来的理想模型. 在具体问题中, 当带电体的形状和大小与它们之间的距离相比允许忽略时, 可以把带电体看作点电荷. 因此点

电荷这一概念只具有相对的意义,它本身不一定是很小的带电体.如果两个带电体满足能看作点电荷的条件,那么两个带电体之间的电性力只取决于各自所带的总电荷量和它们之间的距离,问题就大为简化.

1785年,库仑(A. de Coulomb)从扭秤实验结果总结出了点电荷之间相互作用的静电力所服从的基本规律,称为库仑定律.可陈述如下:

在真空中,两个静止点电荷之间相互作用力的大小与这两个点电荷的电荷量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,而与这两个点电荷之间的距离 r_{12} (或 r_{21})的平方成反比,作用力的方向沿着这两个点电荷的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸.其数学形式可表为

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \quad (8-1)$$

式中 k 是比例系数, F_{12} 表示 q_2 对 q_1 的作用力, r_{12} 是由点电荷 q_2 指向点电荷 q_1 的矢量(图8-1).不论 q_1 和 q_2 的正负如何,公式(8-1)

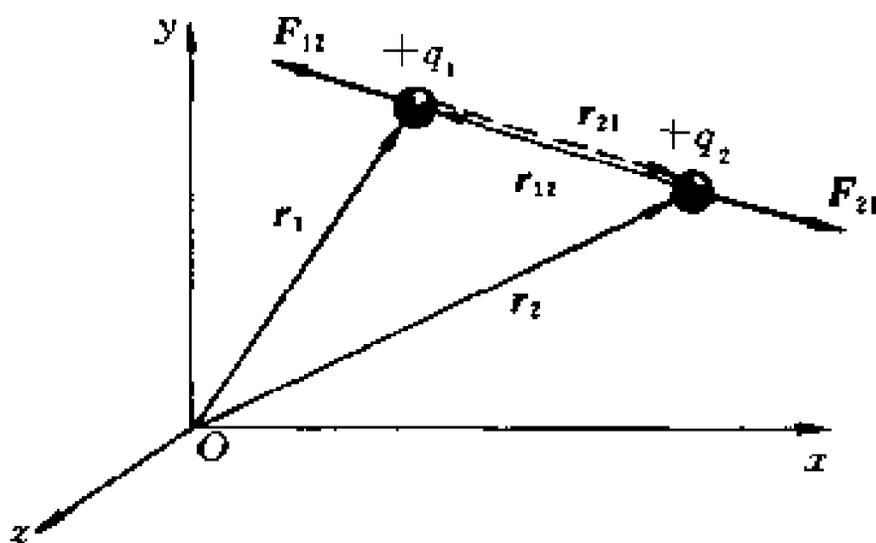


图 8-1 两个点电荷之间的作用力

都适用.当 q_1 和 q_2 同号时(图8-1), F_{12} 与矢量 r_{12} 的方向相同,表明 q_2 对 q_1 的作用力是斥力; q_1 和 q_2 异号时, F_{12} 与 r_{12} 的方向相反,表明 q_2 对 q_1 的作用力是引力.所以,上述矢量式同时给出了作用力的大小和方向.

库仑定律公式中比例系数 k 的数值和单位,取决于式中各量

所采用的单位. 在电磁学中, 选取不同的基本量, 可以导出不同的方程系. 根据国家标准, 本书采用四个基本量、有理化方程系. 方程系选长度、质量、时间和电流为基本量, 它们的国际单位制单位分别是米(m)、千克(kg)、秒(s)和安培(A), 其它各电磁量的单位都可以从这四个基本单位导出. 在国际单位制中, 电荷量的单位是库仑(C), 由安培导出. 1 C 的电荷量定义为: 当导线中的恒定电流等于 1 A 时, 在 1 s 内流过导线横截面的电荷量. 这样, 在库仑定律的表式中, 距离的单位用 m, 力的单位用 N, 电荷量的单位用 C, 由于式中所有物理量的单位都已选定. 比例系数 k 的数值就不能任意规定, 只能通过实验来测定. 根据实验测得

$$k = 8.987\ 5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

在此有理化方程系中, 通常引入新的常量 ϵ_0 来代替 k , 并把 k 写成

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

于是, 真空中库仑定律就可写作

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21} \quad (8-2)$$

式中的常量 ϵ_0 称为真空电容率, 也称真空介电常量.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 8.987\ 5 \times 10^9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) = 8.854\ 2 \times 10^{-12} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

应该指出, 本方程系之称为“有理化”, 就在于因子 4π 的引入. 这样, 虽然使得库仑定律的表式变得复杂一些, 但以后可以看到, 由此而推导出来的一些常用的公式中, 却不出现因子 4π , 所以这种规定还是有利的. 而且以后还会看到, 这里引入的新常量 ϵ_0 和在第十一章引入的常量 μ_0 (真空磁导率) 合在一起与自然界另一个重要常量——真空中的光速 c 有着密切的联系 $\left(\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \right)$.

库仑定律是直接由实验总结出来的规律,它是静电场理论的基础.后面我们还将看到,以库仑定律中力与距离平方成反比为基础将导出其他重要的电场方程,因此定律中平方反比规律的精确性以及定律的适用范围一直是物理学家关心的问题.以库仑当时所做的扭秤实验的精度,算得电力与距离平方成反比中的幂与2的差值约为0.2,现代更精密的实验测得幂2的误差不超过 10^{-9} .而且,根据现代 α 粒子对原子核的散射实验,可证实距离 r 在 $10^{-12} \sim 10^{-15}$ m的范围内库仑定律仍是正确的.

实验还证明,各对点电荷之间的静电力彼此是独立的,即任何一对点电荷之间的静电力都遵守库仑定律,并不因为邻近存在其他电荷而改变.所以,当空间有两个以上的点电荷时,作用在某一点电荷上的总静电力等于其他各点电荷单独存在时对该点电荷所施静电力的矢量和,这一结论叫做电场力的叠加原理.库仑定律和叠加原理相配合,原则上可以求解静电学中的全部问题.

例题 8-1 按量子理论,在氢原子中,核外电子快速地运动着,并以一定的概率出现在原子核(质子)的周围各处,在基态下,电子在以质子为中心,半径 $r=0.529 \times 10^{-10}$ m的球面附近出现的概率最大.试计算在基态下,氢原子内电子和质子之间的静电力和万有引力,并比较两者的大小.引力常量为 $G=6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².

解 按库仑定律计算,电子和质子之间的静电力为

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8.99 \times 10^9 \times \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(0.529 \times 10^{-10})^2} \text{ N} = 8.22 \times 10^{-8} \text{ N}$$

应用万有引力定律及表 8-1 中的数据计算,电子和质子之间的万有引力为

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} =$$

$$6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(0.529 \times 10^{-10})^2} \text{ N} =$$

$$3.63 \times 10^{-47} \text{ N}$$

由此得静电力与万有引力的比值为

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.26 \times 10^{39}$$

可见在原子内,电子和质子之间的静电力远比万有引力大,因此,在处理电子和质子之间的相互作用时,只需考虑静电力,万有引力可以略去不计.而在原子结合成分子,原子或分子组成液体或固体时,它们的结合力在本质上也都属于电性力.

例题 8-2 设原子核中的两个质子相距 $4.0 \times 10^{-15} \text{ m}$,求此两个质子之间的静电力.

解 两个质子之间的静电力是斥力,它的大小按库仑定律计算为

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(4.0 \times 10^{-15})^2} \text{ N} = 14 \text{ N}$$

可见,在原子核内质子间的斥力是很大的.质子之所以能结合在一起组成原子核,是由于核内除了这种斥力外还存在着远比斥力为强的引力——核力的缘故.上述两个例题,说明了原子核的结合力远大于原子的结合力,原子的结合力又远大于相同粒子相隔同样距离的万有引力.

例题 8-3 在图 8-2 中,三个点电荷所带的电荷量分别为 $q_1 = -86 \mu\text{C}$, $q_2 = 50 \mu\text{C}$, $q_3 = 65 \mu\text{C}$.各电荷间的距离如图所示.求作用在 q_3 上合力的大小和方向.

解 选用如图所示的直角坐标系,并取 i 和 j 分别为沿 x 、 y 轴方向的单位矢量.

按库仑定律可算得电荷 q_1 作用于电荷 q_3 上的力 F_{31} 的大小为

$$F_{31} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{(6.5 \times 10^{-5}) \times (8.6 \times 10^{-5})}{(0.6)^2} \text{ N} = 140 \text{ N}$$

力 F_{31} 沿 x 轴和 y 轴的分量分别为

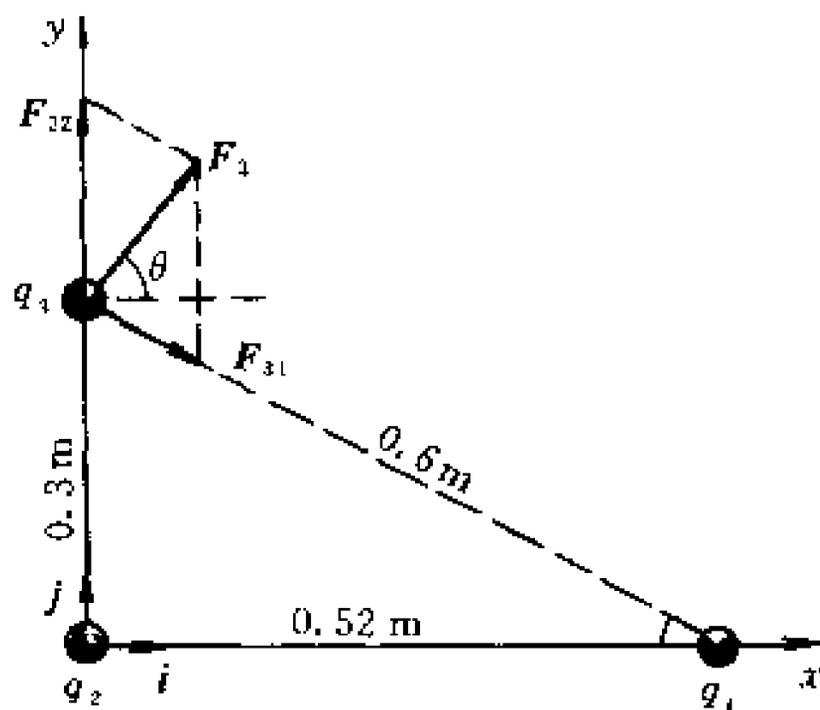


图 8 2 求作用在 q_3 上的合力

$$F'_x = F_{31} \cos 30^\circ = 120 \text{ N}$$

$$F'_y = F_{31} \sin 30^\circ = -70 \text{ N}$$

电荷 q_2 作用于电荷 q_3 上的力 F_{32} 的大小为

$$F_{32} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{(6.5 \times 10^{-5}) \times (5.0 \times 10^{-5})}{(0.3)^2} \text{ N} = 325 \text{ N}$$

力 F_{32} 沿 x 轴和 y 轴的分量分别为

$$F''_x = 0$$

$$F''_y = 325 \text{ N}$$

根据静电力的叠加原理, 作用于电荷 q_3 上的合力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = (F'_x + F''_x)\mathbf{i} + (F'_y + F''_y)\mathbf{j} \\ &= (120\mathbf{i} + 255\mathbf{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

合力 F_3 的大小为

$$F_3 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{120^2 + 255^2} \text{ N} = 281.8 \text{ N}$$

合力 F_3 和 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{F_y}{F_x} = 64.8^\circ$$

从上面的例子可以看出, 由库仑定律算出的作用力是不小的, 在距离一定时, 它与带电体所带电荷量相关. 例如, 两个各带电荷

量为 1 C 的带电体,当它们相距 1 m 时,根据库仑定律算出其作用力达 $9.0 \times 10^9\text{ N}$. 然而,通常在实验室里,利用摩擦起电使物体能获得的电荷量的数量级只是 10^{-6} C ,此时相距 1 m 时的静电力仅为 10^{-2} N 的数量级,这就是说,实际上我们利用通常的起电方法,不可能使一个有限大(例如半径为 1 m 的球体)的物体的带电量达到 1 C 或接近 1 C ,因为早在电荷量聚积到此值前,周围的绝缘体已被击穿,物体上的电荷早已漏掉. 所以,通常遇到的静电力还是很小的,只能吸引轻微的物品.

§ 8-2 电场 电场强度

1. 电场

我们知道力是物体之间的相互作用,它不能脱离物质而存在. 两个物体彼此不相接触时,其相互作用必须依赖其间的物质作为介质来传递. 没有物质作介质,物体之间的相互作用就不可能发生,而且物体间相互作用的传递需要时间,也就是说作用的传递是有速度的. 例如,我们听到电铃发声,电铃声与耳膜的作用是依靠其间的空气作为介质来传递的. 如果将电铃和耳膜间的空气抽去,就不能引起耳膜的振动而听到铃声.

库仑定律表明,真空中两个相互隔开的点电荷也可以发生相互作用. 这就是说,电荷之间相互作用的传递不需要由分子、原子构成的物质作介质. 因此在很长一段时期内,人们认为两个相隔的带电体之间的作用,是一种“超距作用”. 这种超距作用的传递既不需要中间物质作介质,也不需要时间.

近代物理的观点认为,任何电荷都在其周围空间激发电场,而电场的基本特征是对处在其中的任何电荷都有作用力. 因此,电荷之间的相互作用,是通过其中一个电荷所激发的电场对另一个电荷的作用来传递的. 这种传递虽然很快(约 $3 \times 10^8\text{ m/s}$),但仍需要

时间,这种观点叫做近距作用观点或称场的观点.电场对处在其中的其他电荷的作用力叫做电场力,两个电荷之间的相互作用力本质上是一个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力.

理论和大量实验证明场的观点是正确的.当电荷静止时,电荷周围的静电场具有稳定的分布,在这种场中,相互作用传递的时间显示不出来.如果带电体的电荷分布突然改变或者带电体发生运动时,则无论是理论还是实验,都证明带电体周围变化的电磁场以光速在空间传播,一处的电磁扰动,要经过一定的时间才能影响到另一处,另一带电体所受作用力的变化将推迟一段时间.这时,超距作用观点便无立足之地了.

电磁场是物质存在的一种形态,它分布在一定范围的空间里,并和一切物质一样,具有能量、动量、质量等属性.但是,电磁场的物质性只有在它处于迅速变化的情况下,才能明显地表现出来.本章只讨论相对于观察者静止的电荷在周围空间所激发的电场,即静电场.静电场是普遍存在的电磁场的一种特殊情况.

2. 电场强度

一个被研究对象的物理特性,总是能通过对象与其他物体的相互作用显示出来.静电场的一个基本特性是它对引入电场的任何电荷有力的作用,因此我们可以利用电场的这一特性,从中找出能反映电场性质的某个物理量来.为了定量地了解电场中任一点处电场的性质,可利用一个试探电荷 q_0 放到电场中各点,并观测 q_0 受到的电场力.试探电荷应该满足下列条件:首先所带的电荷量必须尽可能地小,当把它引入电场时,不致扰乱原来的分布,也就是不会对原有电场有任何显著的影响,否则测出来的将是原电荷作重新分布后的电场;其次线度必须小到可以被看作为点电荷,以便能用它来确定场中每一点的性质,不然,只能反映出所占空间的平均性质.实验指出,把同一试探电荷 q_0 放入电场不同地点时, q_0 所受力的方向和大小逐点不同(参看图8-3,图中 q_0 为正电荷),

但在电场中每一给定点处, q_0 所受力的方向和大小却是完全一定的. 如果在电场中某给定点处我们改变试探电荷 q_0 的量值, 将发现 q_0 所受力的方向仍然不变, 但力的大小却和 q_0 的量值成正比地改变. 由此可见, 试探电荷在电场中某点所受到的力, 不仅与试探电荷所在点的电场性质有关, 而且与试探电荷本身的电荷量有关. 但是, 比值 $\frac{F}{q_0}$ 却与试探电荷本身无关, 而仅仅与试探电荷所在点处的电场性质有关. 所以, 我们可用试探电荷所受的力和试探电荷所带电荷量之比, 作为描述静电场中给定点的客观性质的一个物理量, 称为电场强度或简称场强. 场强是矢量, 用符号 E 表示, 即

$$\boxed{E = \frac{F}{q_0}} \quad (8-3)$$

由上式可知, 电场中某点的电场强度等于单位电荷在该点所受的电场力. q_0 为正时, E 的方向和电场力 F 的方向相同; q_0 为负时, E 的方向和电场力 F 的方向相反 (见图 8-4). 在电场中给定的任一点 $r(x, y, z)$ 处, 就有一确定的电场强度 E , 在电场中不同点处的 E 一般不相同, 因此, E 应是空间坐标 (x, y, z) 的函数, 可记作 $E(x, y, z)$, 所有这些场强 $E(x, y, z)$ 的总体形成一矢量场.

在国际单位制中, 力的单位是 N, 电荷量的单位是 C, 根据式 (8-3), 场强的单位是 N/C, 场强的单位也可以写成 V/m (参看 § 8-7). 这两种表示法是一样的, 在电工计算中常采用后一种表示法.

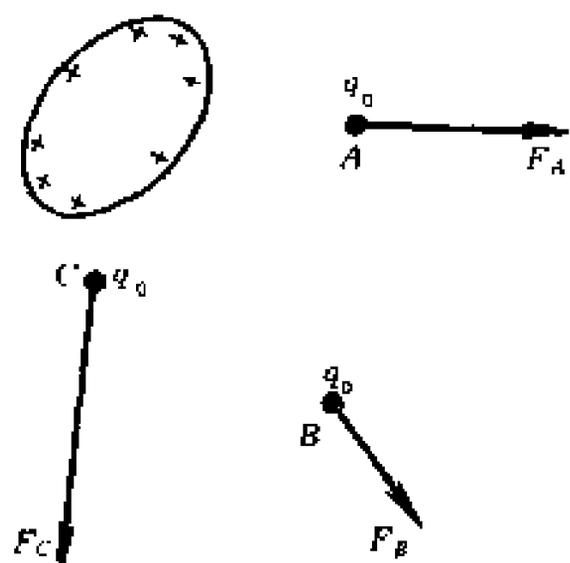


图 8-3 试探电荷 q_0 在电场中受力的情况

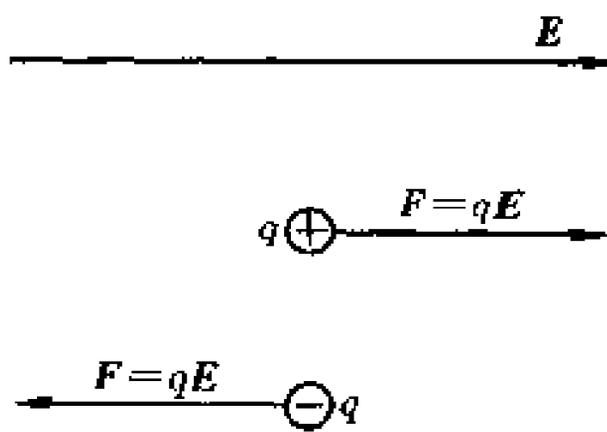


图 8-4 电场对正、负电荷作用力的方向

3. 场强的计算

如果电荷分布已知,那么从点电荷的场强公式出发,根据场强的叠加原理,就可求出任意电荷分布所激发电场的场强.下面说明计算场强的方法.

(1) 点电荷的场强

设在真空中有一个静止的点电荷 q ,则距 q 为 r 的 P 点处的场强,可由式(8-1)和(8-3)求得.其步骤是先设想在距离点电荷 q 为 r 的 P 点放一试探电荷 q_0 ,由式(8-1)可知,作用在 q_0 上的电场力是

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} r$$

式中 r 是由点电荷 q 指向 P 点的矢量,再应用式(8-3)可求得 P 点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r \quad (8-4)$$

由式(8-4)可知,点电荷 q 在空间任一点所激发场强的大小,与点电荷的电荷量 q 成正比,与点电荷 q 到该点距离 r 的平方成反比.如果 q 为正电荷,可知 E 的方向与 r 的方向一致,即背离 q ;如果 q 为负电荷, E 的方向与 r 的方向相反,即指向 q ,如图 8-5 所示.

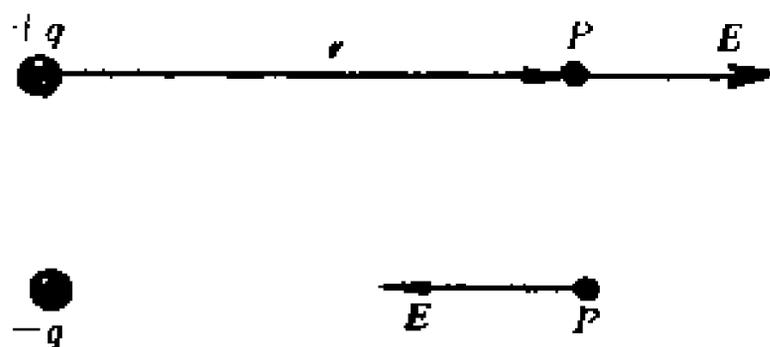


图 8-5 点电荷的场强

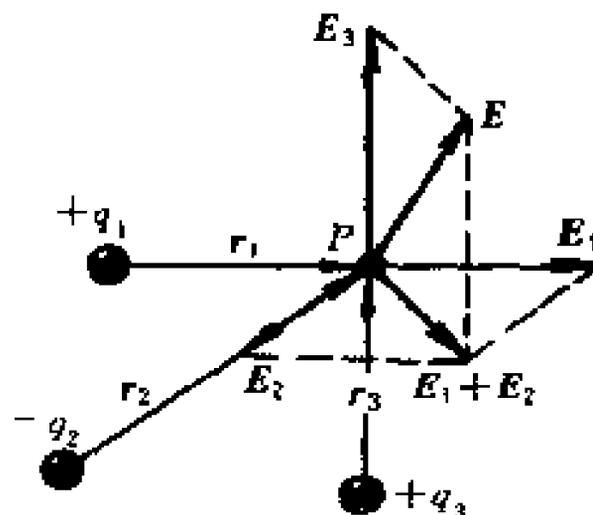


图 8-6 点电荷系的场强

(2) 场强叠加原理和点电荷系的场强

如果电场是由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 共同激发的, 这些电荷的总体称为电荷系. 根据电场力的叠加原理, 试探电荷 q_0 在电荷系的电场中某点 P 处所受的力等于各个点电荷单独存在时对 q_0 作用的力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

两边除以 q_0 得

$$\frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0}$$

按场强的定义, 等号右边各项分别是各个点电荷在 P 点激发的场强, 而左边为 P 点的总场强, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (8-5)$$

上式说明, 点电荷系在空间任一点所激发的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自所激发的场强的矢量和. 这就是场强叠加原理, 是电场的基本性质之一. 利用这一原理, 可以计算任意带电体所激发的场强, 因为任何带电体都可以看作许多点电荷的集合.

设各点电荷指向 P 点的矢量分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, 按式(8-4), 各点电荷在 P 点处激发的场强分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \mathbf{r}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{E}_n = \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^3} \mathbf{r}_n$$

根据场强叠加原理, 这个点电荷系在 P 点所激发的总场强 \mathbf{E} (图 8-6) 为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (8-6)$$

例题 8-4 在直角坐标系的原点 $(0,0)$ 及离原点 1.0 m 的 y 轴上 $(0,1)$ 处分别放置电荷量为 $q_1 = 1.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ 和 $q_2 = -2.0 \times$

10^{-9} C 的点电荷, 求 x 轴上离原点为 2.0 m 处 P 点的场强(图 8-7).

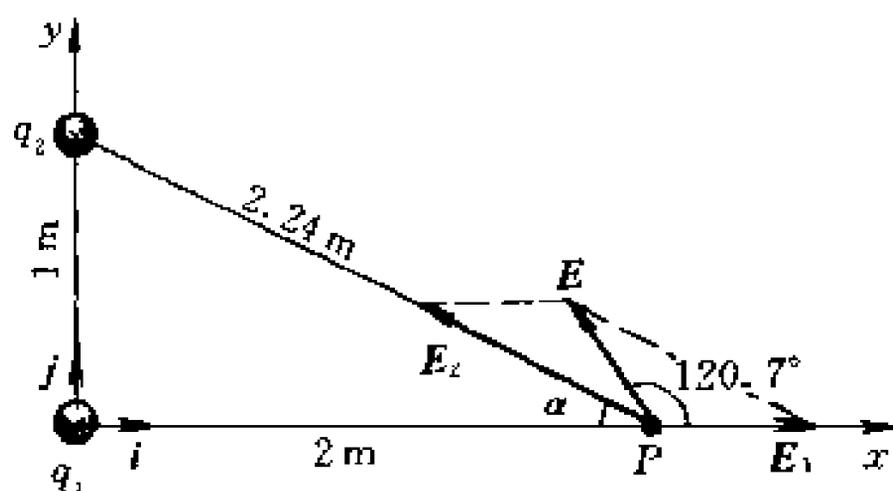


图 8-7 两个点电荷场强的计算

解 q_1 在 P 点所激发的场强为

$$E_1 = 9.0 \times 10^9 \times \frac{1.0 \times 10^{-9}}{2.0^2} (-i) \text{ N/C} = 2.3i \text{ N/C}$$

q_2 在 P 点所激发场强的大小为

$$E_2 = 9.0 \times 10^9 \times \frac{2.0 \times 10^{-9}}{\left(\sqrt{1.0^2 + 2.0^2}\right)^2} \text{ N/C} = 3.6 \text{ N/C}$$

E_2 的矢量式为

$$\begin{aligned} E_2 &= (-3.6 \cos \alpha i + 3.6 \sin \alpha j) \text{ N/C} \\ &= (-3.2i + 1.6j) \text{ N/C} \end{aligned}$$

根据场强叠加原理, P 点的总场强为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = [(2.3 - 3.2)i + 1.6j] \text{ N/C} \\ &= (-0.9i + 1.6j) \text{ N/C} \end{aligned}$$

E 的大小为 $E = \sqrt{0.9^2 + 1.6^2} \text{ N/C} = 1.9 \text{ N/C}$

E 和 x 轴的夹角为 $\theta = \arctan \frac{1.6}{-0.9} = 120.7^\circ$

例题 8-5 计算电偶极子轴线的延长线上和中垂线上任一点的场强.

解 两个大小相等符号相反的点电荷 $+q$ 和 $-q$, 当它们之间

的距离 r_e 比所考虑的场点到二者的距离小得多时, 这一电荷系统就称为电偶极子. 连结两电荷的直线称为电偶极子的轴线, 取从负电荷指向正电荷的矢量 r_e 的方向作为轴线的正方向. 电荷量 q 与矢量 r_e 的乘积定义为电偶极矩, 简称电矩, 电矩是矢量, 用 p_e 表示, 即

$$p_e = qr_e$$

我们首先计算电偶极子轴线的延长线上某点 A 的场强 E_A . 选取电偶极子轴线的中心 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(x, 0)$, $x \gg r_e$, 如图 8-8(a) 所示. $+q$ 和 $-q$ 分别在 A 点所激发的场强 E_+ 和 E_- 为

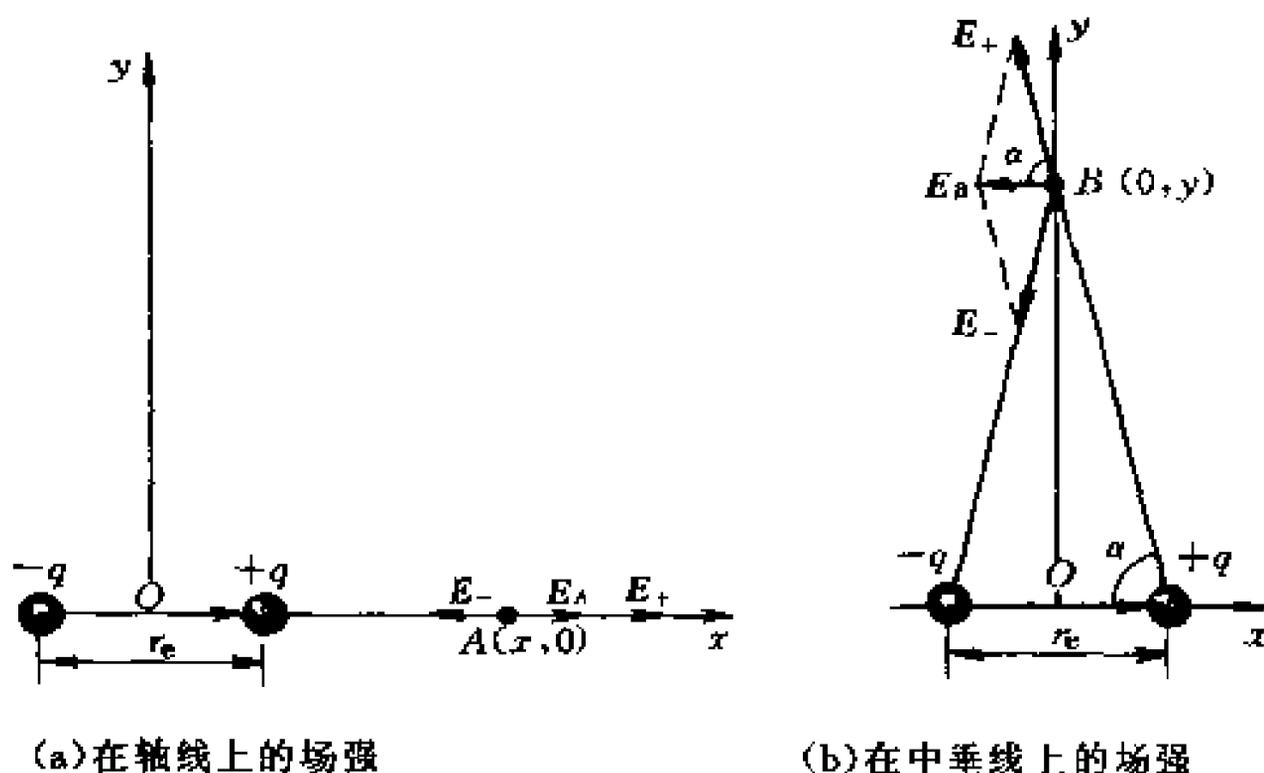


图 8-8 电偶极子

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(x - \frac{r_e}{2}\right)^2} i, \quad E_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(x + \frac{r_e}{2}\right)^2} i$$

因而 A 点的总场强 E_A 为

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(x - \frac{r_e}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(x + \frac{r_e}{2}\right)^2} \right] i =$$

$$\frac{2qxr_e}{4\pi\epsilon_0 x^4 \left(1 - \frac{r_e}{2x}\right)^2 \left(1 + \frac{r_e}{2x}\right)^2} i$$

因为 $x \gg r_e$, 上式分母中 $\frac{r_e^2}{4x^2} \ll 1$, 所以

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qr_e}{x^3} i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{x^3}$$

E_A 的指向与电矩 p_e 的指向相同, 如图 8-8(a) 所示.

其次, 计算电偶极子的中垂线上某点 $B(0, y)$ 的场强 E_B . 如图 8-8(b) 所示, $+q$ 和 $-q$ 分别在 B 点所激发的场强 E_+ 和 E_- 的大小相等, 其值为

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)}$$

其矢量式分别为

$$E_+ = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)} \cos \alpha i + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)} \sin \alpha j$$

$$E_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)} \cos \alpha i - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)} \sin \alpha j$$

因而 B 点的总场强为

$$E_B = E_+ + E_- = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)} \cos \alpha i =$$

$$-\frac{qr_e}{4\pi\epsilon_0 \left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)^{3/2}} \cos \alpha i$$

利用 $y \gg r_e$ 的条件, 则 $\left(y^2 + \frac{r_e^2}{4}\right)^{3/2} \approx y^3$, 由此可得

$$E_B = -\frac{qr_e}{4\pi\epsilon_0 y^3} i = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$

E_B 的指向与电矩 p_e 的指向相反,如图 8-8(b)所示.

由上述结果可见,在远离电偶极子处的场强与距离的三次方成反比,与电偶极子的电矩值 qr_e 成正比.若电荷量 q 增大一倍而同时 r_e 减小一半,则电偶极子在远处激发的场强不变.因此,能够表征电偶极子电性质的量,既不单是电荷量 q ,也不单是距离 r_e ,而是它的电偶极矩 $p_e = qr_e$.

电偶极子是一个重要的物理模型,在研究电介质的极化、电磁波的发射和吸收以及中性分子之间的相互作用等问题时,都要用到电偶极子的模型.

(3) 连续分布电荷的场强

从微观结构来看,任何带电体所带的电荷都由大量过剩的电子(或质子)所组成,因而实际上带体上的电荷分布是不连续的.但是在考察物体的宏观电性质时,通常由仪器能观测到的最小电荷量,至少也要包含 10^{12} 个电子(或质子),这些基元带电粒子密集在一起,实验观察到的电现象是这些大量基元带电粒子所激发电现象的平均效果.因此,从宏观角度出发,可以把电荷看作连续分布在带电体上.一般说来,电荷在带电体上的分布是不均的,为了表征电荷在任一点附近的分布情况,我们引入电荷密度的概念.

如果电荷分布在整个体积内,例如,电解液中的正、负离子及电子管中空间电荷的分布等,这种分布称为体分布.在带电体内任取一点,作一包含该点的体积元 ΔV ,设该体积中的电荷量为 Δq ,则该点的电荷体密度 ρ 定义为 Δq 与 ΔV 比值的极限

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

ρ 的单位是 C/m^3 .应该指出,这里 $\Delta V \rightarrow 0$ 的极限,并不是一个严格的数学过程.在物理上无限小的体积是指在宏观上看起来足够小,而在微观上看来仍是很大的体积.也就是说,这个体积元应该比宏观中量度的体积(如数量级为 $1 m^3$)小得多(例如 $10^{-10} m^3$),但是,这个体积元仍然足够大,使其中足以包含大量的基元

带电粒子,例如 10^{-10} m^3 的体积内可包含有 10^9 个基元带电粒子,只有这样的体积元,才能使某一点的电荷密度具有确切的意义,并有一个连续的密度函数.

有时我们常遇到电荷分布在极薄的表面层里,例如,玻璃棒经摩擦后所带的电荷就分布在表面层里;导体带电时,其电荷也分布在导体的表面层里.这时我们可以把带电薄层抽象为“带电面”,并引入电荷面密度来表征电荷在该面上任一点附近的分布情况.面上某点电荷面密度 σ 的定义如下

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

式中 ΔS 为包含某点的面积元, Δq 为 ΔS 面元上的电荷量,和前述 $\Delta V \rightarrow 0$ 一样,这里 $\Delta S \rightarrow 0$ 也应是微观看来很大、宏观看来很小的面积元, σ 的单位为 C/m^2 .

若电荷分布在细长的线上,则定义电荷线密度 λ 如下

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

式中 Δl 是包含某点的线元, Δq 为线元 Δl 上所带的电荷量,和 ΔV 、 ΔS 一样,这里的 Δl 也应是微观看来很大、宏观看来很小的线元, λ 的单位为 C/m .

引进了连续分布电荷的概念,再应用场强叠加原理,就可以计算任意带电体所激发的场强.为此,我们把带电体看成是许多极小的连续分布的电荷元 dq 的集合,每一个电荷元 dq 都当作点电荷来处理,而电荷元 dq 在 P 点所激发的场强,按点电荷的场强公式可写为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}$$

式中 \mathbf{r} 是从 dq 所在点指向 P 点的矢量.带电体的全部电荷在 P 点激发的场强,是所有的电荷元所激发场强 dE 的矢量和,因为电荷是连续分布的,我们把式(8-6)中的累加号 Σ 换成积分号 \int ,求得 P 点的场强为

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} \quad (8-7)$$

根据带电体上的电荷是体分布、面分布或线分布等不同情况,相应地计算场强的式(8-7)可改写为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r^3} \mathbf{r} \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r^3} \mathbf{r} \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (8-8)$$

上三式的右端是矢量的积分式,实际上在具体运算时,通常必须把 dE 在 x, y, z 三个坐标轴方向上的分量式写出,然后再积分.

下面,我们通过几个典型的例题,介绍计算连续分布电荷所激发场强的方法.

例题 8-6 设有一均匀带电直线,长度为 L ,总电荷量为 q ,线外一点 P 离开直线的垂直距离为 d , P 点和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 (图 8-9).求 P 点的电场强度.

解 我们取 P 点到直线的垂足 O 为原点,取坐标轴 Ox 沿带电直线, Oy 通过 P 点如图.设直线上每单位长度所带的电荷量为 λ (λ 就是电荷线密度),即 $\lambda = \frac{q}{L}$,则离原点为 x 处的电荷元 $dq = \lambda dx$ 在 P 点处激发的场强 dE 为

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

式中 \mathbf{r} 是从 dx 指向 P 点的矢量, \mathbf{r} 的大小 $r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$.设 dE 与 x 轴之间的夹角为 θ ,则 dE 沿 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$dE_x = dE \cos \theta, \quad dE_y = dE \sin \theta$$

图中 z 轴未画出,显然 $dE_z = 0, E_z = \int dE_z = 0$.从图可知,

$$x = d \tan \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -d \cot \theta, \quad dx = d \csc^2 \theta d\theta$$

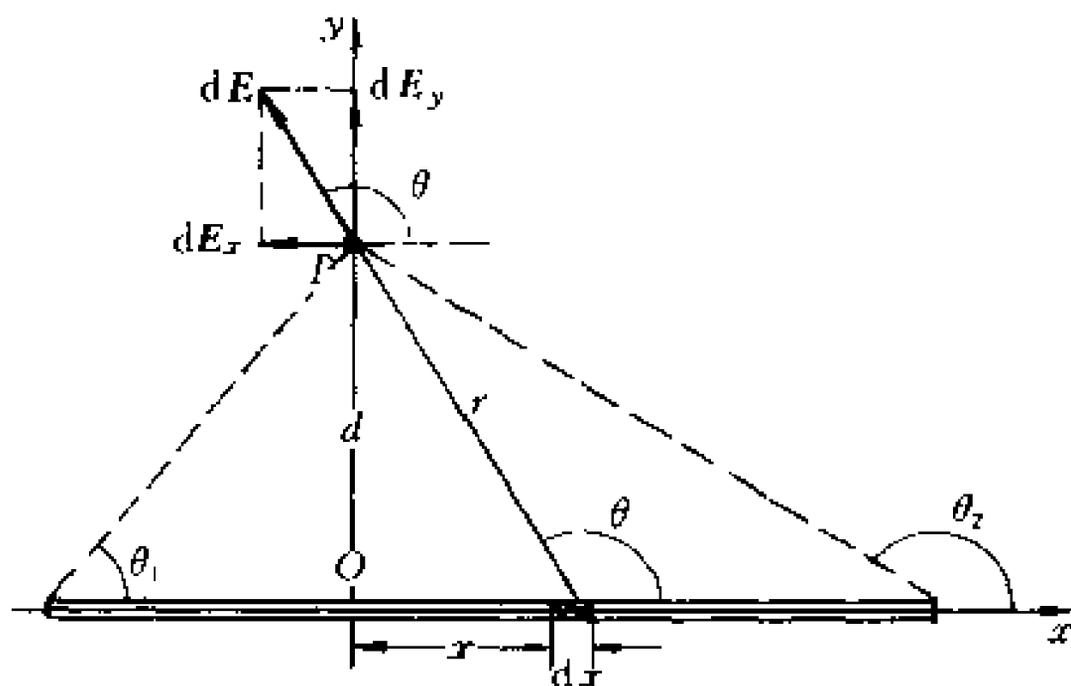


图 8-9 均匀带电直线外任一点处的场强

$$r^2 = d^2 + x^2 = d^2 \csc^2 \theta$$

所以
$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \cos \theta d\theta, \quad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \sin \theta d\theta$$

将上列两式积分,得

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

其矢量表示式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} = \\ &\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \mathbf{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \mathbf{j} \end{aligned}$$

场强的大小为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

其方向可用 E 与 x 轴的夹角 θ 表示

$$\theta = \arctan \frac{E_y}{E_x}$$

如果这一均匀带电直线是无限长的,亦即 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$,那么

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{j} \quad (8-9)$$

式(8-9)表明,无限长带电直导线附近某点的场强 E 与该点离带电直线的距离 d 成反比, E 的方向垂直于直线. 若 λ 为正, E 沿 y 轴的正方向; 若 λ 为负, E 沿 y 轴的负方向. 以上结果对有限长的细直线来说, 在靠近直线中部附近的区域 ($d \ll L$) 也近似成立.

例题 8-7 一半径为 R 的圆环, 均匀带有电荷量 q . 试计算圆环轴线上与环心相距为 x 的 P 点处的场强.

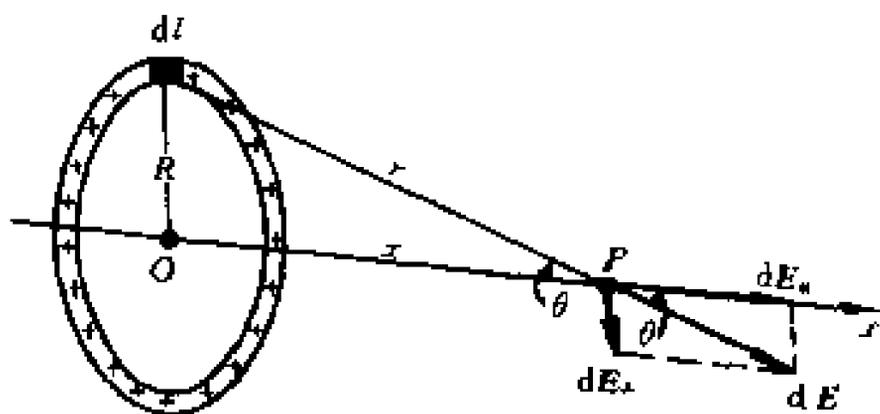


图 8-10 均匀带电圆环轴线上任一点处的场强

解 如图 8-10 所示, 在圆环上任取长度元 dl , dl 上所带的电荷量为

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl$$

dq 在 P 点处所激发的场强为 dE

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dl}{2\pi R r^3} \mathbf{r}$$

式中 \mathbf{r} 是从 dl 指向 P 点的矢量, 其大小 $r = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$, 由于圆环上各电荷元在 P 点激发的场强 dE 的方向各不相同, 为此把 dE 分解为平行于 x 轴线的分量 dE_{\parallel} 和垂直于轴线的分量 dE_{\perp} . 根据对称性, 各电荷元的场强在垂直于 x 轴方向上的分矢量 dE_{\perp} 相互抵消. 所以 P 点的合场强是平行于 x 轴的那些分矢量 dE_{\parallel} 的总和, 即

$$E = \int dE \cos \theta i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{\cos \theta}{r^2} \oint dl i =$$

$$\frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} i$$

若 $q > 0$, E 与 i 同向; 若 $q < 0$, E 与 i 反向. 在 P 点的对称侧 ($x < 0$), $q > 0$ 时, E 与 i 反向; $q < 0$ 时, E 与 i 同向. 当 $x \gg R$, 即 P 点远离圆环时, $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$, 则上式可近似地写作

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} i$$

亦即在远离环心处的场强与环上电荷全部集中在环心处的一个点电荷所激发的场强相同.

例题 8-8 试计算均匀带电圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的任一给定点 P 处的场强. 设盘的半径为 R , 电荷面密度为 σ .

解 如图 8-11 所示, 把圆盘分成许多同心的细圆环. 考虑圆

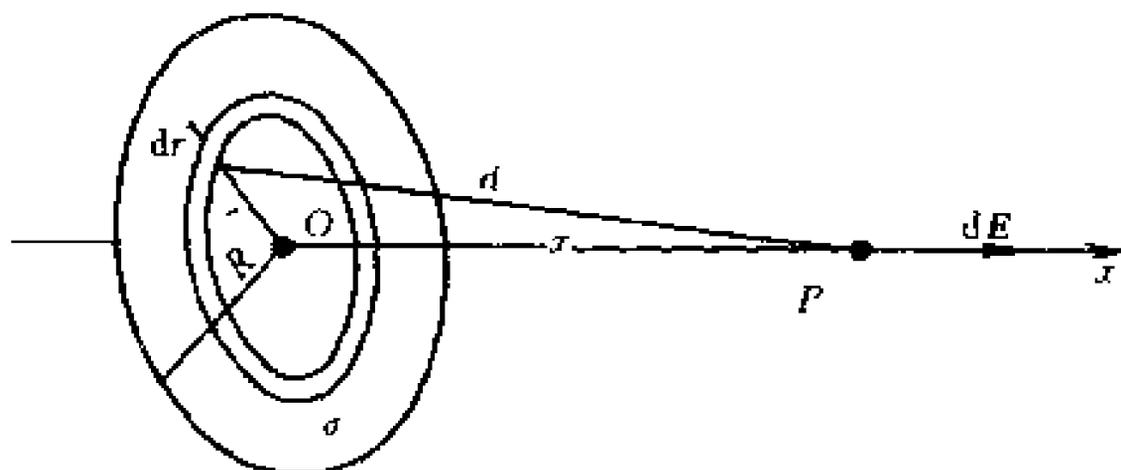


图 8-11 均匀带电圆盘轴线上任一点处的场强

盘上任一半径为 r , 宽度为 dr 的细圆环, 这细圆环所带的电荷量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

利用例题 8-7 中的结果, 可得到此带电细圆环在 P 点激发的场强为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} i =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \sigma 2\pi r dr i$$

由于各带电细圆环在 P 点激发的场强的方向都是指向 x 轴正方向的, 而带电圆盘的场强 E 就是这些带电细圆环所激发的场强的矢量和, 所以

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi x \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} i =$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right] i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] i$$

场强 E 的方向与圆盘相垂直, 其指向则视 σ 的正负而定, $\sigma > 0$, E 与 i 同向; $\sigma < 0$, E 与 i 反向. 若 P 点在盘的左侧, 并取 x 轴的正方向恒由 O 点指向场点, 亦得同样的结果.

由上述结果, 我们讨论两个特殊情况.

(1) 若 $R \gg x$, 即在 P 点看来可认为均匀带电圆盘为无限大, 则 P 点的场强可由对上式取极限求得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{\frac{R}{x} \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] i =$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{\frac{R}{x} \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} \right] i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} i \quad (8-10)$$

式(8-10)的结论虽然是从圆盘轴线上场强的结果导出的, 但进一步可以证明, 只要点 P 与任意带电平面间的距离, 远小于该点到带电平面边缘各点的距离, 即对均匀带电平面中部附近各点来说, 这平面都可看作是无限大, 其场强都可以由式(8-10)近似表示. 这表明无限大均匀带电平面所激发的电场与距离 x 无关, 即在平面两侧各点场强大小相等, 方向都与平面相垂直, 这种电场称为匀强电场或均匀电场.

(2) 若 $x \gg R$, 则按二项式定理展开, 并略去 $\frac{R}{x}$ 的高次项, 即

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2 - \dots \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$$

于是 P 点的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} \mathbf{i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \mathbf{i}$$

式中 $q = \sigma\pi R^2$, 是圆盘所带电荷量. 由此可见, 当 P 点离开圆盘的距离比圆盘本身的大小大得多时, P 点的场强与电荷量 q 集中在圆盘的中心的一个点电荷在该点所激发的场强相同. 从上面两个例子, 也可以进一步理解点电荷概念的相对性.

从以上几个例子也可以看到, 空间各点的场强完全决定于电荷在空间的分布情况, 如果给定电荷分布, 原则上就能算出任一点的场强. 计算的方法是利用点电荷在周围激发场强的表式和场强叠加原理; 计算的步骤大致是: 先任取电荷元 dq , 写出 dq 在待求点处场强的矢量式, 再选取适当的坐标系, 将这场强分别投影到坐标轴上, 然后进行积分, 最后写出总场强的矢量表式, 并算出总场强的大小和方向角. 在实际问题中, 若遇到电荷分布具有某种对称性, 则在求 E 的分量时, 有的分量可以根据对称性推知其值为零, 这就只需求出余下的分量就行.

4. 电场线

为了形象地描述场强在空间的分布情形, 使电场有一个比较直观的图象, 通常引入电场线的概念. 电场线这个概念是法拉第首先提出的. 因为电场中每一点的场强 E 都有一定的方向和大小, 所以我们在电场中描绘一系列的曲线, 使曲线上每一点的切线方向都与该点处的场强 E 的方向一致, 这些曲线就叫做电场线. 图 8-12 即表示某一电场中的一条电场线.

为了使电场线不仅表示电场中场强的方向, 而且表示场强的

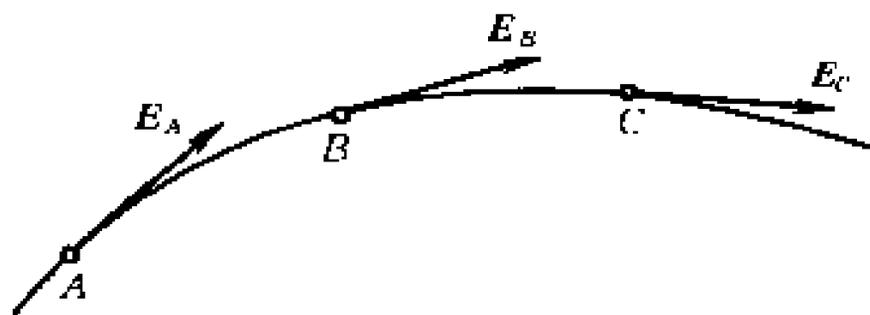


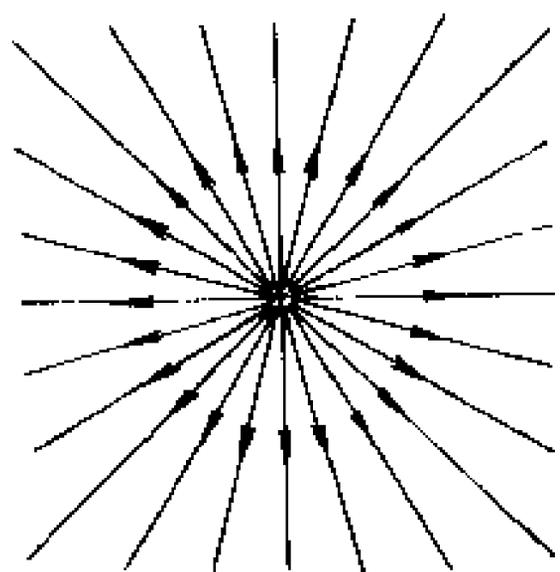
图 8-12 电场线

大小,我们对电场线作如下的规定:在电场中任一点,取一垂直于该点场强方向的面积元,使通过单位面积的电场线数目,等于该点场强 E 的量值.^①显然,按照这种规定,在场强较大的地方电场线较密,场强较小的地方电场线较疏,这样,电场线的疏密就形象地反映了电场中场强大小的分布.图 8-13 中画出几种常见电荷静止分布时电场的电场线图.

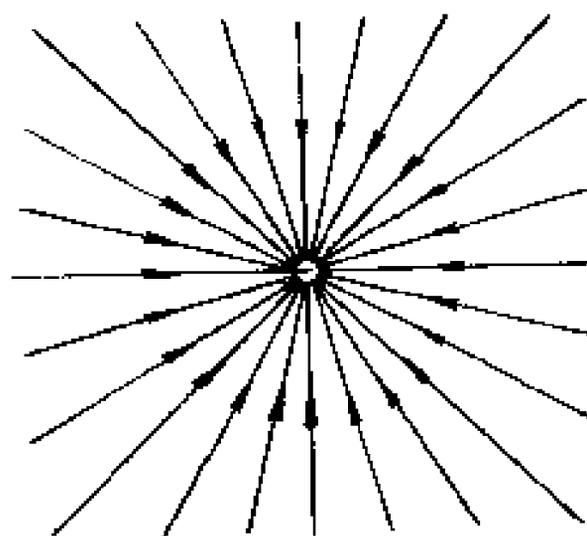
由图 8-13 可以看出,静电场的电场线有如下的性质:第一,电场线起自正电荷(或来自无限远处),终止于负电荷(或伸向无限远处),不会在没有电荷的地方中断(场强为零的奇异点除外);第二,电场线不能形成闭合曲线;第三,任何两条电场线不会相交.前二条是静电场场强 E 这一矢量场的性质的反映,我们将在后面介绍有关定理时再给予说明,而最后一条则是电场中每一点处的场强具有确定方向的必然结果.

应该注意,引入电场线的目的在于形象地反映电场中场强的情况,并不是电场中真有这些场线存在.另外,必须注意到,虽然在电场中每一点,正电荷所受的力和通过该点的电场线方向相同,但是,在一般情况下,电场线并不是一个正电荷在场中运动的轨迹.

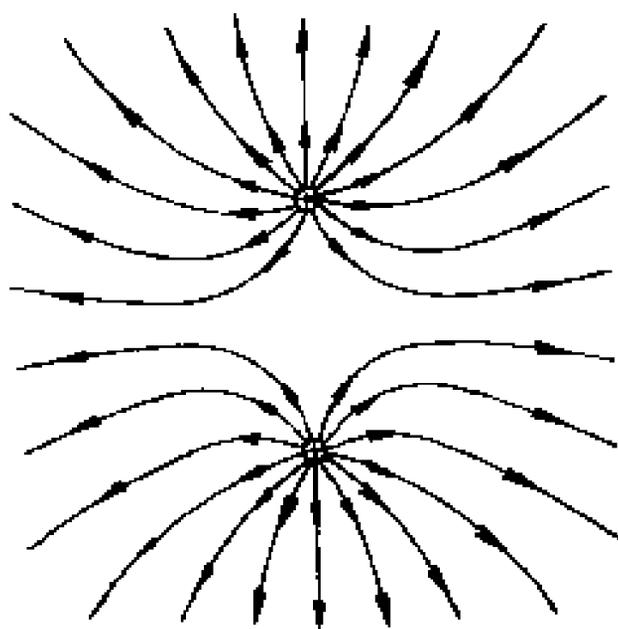
^① 当然,在实际作图时,只是使通过该单位面积的电场线数目与场强成正比.譬如说某匀强电场的场强为 0.2 V/m ,那么按上述规定,通过每平方米的电力线数目是 0.2 根,这是画不出来的.但是这个规定对于电场中电通量的计算能给予比较直观的形象.



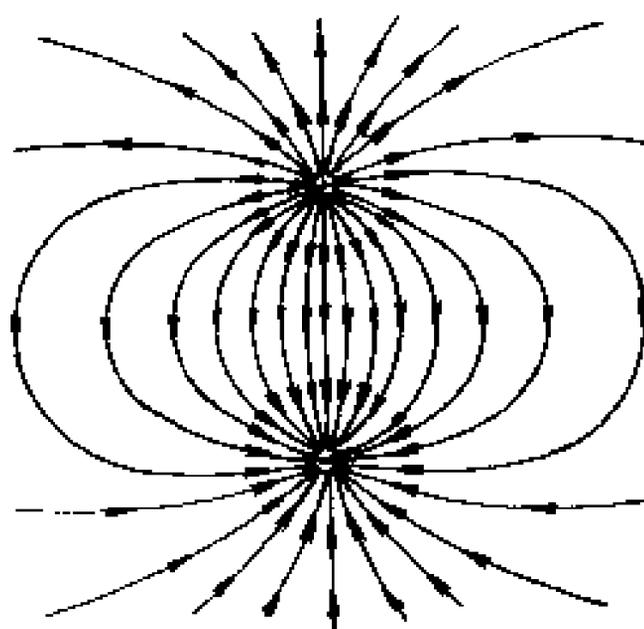
(a) 正电荷



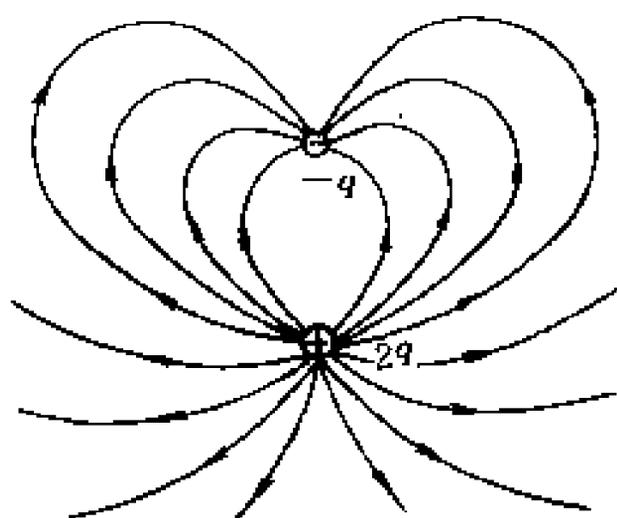
(b) 负电荷



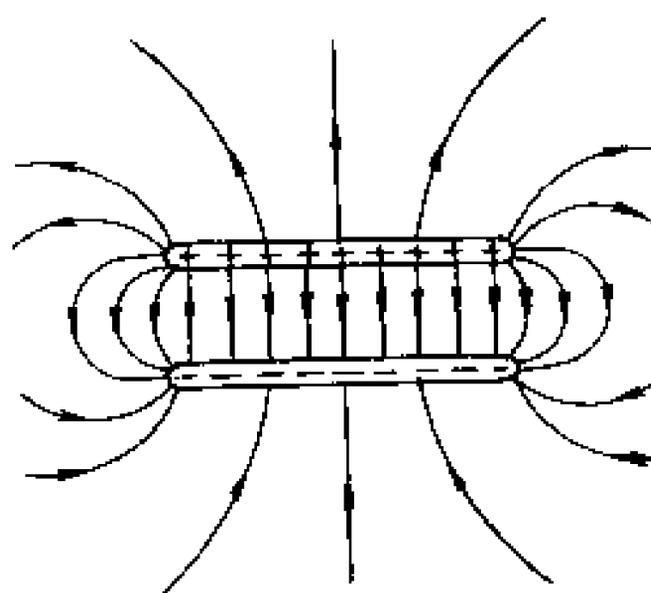
(c) 两个等值正电荷



(d) 两个等值异号电荷



(e) 电荷 $+2q$ 与电荷 $-q$



(f) 正负带电板

图 B 13 几种常见电场的电场线图

§ 8-3 高斯定理

1. 电场强度通量

通量是描述矢量场的一个重要概念,对静电场 $E(x, y, z)$ 来说,如果我们一开始就用严格的通量定义,这样引入电场强度通量的概念会使初学者感到抽象而难以接受.在这里我们利用上述电场线的图象,将有助我们对电场强度通量的理解.按照电场线的作图法,均匀电场的电场线是一系列均匀分布的平行直线[图 8-14(a)].在均匀电场中取一个想象的平面,其面积为 S 并与 E 的方向垂直.显然,通过这一平面的电场线总数等于

$$\Psi_E = ES \quad (8-11)$$

Ψ_E 称为通过该面积 S 的电场强度通量或 E 通量.

如果平面的法线单位矢量 e_n 与 E 成 θ 角[图 8-14(b)],那么通过这一平面的 E 通量为

$$\Psi_E = E \cos \theta S = E_n S \quad (8-12)$$

即电场强度 E 在给定面积 S 的法向分量与这一面积的乘积.因为平面法线的方向与场强 E 之间的夹角可以是锐角,也可以是钝角,所以,通过给定面积的 E 通量可正可负.当 θ 为锐角时, $\cos \theta > 0$, Ψ_E 为正值; θ 为钝角时, $\cos \theta < 0$, Ψ_E 为负值;如果 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\Psi_E = 0$.

一般情况,电场是不均匀的,而且所取的几何面 S 可以是一个任意的假想曲面,在曲面上场强的大小和方向是逐点变化的,要计算通过该曲面的 E 通量,则先要把该曲面划分为无限多个面积元 dS ,在每一个无限小的面积元 dS 上电场强度 E 可以认为是均匀的.设 dS 的法线单位矢量 e_n 与该处的电场强度 E 成 θ 角[图 8-14(c)],那么通过这面积元的 E 通量为

$$d\Psi_E = E \cos \theta dS = E_n dS$$

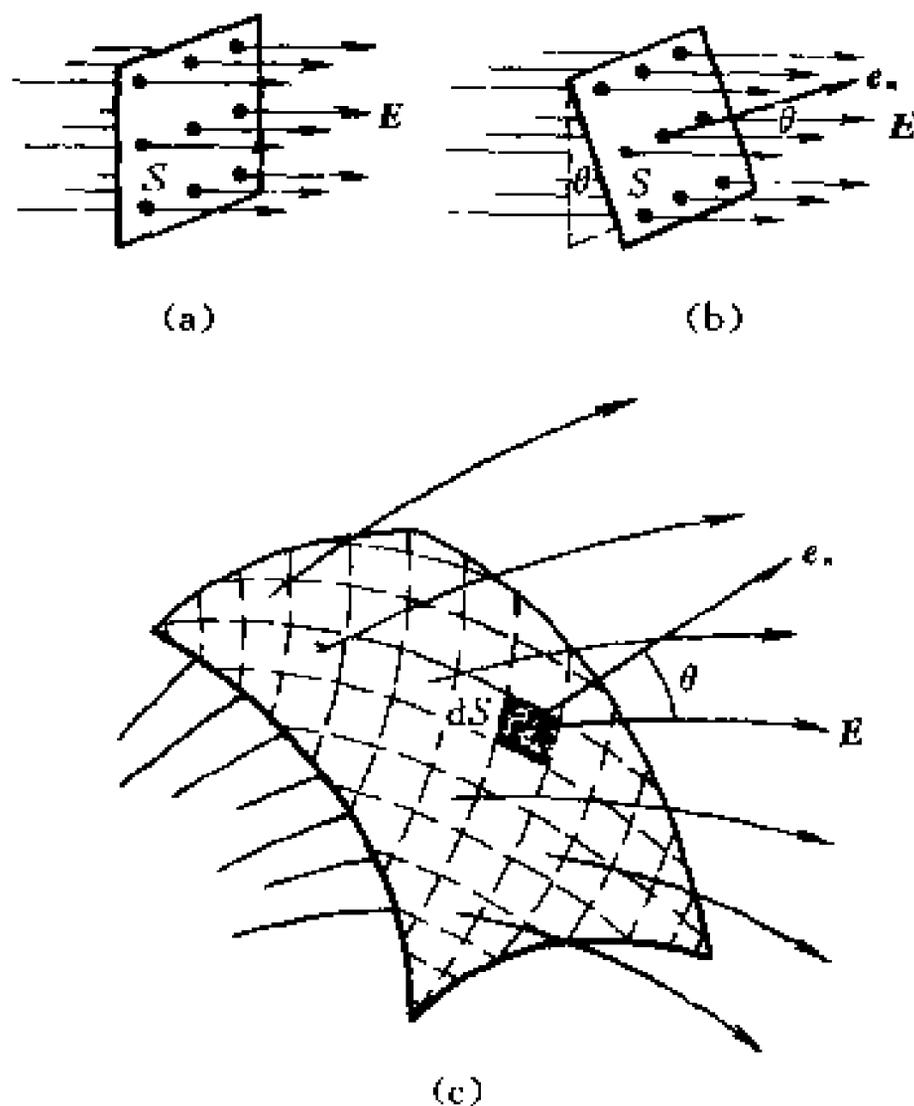


图 8-14 E 通量的计算

所以对整个曲面积分可求得通过面积为 S 的任意曲面的 E 通量

$$\Psi_E = \iint_S E \cos \theta dS = \iint_S E_n dS \quad (8-13)$$

当 S 是闭合曲面时, 上式可写成

$$\Psi_E = \oiint_S E \cos \theta dS = \oiint_S E_n dS \quad (8-14)$$

必须指出, 对非闭合曲面, 面法线的正方向可以取曲面的任一侧, 对闭合曲面来说, 通常规定自内向外的方向为面积元法线的正方向. 所以, 在电场线从曲面之内向外穿出处 E 通量为正. 反之, 在电场线从外部穿入曲面处, E 通量则为负.

如果我们引入面积元矢量 $d\mathbf{S}$ (大小等于 dS 而方向是 dS 的正法线方向), 那么 $E \cos \theta dS$ 可写成 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ (即 \mathbf{E} 和 $d\mathbf{S}$ 的标积). 因此式(8-13)和式(8-14)可分别写作

$$\Psi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8-13')$$

$$\Psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8-14')$$

实际上,式(8-13')和(8-14')就是通过任一曲面和任一闭合曲面的 E 通量的定义式.

2. 高斯定理

上面介绍了 E 通量的概念,现在进一步讨论通过闭合曲面的 E 通量和场源电荷量之间的关系,从而得出一个表征静电场性质的基本定理——高斯(K. F. Gauss)定理.

首先我们计算在点电荷 $q (> 0)$ 所激发的电场中,通过以点电荷为中心、半径为 r 的球面上的 E 通量.根据库仑定律,在球面上任一点的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

场强的方向沿半径呈辐射状,处处和球面上的法线单位矢量 \mathbf{e}_n 的方向相同(见图 8-15),即 \mathbf{e}_n 和 \mathbf{r} 之间的夹角 $\theta = 0$.所以,由式(8-14)可求得通过该闭合球面上的 E 通量为

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (8-15)$$

这一结果表明,通过闭合球面上的 E 通量和球面所包围的电荷量成正比,而和所取球面的半径无关.这就是说,如果以点电荷 q 为球心作几个同心球面 S_1, S_2, S_3, \dots ,通过各球面的 E 通量都等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$ (见图 8-16).这也表明从点电荷 q 发出的所有电场线连续地延伸到无限远处.

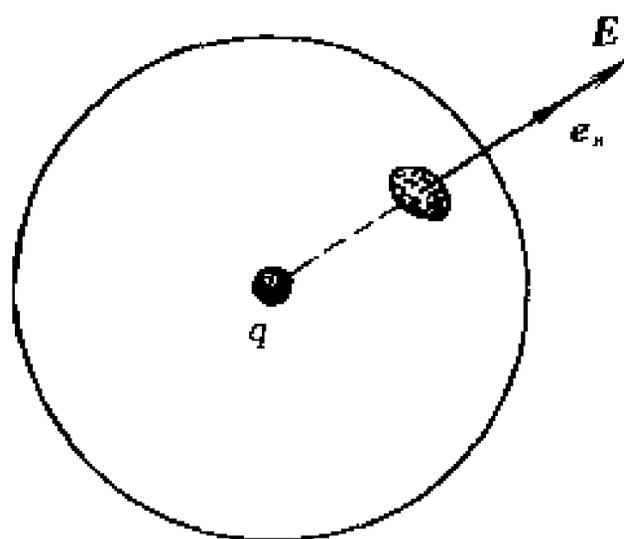


图 8-15 通过以点电荷为球心的球面上的电通量

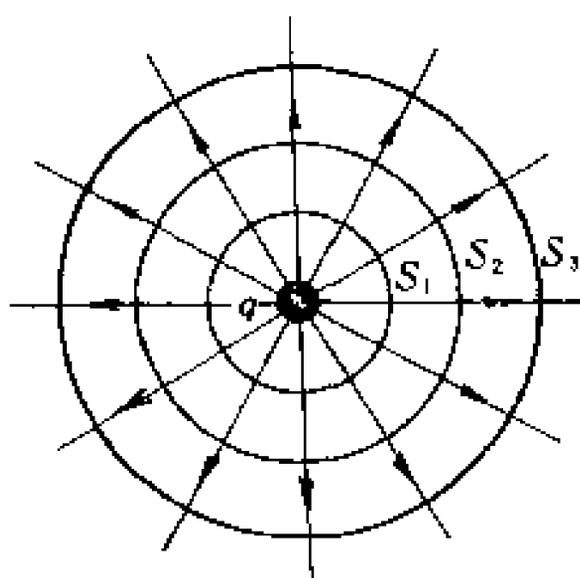


图 8-16 通过以点电荷为球心的同心球面上的电通量

下面把这一结论推广到任意形状的闭合曲面包围点电荷的情况,为此首先介绍立体角的概念.设在点电荷 q 的静电场中任取面积元 dS ,其正法线方向已选定为 e_n ,由 q 到面积元 dS 处的矢量为 r ,如图 8-17 所示.根据式(8-12),通过面积元 dS 的 E 通量

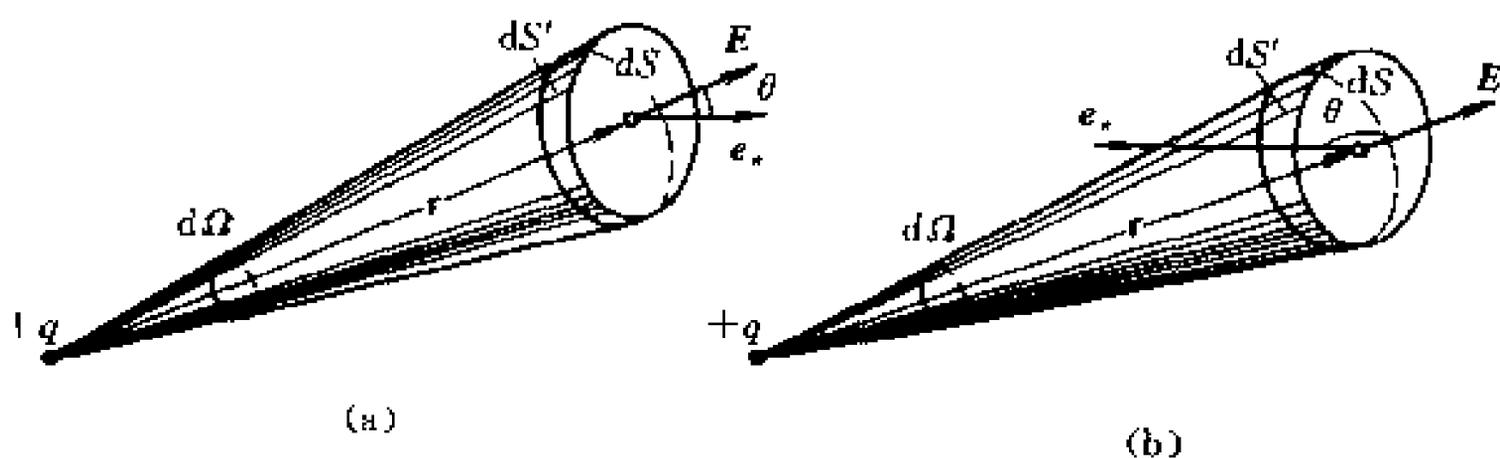


图 8 17 面积元 dS 对点电荷 q 所张的立体角

$$d\psi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS'}{r^2}$$

式中的 θ 是 r 与 e_n 之间的夹角, $dS' = dS \cos \theta$, 为面积元 dS 在垂直于 r 的面上的投影. dS' 的正、负根据面积元 dS 的正法线取向来规定:从点电荷 q 看到 dS 的内侧($\cos \theta$ 为正)时, dS' 为正;看到外

侧($\cos \theta$ 为负)时, dS' 为负.

由于面积元 dS 很小, 所以 dS' 可以看成在半径为 r 、球心在 q 所在点的球面上的一个面积元. 如果把面积元 dS 边缘上的各点与 q 所在点连接起来, 即得一锥体, 锥体的“顶角”称为该面积元对 q 点所张的立体角, 用 $d\Omega$ 表示. $d\Omega$ 的大小以比值 $\frac{dS'}{r^2}$ 来定义, 即

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}.$$

$d\Omega$ 的正负规定如下: 从 q 点看到 dS 的内侧时, $d\Omega$ 为正; 看到外侧时, $d\Omega$ 为负. 这样, 通过面积元 dS 的 E 通量可写为

$$d\Psi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

以 q 为中心, 作半径为 R (设 R 为单位长度) 的一个球面, 令立体角 $d\Omega$ 在该球面上截出的面积元为 dS_0 , 由于 $\frac{dS'}{r^2} = \frac{dS_0}{R^2}$, 而 R 为单位长度, 所以 dS_0 的数值正好表示 $d\Omega$ 的数值. 如果我们考虑电场中有限面积 S [图 8-18(a)], 则通过整个面积 S 的 E 通量为

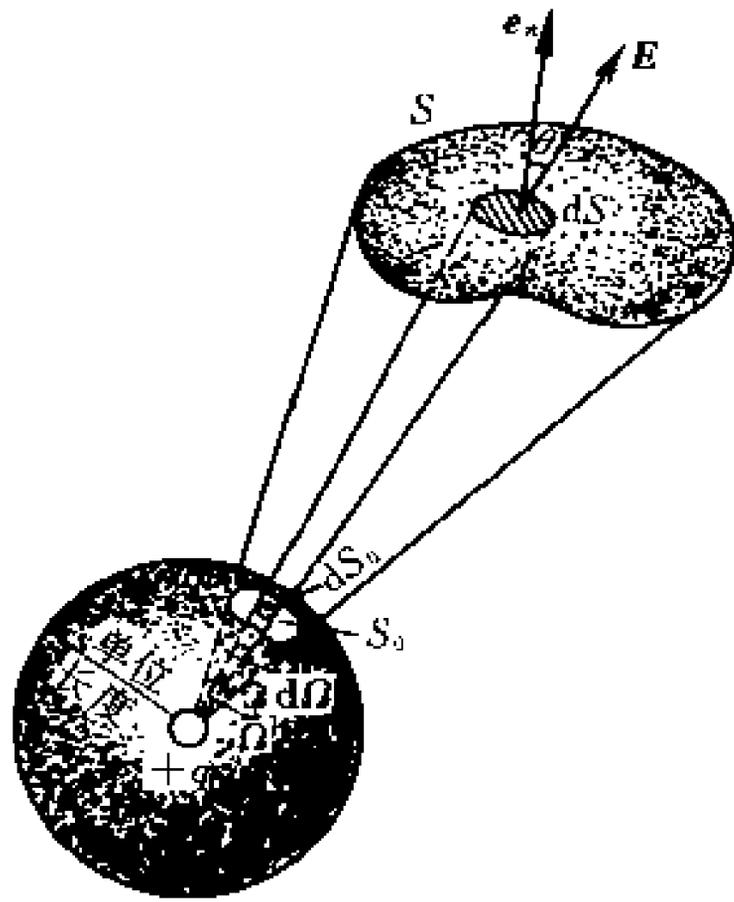
$$\Psi_E = \iint_S d\Psi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

式中 Ω 是面积 S 对 q 点所张的立体角, Ω 的数值等于它在上述球面上所截的面积 S_0 .

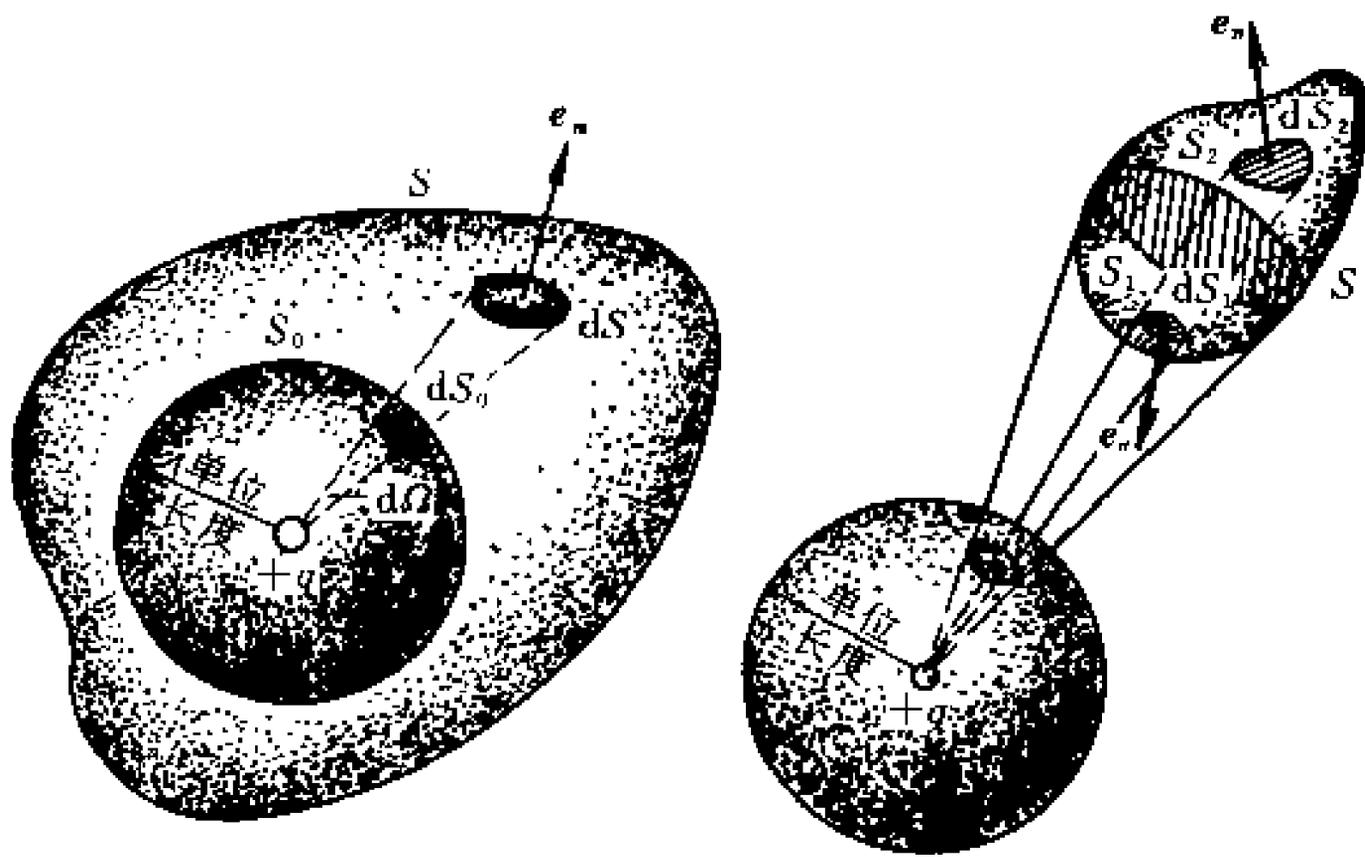
如果有一个闭合曲面包围点电荷 q , 例如图 8-18(b) 中的闭合曲面 S , S 对 q 点所张的立体角是 4π (因为在半径 R 为单位长度的球面上, 所有面积元 dS_0 的总和就是球面积 4π), 于是证得通过闭合曲面 S 的 E 通量

$$\Psi_E = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

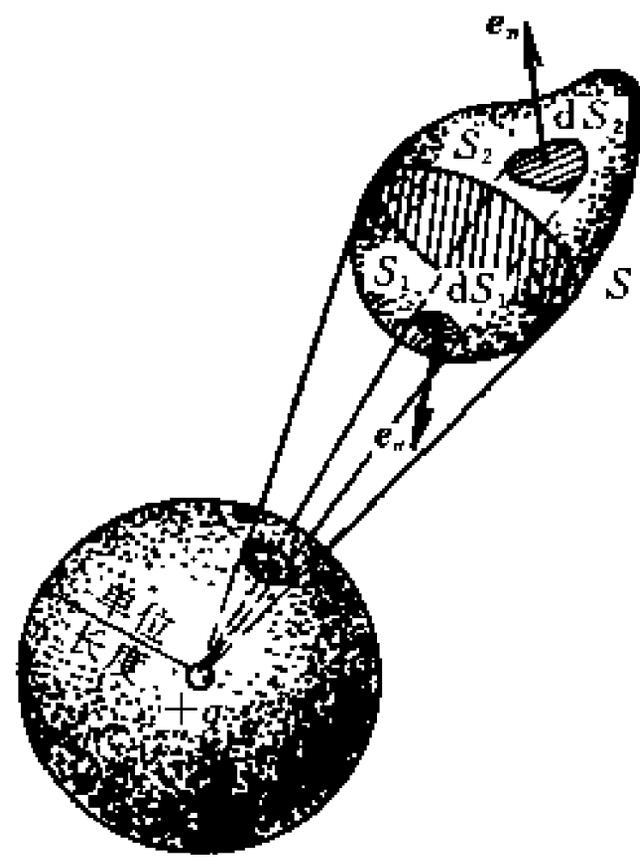
如果闭合曲面不包围点电荷 q , 例如图 8-18(c) 中的闭合曲面 S , 这时从 q 所在点看来, 整个曲面 S 可分为图示的 S_1 和 S_2 两部分, 其中 S_2 部分对点电荷 q 所张的立体角 Ω_2 取正值, S_1 部分对点



(a) 面 S 对点电荷 q 所张的立体角为 Ω



(b) 闭合曲面 S 对所包围的点电荷 q 所张的立体角为 4π



(c) 闭合曲面 S 不包围点电荷 q 时, 则对 q 点所张的立体角为零

图 8 18 有限面积和闭合曲面对点电荷 q 所在点所张的立体角

电荷 q 所张的立体角 Ω , 取负值, 由于两者的绝对值相等, 所以通过整个闭合曲面 S 的 E 通量

$$\Psi_E = \iint_{S_1} d\Psi_E + \iint_{S_2} d\Psi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-\Omega_1 + \Omega_2) = 0$$

如果电场是由 n 个点电荷共同激发,按场强叠加原理,空间任一点的场强是各个点电荷(或电荷元)所激发的场强的叠加,即

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

这时通过电场中任一闭合曲面 S 的 E 通量为

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \oiint_S E_n dS = \oiint_S (E_{1n} + E_{2n} + \dots) dS = \\ &= \oiint_S E_{1n} dS + \oiint_S E_{2n} dS + \dots = \Psi_{E1} + \Psi_{E2} + \dots \end{aligned}$$

所以许多点电荷存在时的 E 通量等于每个点电荷单独存在时的 E 通量的代数和, Ψ_{Ei} 的取值有两种可能,如果某一点电荷 q_i 被闭合

面 S 所包围,则 $\Psi_{Ei} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$; 如果另一点电荷 q_k 不被包围,则 $\Psi_k = 0$.

由此可知,如果 n 个点电荷中,从第 1 个到第 i 个被 S 面所包围,其余的不被包围,则有

$$\Psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \cos \theta dS = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

(8-16)

如果电场是由连续分布的电荷所激发的,则式(8-16)可写成

$$\Psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (8-17)$$

式中 ρ 为电荷体密度, V 为闭合曲面 S 所包围的体积.

由此可得出结论,在任意的静电场中,通过任一闭合曲面的 E 通量,等于该曲面内电荷量的代数和除以 ϵ_0 ,这就是表征静电场普

遍性质的高斯定理.

从高斯定理可以看出,当闭合曲面内的电荷为正时, $\Psi_E > 0$,表示有电场线从 q 发出并穿出闭合曲面,所以,正电荷 q 称为静电场的源头;当闭合曲面内的电荷 q 为负时, $\Psi_E < 0$,表示有电场线穿进闭合曲面而终止于 q ,所以,负电荷称为静电场的尾间.因此高斯定理说明了电场线起发于正电荷、终止于负电荷,亦即静电场是有源场.当静电场中任一闭合曲面内不包围任何电荷时,那么曲面内既不存在场的源头,也不存在场的尾间,穿入曲面的电场线必定从该曲面的另一处穿出,为此通过这一闭合曲面的总 E 通量为零.

高斯定理和库仑定律都是静电场的基本定律,在这里,高斯定理是由库仑定律加场强叠加原理导出的,但两者在物理含义上并不相同.库仑定律把场强和电荷直接联系起来,而高斯定理将场强的通量和某一区域内的电荷联系在一起.而且,库仑定律只适用于静电场,而高斯定理不但适用于静止电荷和静电场,也适用于运动电荷和迅速变化的电磁场.但是,必须指出,单靠高斯定理描述静电场是不完备的,只有和反映静电场的另一定理——静电场的环路定理结合起来,才能完整地描述静电场.

必须注意到,在高斯定理的表式中,右端 $\sum q_i$ 是闭合曲面内电荷量的代数和,而左端的场强 E 却是空间所有电荷(在闭合曲面 S 内和闭合曲面 S 外的)在闭合曲面上任一点所激发的总场强.也就是说,闭合曲面外的电荷对空间各点的场强(包括在闭合曲面上)有贡献,因而要影响闭合曲面上各面积元的 E 通量,但是,它们对整个闭合曲面上 E 通量的贡献却为零.一个明显的例子是:如果电场中通过某一个闭合曲面的 E 通量为零,这只能推断在闭合曲面内没有电荷或电荷量的代数和为零,并不是说闭合曲面上各面积元的 E 通量和曲面上各点的场强为零.

一般情况下,当电荷分布给定时,从高斯定理只能求出通过某

一闭合曲面的 E 通量,并不能把电场中各点的场强确定下来.但是,当电荷分布具有某些特殊的对称性,从而使相应的电场分布也具有一定的对称性时,应用高斯定理来计算场强,却要比用式(8-8)计算场强简便得多.下面举几个电荷分布具有对称性的简单例子来说明应用高斯定理计算场强的方法.

3. 高斯定理的应用

例题 8-9 求电荷呈球对称分布时所激发的场强.

解 设球半径为 R ,所带总电荷量为 q .不论场点 P 是在球面外还是在球面内,相对于球心 O 与 P 的连线 OP ,在球面上(或球体内)都存在与它对称的一对对电荷元 dq 和 dq' ,每一对电荷元在 P 点处激发的垂直 OP 的场强分量,因方向相反而相互抵消,所以, P 点的总场强 E 一定是沿 OP 连线(即沿径向),并且,在任何与带电球同心的球面上各点场强的大小都相等.可见,电荷呈球对称分布时,所激发的电场分布也具有球对称性.

根据球对称的特点,过 P 点作半径为 r 与带电球同心的球面,习惯上称它为高斯面,通过这球面的 E 通量为

$$\Psi_E = \oiint E \cdot dS = E \oiint dS = 4\pi r^2 E$$

此式不论 P 点是处在球内($r < R$)或是在球外($r > R$)都适用.

如果 P 点在球外,则高斯面内所包含的电荷量为 q .按高斯定理

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

可得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

或

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

上式与点电荷的场强公式完全相同.可见,电荷呈球对称分布时,它在球外各点的作用与所带电荷全部集中在球心处的一个点电荷

所激发的场强一样。

如果 P 点在球内, 我们将对两种可能的电荷分布分别讨论如下。

(1) 电荷量 q 均匀分布在半径为 R 的球面上, 则高斯面内的电荷量为零, 按高斯定理得

$$E = 0$$

由此可见, 均匀带电球面内任何点的场强为零。由上述计算结果, 可画出球内、球外各点的场强随距离 r 变化的曲线关系, 如图 8-19 所示。从图中可以看出, 场强 E 在球面 ($r=R$) 附近的值有突变。

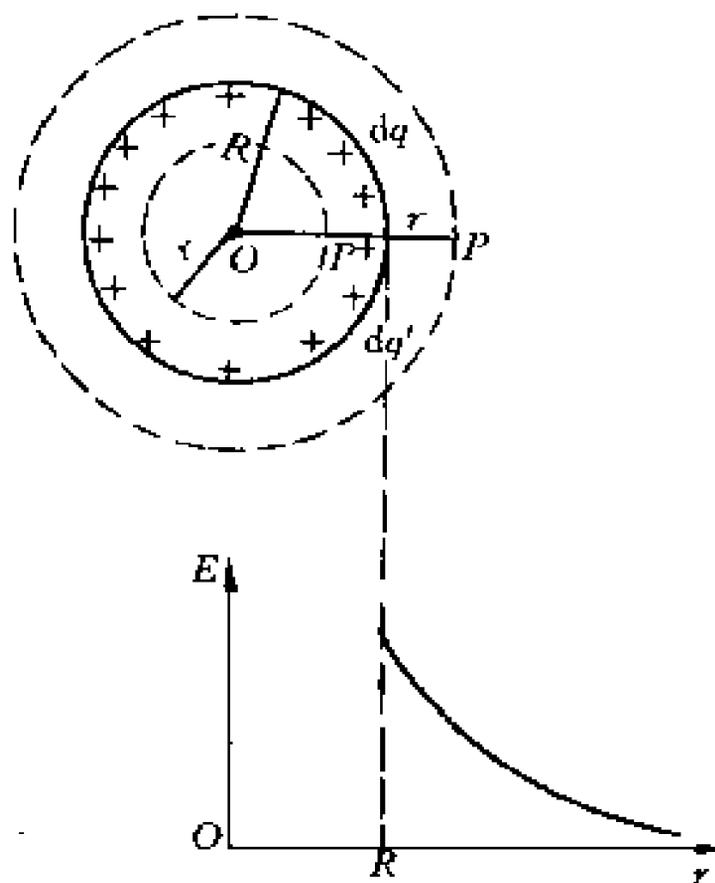


图 8-19 均匀带电球面的场强

(2) 电荷量 q 均匀分布在半径为 R 的球体内, 则高斯面内所包含的电荷量 q' 为

$$q' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

式中 ρ 是电荷体密度, 又由于

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

所以

$$q' = \frac{r^3}{R^3} q$$

由高斯定理得

$$E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

即

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

或

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

场强随距离 r 的变化关系如图 8-20 所示。从图中可以看出, 在球

体内部的场强随 r 线性地增加, 在球面上达最大值, 而且在球面内外两侧的场强是连续变化的.

例题 8-10 电荷均匀分布在一个“无限大”平面上, 求它所激发的场强.

解 设平面上的电荷面密度为 σ . 相对于从场点 P 到它在平面上垂足的连线, 平面上的电荷分布是轴对称的. 采用与上题相似的对称性分析, 可得两侧距平面等远点处的场强大小一样, 方向处处与平面垂直, 并指向两侧. 为了计算场强的大小, 过场点 P 和平面左侧对称的 P' 点作一个圆柱形闭合面, 其轴线与平面垂直. 两底面与平面平行, 面积为 S , 如图 8-21 所示. 由于在圆柱侧面上, 电场线与侧面平行, 所以, 通过侧面的 E 通量为零; 在圆柱底面上, 根据前面的分析,

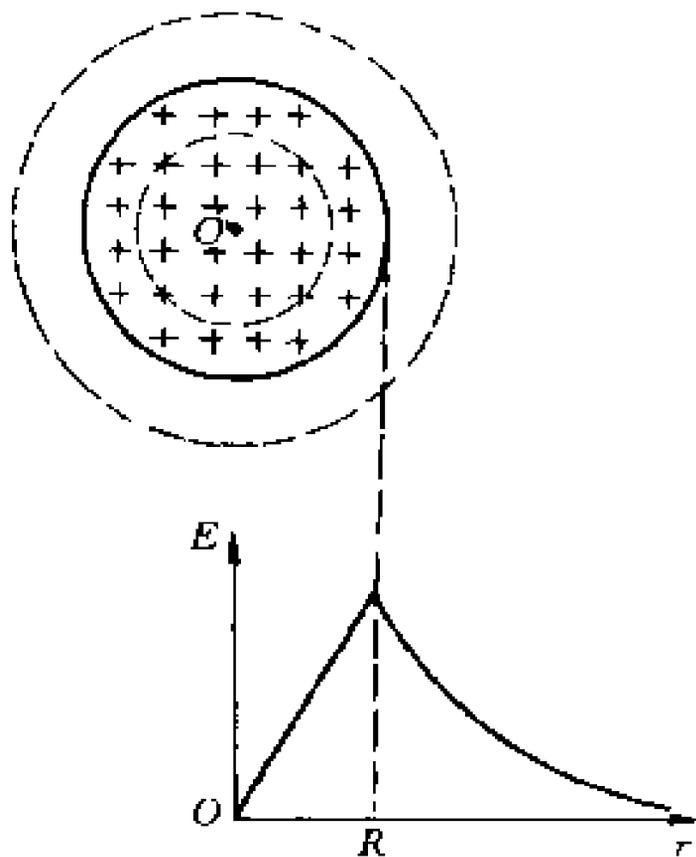


图 8-20 均匀带电球体的场强

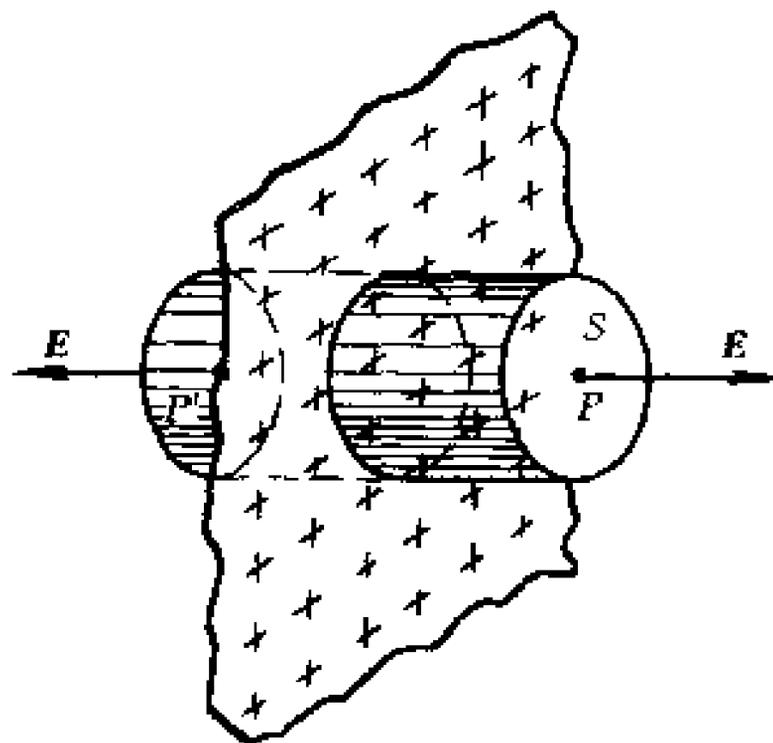


图 8-21 “无限大”均匀带电平面的电场

平面两侧与平面等距离的底面上的场强 E 大小相等、方向相反, 电场线都垂直穿过左、右两个底面. 因而通过两底面的 E 通量、即通过圆柱形闭合面的 E 通量为

$$\Psi_E = ES + ES$$

已知圆柱形面所包围的电荷量为 σS , 所以按高斯定理得

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

于是可求得 P 点的场强为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

或

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

式中 e_n 是带电平面两侧的法线单位矢量. 上式表明, 无限大带电平面所激发的场强与离平面的距离无关, 即在平面的两侧形成一均匀场, 这与例题 8-8 通过积分计算所得结果一致, 但计算简便得多.

应用本例题的结果和场强叠加原理, 读者可以证明, 一对电荷面密度等值异号的无限大均匀带电的平行平面间场强的大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

其方向从带正电平面指向带负电平面; 而在两个平行平面外部空间各点的场强为零. 在实验室里, 常利用一对均匀带电的平板电容器(忽略边缘效应)获得均匀电场.

例题 8-11 求电荷呈无限长圆柱形轴对称均匀分布时所激发的场强.

解 设该圆柱的半径为 R , 单位长度所带的电荷量为 λ . 由于电荷分布是轴对称的, 而且圆柱是无限长, 按前两题相似的对称性分析, 可以确定其电场也具有轴对称性, 即与圆柱轴线距离相等的各点, 场强 E 的大小相等, 方向垂直柱面呈辐射状, 如图 8-22 所示. 为了求任一点 P 处的场强, 过场点 P 作一个与带电圆柱共轴

的圆柱形闭合高斯面 S , 柱高为 h , 底面半径为 r . 因为在圆柱面的曲面上各点场强 E 的大小相等、方向处处与曲面正交, 所以通过该曲面的 E 通量为 $2\pi rhE$, 通过圆柱两底面的 E 通量为零。因此, 通过整个闭合面 S 的 E 通量为

$$\Psi_E = 2\pi rhE$$

如果 P 点位于带电圆柱之外 ($r > R$), 则闭合面内所包围的电荷量为 λh . 按高斯定理

$$2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

可得 P 点的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

或

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} r$$

由此可见, “无限长”圆柱形轴对称均匀分布电荷在柱外各点的作用, 与所带电荷全部集中在其轴线上的均匀线分布电荷所激发的场强一样。

如果 P 点在带电圆柱之内 ($r < R$), 我们对两种可能的电荷分布分别讨论如下。

(1) 电荷均匀分布在圆柱面上, 则闭合面 S 内所包围的电荷量为零. 按高斯定理, 可求得带电圆柱面内各点的场强为

$$E = 0$$

由以上所得结果, 可画出空间各点场强随各点离带电圆柱面轴线的距离 r 的变化曲线, 如图 8-22 所示。

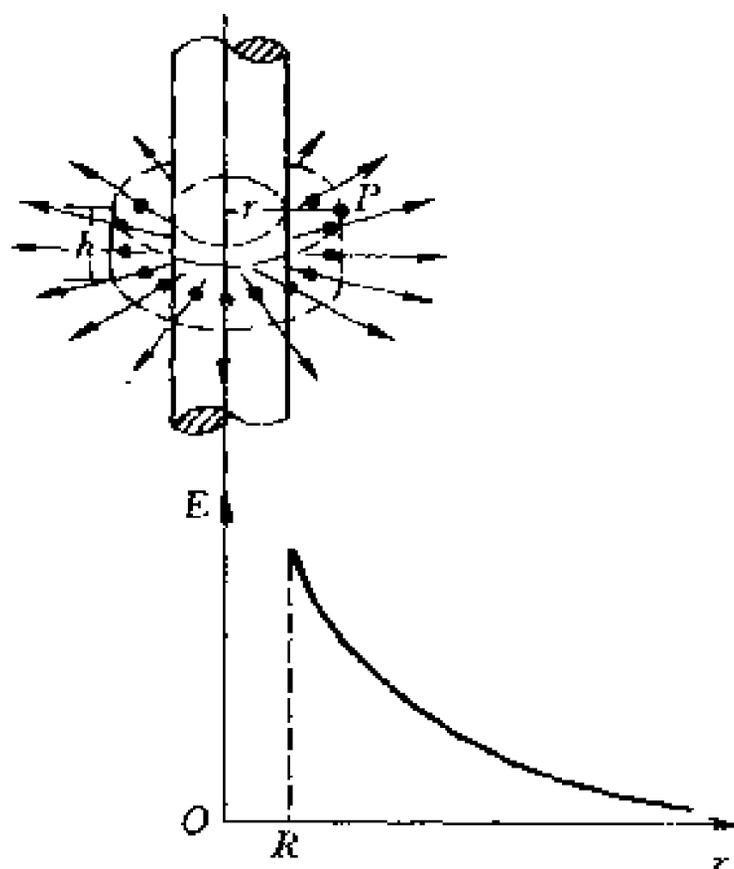


图 8-22 “无限长”均匀带电圆柱面的电场

(2) 电荷均匀分布在整個圆柱体内, 則闭合面 S 内所包围的电荷量为 $q' = \frac{\lambda h}{R^2} r^2$, 按高斯定理得

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 R^2} r^2$$

于是可求得圆柱体内任一点 P 处的场强为

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2}$$

或

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r$$

读者可以根据上述结果, 画出“无限长”均匀带电圆柱体空间各点的场强随各点离带电圆柱体轴线的距离 r 的变化曲线图.

从上面几个例子可以看出, 只有当电荷所激发的电场具有球对称、均匀面对称、均匀轴对称时, 才能过场点作出适当的高斯面, 并按高斯定理求出场强来. 有时会遇到一些带电体, 其电荷分布所激发的电场, 虽然也具有某种对称性, 但因对称度不够高, 仍然无法在这样的电场中找到一个合适的高斯面求出场强来. 所以问题的关键是: 电场具有高度的对称性, 我们再根据具体的对称性特点, 找出合适的闭合面, 使电场强度都垂直于这个闭合面, 而且大小处处相等; 或者使闭合面的一部分上场强处处与该面垂直, 且大小相等, 另一部分上场强与该面平行, 因而通过该面的 E 通量为零. 如果能找到这样的闭合面, 那么, 就能很方便地求出场强. 显然, 只有当带电系统均匀带电并具有如上各例的那种对称性时, 才能做到这一点. 一般情况下, 如果带电系统不具有这样的对称性, 高斯定理就不能用来计算场强.

§ 8-4 静电场的环路定理 电势

在前几节中, 我们从电荷在电场中受到电场力这一事实出发, 研究了静电场的性质, 并引入电场强度 E 作为描述电场这一特性

的物理量. 而高斯定理是从 E 的角度反映了通过闭合面的 E 通量与该面内电荷量的关系, 揭示了静电场是一个有源场的这一电场的基本特性. 既然电荷在电场中要受电场力的作用, 那么电荷在电场中移动时, 电场力一定要对电荷做功. 在这一节中, 我们将从电场力做功的特点入手, 导出反映静电场另一个特性的环路定理, 从而揭示静电场是一个保守力场.

1. 静电场的环路定理

设有一点电荷 q 固定在 O 点处, 并在 q 的电场中, 将试探电荷 q_0 从 A 点(径矢为 r_A) 经过任意路径 ACB 移动到达 B 点(径矢为 r_b). 如图 8-23 所示, 在路径中任一点 C (径矢为 r) 的附近, 取位移

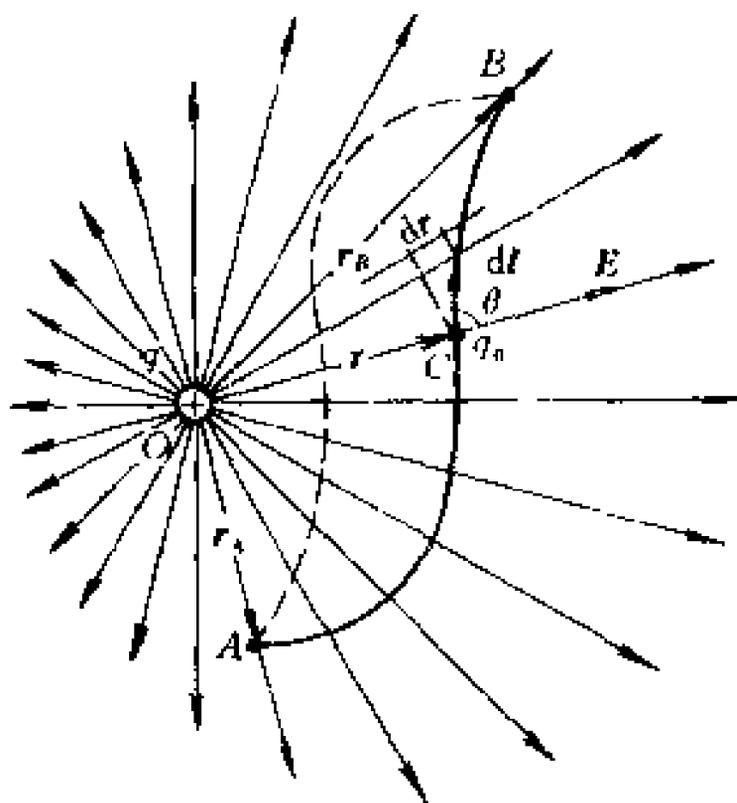


图 8 23 电场力所作的功与路径无关

元 dl , C 点处的场强为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$. 可知在 dl 这段路径中, 电场力对 q_0 所作的功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}$$

由图可知, $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \cos \theta dl$, 式中 θ 是 r 的方向和 $d\mathbf{l}$ 的方向之间的

夹角, 而 $dl \cos \theta = dr$, 代入上式, 可得

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dl = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

当试探电荷 q_0 从 A 点移到 B 点时, 电场力所作的功为

$$A_{AB} = \int_A^B dA = \int_A^B q_0 E \cos \theta dl = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (8-18)$$

式中 r_A 和 r_B 分别表示从点电荷 q 所在处到路径的起点和终点的距离. 式 8-18 表明, 在静止点电荷 q 的电场中, 电场力对试探电荷 q_0 所作的功与路径无关, 而只与路径的起点和终点位置有关.

如果试探电荷 q_0 在点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 的电场中移动, 它所受到的电场力等于各个点电荷的电场力的矢量和, 即

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

由于合力所作的功等于各分力所作的功的代数和, 因此试探电荷 q_0 在点电荷系电场中从 A 点经过任意路径 ACB 到达 B 点时, 电场力 F 所作的功等于各个点电荷的电场力 F_1, F_2, \dots, F_n 所作功的代数和. 上面已经证明了在点电荷的电场中, 电场力的功与路径无关, 故各项之和也应与路径无关, 即

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{iA}} - \frac{1}{r_{iB}} \right) \quad (8-19)$$

式中 r_{iA} 与 r_{iB} 分别为电荷 q_i 到 A 点和 B 点的距离. 由于任何静电场都可看作是点电荷系中各点电荷的电场的叠加, 因而得出结论: 试探电荷在任何静电场中移动时, 电场力所作的功只与这试探电荷的大小以及路径的起点和终点的位置有关, 而与路径无关.

上述结论还可用另一种形式来表达, 设试探电荷在电场中从某点出发, 经过闭合路线 L 又回到原来位置, 由式 (8-18) 和式 (8-19) 可知电场力作功为零, 亦即

$$q_0 \oint_L E \cos \theta dl = 0$$

因为试探电荷 $q_0 \neq 0$, 所以上式也可写作

$$\boxed{\oint_L E \cos \theta dl = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \quad (8-20)$$

上式的左边是场强 E 沿闭合路径的线积分, 也称为场强 E 的环流, 因此, 静电场力做功与路径无关这一性质, 又可表达为场强 E 的环流等于零, 它是反映静电场基本特性的又一个重要规律, 称为场强环路定理. 任何力场, 只要具备场强的环流为零的特性, 就叫做保守力场或叫做势场. 静电场是保守力场.

2. 电势

如上所述, 静电场与重力场相似, 都是保守力场, 对这类力场都可以引进势能的概念. 正如我们研究重力场时, 引进重力势能那样, 在讨论静电场的性质时, 也可以认为电荷在电场中一定的位置处, 具有一定的电势能, 并把电场力对试探电荷 q_0 所作的功 A_{AB} 作为 q_0 在 A 、 B 两点电势能改变的量度. 设以 W_A 和 W_B 分别表示试探电荷 q_0 在起点 A 和终点 B 处的电势能, 则

$$W_A - W_B = A_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8-21)$$

静电势能也与重力势能相似, 是一个相对的量. 为了确定电荷在电场中某一点势能的大小, 必须选定一个作为参考的电势能的零标度. 通常当电荷分布于有限区域内时, 我们选定电荷 q_0 在无限远处的静电势能为零, 亦即令 $W_\infty = 0$, 可见电荷 q_0 在电场中 A 点的静电势能为

$$W_A = A_{A\infty} = q_0 \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8-22)$$

即电荷 q_0 在电场中某一点 A 处的电势能 W_A 在数值上等于 q_0 从 A 点处移到无限远处电场力所作的功 $A_{A\infty}$.

应该指出,与重力势能相似,电势能也是属于一定系统的.式(8-22)反映了电势能是试探电荷 q_0 与场源电荷所激发的电场之间的相互作用能量,故电势能是属于试探电荷 q_0 和电场这整个系统的,且与 q_0 的大小成正比,因此电势能 W_A 并不直接描述某一给定点 A 处电场的性质,但比值 $\frac{W_A}{q_0}$ 却与 q_0 无关,只决定于场中给定点 A 处电场的性质,所以我们用这一比值来作为表征静电场中给定点电场性质的物理量,称为电势,用 V_A 表示 A 点的电势,即

$$\boxed{V_A = \frac{W_A}{q_0} = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (8-23)$$

在式(8-23)中,当取试探电荷为单位正电荷时, V_A 和 W_A 等值,这表示静电场中某点的电势在数值上等于单位正电荷放在该点处时的电势能,也等于单位正电荷从该点经过任意路径到无限远处时电场力所作的功.电势是标量,但相对于电势的零标度讲却有正或负的数值.

在国际单位制中,电势的单位是 J/C,称为伏特(V).如果有 1 C 的电荷量在电场中某点处所具有的电势能是 1 J,这点的电势就是 1 V.或者说,当把 1 C 的电荷从静电场中某点移到无限远处,电场力所作的功为 1 J 时,该点的电势就是 1 V.

在静电场中,任意两点 A 和 B 的电势差,通常也叫做电压,用公式表示为

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8-24)$$

这就是说,静电场中 A 、 B 两点的电势差,等于单位正电荷在电场中从 A 点经过任意路径到达 B 点时电场力所作的功.因此,当任一电荷 q_0 在电场中从 A 点移到 B 点时,电场力所作的功可用电势差表示为

$$\boxed{A_{AB} = q_0(V_A - V_B)} \quad (8-25)$$

在实际应用中,经常遇到的是两点间的电势差,式(8-25)是计算电

场力做功和计算电势能增减变化时是常用的公式。

前面已经讲过,电势和电势能的零点的选取是任意的,这由我们处理问题的需要而定.在理论上,计算一个有限大小的带电体所激发的电场中各点的电势时,往往选取无限远处一点的电势为零.但在许多实际问题中,常常以地球的电势为零,其它带电体的电势都是相对地球而言的.这样的规定有很多方便之处:一方面可以在任何地方都能方便地和地球比较而确定各个带电体的电势;另一方面,地球是一个半径很大的导体,在这样一个导体上增减一些电荷对其电势的影响是很小的(参看 § 9-3),因此地球的电势比较稳定.在工业上,消除摩擦起电的重要措施之一就是“接地”,这样使带电体的电势和地球一致,带电体上的电荷就会传到地球上去而不会一直积累起来.为了安全用电,实验室中和工厂企业中很多电气设备和仪器(如马达、示波器等)的外壳在使用时也都接地,这样可防止当电气设备因绝缘不良而使外壳带电时引起的触电事故。

3. 电势的计算

(1) 点电荷电场中的电势

设点电荷 q 静止于坐标系的原点,则距 q 为 r 处 P 点的电势,由式(8-23)和式(8-22)可知是

$$V_P = \frac{W_P}{q_0} = \frac{A_{P\infty}}{q_0}$$

由式(8-18)可知

$$A_{P\infty} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

将 $A_{P\infty}$ 代入上式,求得

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8-26)$$

由此可见,在点电荷周围空间任一点的电势与该点离点电荷 q 的距离 r 成反比.如果 q 是正的,各点的电势是正的,离点电荷愈远

处电势愈低,在无限远处电势为零;如果 q 是负的,各点的电势也是负的,离点电荷愈远处电势愈高,在无限远处电势为零值最大.

(2) 点电荷系电场中的电势

如果电场是由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 所激发,某点 P 的电势由场强叠加原理可知为

$$V_P = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{\infty} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_P^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_P^{\infty} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_P^{\infty} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n V_{Pi} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (8-27)$$

式中 r_i 是 P 点离开点电荷 q_i 的相应的距离. 上式表明,在点电荷系的静电场中,某点的电势等于每一个点电荷单独在该点所激发的电势的代数和.

(3) 连续分布电荷电场中的电势

如果静电场是由电荷连续分布的带电体所激发,则求某点的电势,只要将式(8-27)以积分式代之. 设 dq 为带电体上任一电荷元的电荷量, r 为 dq 到给定点 P 的距离,则 P 点的电势为

$$V_P = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8-28)$$

积分遍及整个带电体. 因为电势是标量,这里的积分是标量积分,所以电势的计算比电场强度的计算较为简便.

应该注意,在式(8-26)、式(8-27)和式(8-28)的计算式中,电荷都是分布在有限区域内的,并且是选择无限远处为电势的零点. 当激发电场的电荷分布延伸到无限远时,不宜把电势的零点选在无限远处,否则将导致场中任一点的电势值为无限大,这时只能根据具体问题,在场中选某点为电势的零点.

例题 8-12. 计算电偶极子电场中任一点的电势.

解 设电偶极子如图 8-24 放置,应用式 8-27 可知,电偶极子的电场中任一点 P 的电势为

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

式中 r_+ 与 r_- 分别为 $+q$ 和 $-q$ 到 P 点的距离. 由图可知

$$r_+ \approx r - \frac{r_e}{2} \cos \theta$$

$$r_- \approx r + \frac{r_e}{2} \cos \theta$$

因此

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{r_e}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{r_e}{2} \cos \theta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_e \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{r_e}{2} \cos \theta \right)^2}$$

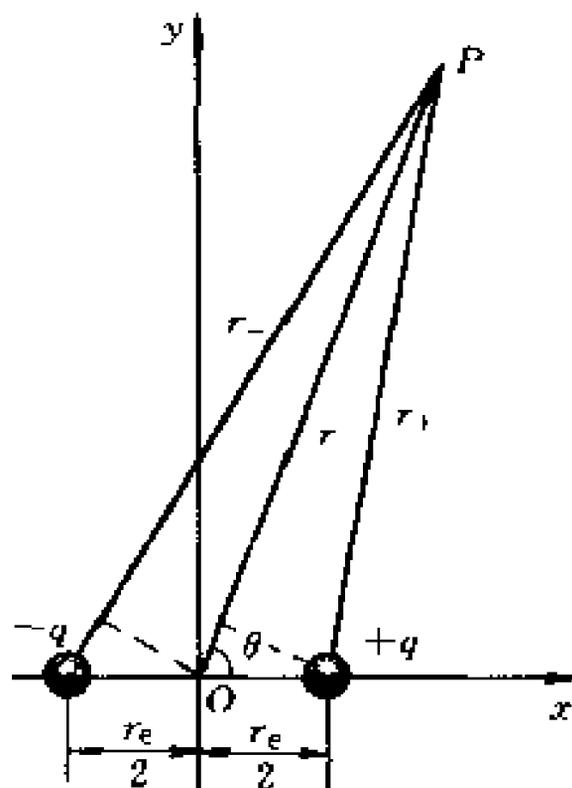


图 8-24 电偶极子的电势

由于 $r \gg r_e$, 所以 P 点的电势可写为

$$V_P = \frac{qr_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_e \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

例题 8-13 计算均匀带电球面电场中的电势分布.

解 设带电球面的半径为 R , 总电荷量为 q . 求电场中任一点 P 处的电势, P 点与球心的距离为 r .

下面用两种方法来求解.

(1) 用电势与场强的积分关系式(8-23)求解. 由例题 8-9 已知均匀带电球面在空间激发的场强沿半径方向, 其大小为

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

利用式(8-23), 并沿半径方向积分, 则 P 点的电势为

$$V_P = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty E dr$$

当 $r > R$ 时
$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 $r < R$ 时, 由于球内外场强的函数关系不同, 积分必须分段进行, 即

$$V_P = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R 0 \cdot dr + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由此可见, 一个均匀带电球面在球外任一点的电势和把全部电荷看作集中于球心的一个点电荷在该点的电势相同; 在球面内任一点的电势应与球面上的电势相等. 故均匀带电球面及其内部是一个等电势的区域. 电势 V 随距离 r 的变化关系如图 8-25 所示.

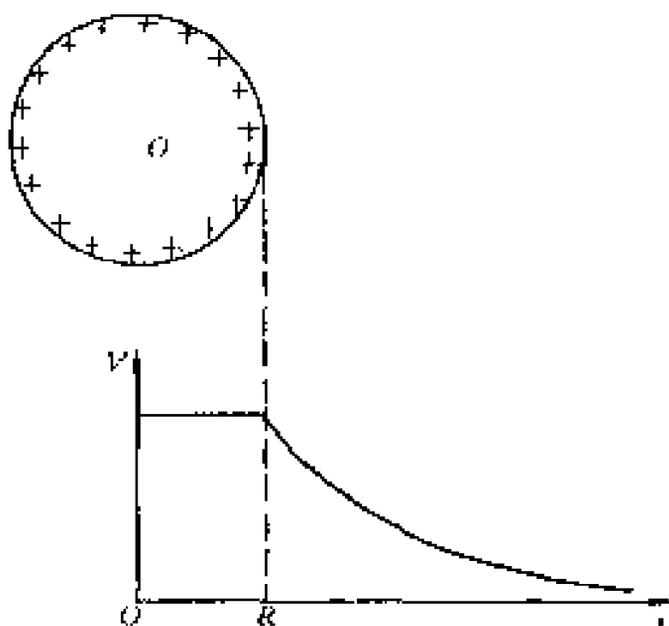


图 8-25 均匀带电球面的电势

(2) 用场源电荷分布与电势的关系式(8-28)求解. 由题意知电荷面密度为

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

在球面上介于 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间的环带上所带的电荷元 dq 为

$$dq = \sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

此电荷元在 P 点的电势为

$$dV_P = \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 l}$$

由图 8-26 可知 $l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$

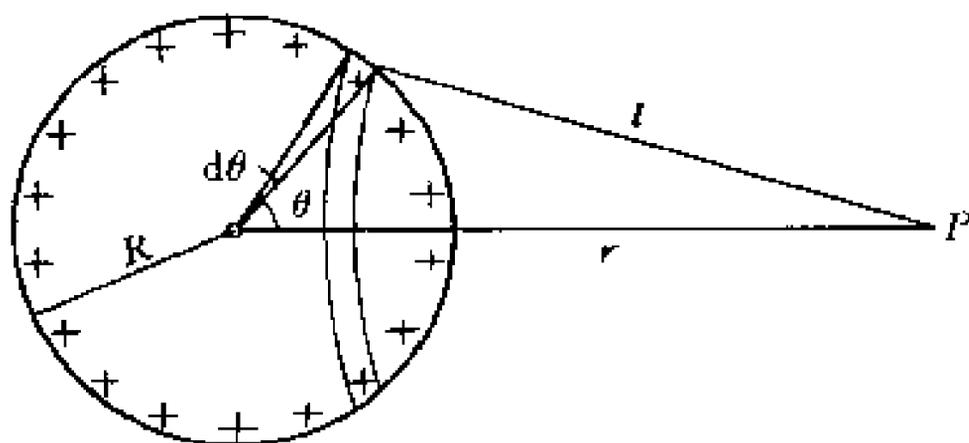


图 8-26 计算均匀带电球面的电势

对上式微分得 $l dl = R r \sin \theta d\theta$

代入 dV_P 式中得 $dV_P = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 r} dl$

于是, 带电球面在球外任一点 P 处的电势为

$$V_P = \int dV_P = \int_{r-R}^{r+R} \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 r} dl = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 P 点在球内时

$$V_P = \int dV_P = \int_{R-r}^{R+r} \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0 r} dl = \frac{4\pi\sigma R}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

两种方法计算结果相同.

例题 8-14 计算无限长均匀带电直线的电势分布.

解 令无限长直线如图 8-27 放置, 其上电荷线密度为 λ . 计算在 x 轴上距直线为 r 的任一点 P 处的电势.

因为无限长带电直线的电荷分布是延伸到无限远的, 所以在这种情况下不能用连续分布电荷的电势公式(8-28)来计算电势 V , 否则必得出无限大值的结果, 显然这是没有意义

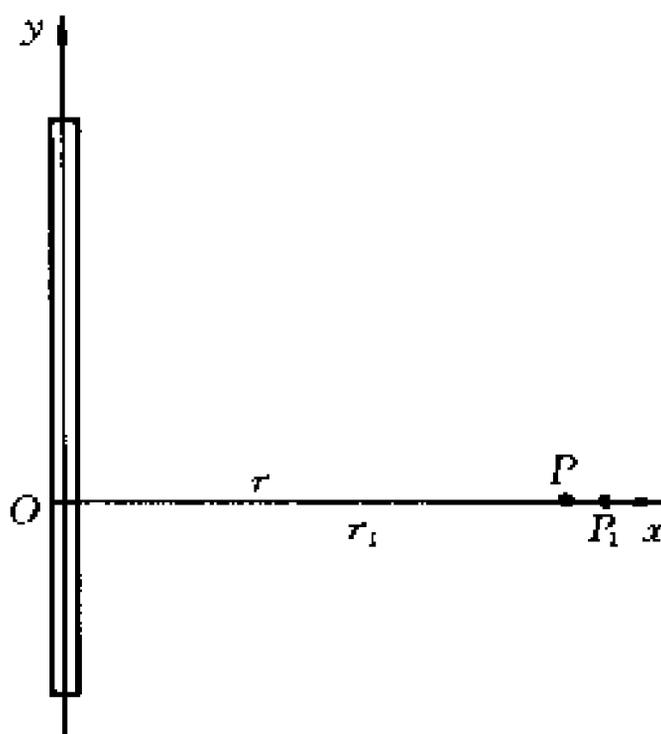


图 8-27 计算均匀带电直线的电势

的. 同样也不能直接用公式(8-22)来计算电势, 不然也将得出电场中任一点的电势值为无限大的结果. 为什么不能用上述两个公式来计算, 请读者自行考虑.

为了能求得 P 点的电势, 可先应用电势差和场强的关系式, 求出在 x 轴上 P 点和 P_1 点间的电势差. 由例题 8-11 知无限长均匀带电直线在 x 轴上的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

方向沿 x 轴. 于是, 过 P 点沿 x 轴积分可算得 P 点与参考点 P_1 的电势差

$$V_P - V_{P_1} = \int_r^{r_1} E \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{r_1} \frac{dr}{r} =$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r}$$

由于 $\ln 1 = 0$, 所以本题中若选离直线为 $r_1 = 1 \text{ m}$ 处作为电势零点, 则很方便地可得 P 点的电势为

$$V_P = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \{r\}_m$$

由上式可知, 在 $r > 1 \text{ m}$ 处, V_P 为负值; 在 $r < 1 \text{ m}$ 处, V_P 为正值. 这个例题的结果再次表明, 在静电场中只有两点的电势差有绝对的意义, 而各点的电势值却只有相对的意义.

§ 8-5 等势面 电场强度与电势梯度的关系

电场强度和电势都是用来描述同一静电场中各点性质的物理量, 两者之间有密切的关系. 式(8-23)和式(8-24)指明两者之间的积分形式关系, 本节将着重研究两者之间的微分形式关系. 为了对

这种关系有比较直观的认识,我们首先介绍电势的图示法.

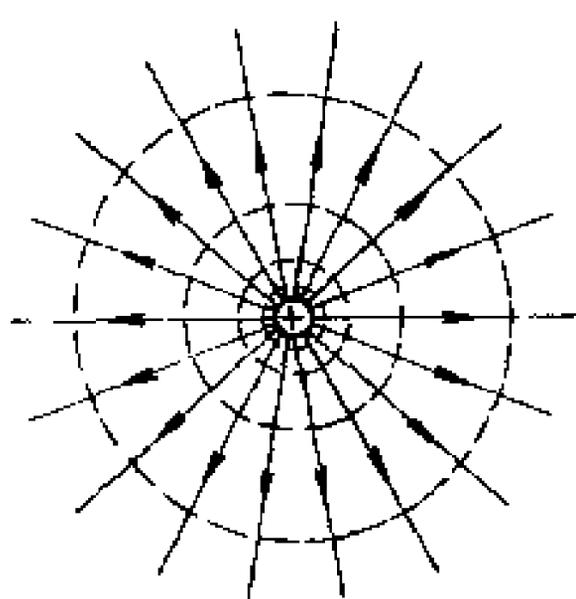
1. 等势面

前面我们曾介绍用电场线来形象地描述电场中各点的场强的情况,现在我们说明如何用图象来形象地表示电场中的电势分布情况.一般说来,静电场中各点的电势是逐点变化的,但是场中有许多点的电势值是相等的.把这些电势值相等的各点连起来所构成的曲面叫做等势面.

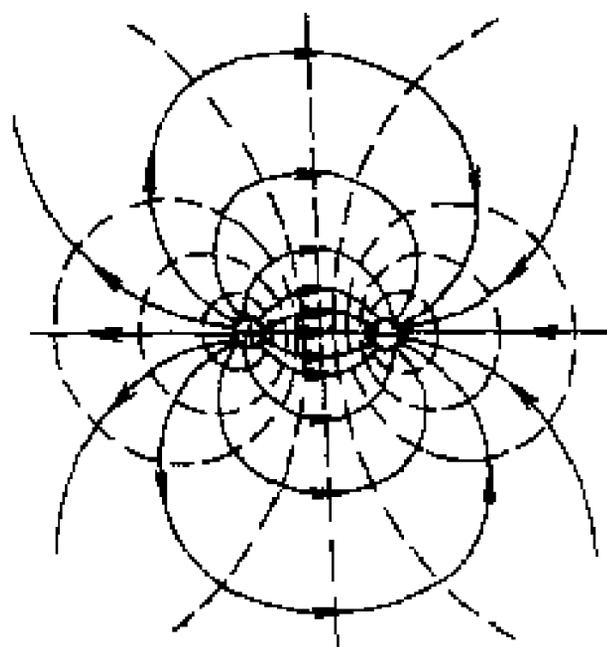
现在我们从点电荷的静电场开始,来研究等势面的性质.已知在点电荷 q 的电场中,与电荷 q 相距为 r 处的各点的电势都是

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

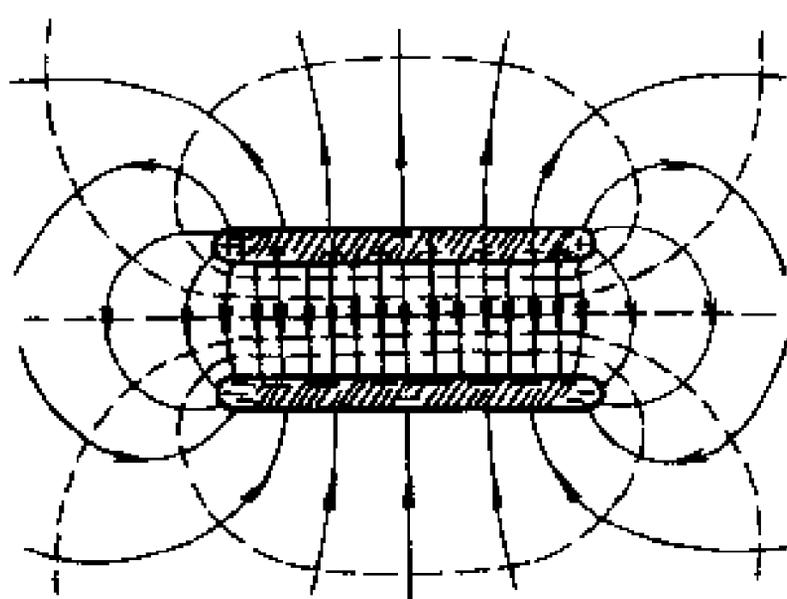
由此可见,在点电荷电场中,等势面是以点电荷为中心的一系列同心球面,如图 8-28(a)中虚线所示.我们知道,点电荷电场中的电场线是由正电荷发出(或向负电荷会聚)的一系列直线,显然,这些电场线(是沿半径方向的)与等势面(同心球面)处处正交,电场线的方向指向电势降落的方向.



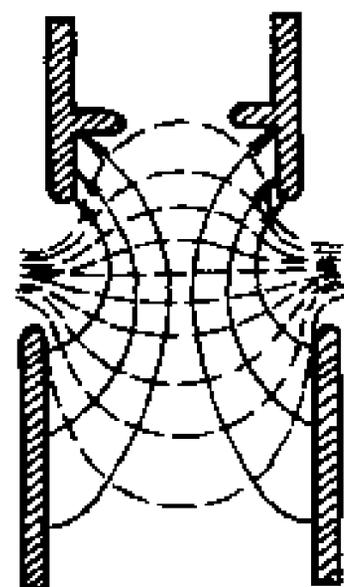
(a) 正点电荷



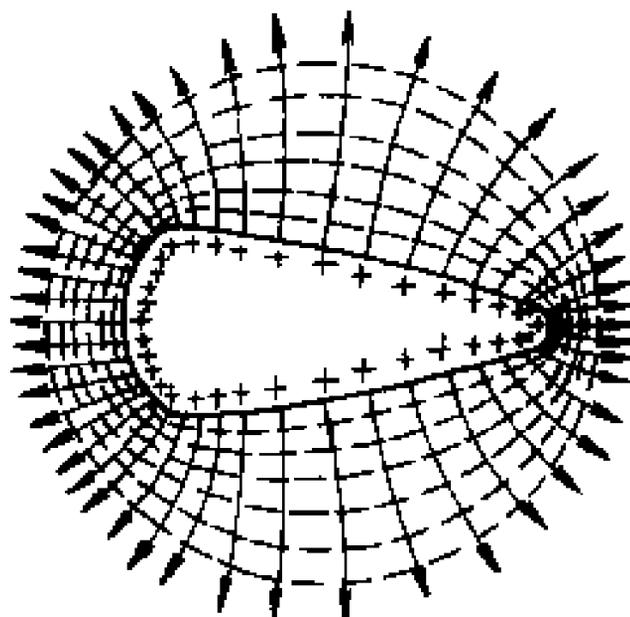
(b) 电偶极子



(c)正负带电板



(d)示波管内的加速和聚焦电场



(e)不规则形状的带电导体

图 8 28 几种常见电场的等势面和电场线图

(各图中虚线表示等势面,实线表示电场线,每相邻的两个等势面之间的电势差都是相等的)

电场线和等势面之间处处正交这一结论,不仅在点电荷的电场中成立,在任何带电体的电场中都成立,可证明如下.设试探电荷 q_0 在某等势面上的 P 点沿等势面作一微小的位移 $d\mathbf{l}$ 到达 Q 点,这时,电场力 $q_0\mathbf{E}$ 所作的功为

$$dA = q_0 E \cos \theta d\mathbf{l}$$

式中 E 是 PQ 范围内场强 E 的量值, θ 是 E 和 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角. 这

功也等于 P 、 Q 两点的电势差乘以 q_0 . 因为 P 、 Q 两点在同一等势面上, $V_P = V_Q$, 所以

$$dA = q_0 E \cos \theta dl = 0$$

式中 q_0 、 E 、 dl 都不等于零, 必然是 $\cos \theta = 0$, 即 $\theta = 90^\circ$, 这说明场强 E 垂直于 dl , 由于 dl 是等势面上的任意位移元, 因此, 电场强度与等势面必定处处正交. 总之, 在静电场中, 电场线和等势面是相互正交的线族和面族.

同电场线一样, 我们也可以对所绘的等势面的疏密作一些规定, 使它们也能表示出电场中各处电场的强弱. 这个规定是: 画一系列等势面时, 使任何两个相邻等势面间的电势差都相等. 按这一规定, 在图 8-28 中绘出了几种常见电场的等势面和电场线图. 图中的虚线表示等势面, 实线表示电场线. 从图中可以看到等势面愈密处场强愈大, 等势面愈疏处场强愈小. 所以, 这样就能将电场中场强与电势之间的关系直观地表示出来.

2. 电场强度与电势梯度的关系

设在任意静电场中, 取两个十分邻近的等势面 1 和 2 (图 8-29), 电势分别为 V 和 $V + dV$, 并设 $dV > 0$. 设 P_1 为等势面 1 上的一点, 在 P_1 点作等势面 1 的法线, 它与等势面 2 交于 P_2 点. 规定指向电势升高的方向为这法线的正方向, 并以 e_n 表示法线方向上的单位矢量. 令 $P_1 P_2 = dn$, 从图中可知, 由等势面 1 上的 P_1 点到达等势面 2 上的任一点, 例如, 沿图中 dl 的方向到达 P_3 点, 其电势变化量为 dV , 空间位置的改变量为 dl . 相应地, 电势的空间变化率为 $\frac{dV}{dl}$, 显然, dl 取不同方向, $\frac{dV}{dl}$ 的值也不同. 在 P_1 点处沿不

同方向电势的空间变化率 $\frac{dV}{dl}$ 不相等. 由于 dn 恒小于 (或等于) dl ,

故 $\frac{dV}{dl}$ 的值恒小于 (或等于) 沿 e_n 方向电势的空间变化率 $\frac{dV}{dn}$ 的值,

$$\text{即 } \frac{dV}{dl} \leq \frac{dV}{dn}.$$

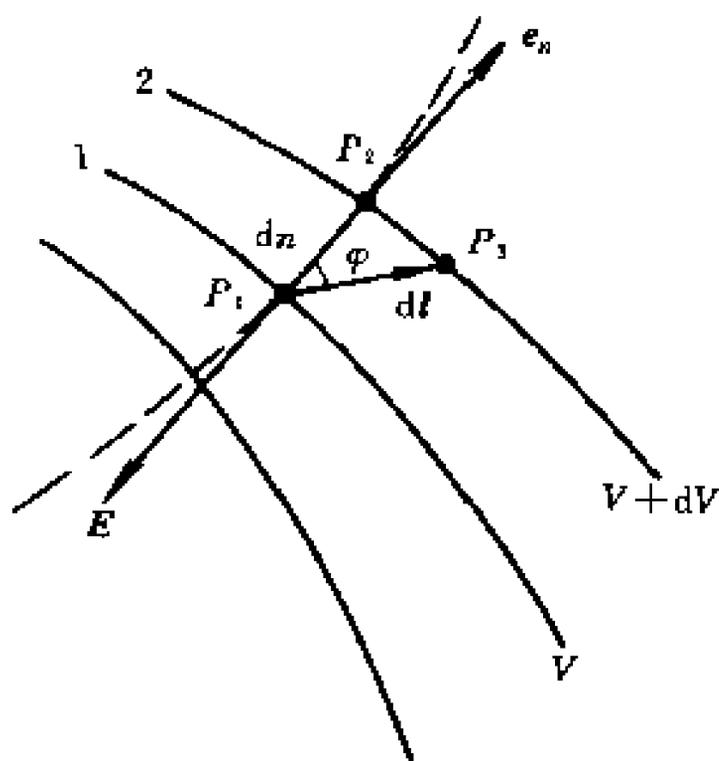


图 8-29 电势梯度矢量和场强的关系

设 dl 与 e_n 之间的夹角为 φ , 可知 $dn = dl \cos \varphi$

因而

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dn} \cos \varphi = \frac{dV}{dn} e_n \cdot \frac{dl}{dl} \quad (8-29)$$

式(8-29)是任一方向的电势变化率和 $\frac{dV}{dn} e_n$ 之间的关系式, 它表明, 只要知道 $\frac{dV}{dn}$ 和法线方向单位矢量 e_n 与 dl 之间的夹角, 则沿任一方向的电势变化率便可由式(8-29)求得, 该式也可理解为 dl 方向上的电势变化率 $\frac{dV}{dl}$, 是矢量 $\frac{dV}{dn} e_n$ 在 dl 方向上的分量, 这一矢量 $\frac{dV}{dn} e_n$ 定义为 P_1 点处的电势梯度矢量, 通常记作 $\text{grad } V$ ^①, 即

$$\text{grad } V = \frac{dV}{dn} e_n \quad (8-30)$$

式(8-30)说明, 电场中某点的电势梯度矢量, 在方向上与电势在该点处空间变化率为最大的方向相同, 在量值上等于沿该方向上的

① 梯度一词, 在英语中为“gradient”, 所以把 grad 用作数学符号, grad V 读做“V 的梯度”, V 是电势, grad V 就是“电势梯度”。

电势的空间变化率.

现在,我们来确定电场中某点电势梯度矢量与电场强度之间的关系.如前所述,电场线的方向,亦即电场强度的方向,恒垂直于等势面,而且指向电势降落的方向.所以 P_1 点的电场强度 E 应与 e_n 的方向相反,如图 8-29 中所示.当单位正电荷从电势为 V 的 P_1 点,沿法线方向移动到电势为 $V+dV$ 的 P_2 点时,由于电场力对单位正电荷所作的功等于起点和终点之间的电势差,得

$$E_n dn = V - (V + dV) = -dV$$

式中 E_n 为电场强度 E 在 e_n 方向的分量,所以有

$$E_n = -\frac{dV}{dn}$$

显然,式中的负号正是说明 E 的方向是与 e_n 的方向相反的.将上式写成矢量式为

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dn}\mathbf{e}_n = -\text{grad } V \quad (8-31)$$

矢量式(8-31)说明:静电场中各点的场强等于该点电势梯度的负值.也就是说,静电场中各点场强的大小等于该点电势空间变化率的最大值,方向则平行于使空间变化率为最大的方向指向电势降落的一侧.矢量式(8-31)在任一 dl 方向上的分量为

$$E_l = -(\text{grad } V)_l = -\frac{dV}{dn}\cos\varphi = -\frac{dV}{dl} \quad (8-32)$$

可见,场强沿任一方向的分量等于电势沿该方向空间变化率的负值.如果把直角坐标系中的 x 轴、 y 轴和 z 轴的方向,分别取作 dl 的方向,就可得到场强 E 沿这三个方向的分量分别为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (8-33)$$

因此,在直角坐标系中场强 E 可写成

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \quad (8-34)$$

可见电势梯度 $\text{grad } V$ 在直角坐标系中可写成

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \quad (8-35)$$

式中的 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial z}$ 分别是电势梯度在 x 轴、 y 轴、 z 轴三个方向的分量。

电势梯度的单位是 V/m ，所以场强也常用这一单位。

场强和电势梯度之间的关系式，在实际应用中很重要。当我们要计算场强时，常可先计算电势分布，然后再利用场强和电势梯度的关系式来计算场强。因为电势是标量，一般说来标量计算比较简便，在求得电势分布后，只需进行微分运算便可算出场强的各个分量，这样就可以避免较复杂的矢量运算。下面我们几个例题来说明如何由电势分布来计算场强。

例题 8-15 试由电偶极子的电势分布求电偶极子的场强。

解 由例题 8-12 可知，电偶极子电场中任一点 P 的电势为

$$V = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电势为 r 、 θ 的函数。套用极坐标中电势梯度分量的表达式，可得 P 点场强的分量为

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_e \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

于是， P 点的总场强为

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \theta + 1}$$

当 $\theta=0$ 或 π 时， $E = E_r = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $E = E_\theta = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ，结果和例题 8-5 一样。

若改用直角坐标系，由图 8-24 可知

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

所以
$$V = \frac{\rho_c x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

电势 V 是 x 与 y 的函数. 按式(8-33)可求得

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_c}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right] = \frac{\rho_c(2x^2 - y^2)}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3\rho_c xy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}}$$

于是, P 点的场强

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left[\frac{\rho_c(2x^2 - y^2)}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} \right]^2 + \left[\frac{3\rho_c xy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} \right]^2} = \frac{\rho_c}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^2} \sqrt{4x^2 + y^2}$$

当 P 点在 x 轴上 ($y=0$), 得

$$E_x = \frac{2\rho_c}{4\pi\epsilon_0 x^3} \quad E_y = 0$$

当 P 点在 y 轴上 ($x=0$), 得

$$E_x = -\frac{\rho_c}{4\pi\epsilon_0 y^3} \quad E_y = 0$$

所得结果仍与例题 8-5 中应用点电荷场强公式所求得的结果一样.

例题 8-16 将半径为 R_2 的圆盘, 在盘心处挖去半径 R_1 的小孔, 并使盘均匀带电. 试用电势梯度求场强的方法, 计算这个中空带电圆盘轴线上任一点 P 处的场强.

解 设圆盘上的电荷面密度为 σ , 轴线上任一点 P 离中空圆盘中心的距离为 x . 在圆盘上取半径为 r 宽为 dr 的圆环, 环上所带电荷量为

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

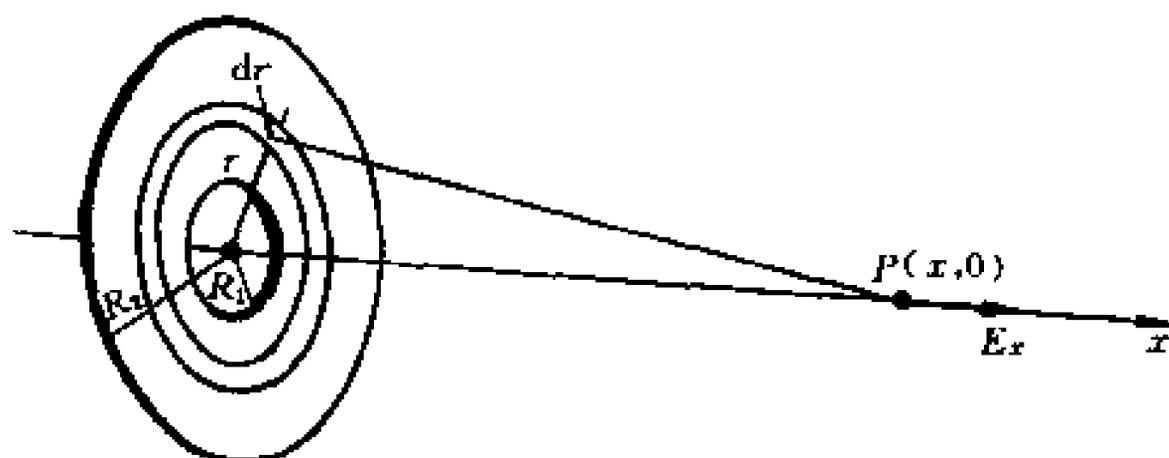


图 8-30 中空带电圆盘轴线上的电势和场强

它在 P 点的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

整个中空带电圆盘在 P 点的电势为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2} \right)$$

由于电荷相对 x 轴对称分布, 故 x 轴上任一点的场强方向必沿 x 轴, 其值为

$$E = E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{(R_1^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{x}{(R_2^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

§ 8-6 带电粒子在静电场中的运动

电荷与电场之间的相互关系有两个方面, 即电荷激发电场和

电场对电荷施加作用力。前面我们讨论了如何根据已知的电荷分布来计算场强，计算表明，对于一个给定的电荷分布，在它周围就有一定的与它相对应的电场分布。现在我们将要讨论的问题是：带电粒子在外电场中所受的作用及其在场中如何运动。在这里首先要说明，把电荷划分为激发电场的固定部分和受电场作用的运动部分完全是相对的，一般讲作用总是相互的，受电场作用的电荷也要激发电场，这个电场对原来认为是固定的电荷分布也有影响。因此，把问题归结为带电粒子在给定电场中的运动仅仅是一级近似的描述，要精确地讨论这种问题，必须采用逐步近似法：先确定激发电场的那一部分电荷分布，并计算其场强，再讨论其它电荷在上述已知电场中的运动；然后再讨论这个运动电荷所激发的电磁场对原有电荷分布的影响，从而根据电荷分布的变化修改电场，并再修正电荷的运动；如此继续下去，以逐步修改到符合实际情况为止。通常运动电荷所引起的影响很小，因此，只要作一级近似处理就够了。例如，在电子仪器中的电子枪或离子枪采用静电场加速带电粒子；在示波器以及电子显微镜和电子光学仪器中采用静电场偏转或聚焦带电粒子；工业上广泛应用的静电喷涂、除尘等，在原理上都归属于带电粒子在电场中的运动，这类问题一般采用一级近似就够了。

如果已知电场中某点的场强为 E ，则一个带有电荷量为 q 的粒子处在该点时受到的电场力为

$$F = qE \quad (8-36)$$

式中 E 是除 q 以外所有其他电荷在 q 所在处所激发的场强。不论带电粒子 q 运动速度的大小和方向如何，它通过电场中场强为 E 的点时受到的电场力总是 qE 。下面我们结合一些例子来说明带电粒子在外电场中所受的作用及其运动的情况。

例题 8-17 电偶极子在均匀外电场中所受的作用。

解 如图 8-31 所示，设在均匀外电场 E 中，电偶极子的电矩 p 的方向与场强 E 方向间的夹角为 θ ，根据式(8-36)，作用在电偶

极子正负电荷上的力 F_1 和 F_2 的大小均为

$$F = F_1 = F_2 = qE$$

由于 F_1 和 F_2 的大小相等, 方向相反, 所以电偶极子所受的合力为零, 电偶极子不会产生平动. 但由于 F_1 和 F_2 不在同一直线上, 所以电偶极子要受到力偶矩的作用, 这个力偶矩的大小为

$$M = Fr_c \sin \theta = qEr_c \sin \theta = p_c E \sin \theta$$

r_c 为两电荷间的距离, 写成矢量式为

$$M = p_c \times E \quad (8-37)$$

在这力偶矩的作用下, 电偶极子的电偶极矩 p_c 将转向外电场 E 的方向, 直到 p_c 和 E 的方向一致时 ($\theta=0$), 力偶矩才等于零而平衡. 显然, 当 p_c 和 E 的方向相反时 ($\theta=\pi$), 力偶矩也等于零, 但这种情况是不稳定的平衡, 如果电偶极子稍受扰动偏离这个位置, 力偶矩的作用将使电偶极子 p_c 的方向转到和 E 的方向一致为止.

例题 8-18 电偶极子在不均匀外电场中所受的作用.

解 如果把电偶极子放在不均匀的外电场中, 则如图 8-32 所示, 可设电荷 $+q$ 和 $-q$ 所在处的电场强度

分别为 E_1 和 E_2 , 它们所受到的电场力分别是 $F_1 = qE_1$ 和 $F_2 = -qE_2$. 所以电偶极子所受的合力为

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = qE_1 - qE_2 = q(E_1 - E_2) \\ &= qr_c \left(\frac{E_1 - E_2}{r_c} \right) = p_c \left(\frac{E_1 - E_2}{r_c} \right) \end{aligned}$$

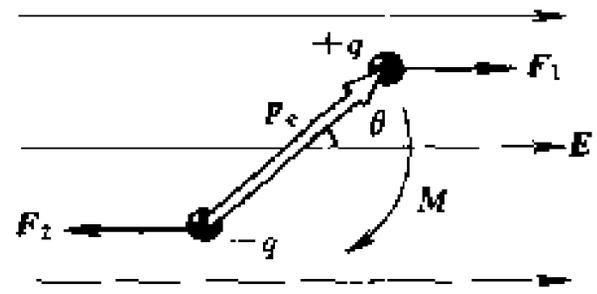


图 8-31 在均匀外电场中的电偶极子

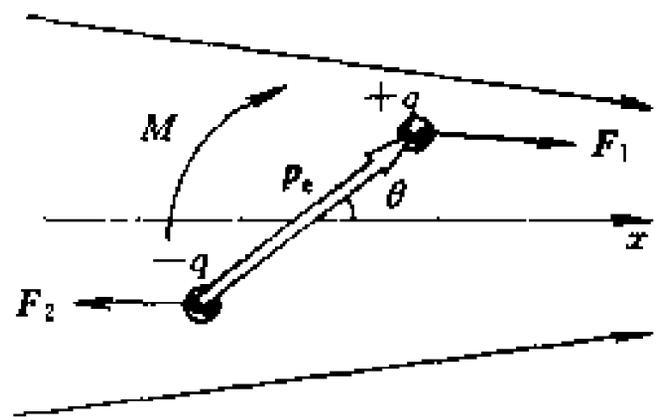


图 8-32 在不均匀外电场中的电偶极子

式中 r_e 为两电荷间的距离, $\frac{E_1 - E_2}{r_e}$ 表示在电偶极了所在处的小范围内、沿 r_e 方向每单位长度的场强变化, 称为场强梯度.

由此可见, 在不均匀的电场中, 作用于电偶极了上的合力既与电矩 p_e 成正比, 还和 r_e 方向上电场强度的变化率 $\frac{E_1 - E_2}{r_e}$ 成正比, 电场的非均匀性愈大 (即 $\frac{E_1 - E_2}{r_e}$ 愈大) 时, 电偶极了所受的力也愈大.

另一方面, 由于力 F_1 和 F_2 的作用, 电偶极了所受的力矩为

$$M = F_1 \frac{r_e}{2} \sin \theta + F_2 \frac{r_e}{2} \sin \theta =$$

$$qE_1 \frac{r_e}{2} \sin \theta + qE_2 \frac{r_e}{2} \sin \theta$$

因为在电偶极了所在处的小范围内, $E_1 = E_2 + \Delta E$, ΔE 是很小的, 所以在上式中可以认为 $E_1 \approx E_2 = E$, 于是得

$$M \approx qr_e E \sin \theta = p_e E \sin \theta$$

写成矢量式为

$$M \approx p_e \times E$$

结果和式(8-37)有相同的形式. 可见, 在不均匀外场中, 电偶极了一方面受到力矩的作用, 使电矩 p_e 转到与电场一致的方向, 同时, 电偶极了还受到一个合力的作用, 促使它向电场较强的方向移动.

上面通过两个例题讨论了带电粒子在电场中受力的情况, 接下来将讨论带电粒子在外电场中的运动. 在低速情况下, 根据牛顿第二运动定律, 质量为 m 的带电粒子仅在电场力作用下的运动方程(设重力可略去不计)为

$$qE = ma = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

式中 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 表示粒子的加速度. 在一般情况下, 求解这一方程是比较复杂的, 下面我们讨论几种简单而重要的情况.

(1) 一带电粒子, 质量为 m , 带有正电荷量 q , 以初速度 v_0 进入匀强电场中运动(忽略重力的作用), 设初速度 v_0 与场强 E 同向(图 8-33).

这时作用在带电粒子上的力为 $F=qE$, 由于力的大小和方向都不变, 所以粒子作匀加速运动, 加速度的大小为

$$a = \frac{qE}{m}$$

又由于加速度 a 的方向与 E 的方向相同, 也和 v_0 的方向相同, 所以带电粒子在电场中作直线运动. 它通过程长 s 后的运动速度 v 的大小可用下式计算

$$v^2 - v_0^2 = 2as = 2 \frac{qE}{m} s$$

因为 Es 等于带电粒子所经过 s 程长始末两点的电势差为 U , 所以

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad (8-38)$$

即带电粒子在静电场中行经电势差 U 的两点后, 电场力所作的功 qU 等于粒子动能的增量. 这一结论虽是从均匀电场中得出, 但它对带电粒子在非均匀电场中运动时也同样适用.

在一般电子光学器件中都有电子枪, 如图 8-34 所示. 在灯丝 F 和板极 P 间加有电势差(即加速电压) U_{PF} , 从灯丝发射出来的电子受电场加速, 在穿过板极的小孔时具有相当大的速度, 形成很窄的快速电子束. 由于电子带有负电荷量, 要使电子得到加速, 板极 P 的电势 V_P 必须高于灯丝 F 的电势 V_F 亦即 $V_P - V_F = U_{PF} > 0$. 通常用 U 表示加速

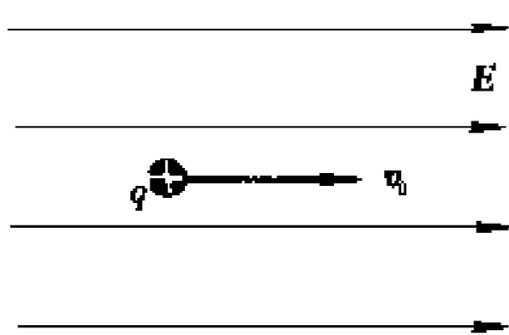


图 8-33 带电粒子进入匀强电场中运动
(设初速 v_0 与场强 E 同方向)

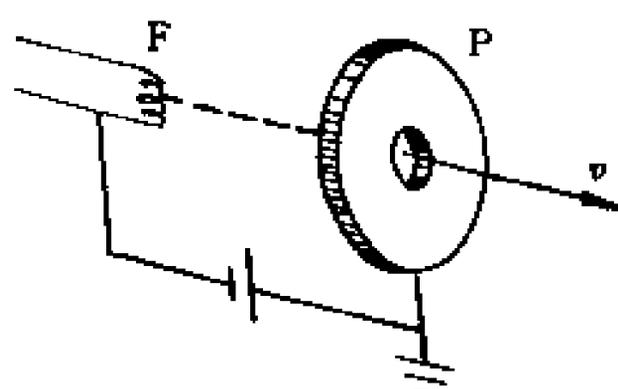


图 8-34 电子枪

电压,即加速电势差的绝对值,用 e 表示电子电荷量的绝对值.一般电子离开灯丝时的初速很小,可以看作为 0,这样电子通过加速电压为 U 的区间电场力对电子所做的功为 eU ,在电子速度 v 不太大时,电子穿出极板小孔时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2 = eU$$

由此可得电子速度为

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \quad (8-39)$$

式中 m_0 为电子的静止质量.如果加速电压很高,电子的速度接近光速时,它的质量随速度的变化不可忽略,这时必须按照狭义相对论中动能公式来计算,电子的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = eU$$

电子的速度
$$v = c \frac{\sqrt{(eU + 2m_0c^2)eU}}{(eU + m_0c^2)} \quad (8-40)$$

在 $m_0c^2 \gg eU$ 的情况下,式(8-40)就归结为式(8-39).

电子电荷量的绝对值 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C,是微观粒子所带电荷量的基本单位.一个电子通过加速电势差为 1 V 的区间,电场力对它做功

$$A = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

从而电子获得 1.60×10^{-19} J 的能量.在近代物理中,常把这个能量值作为一种能量单位,而称之为电子伏特,符号为 eV.

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (8-41)$$

在近代物理学中,微观粒子的能量往往很高,常用兆电子伏(MeV)、吉电子伏(GeV)等单位.

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

(2) 一带电粒子,质量为 m ,带有正电荷量 q ,以初速度 v_0 进入

一横向匀强电场中运动(忽略重力的作用),设初速度 v_0 和场强 E 相垂直(图 8-35).

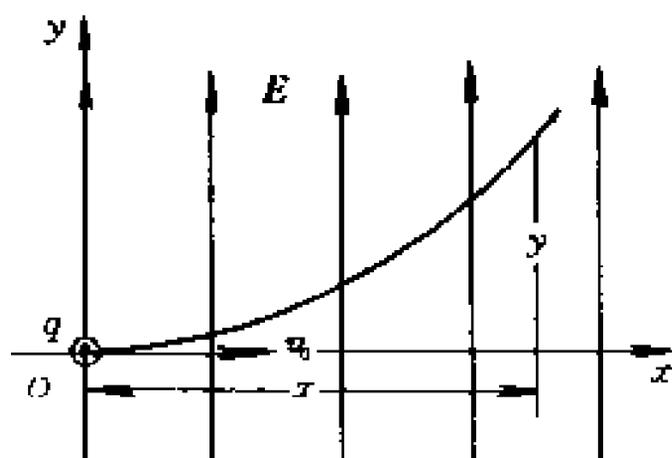


图 8-35 带电粒子进入匀强电场中运动
(初速度 v_0 与场强 E 垂直)

这时,由于加速度垂直于初速方向,带电粒子将作抛物线运动(与重力场中的水平抛射体的运动相类似).取坐标轴 xOy 如图, x 轴沿初速 v_0 的方向, y 轴沿场强 E 的方向.带电粒子在原点 O 处进入电场,经过时间 t 后,在 y 轴方向上的位移分量为

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m}t^2$$

而沿 x 轴方向上的位移分量为

$$x = v_0t$$

消去以上两式中的 t ,得带电粒子在电场中的轨迹方程

$$y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{x^2}{v_0^2} \quad (8-42)$$

在生产技术上常用一对平行板产生匀强电场以引起电子射线的横向偏移(见图 8-36).

带电粒子进入匀强电场时,如果初速度 v_0 与场强 E 斜交,那么带电粒子的运动与物体在重力场中的斜抛运动相类似.读者可作为习题自行分析.

例题 8-19 试从示波管内电子束受横向电场的偏折计算荧光屏上光点的位移.

解 如图 8-37 所示,一束电子射线以速度 v_0 进入与 v_0 垂直的

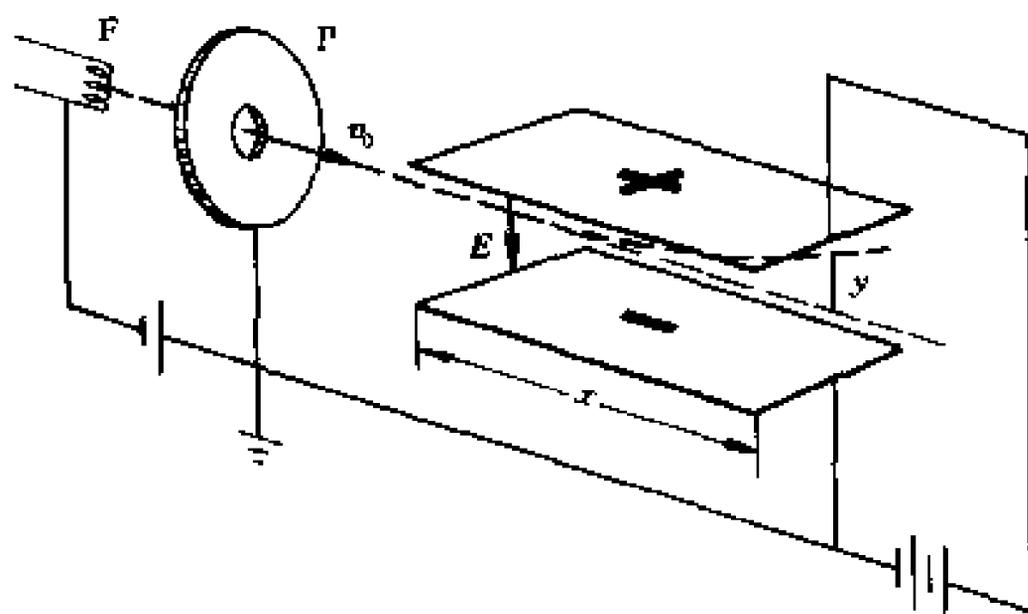


图 8-36 电子射线的横向偏移

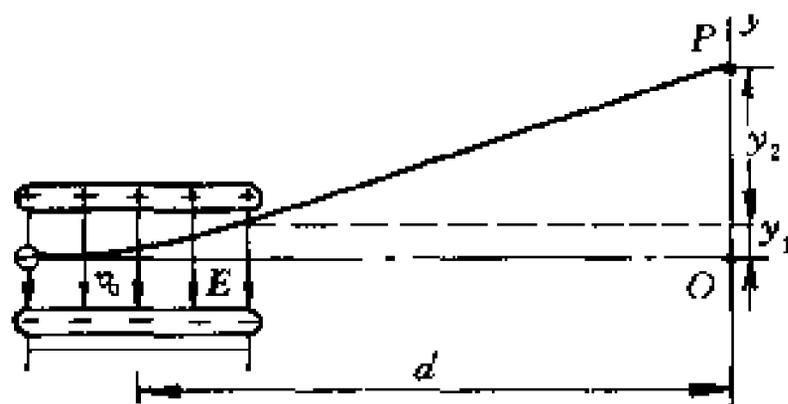


图 8-37 电子射线在电场中的偏转

横向匀强电场中,由于电子受到一个与场强 E 方向相反的作用力,所以电子通过电场后将偏离原来 v_0 方向. 利用上面讨论的结果,可得电子通过长为 l 的偏转板所需的时间为

$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

在 t_1 时间内,由式(8-42)知电子在 y 轴方向的位移分量为

$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{eEl^2}{2mv_0^2}$$

相应的速度分量由零增加到

$$v_1 = at_1 = \frac{eEl}{mv_0}$$

电子通过偏转板后,不再受电场力的作用,它将以离开偏转板时的速度匀速前进,并打到荧光屏上.设偏转板中心到荧光屏的距离为 d ,电子通过纵向距离 $d - \frac{l}{2}$ 所需时间为

$$t_2 = \frac{d - \frac{l}{2}}{v_0}$$

在此时间内电子在 y 轴方向上的位移为

$$y_2 = v_1 t_2 = \frac{eE}{m} \left(\frac{l}{v_0} \right) \left(\frac{d - \frac{l}{2}}{v_0} \right)$$

于是电子在荧光屏上产生的光点 P 离入射方向的横向位移为

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eld}{mv_0^2} E$$

上述结果指出:荧光屏上光点的位移 y 与偏转板中场强 E 的大小成正比,并随 E 的方向和大小的变化而上下移动.

思考题

8-1 一个金属球带上正电荷后,该球的质量是增大、减小还是不变?

8-2 判断下列说法是否正确,并说明理由.

(1) 电场中某点场强的方向就是将点电荷放在该点处所受电场力的方向;

(2) 电荷在电场中某点受到的电场力很大,该点的场强 E 一定很大;

(3) 在以点电荷为中心 r 为半径的球面上,场强 E 处处相等.

8-3 根据点电荷的场强公式

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}$$

当所考察的场点和点电荷的距离 $r \rightarrow 0$ 时,场强 $E \rightarrow \infty$,这是没有物理意义的,对这似是而非的问题应如何解释?

8-4 在一个带正电的金属球附近,放一个带正电的点电荷 q_0 ,测得 q_0 所受的力为 F . 试问 $\frac{F}{q_0}$ 是大于、等于还是小于该点的场强 E ? 如果金属球带负

电,则又如何?

8-5 点电荷 q 如只受电场力的作用而运动,电场线是否就是点电荷 q 在电场中运动的轨迹?

8-6 在正四边形的四个顶点上,放置四个带相同电荷量的同号点电荷,试定性地画出其电场线图.

8-7 如果在高斯面上的 E 处处为零,能否肯定此高斯面内一定没有净电荷?反过来,如果高斯面内没有净电荷,能否肯定面上所有各点的 E 都等于零.

8-8 在高斯定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$ 中,在任何情况下,式中的 E 是否完全由电荷 q 所激发?

8-9 (1) 一点电荷 q 位于一立方体的中心,立方体边长为 l .试问通过立方体一面的 E 通量是多少?

(2) 如果把这个点电荷移放到立方体的一个角上,这时通过立方体每一面的 E 通量各是多少?

8-10 一根有限长的均匀带电直线,其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性,能否利用高斯定理算出场强来?

8-11 静电场强度沿一闭合回路的积分 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$,表明了电场线的什么性质?

8-12 比较下列几种情况下 A 、 B 两点电势的高低.

(1) 正电荷由 A 移到 B 时,外力克服电场力作正功;

(2) 正电荷由 A 移到 B 时,电场力作正功;

(3) 负电荷由 A 移到 B 时,外力克服电场力作正功;

(4) 负电荷由 A 移到 B 时,电场力作正功;

(5) 电荷顺着电场线方向由 A 移动到 B ;

(6) 电荷逆着电场线方向由 A 移动到 B .

8-13 一人站在绝缘地板上,用手紧握静电起电机的金属电极,同时使电极带电产生 10^5 V 的电势.试问此人是否安全?这时,如果另一人去接触已带电的电极,是否安全?为什么?

8-14 (1) 已知电场中某点的电势,能否计算出该点的场强?

(2) 已知电场中某点附近的电势分布,能否算出该点的场强?

8-15 根据场强与电势梯度的关系分析下列问题.

- (1) 在电势不变的空间, 电场强度是否为零?
- (2) 在电势为零处, 场强是否一定为零?
- (3) 场强为零处, 电势是否一定为零?
- (4) 在均匀电场中, 各点的电势梯度是否相等? 各点的电势是否相等?

习 题

8-1 在真空中, 两个带等值同号的点电荷相距 0.01 m 时的作用力为 10^{-5} N, 它们相距 0.1 m 时的作用力多大? 两点电荷所带的电荷量是多少?

8-2 在平面直角坐标系中, 在 $x=0, y=0.1$ m 处和在 $x=0, y=-0.1$ m 处分别放置一电荷量 $q=10^{-10}$ C 的点电荷. 求

(1) 在 $x=0.2$ m, $y=0$ 处一电荷量为 $Q=10^{-8}$ C 的点电荷所受力的方向和大小;

(2) Q 受力最大时的位置.

8-3 在边长为 2 cm 的等边三角形的顶点上, 分别放置电荷量为 $q_1=1.0 \times 10^{-6}$ C、 $q_2=3 \times 10^{-6}$ C 和 $q_3=-1.0 \times 10^{-6}$ C 的点电荷.

(1) 哪一个点电荷所受的力最大?

(2) 求作用在 q_2 上力的大小和方向.

8-4 在正方形的两个相对的角上各放置一点电荷 Q , 在其他两个相对角上各置一电荷 q . 如果作用在 Q 上的力为零. 求 Q 与 q 的关系.

8-5 两个相同的小球, 质量都是 m , 带等值同号的电荷量 q , 各用长为 l 的细线挂在同一点, 如图所示. 设平衡时两线间夹角 2θ 很小, 试证下列的近似等式

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$

式中 x 为两球平衡时的距离.

(1) 如果 $l=1.20$ m, $m=10$ g, $x=5.0$ cm, 则每个小球上的电荷量 q 是多少?

(2) 如果每个球以 1.0×10^{-9} C/s 的变化率失去电荷, 求两球彼此趋近的瞬间相对速率 $\frac{dx}{dt}$ 是多少?

8-6 有一边长为 l 的立方体, 每一角上放一点电荷 q .

(1) 求证任一角上的点电荷所受合力的大小为



习题 8-5 图

$$F = \frac{0.262q^2}{\epsilon_0 l^2}$$

(2) 合力 F 的方向如何?

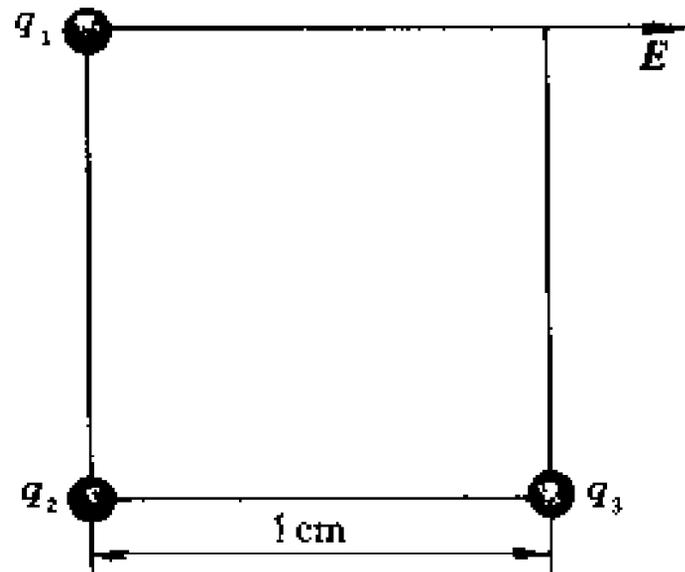
8-7 在 x 轴上, 有一点电荷 $q_1 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$, 位于原点, 另一点电荷 $q_2 = 50 \times 10^{-6} \text{ C}$, 位于 $x = -10 \text{ cm}$ 处. 试求 x 轴上任一点的电场强度.

8-8 在直角三角形 ABC 的 A 点, 放置点电荷 $q = 1.8 \times 10^{-9} \text{ C}$, 在 B 点放置点电荷 $q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{ C}$. 已知 $BC = 0.04 \text{ m}$, $AC = 0.03 \text{ m}$. 试求直角顶点 C 处的场强 E .

8-9 试求边长为 l 的正方形中心处的电场强度, 若

- (1) 四个相同的同号点电荷 q 放置在四个顶点上;
- (2) 两个正号、两个负号的相同点电荷任意放置在四个顶点上.

8-10 三个点电荷 q_1, q_2 和 q_3 放在正方形的三个顶点上, 已知 $q_1 = 10 \times 10^{-9} \text{ C}$, $q_2 = 28 \times 10^{-6} \text{ C}$. 在正方形的第四个顶点上场强 E 的方向沿水平方向向右, 如图所示. 求



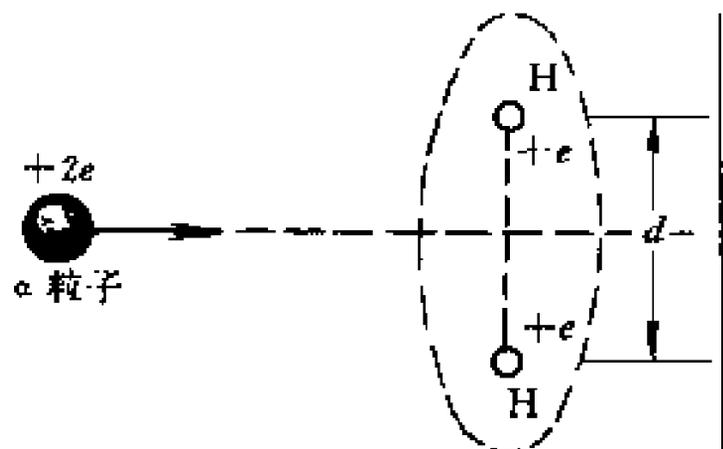
习题 8-10 图

- (1) q_3 等于多少.
- (2) 第四个顶点上场强的大小.

8-11 在平面直角坐标系中, $q_1 = 25 \times 10^{-9} \text{ C}$ 放置在原点 $(0, 0)$, $q_2 = 25 \times 10^{-9} \text{ C}$ 放置在 $(6 \text{ m}, 0)$ 的点上. 计算 $(3 \text{ m}, 0)$ 处和 $(3 \text{ m}, 4 \text{ m})$ 处的场强.

8-12 两个点电荷 q_1 和 q_2 相距为 d , 若 (1) 两电荷同号; (2) 两电荷异号. 求两点电荷连线上场强为零的一点的位置.

8-13 α 粒子快速通过氢分子中心, 其轨迹垂直于两核的连线, 两核的距离为 d , 如图. 问 α 粒子在何处受到的力最大? 假定 α 粒子穿过氢分子中心时两核无多大移动, 同时忽略分子中电子的电场.



习题 8-13 图

8-14 如图所示的电荷分布称为电四极子, 它由两个相同的电偶极子组成. 证明在电四极子轴线的延长线上离中心

为 $r (r \gg r_c)$ 的 P 点处的电场强度为

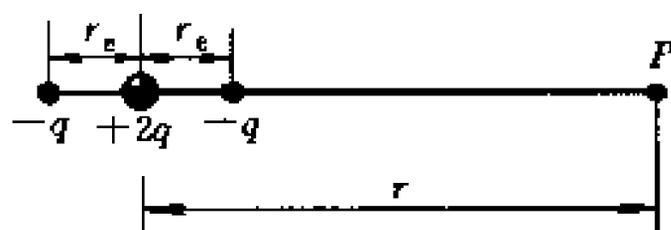
$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

式中 $Q = 2qr_c^2$ 称为这种电荷分布的电四极矩.

8-15 长 $l = 15 \text{ cm}$ 的直导线 AB 上均匀地分布着线密度为 $\lambda = 5 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ 的电荷(如图). 求:

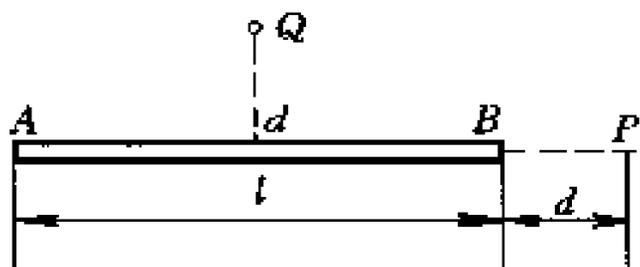
(1) 在导线的延长线上与导线一端 B 相距 $d = 5 \text{ cm}$ 处 P 点的场强;

(2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d = 5 \text{ cm}$ 处 Q 点的场强.

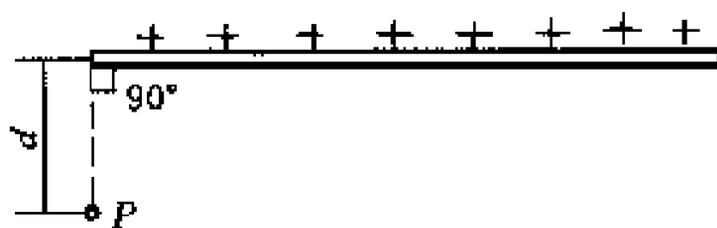


习题 8-14 图

8-16 一根很长的绝缘棒, 均匀带电(如图), 单位长度上的电荷量为 λ . 试求距棒的一端垂直距离为 d 的 P 点处的电场强度.



习题 8-15 图



习题 8-16 图

8-17 一半径为 r 的半球面均匀带电, 电荷面密度为 σ . 求球心处的电场强度.

8-18 用很细的不导电的塑料棒弯成半径为 50 cm 的圆弧, 两端空隙为 2 cm , 电荷量为 $3.12 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的正电荷均匀分布在细棒上. 求圆心处场强的大小和方向.

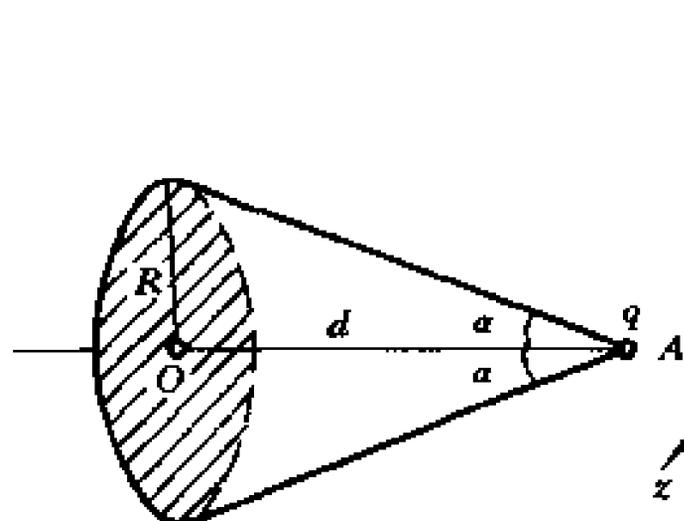
8-19 用直接积分法求一半径为 R 、电荷面密度为 σ 的均匀带电球面球内外任一点的电场强度.

8-20 设点电荷分布的位置是: 在 $(0, 0)$ 处为 $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ 、在 $(3 \text{ m}, 0)$ 处为 $4 \times 10^{-8} \text{ C}$ 、在 $(0, 4 \text{ m})$ 处为 $-6 \times 10^{-8} \text{ C}$. 计算通过以 $(0, 0)$ 为球心, 半径等于 5 m 的球面上的总 E 通量.

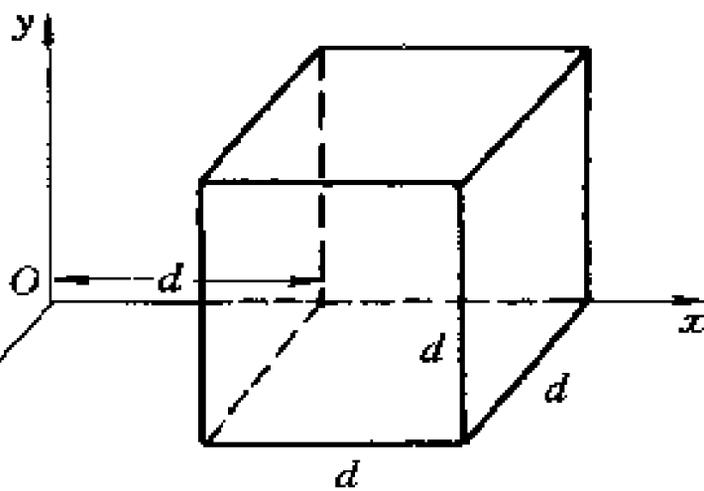
8-21 如图所示, 在点电荷 q 的电场中, 取半径为 R 的圆形平面. 设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上 A 点处, A 点与圆心 O 点的距离为 d . 试计算通过此平面的 E 通量.

8-22 图中电场强度的分量为 $E_x = bx^{1/2}$, $E_y = E_z = 0$, 式中 $b = 800$

$N/(C \cdot m^{1/2})$, 设 $d=10 \text{ cm}$. 试计算



习题 8-21 图

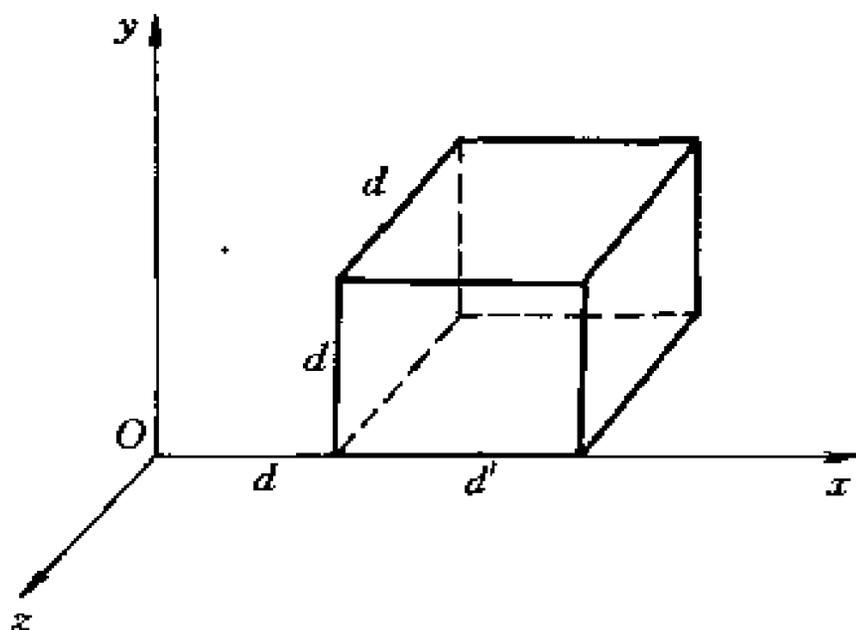


习题 8-22 图

- (1) 通过立方体表面的总 E 通量;
- (2) 立方体内的总电荷量.

8-23 如果习题 8-22 图中电场强度的分量为 $E_x = by, E_y = bx, E_z = 0$, $b = 800 \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{m})$. 再计算通过立方体表面的总 E 通量和立方体内的总电荷量.

8-24 如图 $d = 0.4 \text{ m}, d' = 0.6 \text{ m}$ 的长方闭合面处在一不均匀电场 $E = (3 + 2x^2)i$ 中, E 和 x 的单位为 V/m 和 m , 计算通过此闭合面的净 E 通量及包围在闭合面内的净电荷量.



习题 8-24 图

8-25 (1) 地球表面附近的场强近似为 $200 \text{ V}/\text{m}$, 方向指向地球中心. 试计算地球带的总电荷量, 地球的半径为 $6.37 \times 10^6 \text{ m}$;

(2) 在离地面 1400 m 处, 场强降为 $20 \text{ V}/\text{m}$, 方向仍指向地球中心. 试计算这 1400 m 厚的大气层里的平均电荷密度.

8-26 中性氢原子处于基态时,其电荷分布可以看作点电荷 $+e$ 的周围负电荷按密度 $\rho(r) = ce^{-\frac{2r}{a_0}}$ 分布,式中 a_0 是玻尔半径,等于 $0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$, c 为一常量,其值可由负电荷总值 $-e$ 定出,试计算

- (1) 半径为 a_0 的球内的净电荷量;
- (2) 离核距离为 a_0 处的电场强度.

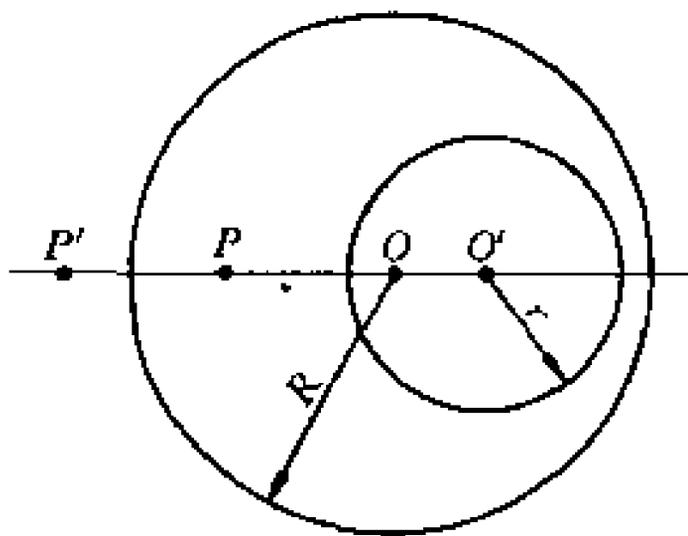
8-27 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间,均匀分布着电荷体密度为 $\rho = 10^{-9} \text{ C/m}^3$ 的正电荷.求离球心 5 cm 、 15 cm 、 50 cm 处的电场强度.

8-28 一个半径为 R 的球体内,分布着电荷体密度 $\rho = kr$,式中 r 是径向距离, k 是常量.求空间的场强分布,并画出 E 对 r 的关系曲线.

8-29 一层厚度为 0.5 cm 的无限大平板,均匀带电,电荷体密度为 $1.0 \times 10^{-4} \text{ C/m}^3$.求

- (1) 这薄层中央的电场强度;
- (2) 薄层内与其表面相距 0.1 cm 处的电场强度;
- (3) 薄层外的电场强度.

8-30 在半径为 R ,电荷体密度为 ρ 的均匀带电球内,挖去一个半径为 r 的小球,如图所示.试求: O 、 O' 、 P 、 P' 各点的场强. O 、 O' 、 P 、 P' 在一条直线上.



习题 8-30

8-31 设气体放电形成的等离子体在圆柱内的电荷分布可用下式表示

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$$

式中 r 是到圆柱轴线的距离, ρ_0 是轴线处的电荷体密度, a 是常量.试计算其场强分布.

8-32 点电荷 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 的电荷量各为 $4 \times 10^{-9} \text{ C}$,放置在一正方形的四个顶点上,各顶点距正方形中心 O 点的距离均为 5 cm .

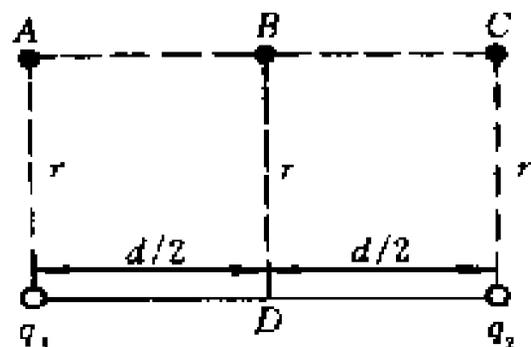
- (1) 计算 O 点处的场强和电势;
- (2) 将一试探电荷 $q_0 = 10^{-9} \text{ C}$ 从无穷远移到 O 点,电场力作功多少?
- (3) 问(2)中所述过程中 q_0 的电势能的改变为多少?

8-33 如图所示,已知 $r = 6 \text{ cm}$, $d = 8 \text{ cm}$, $q_1 = 3 \times 10^{-8} \text{ C}$, $q_2 = -3 \times 10^{-8}$

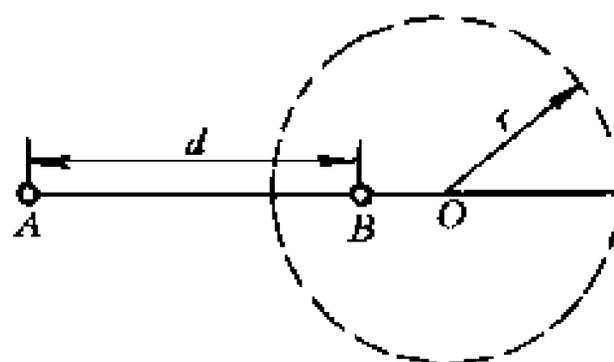
C. 求:

(1) 将电荷量为 $2 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点, 电场力做功多少?

(2) 将此点电荷从 C 点移到 D 点, 电场力做功多少?



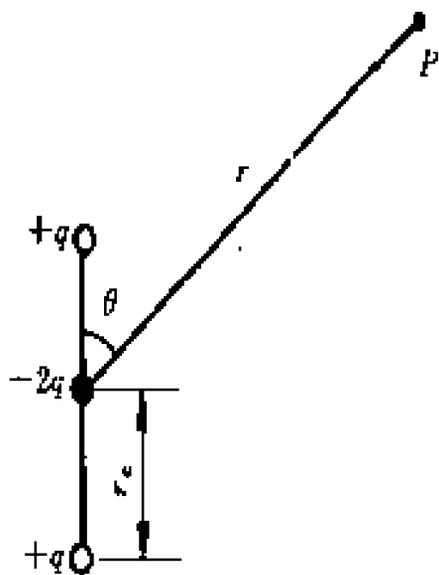
习题 8-33 图



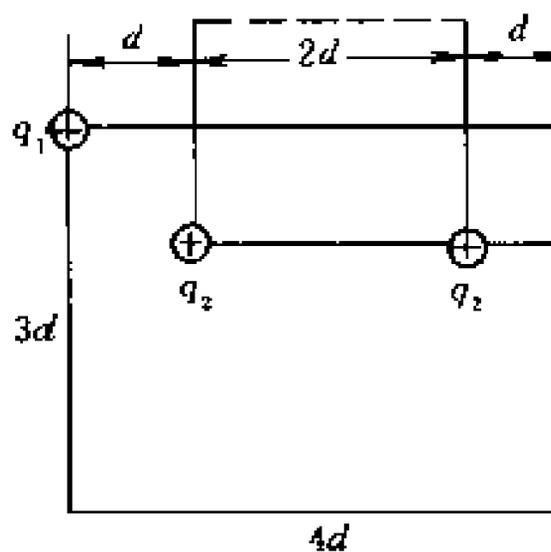
习题 8-34 图

8-34 点电荷 q_1 与 $-q_2$ 放置在相距为 d 的 A, B 两点(如图). 试证电势为零的等势面是一球面, 球心在 AB 的延长线上, $AO = \frac{q_1 d}{q_1^2 - q_2^2}$, 半径 $r =$

$$\frac{q_1 q_2 d}{q_1^2 - q_2^2}$$



习题 8-35 图



习题 8-37 图

8-35 试计算如图线性电四极子在很远处 ($r \gg r_0$) 的电势.

8-36 半径为 2 mm 的球形水滴具有电势 300 V . 求:

(1) 水滴上所带的电荷量;

(2) 如果两个相同的上述水滴结合成一个较大的水滴, 其电势值为多少 (假定结合时电荷没有漏失)?

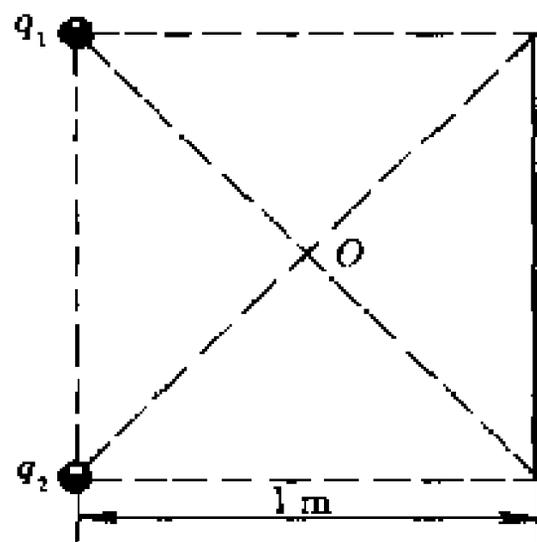
8-37 一边长为 $4d$ 和 $3d$ 的长方形的对角上放置电荷量为 $q_1 = 4 \mu\text{C}$ 的两个点电荷, 在边长为 $2d$ 和 d 的较小长方形的长边两端放置电荷量为 $q_2 = 6 \mu\text{C}$ 的两个点电荷, 求当小长方形绕大长方形的长边转到图中虚线所示位置时, 求外力反抗电场力所作的功, 设 $d = 0.1 \text{ m}$.

8-38 两个同心球面, 半径分别为 10 cm 和 30 cm . 小球面均匀带有正电荷 10^{-8} C , 大球面带有正电荷 $1.5 \times 10^{-8} \text{ C}$. 求离球心分别为 20 cm 、 50 cm 处的电势.

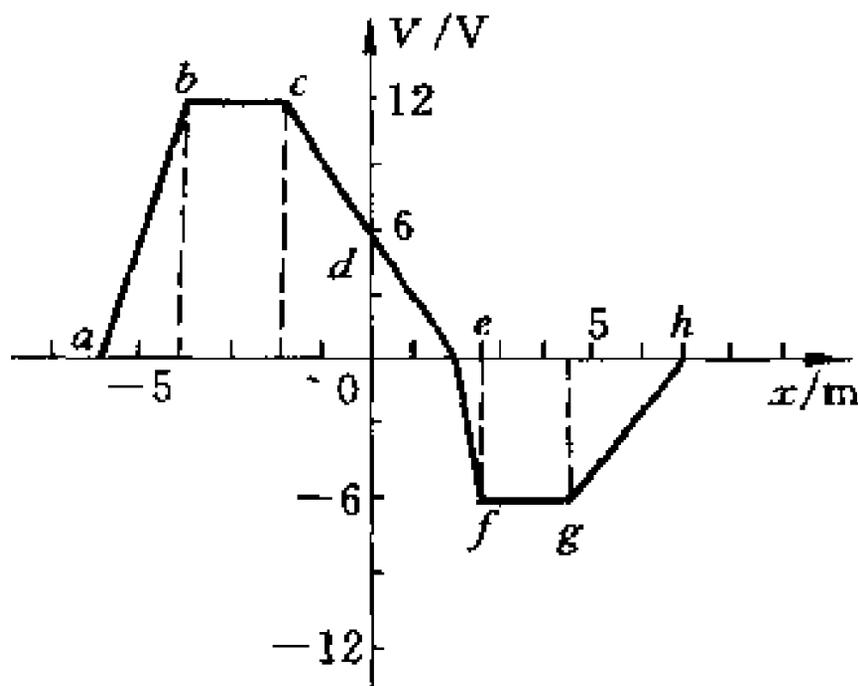
8-39 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内, 试证离球心 r 处 ($r < R$) 的电势为

$$V = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

8-40 如图所示, 在边长为 1 m 的正方形的左上角有一点电荷 $q_1 = 10^{-12} \text{ C}$, 左下角有一点电荷 $q_2 = -10^{-12} \text{ C}$, 电荷量为 $Q = 10^{-11} \text{ C}$ 的电荷均匀分在右边的细线上, 求正方形中心的电势.



习题 8-40 图



习题 8-41 图

8-41 设电势沿 x 轴的变化曲线如图所示, 试对所示各区间(忽略区间端点的情况)确定电场强度的 x 分量, 并作出 E_x 对 x 的关系图线.

8-42 一半径 $R = 8 \text{ cm}$ 的圆盘, 其上均匀带有面密度为 $\sigma = 2 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ 的电荷, 求:

(1) 轴线上任一点的电势(用该点与盘心的距离 x 来表示);

(2) 从场强和电势的关系求该点的场强;

(3) 计算 $x=6\text{ cm}$ 处的电势和场强.

8-43 在 x - y 平面上,各点的电势满足下式

$$V = \frac{ax}{x^2 + y^2} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

式中 x 和 y 为任一点的坐标, a 和 b 为常量, 求任一点电场强度的 E_x 和 E_y 两个分量.

8-44 一带电粒子经过加速电压加速后,其速度增大,已知电子的质量 $m = 9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}$, 电荷量绝对值 $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$.

(1) 假设电子质量与速度无关,把静止电子加速到光速要多高的电压?

(2) 若考虑电子质量随速度而变化,那么静止电子经过上述电压加速后,其速度是多少? 它是光速 c 的百分之几?

8-45 设 X 射线管中的一个电子,通过 180 kV 加速电压从阴极飞向阳极. 如果电子离开阴极时初速为零,试求电子到达阳极时的

(1) 动能及总能量;

(2) 速度;

(3) 按经典理论计算的速度.

8-46 一电偶极子放在均匀电场中,其电偶极矩与场强成 30° 角,场强的大小为 $2 \times 10^3\text{ V/m}$,作用在电偶极子上的力偶矩为 $5.0 \times 10^{-2}\text{ N} \cdot \text{m}$. 试计算其电偶极矩和电势能.

8-47 一电偶极子原来与一均匀电场平行,将它转到与电场反平行时,外力做功 0.1 J . 问当此电偶极子与场强成 45° 时,作用于它的力偶矩有多大?

8-48 一静电加速器中粒子束流的强度为 10^{-6} A ,用它轰击一靶,使靶的温度按 5 K/min 的速率升高,靶的质量为 10 g ,比热容为 $4.18 \times 10^2\text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$. 试求

(1) 加速器的加速电压;

(2) 每秒轰击靶的粒子数(每一粒子的电荷量为 $1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$);

(3) 如果粒子的质量为 $1.6 \times 10^{-27}\text{ kg}$,求粒子轰击靶面时的速度.

电子的发现和电子电荷量的测定

1. 电子的发现

远在公元前 600 年,人类就发现了摩擦起电现象,但是什么是电却一直没搞清楚.直到 19 世纪初叶,许多观测表明原子具有电特性的内部结构,同时法拉第(M. Faraday)在研究液体中电的传导时(1833 年),提出了著名的电解定律.电解定律定量表述如下:

电解 1 mol 的任何单价物质,所需的电荷量都相同,约为 96 500 C.此数称为法拉第常数,用 F 表示, $F=96\ 500\ \text{C/mol}$.

也就是说,在 NaCl 溶液中析出 23 g Na^+ 和 35 g Cl⁻ 离子时,通过的电荷量为 96 500 C.而在 CuSO_4 溶液中析出 63.6 g Cu^{2+} 和 64 g SO_4^{2-} 离子,通过的电荷量为 $2 \times 96\ 500\ \text{C}$.因为 1 mol 离子数刚好等于阿伏加德罗常数 N_A ,所以

$$F = N_A e$$

这便是法拉第定律的表式.通过的电荷量可以精确地测定,所以 N_A 与 e 两者若能知其一,便可求出另一个,但在那时却无法测定其中任何一个量.1874 年,斯托尼(G. J. Stoney)利用分子运动论对 N_A 的估计值,算出 e 值约为 $10^{-10}\ \text{C}$.1880 年,汤森德(J. S. E. Townsend)指出, e 显然是一个不可再分割的电荷量的最小单元,最先明确地表明了电荷的量子性概念.1891 年,斯托尼曾提议用“电子”来命名电荷量的最小单元.

1896 年,塞曼(P. Zeeman)观察到原子所发的光在强磁场内的分裂现象.经典理论认为原子的光谱是由原子中的带电粒子振荡产生的,当该原子处在磁场中时,每一条谱线将分裂为三条谱线,裂距的大小由振荡粒子的比荷而定,这是原子粒子具有确定比

荷 $\frac{e}{m}$ 的最早证据. 塞曼还根据谱线的偏折推断出振荡粒子带的是负电.

19 世纪末, 由于寻找新型光源, 促进了真空技术的发展, 当时有许多科学家从事稀薄气体放电现象的研究.

在一个能抽空的玻璃管内, 封装一个阴极和阳极, 两极间加高压电, 随着管内气压降低, 管内发生放电现象. 当管内真空度达到某一程度, 在管内出现一种看不见的射线, 称为阴极射线. 这种射线是什么, 当时有两个看法: 一认为这种射线与光线相似; 二认为它是带电的粒子流. 几年以后, 佩兰 (J. B. Perrin) 于 1895 年成功地把这些射线收集到一架静电计上, 断定它们是带负电的. 两年后, 汤姆孙 (J. J. Thomson) 于 1897 年又在前人工作的基础上, 改进实验装置, 并利用磁场对带电粒子的偏转, 再次证明射线是带负电的, 还测得其比荷为

$$\frac{e}{m} \approx 1.7 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

其后, 汤姆孙又用各种不同气体充入管内, 并用多种金属作为阴极重复该实验, 在实验精确度内, 总是获得相同的比荷 $\frac{e}{m}$. 这证实了从阴极发射出来的粒子对一切金属都是相同的, 并确定它是组成一切元素原子的基本部分. 汤姆孙称这些微粒为电子, 它带有一单位的电荷量 e , 其质量约比氢原子小 2 000 倍. 汤姆孙首先从实验上获得电子特性的信息, 电子是 20 世纪发现的第一个基本粒子, 然而, 1906 年汤姆孙获得诺贝尔物理学奖, 只是表彰他在气体导电的理论和比荷测定方面的成就, 并没有提到他对发现电子所作的贡献.

2. 密立根 (R. M. Millikan) 油滴实验

汤姆孙测定了电子的比荷 $\frac{e}{m}$ 后, 紧接着便要进行电荷量 e 值的测量. 这些实验首先由汤森德在 1897 年完成, 他所用的方法后来由汤姆孙和威耳逊作了改进, 但因所用方法中一些不确定因素

的限制,测量结果的精确度不高,但他们巧妙的实验构思,可以说是密立根油滴实验的先导.

图 F-1 是密立根油滴实验装置的原理图,一圆板状平行板电容器,上板中间开一小孔,由喷雾器向小孔注射油滴,利用 X 射线或其他放射源使两板间的空气电离,当油滴与空气离子相接触时,其上便可带有正电或负电.油滴的大小(线度)约为 10^{-7} m.

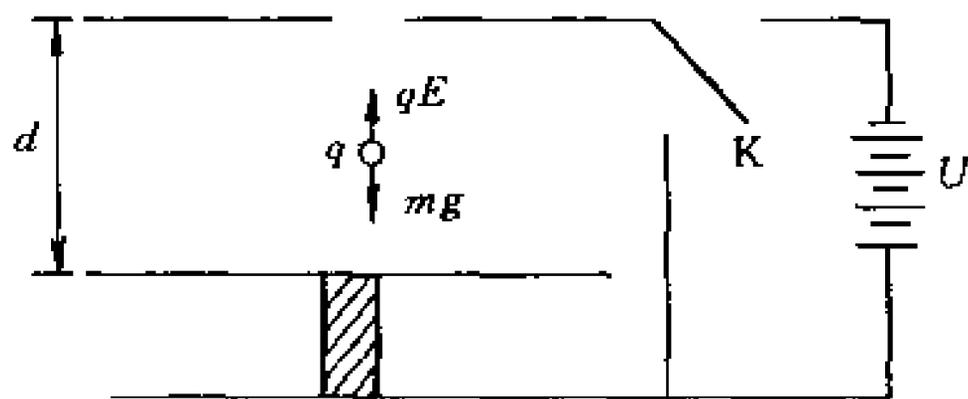


图 F-1

当极板不带电时,板间无电场,油滴受向下的重力 mg 及向上的粘滞力 F 的作用.粘滞力由斯托克斯(Stokes)定律给出为 $F = 6\pi\eta rv$,式中 r 为油滴半径, η 为流体的粘度, v 为下降速度.当两力平衡时,油滴以终极速度 v_t 匀速下降,即

$$mg = 6\pi\eta rv_t$$

当极板带电时,油滴还要受到一向上的电场力 qE ,三力平衡时

$$qE - mg = 6\pi\eta rv_E$$

式中 v_E 是板间有电场时油滴的终极速度.油滴的质量 $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ (ρ 是油滴的密度,并假定油滴中无空气),电场强度 $E = \frac{U}{d}$ (U 为两极板上的电压),将以上两式中的 r 消去得

$$q = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9\eta}{2} \right) \left(\frac{v_t}{\rho} \right) (v_E + v_t) \frac{U}{d}$$

密立根测定了几千个油滴所带的电荷量,发现它们所带的电荷量恒定为某基本电荷量 e 的整数倍,也就是说,电荷不可以无限地分

割,它只能以 e 的大小为单位存在于自然界中——电荷的量子性,这就是电子的电荷量.1923年密立根由此获得了诺贝尔物理学奖.密立根实验测得的 e 值为

$$e = (1.600 \pm 0.002) \times 10^{-19} \text{ C}$$

这和用其他实验所测结果相符.目前公认值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

近10年来,人们又在重做油滴实验,企图寻找分数电荷值.

第九章 导体和电介质中的静电场

前一章我们讨论的是真空中的静电场,即空间除了确定的电荷分布外,在电场中不存在由原子、分子构成的其他物质.实际上电荷总是分布在物体上,电场中也总是有其他物体存在.如按导电能力来划分,大致可把物体分为两类:导电能力极强的物体叫做导体;导电能力极微弱或者不能导电的物体叫做绝缘体或电介质.导体和绝缘体有着完全不同的静电特性,在工业上和科学实验中,静电现象的一切应用,实质上是导体和电介质静电特性的运用.因此,研究导体和电介质的静电特性以及导体和电介质内外电场分布的图象,具有很重要的实际意义.本章将讨论静电场中有金属导体和电介质存在时的各种问题,并介绍几个新的物理量,最后讨论静电场的能量,从一个侧面来反映电场的物质性.

§9-1 静电场中的导体

1. 导体的静电平衡

金属由许多小晶粒组成,每个晶粒内的原子作有序排列而构成晶格点阵.当组成晶体时,每个原子中最外层的价电子都不再属于某个原子,而成为所有原子共有并在晶体中作共化运动的自由电子群,使留在点阵上的原子成为带正电的离子.所以,金属导体在电结构方面的重要特征是具有大量的自由电子.当导体不带电、也不受外电场的作用时,金属导体中大量的自由电子和晶格点阵的正电荷相互中和,整个导体或其中任一部分都是呈电中性的.这时,在导体中正负电荷均匀分布,除了微观热运动外,没有宏观电

荷运动. 当把一个不带电的导体放入静电场, 在最初极短暂的时间内(约 10^{-6} s 的数量级), 导体内会有电场存在. 这个电场将驱使导体内的自由电子相对于晶格点阵作宏观的定向运动, 从而引起导体中正负电荷的重新分布, 结果使导体的一端带正电荷, 另一端带负电荷. 这就是大家熟知的静电感应现象. 另一种情况是使原来电中性的导体带上电荷, 在刚带上电荷的瞬间, 这些电荷在导体内部激发电场, 这个电场驱使导体中的自由电子作宏观的定向运动, 也会引起导体中的电荷重新分布. 不论是哪种情况, 电荷的宏观运动(短暂电流)是要消耗能量的, 如果没有外界能源不断提供能量, 电子就不可能继续维持其宏观定向运动, 而很快地停止下来, 电荷重新分布的过程也随之结束. 我们把导体中没有电荷作任何宏观定向运动的状态称为静电平衡状态.

显然, 只有当导体中任意一个自由电子所受到的合力为零时, 它才不作宏观的定向运动. 在只有静电力作用时, 静电力 $F = eE_i$, 当 $F = 0$ 时, 一定是导体内任一点的场强 $E_i = 0$. 因此, 导体静电平衡的必要条件就是导体内任一点的电场强度都等于零. 否则, 导体内自由电子的定向运动就会持续下去, 那就不会是静电平衡了.

如图 9-1 所示, 我们将一块导体板放入一均匀电场中, 电场将深入到导体内部, 方向自左向右, 如图 9-1(a) 中的 E . 由于 E 的存在, 将驱使导体中的自由电子向左作宏观定向运动, 结果使导体的左端带负电, 右端带正电, 这些正、负电荷在导体内激发电场 E' , 方向和 E 相反, 如图 9-1(b) 所示. 只要 E' 还不足以将 E 完全抵消, 导体内自由电子的定向运动就不会停止, 直至 E' 增大到使导体内的合场强 $E_i = E + E' = 0$ 时, 自由电子的宏观定向运动才完全停止, 如图 9-1(c). 这就是上述导体在静电场中静电感应的过程.

从上面的分析可知, 不管原来的电场分布如何, 放进该电场的导体, 在达到静电平衡时, 它内部的场强都等于零. 但这并不意味着外电场不进入导体内部, 而是进入导体内部的外电场被导体在静电感应时出现的感应电荷所激发的电场抵消. 一般地说, 由于导

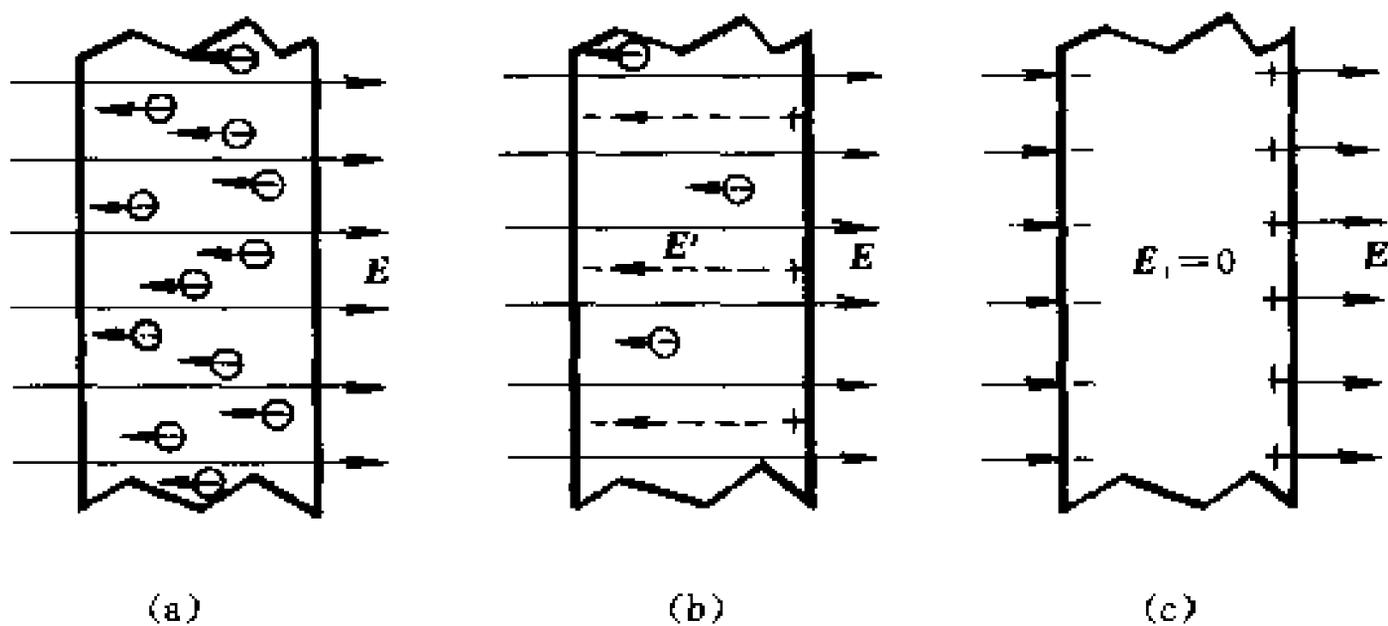
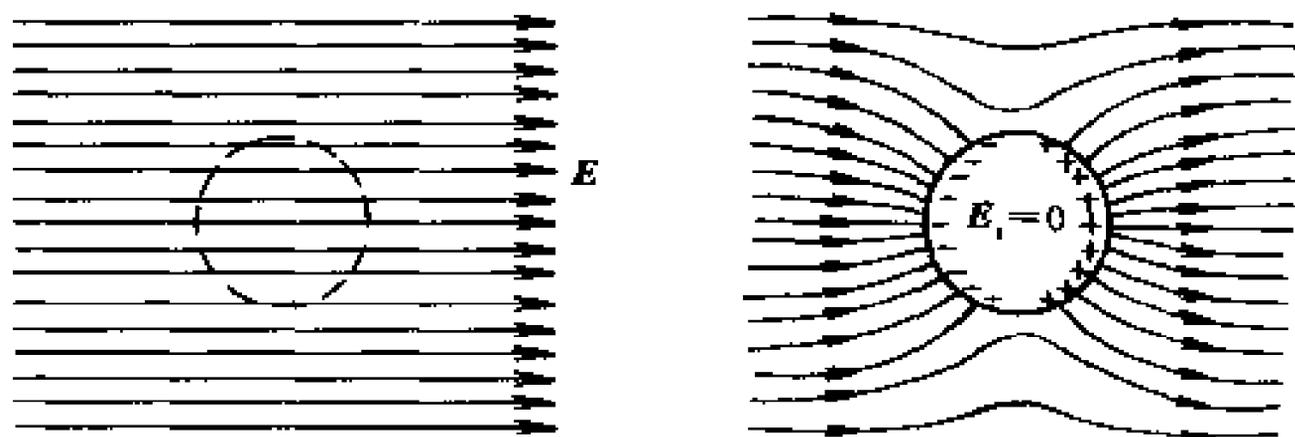


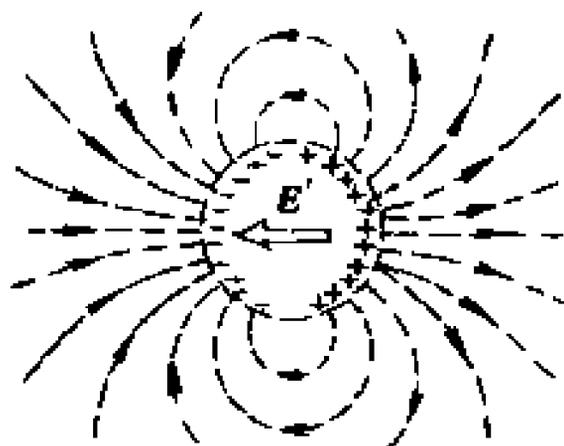
图 9-1 导体的静电平衡

体上出现了感应电荷,也将对原来的外电场施加影响而改变其分布,图 9-2 表明了外电场和感应电荷所激发的电场叠加后的分布情况.



(a)原来的匀强电场(图中虚线区域表示将放入一球形导体)

(b)球形导体放入后的电场情况(导体内部 $E_i=0$,导体外面电场也和原来的不一样了,离导体很远处可认为仍是原来情况)



(c)表示图(b)中左、右两半球上的负、正感应电荷在球内和球外激发的电场情况,图(b)中的场强分布相当于(a)、(c)两图电场的叠加

图 9-2 电场中的球形导体

根据导体静电平衡的条件,还可直接得出以下的推论.

(1) 导体是等势体,其表面是等势面;

这是因为在导体内任一点的 $-\text{grad } V = E = 0$,即导体内各点电势的空间变化率都等于零,这就是说导体内各点的电势都相等.

(2) 导体表面的场强垂直于导体表面.

因为在静电平衡时,导体表面的场强可能不等于零,但它必须和其表面垂直,否则,如图 9-3 所示,场强将有沿表面的切线分量 E_t ,那么,导体表面层内的自由电子将在 E_t 的作用下沿表面运动,从而破坏了静电平衡,所以,只有表面的场强 E 垂直于导体表面时,才能达到静电平衡状态.或者从电场线与等势面的关系出发,也可知导体表面的场强必与它的表面垂直.

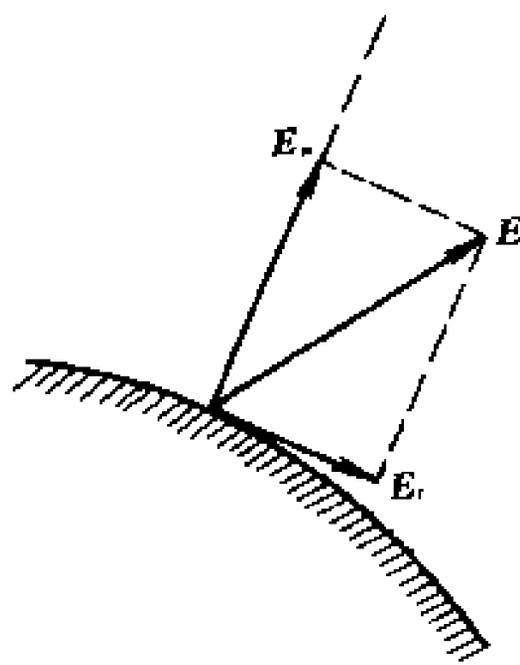


图 9-3 论证导体处于静电平衡状态下导体表面的场强必和表面垂直

2. 导体上的电荷分布

当带电导体处于静电平衡状态时,导体上电荷分布的规律可以从高斯定理等直接推出,考虑一个任意形状的实心导体,如图 9-4(a)所示.在导体内任取一点 P ,围绕它任作一闭合曲面 S ,因为在这个封闭曲面上任一点的场强都等于零,根据高斯定理可知,通过这一封闭曲面的 E 通量等于零,因此在这一封闭曲面内没有净电荷.由于 P 点是任意的,所取闭合曲面也可以作得任意地小,上述结论对于导体内部任一点都是正确的,所以我们可作下述结论:当带电导体处于静电平衡状态时,导体内部处处没有净电荷存在,电荷只能分布于导体的表面上.

如果带电导体内部有空腔存在[图 9-4(b)],而且在空腔内没有其他带电体,可以证明不仅导体内部没有净电荷,而且在空腔的

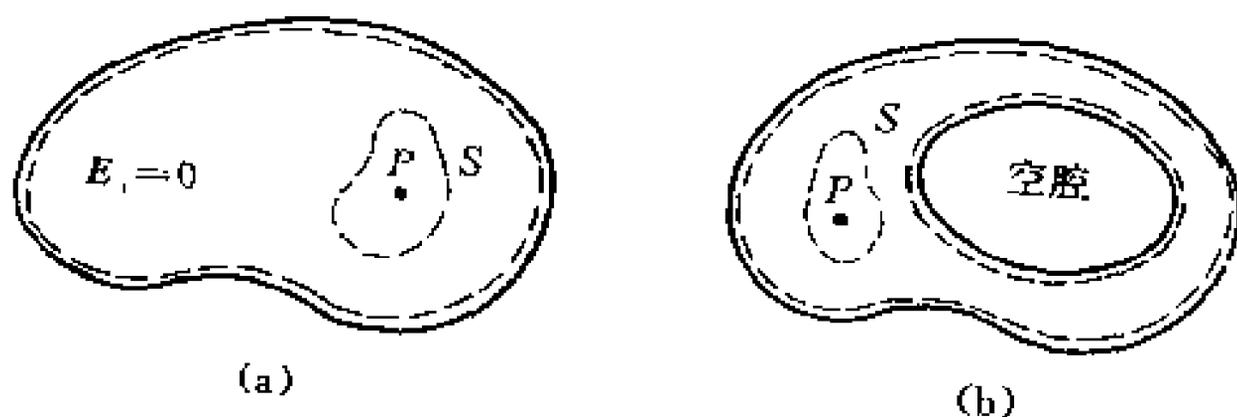


图 9-4 论证导体静电平衡时电荷只能分布在导体的表面上

内表面上处处也不能有净电荷存在, 电荷只能分布在导体的外表面上.

由高斯定理还可以求出导体表面附近的场强与该表面处电荷面密度的关系. 在导体表面外无限靠近表面处任取一点 P , 过 P 作导体表面的外法线单位矢量 e_n , 如图 9-5 所示, 则 P 点的场强为

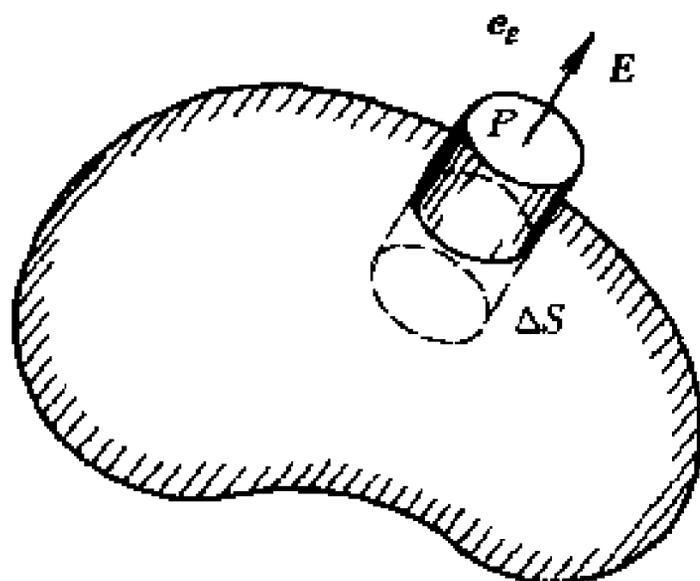


图 9-5 带电导体表面附近的场强和该表面处电荷面密度的关系

$E = Ee_n$. 在 P 点附近的导体表面上取面积元 ΔS , ΔS 取得足够小, 可以认为该面元上的电荷面密度是均匀的. 围绕 ΔS 作一个扁平的圆柱形闭合面, 使圆柱的轴线垂直于导体表面, 而它的上下两个底面则与导体表面平行, 上底面在导体表面以外并通过 P 点, 下底面在导体表面以内. 由于导体表面的场强与表面垂直, 圆柱面的侧面与场强方向平行, 所以通过侧面的 E 通量为零; 又因导体内部场强为零, 通过下底面的 E 通量也为零, 所以通过该闭合曲面的总 E 通量就等于通过圆柱面上底面的 E 通量, 应用高斯定理得

$$\oiint E \cdot dS = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

则
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

写成矢量式为

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_n} \quad (9-1)$$

上式表明带电导体表面附近的场强与该表面的电荷面密度成正比,场强方向垂直于表面,这一结论对于孤立导体(孤立导体是指远离其他物体的导体,因而其他物体对它的影响可以忽略不计)或处在外电场中的任意导体都普遍适用.但在理解式(9-1)时必须注意,导体表面附近的场强 E 不单是由该表面处的电荷所激发,它是导体面上所有电荷以及周围其他带电体上的电荷所激发的合场强,外界的影响已在 σ 中体现出来.例如,一个半径为 R 的孤立导体球,带有电荷量 q ,则在球外侧 P 处的场强的大小为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,显然, E 是整个球面上的电荷所激发的.如果在这导体球邻近再放置一个电荷量为 q_1 的点电荷,这时 P 点的场强就由 q 、 q_1 以及 q_1 在球面上的感应电荷共同激发,在 P 点的场强(设为 E')和邻近 P 点球面上的电荷面密度(设为 σ')都有了变化,尽管如此,但它们仍满足 $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ 的关系.

下面,我们来简单讨论一下电荷在导体表面上分布的规律.一般说来,电荷在导体表面上的分布不但和导体自身的形状有关,还和附近其他带电体及其分布有关.但是,对于孤立的带电导体来说,电荷在其表面上的分布却全由自身的形状所决定.要定量研究这个问题是比较复杂的,但根据实验现象的分析,可以定性得出孤立带电导体上电荷分布的规律如下:对于形状不规则的带电导体来说,电荷在它的外表面上的分布是不均匀的,它与导体表面的曲

率有关,在导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大),电荷面密度较大;在表面平坦的地方(曲率较小),电荷面密度较小;在表面凹进去的地方(曲率为负),电荷面密度更小.只有孤立球形导体,因各部分的曲率相同,球面上的电荷分布才是均匀的.考察下面例子,可使我们粗略地认识导体表面电荷面密度和曲率的关系.

例题 9-1 两个半径分别为 R 和 r 的球形导体($R > r$),用一根很长的细导线连接起来(图 9-6),使这个导体组带电,电势为 V ,求两球表面电荷面密度与曲率的关系.

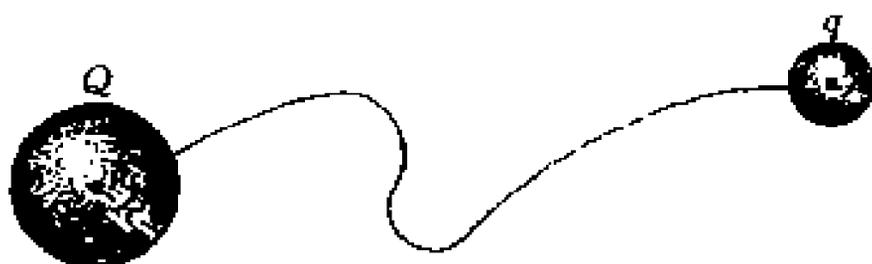


图 9-6 论证带电导体上的电荷面密度与曲率的关系

解 两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系,在静电平衡时有一定的电势值.设这两个球相距很远,使每个球面上的电荷分布在另一球处所激发的电场可以忽略不计.细线的作用是使两球保持等电势,而细线上少量的电荷在两球处所激发的电场影响也可以忽略.因此,每个球又可近似地看作为孤立导体,在两球表面上的电荷分布各自都是均匀的.设大球所带电荷量为 Q ,小球所带电荷量为 q ,则两球的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

得
$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

可见大球所带电荷量 Q 比小球所带电荷量 q 多.

因为两球的电荷面密度分别为

$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

所以
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{Qr^2}{qR^2} = \frac{r}{R}$$

可见电荷面密度和曲率半径成反比,即曲率半径愈小(或曲率愈大),电荷面密度愈大.

当两球相距不远时,两球所带电荷的相互影响不能忽略,这时每个球都不能看作是孤立导体,两球表面上的电荷分布也不再均匀.于是,同一球面上各处的曲率虽相等,而电荷面密度却不再相同.因此,电荷面密度与曲率半径成反比并不是一个普适的结论.

上例所得结论在生产技术上十分重要.由式(9-1)知,带电导体表面处的场强是和电荷面密度成正比的,因此在导体表面上曲率较大的部分,场强也比较大.对于具有尖端的带电导体,无疑在尖端处的场强特别强.在导体的尖端附近,由于场强很大,当达到一定量值时,空气中原有残留的离子在这个电场作用下将发生激烈的运动,并获得足够大的动能与空气分子碰撞而产生大量的离子.其中和导体上电荷异号的离子,被吸引到尖端上,与导体上的电荷相中和,而和导体上电荷同号的离子,则被排斥而离开尖端,作加速运动.这种使得空气被“击穿”而产生的放电现象称为尖端放电.避雷针就是根据尖端放电的原理制造的,当雷电发生时,利用尖端放电原理使强大的放电电流从和避雷针连接并接地良好的粗导线中流过,从而避免了建筑物遭受雷击的破坏.

尖端放电现象在高压输电网的导线上及一些高压设备中也常出现(又称电晕).由于尖端放电,使输电线上大量电荷漏失于空气中,造成电能的浪费,为了避免这种损失,可采用表面光滑的粗导线.带电的高电势仪器,也必须把金属部件都做成光滑的球形表面,以保证仪器能处于正常的高电势的工作状态.在出现电晕现象的电场中,不仅有离子在运动,大气中的中性微尘由于有离子附着在它们上面而带电,也能在电场中作定向运动.“静电喷漆”就是利用电晕原理使漆雾微粒带电而喷射到工件上;在工厂也利用这个原理制成除尘器来除去大气中的有害粉尘.

§ 9-2 空腔导体内外的静电场

上一节我们讨论了处在静电平衡状态时导体的静电特性,现在我们来定性讨论空腔导体内外静电场的分布.

1. 空腔导体内外的静电场

在上一节中曾提到过,不管空腔导体是自身带电还是处在外电场中,当静电平衡时,空腔的内表面上没有面电荷分布,现在就这个问题作进一步论证.为此我们在导体内部作一包围内表面的闭合曲面,按静电平衡的条件,在该面上的场强处处为零,因此,通过该面的 E 通量也为零,由高斯定理可知闭合曲面内的净电荷量为零,但仅仅从高斯定理并不能判断空腔内表面上是否有等量异号的正负电荷分布.为了再论证这个问题,还必须借助于其他定理.

设空腔内表面上一部分带正电,另一部分带有等量的负电荷,则空腔内必定有电场线从正电荷出发终止于负电荷,如图 9-7 所示.现取一闭合路径 L ,路径的一段沿电场线穿过空腔,另一段经

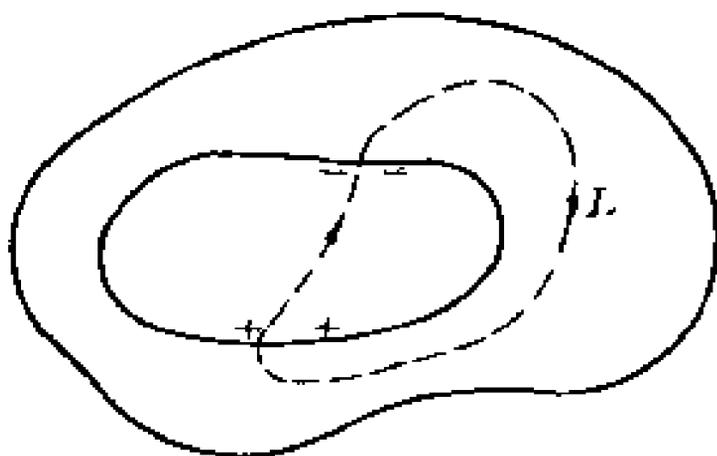


图 9-7 导体空腔内表面无电荷分布

导体内部返回起始点,场强沿此闭合路径的积分为

$$\oint E \cdot dl = \int_{\text{沿电场线}} E \cdot dl + \int_{\text{导体内}} E \cdot dl$$

在静电平衡时,导体内的场强 $E=0$,沿导体内部一段的线积分为零;沿电场线一段的线积分可正可负,但不会等于零.于是我们将得到

$$\oint E \cdot dl \neq 0$$

的结论,这是和静电场的基本特性——场强的环流恒等于零相矛盾的.由此可得,在静电平衡状态下,导体空腔内各点的场强等于零,空腔的内表面上处处没有电荷分布.

在空腔导体外面的空间里总有电场存在,其电场分布由空腔导体外表面上的电荷分布及导体外其他带电体的电荷分布共同决定.

总之,当导体空腔处在外电场中时,空腔导体外的带电体,只会影响空腔导体外表面上的电荷分布并改变空腔导体外的电场分布,而且这些电荷重新分布的结果,最终是使导体内部及空腔内的总场强等于零(图 9-8).

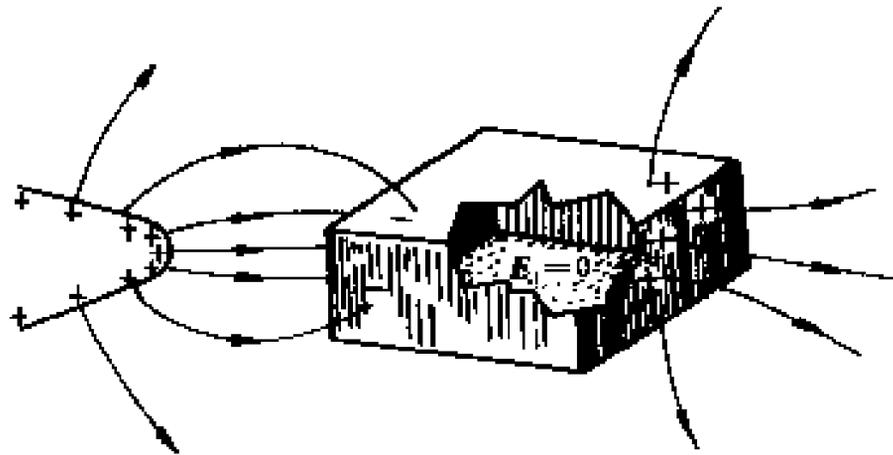


图 9-8 空腔内的场强等于零

若导体腔中放有带电体 A,如图 9-9(a)所示.这时由于静电感应,当导体在静电平衡时,可以证明在金属腔 B 的内外表面上分别出现和 A 所带电荷等值异号和等值同号的感应电荷(想想看,该如何证明?).这时,腔内出现由带电体 A 及腔内表面上的电荷分布所决定的电场,这个电场与导体外其他带电体的分布无关.这就是说,导体空腔外的电荷(包括空腔导体外表面上的电荷)对导

体腔内的电场及电荷分布没有影响。

在上述情况中,空腔导体外无其他带电体时仍可能有电场存在,它是腔内的带电体 A 通过在腔外表面感应出等量同号的电荷所激发的,电场全由空腔导体表面上电荷分布所决定与腔内情况无关,腔内带电体 A 放在腔内不同位置上,它只会改变腔内表面上的电荷分布,绝对不会改变导体外表面上的电荷分布及腔外的电场分布(即电荷 A 及空腔内表面的感应电荷在导体外所激发的合电场恒为零)。当把空腔导体接地时,如图 9-9(b),则导体外表

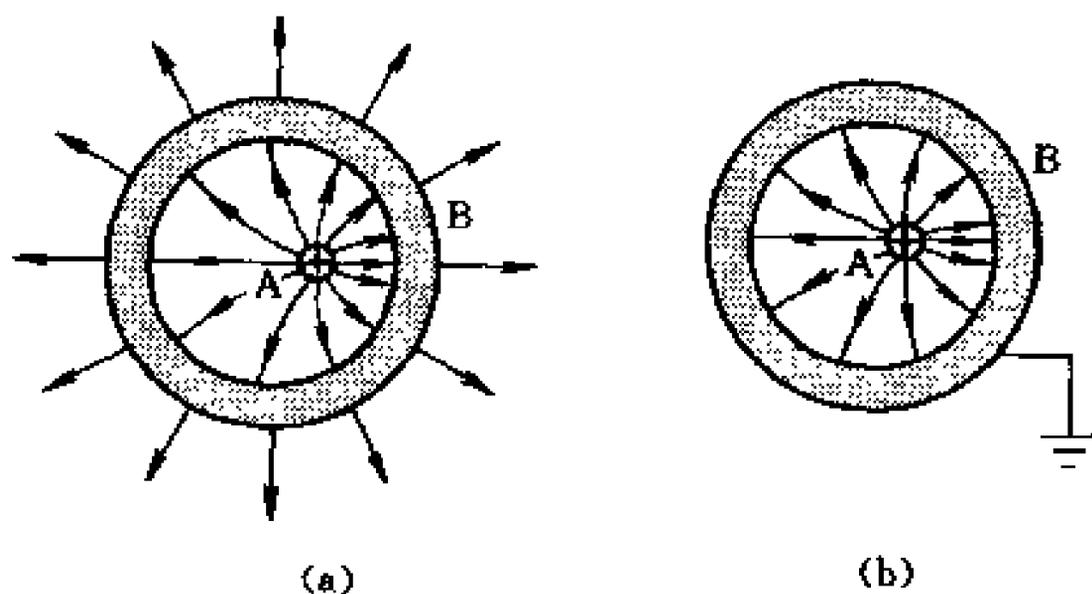


图 9-9 腔内有带电体时腔内外的电场分布

面上的感应电荷因接地而被中和,空腔导体外相应的电场也随之消失。

2. 静电屏蔽

综合以上的讨论,可归纳如下:在静电平衡状态下,空腔导体外面的带电体不会影响空腔内部的电场分布;一个接地的空腔导体,空腔内的带电体对腔外的物体不会产生影响。这种使导体空腔内的电场不受外界的影响或利用接地的空腔导体将腔内带电体对外界的影响隔绝的现象,称为静电屏蔽。这里“隔绝”的实质是:导体外(内)表面上的感应电荷抵消了外(内)部带电体在腔内(外)空间激发的电场。

静电屏蔽的原理在生产技术上有许多应用. 例如, 为了避免外界电场对设备中某些精密电磁测量仪器的干扰, 或者为了避免一些高压设备的电场对外界的影响, 一般都在这些设备外边安装有接地的金属制外壳(网、罩). 传送弱讯号的连接导线, 为了避免外界的干扰, 往往在导线外包一层用金属丝编织的屏蔽线层.

例题 9-2 在内外半径分别为 R_1 和 R_2 的导体球壳内, 有一个半径为 r 的导体小球, 小球与球壳同心, 让小球与球壳分别带上电荷量 q 和 Q . 试求:

- (1) 小球的电势 V_r , 球壳内、外表面的电势;
- (2) 小球与球壳的电势差;
- (3) 若球壳接地, 再求小球与球壳的电势差.

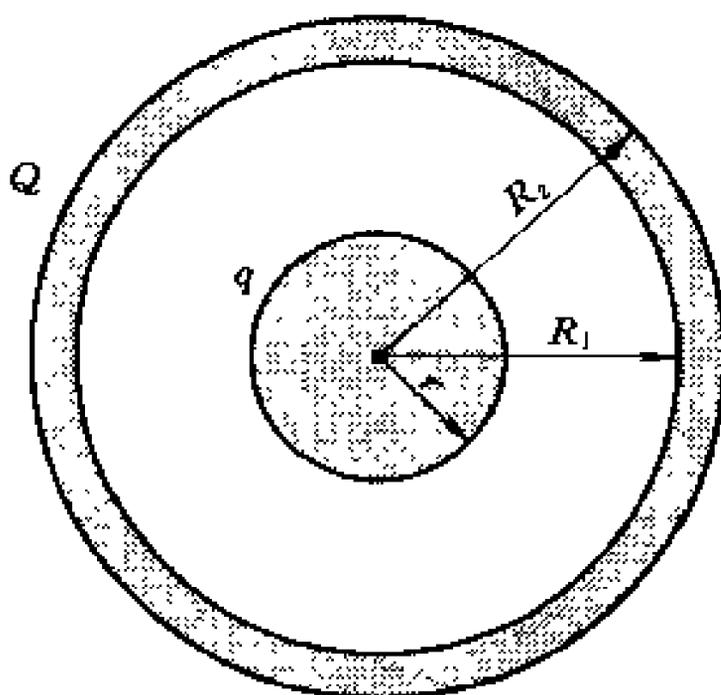


图 9-10 带电球壳包围带电小球

解 (1) 由对称性可以肯定, 小球表面上和球壳内外表面上的电荷分布是均匀的. 小球上的电荷 q 将在球壳的内外表面上感应出 $-q$ 和 $+q$ 的电荷, 而 Q 只能分布在球壳的外表面上, 故球壳外表面上的总电荷量为 $q+Q$.

由例题 8-13 的结果可以得到, 小球和球壳内外表面的电势分别为

$$V_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right)$$

$$V_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

球壳内外表面的电势相等.

(2) 两球的电势差为

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

(3) 若外球壳接地, 则球壳外表面上的电荷消失. 两球的电势分别为

$$V_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$V_{R_1} = V_{R_2} = 0$$

两球的电势差仍为 $V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$

由以上计算结果可以看出, 不管外球壳接地与否, 两球的电势差恒保持不变. 而且, 当 q 为正值时, 小球的电势高于球壳的电势; 当 q 为负值时, 小球的电势低于球壳的电势. 这后一结论与小球在壳内的位置无关, 如果两球用导线相连或小球与球壳相接触, 则不论 q 是正是负, 也不管球壳是否带电, 电荷 q 总是全部迁移到球壳的外表面上, 直到 $V_r - V_R = 0$ 为止.

§ 9-3 电容器的电容

1. 孤立导体的电容

导体静电平衡特性之一是导体面上有确定的电荷分布, 并具有一定的电势值. 从理论及实验上可知, 一个孤立导体的电势 V

(选无限远处为电势的零点)与它所带的电荷量 q 呈线性关系,这表明了这样一种叠加性:若导体上的电荷量增加几倍,导体面上的电荷分布状态不变,只是各处的电荷面密度相应地增加同样的倍数,导体的电势值也随之增加到同样的倍数.因此,导体的电势 V 与它所带电荷量间的关系,可以写成

$$\boxed{\frac{q}{V} = C} \quad (9-2)$$

式中比例常量 C 称为孤立导体的电容,它只与导体的大小和形状有关,是表征导体储电能力的物理量,其物理意义是:使导体升高单位电势所需的电荷量.对一定的导体,其电容 C 是一定的.例如,一个半径为 R 的孤立球形导体的电容为

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

在国际单位制中,电荷量的单位是 C,电势差的单位是 V,电容的单位由式(9-2)规定,称为法拉(F), $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.在实际应用中,法拉这个单位太大,往往要用较小的分数单位,例如,在无线电技术中常用微法(μF)、皮法(pF)作为电容的单位.

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{ pF}$$

2. 电容器的电容

孤立导体是指远离其他物体的导体,是很难实现的一种理想化情况.实际上,在一个带电导体附近,总会有其他物体存在,在这种情况下,该导体的电势不但与自身所带的电荷量有关,还取决于附近导体的形状和位置以及其上的带电状况.这时,一个导体的电势 V 与它自身所带电荷量 q 间的正比关系不再成立,这种情况就不再谈单个导体的电容 C 了.为了消除其他导体的影响,可采用静电屏蔽的原理,用一个封闭的导体壳 B 将导体 A 包围起来(图 9-11),这样就可以使由导体 A 及导体壳 B 构成的一对导体不再受到壳外导体的排列及带电状态的影响.一般说来,壳外的带电

体及壳外导体表面上的感应电荷会改变导体 A 和导体壳 B 的电势值(如果 B 接地,就不会改变导体 A 的电势),但不会改变导体 A 与 B 的电势差 $V_A - V_B$. 显然,导体壳 B 内表面上的感应电荷量与导体 A 上所带电荷量 q_A 等值异号,因为从例题 9-2 的结果中知道,小球和球壳间的电势差只与小球上所带电荷量成正比,这个结论与导体的形状无关. 为此,我们把由导体 B 和壳内导体 A 构成的一对导体系称为电容器. 一般总使电容器中 A、B 两导体(称极板)的相对表面上带等量异号电荷 $\pm q$, 在两导体的电势差 $U_{AB} = V_A - V_B$ 时,将比值

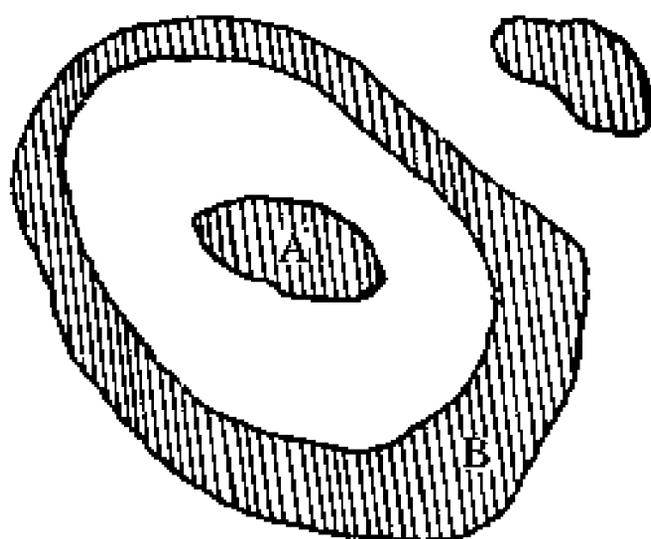


图 9-11 导体 A 和导体壳 B 组成一电容器

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} \quad (9-3)$$

定义为它的电容,其值只取决于两极板的大小、形状、相对位置及极板间电介质的电容率,在量值上等于两导体间的电势差为单位值时极板上所容纳的电荷量,式(9-3)中的 q 为任一极板上电荷量的绝对值.

实际上,对其他导体的屏蔽并不要象图 9-11 那样严格,通常是用两块非常靠近的、中间充满电介质(例如空气、蜡纸、云母片、涤纶薄膜、陶瓷等)的金属板(箔或膜)构成. 这样的装置使电场局限在两极板之间,不受外界的影响,从而使电容具有固定的量值.

下面计算几种常见的真空电容器的电容.

(1) 平行板电容器

最简单的电容器是由靠得很近、相互平行、同样大小的两片金属板组成的平行板电容器(图 9-12). 设每块极板的面积为 S , 两极板内表面间的距离为 d , 且板面的线度远大于两极板内表面间的距离. 若电容器充电后, A 板带正电 $+q$, B 板带负电 $-q$, 由于板面很大而两极板间的距离很小, 所以除了两板的边缘部分外, 电荷是均匀分布在两极板内表面上的, 其电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$, 即 $\sigma = \frac{q}{S}$, 且在两极板间形成匀强电场, 其场强的大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

此时, 两极板间的电势差为

$$U_{AB} = V_A - V_B = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

于是, 根据电容的定义, 求得平行板电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (9-4)$$

由上式可知, 平行板电容器的电容 C 和极板的面积 S 成正比, 和两极板内表面间的距离 d 成反比, 而和极板上所带的电荷量无关. 说明当两极板间为真空时, 电容 C 只和电容器本身的几何结构有关. 式(9-4)指明, 增加平行板电容器极板的面积, 减小两极板间的距离, 则它的电容就增大. 在实用上, 常用改变极板相对面积的大小或改变极板间距离的方法来改变电容器的电容. 可在一定范围内改变其电容值的电容器叫做可变电容器, 图 9-13 中是几种常用的可变电容器和半可变电容器, 它们广泛地应用于电子设备(例如收音机的频率调谐电路)中.

(2) 圆柱形电容器

圆柱形电容器是由两个同轴金属圆柱筒(面)组成的. 设两圆柱面的长度为 l , 半径分别为 R_A 和 R_B (图 9-14), 当 $l \gg (R_B - R_A)$ 时, 则可将两端边缘处电场不均匀性的影响忽略. 在这样的条件

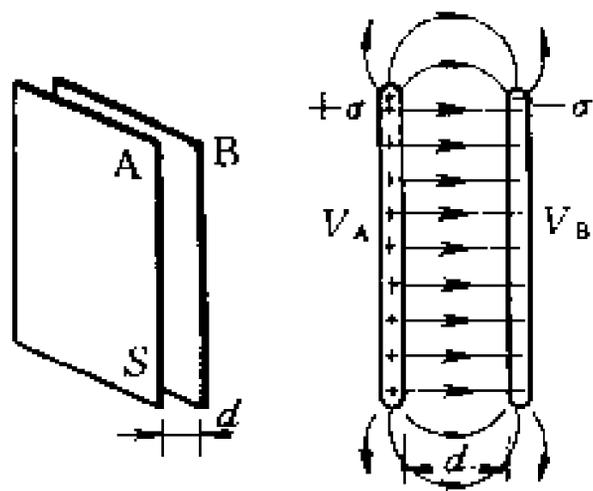


图 9-12 平行板电容器

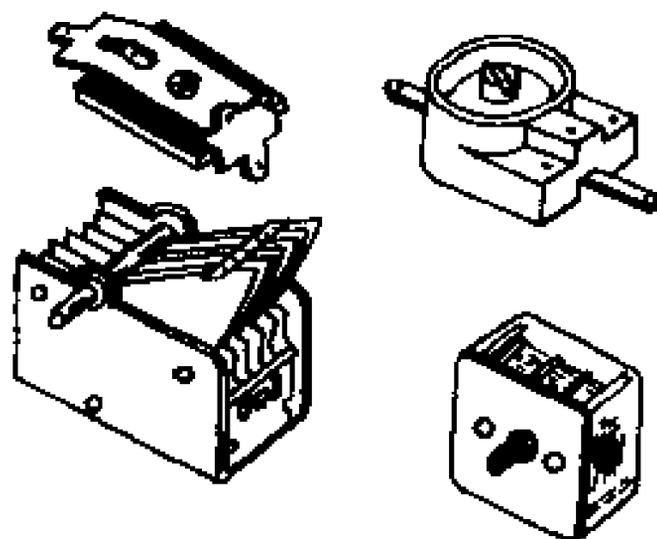


图 9-13 可变电容器

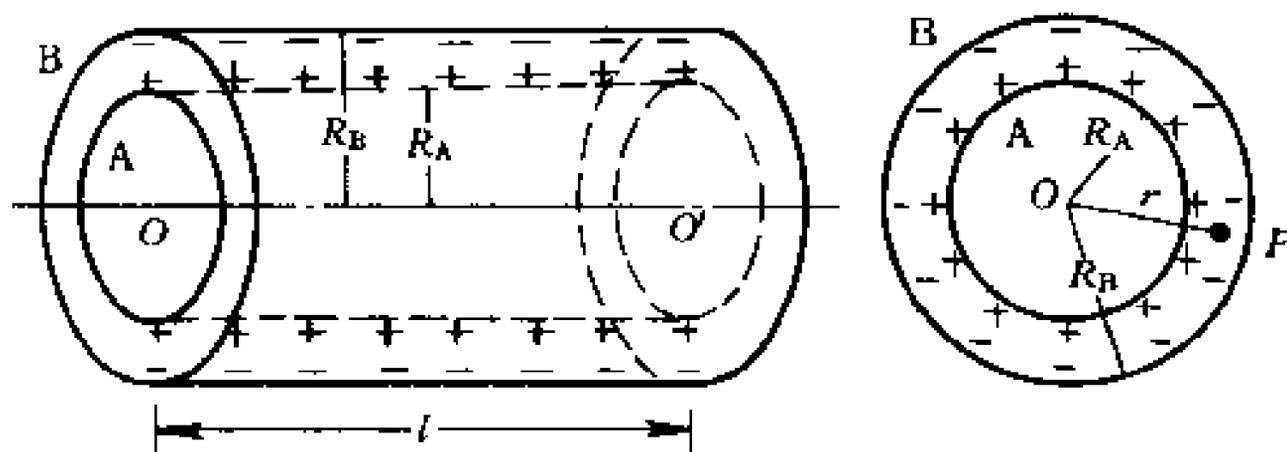


图 9-14 圆柱形电容器

下,当两圆柱面带电后,电荷将均匀分布在内外两圆柱面上,这时两圆柱面间的电场具有轴对称性,并且在很大程度上不受外界的影响.设内圆柱面带电 $+q$,外圆柱面带电 $-q$,这时圆柱面单位长度上的电荷量为 $\lambda=q/l$,在内圆柱面内和外圆柱面外的场强均为零.应用高斯定理,可求出在两圆柱面之间距轴线为 $r(R_A < r < R_B)$ 处 P 点的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} r$$

设内、外圆柱面的电势分别为 V_A 和 V_B ,则可求得两圆柱面间的电势差为

$$V_A - V_B = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dr = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} =$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

根据电容的定义,求得圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R_B/R_A)} \quad (9-5)$$

可见圆柱形电容器两极板间为真空时,电容只和它的几何结构有关.由式(9-5)可知,圆柱形电容器单位长度的电容为

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_B/R_A)}$$

(3) 球形电容器

球形电容器是由半径分别为 R_A 和 R_B 的两个同心的金属球壳所组成的(图 9-15). 设内球带电 $+q$, 外球带电 $-q$, 则正、负电荷将分别均匀地分布在内球的外表面和外球的内表面上. 这时,在两球壳之间,具有球心对称性的电场,距球心为 r ($R_A < r < R_B$) 处的 P 点的场强为

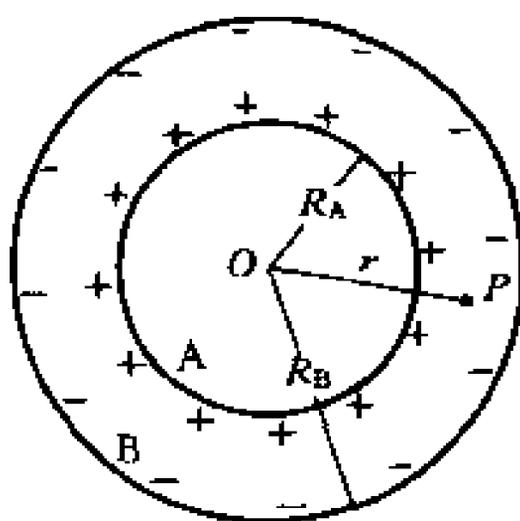


图 9-15 球形电容器

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

两球壳间的电势差为

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \\ &= \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned}$$

根据电容的定义,求得球形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (9-6)$$

上式再一次说明了电容器的电容只和它的几何结构有关. 结构形状一定的电容器,其电容具有固定值,与它是否带电或所带电荷量的多少无关.

设想组成球形电容器的外球壳在无限远处($R_B = \infty$), 即 $R_B \gg R_A$ 时, 则式(9-6)简化为

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_A$$

此式就是“孤立”导体球的电容公式。

上面的例子告诉我们: 计算任意形状电容器的电容时, 总是先假定极板带电, 并求出两带电极板间的场强, 再由场强与电势差的关系求两极板间的电势差, 在电势差的表式中, 它必然和电容器所带电荷量成正比, 于是由电容的定义式(9-3)就可求出电容。

应该指出, 除以上讨论的几种典型电容器的电容外, 正如本节开始时指出的那样, 实际上任何导体间都存在着电容。导线与导线或元件或金属外壳之间, 元件与金属外壳之间, 都存在着电容, 这些电容在电工和电子技术中通常叫做分布电容。分布电容的量值通常比较小, 且不容易计算, 在一般情况下, 它的作用可以忽略不计。但在安装电子设备, 尤其是在高频电路中, 却必须考虑分布电容的影响。

在生产和科研中实际使用的电容器种类繁多, 外形各不相同, 但它们的基本结构是一致的。电容器的用途很多, 应用极广, 各种电子仪器、收音机、电视机中都用到电容器。电容器在电路中具有隔直流、通交流的作用, 电容器和其他元件可组合成振荡放大器以及时间延迟电路等等。电容器还是一种储存电能(电势能)的元件, 在很多仪器中, 使用一个大容量的电容器组, 它在充电过程中所聚积和储存的电能, 可在放电过程的极短时间内释放出来, 从而获得很大的电功率, 例如脉冲式的激光打孔机中就有这样的电容器组。测量放射性射线粒子数的盖革计数管, 也相当于一个具有轴对称电场的圆柱形电容器。

(4) 电介质电容器

以上所举的例子中, 电容器极板间都是真空的情况, 而实际常用的电容器多数在两极板之间充满某种电介质。实验证明, 充有电介质的电容器电容可增大好多倍, 这说明电容器的电容还和两极

板间所充的电介质有关. 实验指出, 两极板间为真空时的电容 C_0 与两极板间充满某种均匀电介质时的电容 C 的比值为

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (9-7)$$

ϵ_r 叫做该介质的相对电容率(或相对介电常量), 它是表征电介质本身特性的物理量, 在量值上等于电容器两极板间充满电介质时的电容和两极板间为真空时的电容之比. 式(9-7)指出, 当两极板间充满均匀电介质时, 电容器的电容要增至 ϵ_r 倍, 例如, 平板电容器极板间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质后, 其电容为

$$C = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

式中

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (9-8)$$

ϵ 叫做电介质的电容率. 由式(9-7)可知, ϵ_r 为电容之比, 是单位为 1 的量, 所以电介质的电容率 ϵ 的单位和真空电容率 ϵ_0 的单位相同. 按所充电介质的不同, 电容器可分为空气电容器、纸介质电容器、云母电容器、陶瓷电容器、涤纶电容器、钛酸钡电容器和电解电容器等.

电容器中充了电介质以后, 其电容值之所以会增加将在 § 9-5 中再作讨论.

每个电容器的成品, 除了标明型号外, 还标有两个重要的性能指标, 例如电容器上标有 $100 \mu\text{F} 25 \text{ V}$, $470 \text{ pF} 60 \text{ V}$, 其中 $100 \mu\text{F}$ 、 470 pF 表示电容器的电容, 25 V 、 60 V 表示电容器的耐压. 耐压是指电容器工作时两极板上所能承受的电压值, 如果外加的电势差超过电容器上所规定的耐压值, 电容器中的场强太大, 两极板间的电介质有被击穿的危险. 即电介质失去绝缘性能而转化为导体, 电容器遭到损坏, 这种情况称为电介质的击穿, 使用时必须注意.

表 9-1 列出了一些常见电介质的 ϵ_r 及其击穿场强值.

表 9-1 电介质的相对电容率和击穿场强

电介质	相对电容率 ϵ_r	击穿场强/(V/m)
真 空	1	(∞)
空 气	1.000 59	3×10^6
纯 水	80	
云 母	3.7~7.5	$(80 \sim 200) \times 10^6$
玻 璃	5~10	$(5 \sim 13) \times 10^6$
绝缘子用瓷	5.7~6.8	$(6 \sim 20) \times 10^6$
电 容 器 纸	3.7	$(16 \sim 40) \times 10^6$
电 木	7.6	16×10^6
尼 龙	3.4	14×10^6
硅 油	2.5	15×10^6
聚 苯 乙 稀	2.56	24×10^6
熔 石 英	3.78	8×10^6
聚四氟乙稀	2.1	60×10^6
钛 酸 钡	$10^4 \sim 10^4$	3×10^6

3. 电容器的串联和并联

在实际应用中,常会遇到已有电容器的电容或者耐压值不能满足电路中使用的要求,这时常把若干个电容器适当地连接起来构成一电容器组.电容器的基本连接方式有两种,现在分别简述如下.

(1) 串联电容器

图 9-16 表示 n 个电容器的串联,设其电容值分别为 C_1 、 C_2 、 \dots 、 C_n ,组合的等效电容值为 C .当充电后,由于静电感应,每对电容器的两个极板上都带有等量异号的电荷量 $+q$ 和 $-q$.这时,每对电容器两极板间的电势差 U_1 、 U_2 、 \dots 、 U_n 分别为

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{q}{C_n}$$

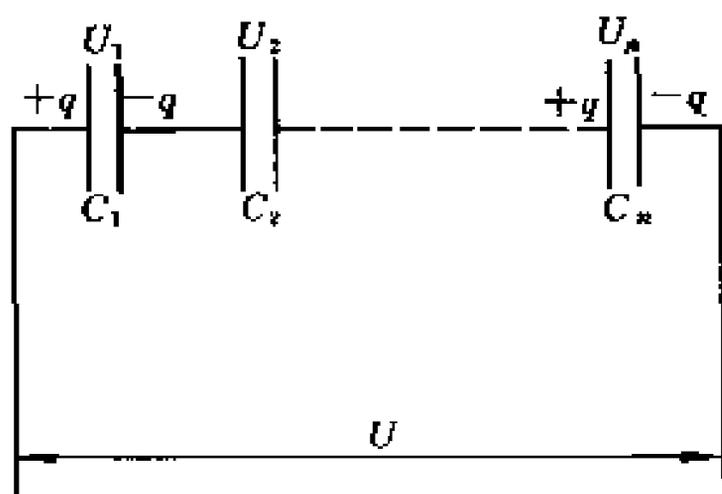


图 9-16 电容器的串联

组合电容器的总电势差为

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \right)$$

由 $U = \frac{q}{C}$ 得

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (9-9)$$

即串联等效电容器电容的倒数等于每个电容器电容的倒数之和。

(2) 并联电容器

图 9-17 表示 n 个电容器的并联。当充电后，每对电容器两极

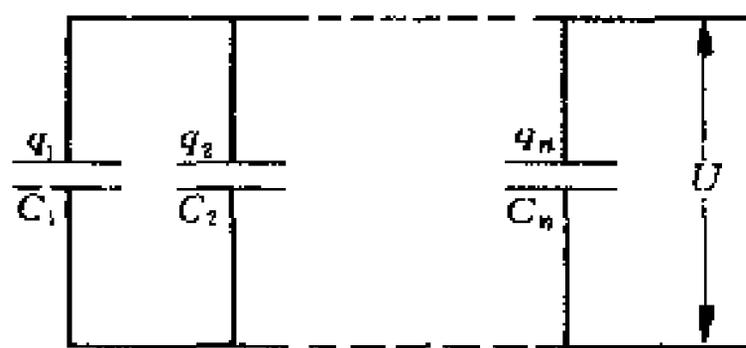


图 9-17 电容器的并联

板间的电势差相等，都等于 U ，但每对电容器极板上的电荷量则不相等。设电容器 C_1, C_2, \cdots, C_n 极板上的电荷量分别为 q_1, q_2, \cdots, q_n ，则

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad \cdots, \quad q_n = C_n U$$

组合电容器的总电荷量为

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)U$$

由此可得组合电容器的等效电容为

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (9-10)$$

即并联等效电容器电容等于每个电容器电容之和。

由以上计算结果表明,几个电容器并联可获得较大的电容值,但每个电容器极板间所承受的电势差和单独使用时一样;几个电容器串联时电容值减小,但每个电容器极板间所承受的电势差小于总电势差.在实际应用中可根据电路的要求采取并联或串联,特殊需要的电路中还可有更复杂的连接方法.

例题 9-3 三个电容器按图 9-18 连接,其电容分别为 C_1 、 C_2 和 C_3 . 当电键 K 打开时,将 C_1 充电到 U_0 ,然后断开电源,并闭合电键 K. 求各电容器上的电势差.

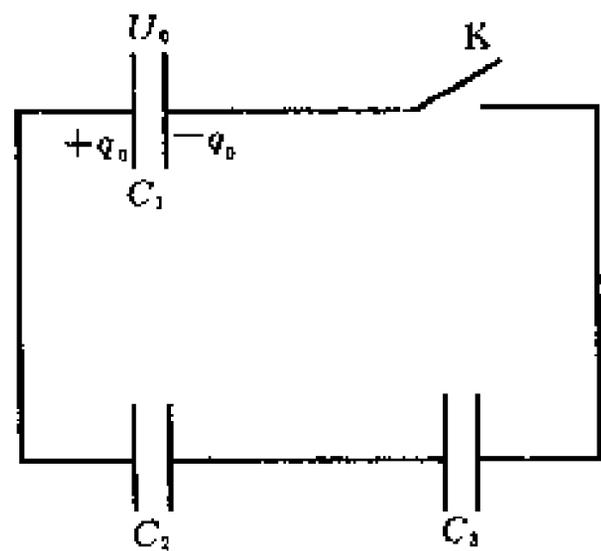


图 9-18 电容器的混联

解 已知在 K 闭合前, C_1 极板上所带电荷量为 $q_0 = C_1 U_0$, C_2 和 C_3 极板上的电荷量为零. K 闭合后, C_1 放电,并对 C_2 、 C_3 充电,整个电路可看作为 C_2 、 C_3 串联再与 C_1 并联. 设稳定时, C_1 极板上的电荷量为 q_1 , C_2 和 C_3 极板上的电荷量为 q_2 , 因而有

$$q_1 + q_2 = q_0$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2}{C_3}$$

解两式得

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} q_0 = \frac{C_1^2(C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} U_0$$

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} U_0$$

因此,得 C_1 、 C_2 和 C_3 上的电势差分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}U_0$$

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}U_0$$

$$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}U_0$$

§ 9-4 电介质及其极化

上面我们讨论了导体的静电特性,从本节开始,我们将讨论电介质的静电特性.电介质是电阻率很大、导电能力很差的物质,电介质的主要特征在于它的原子或分子中的电子和原子核的结合力很强,电子处于束缚状态.在一般条件下,电子不能挣脱原子核的束缚,因而在电介质内部能作宏观运动的电子极少,导电能力也就极弱.通常,为了突出电场与电介质相互影响的主要方面,在静电问题中总是忽略电介质的微弱的导电性,把它看作理想的绝缘体.当电介质处在电场中时,在电介质中,不论是原子中的电子、还是分子中的离子、或是晶体点阵上的带电粒子,在电场的作用下都会在原子大小的范围内移动,当达到静电平衡时,在电介质表面层或在体内会出现极化电荷,下面就研究电场与电介质间的相互作用,从而说明电介质的某些性质.

1. 有极分子和无极分子电介质

按照近代原子的核式模型,可知原子是由带正电的原子核和分布在核外的电子系组成,核内的正电荷和核外的电子系都在作复杂的运动.但是,在研究原子的静电特性时,我们可以设想核内的正电荷和核外电子系的负电荷在空间有稳定的分布,这些分布在极小范围内(原子的线度是 10^{-10} m)的电荷系在远处所激发的

电场,在一级近似下可以认为是各自等效于集中在某点的一个电荷所激发的电场,这个点叫做该电荷系的“中心”.在正常情况下,核外负电荷相对核内正电荷作球形对称分布,如图 9-19 所示,因此所有原子的正、负电荷中心重合在一起,每个原子的电偶极矩等于零.

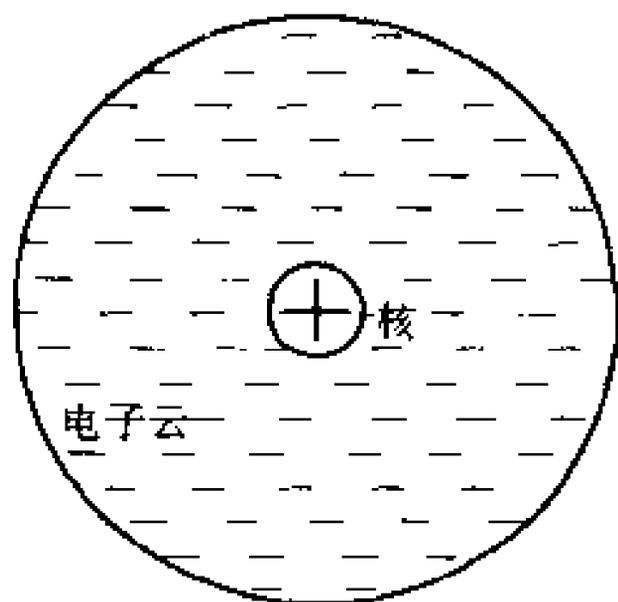


图 9-19 原子中电荷分布示意图

当原子结合成分子时,原子中最外层的价电子将在各原子间重新分配.例如,氯化氢分子(HCl)的形成过程是:氢原子失去一个电子成为 H^+ 离子,而氯原子取得一个电子成为 Cl^- 离子,然后 H^+ 和 Cl^- 相互吸引而构成 HCl 分子.因此 HCl 分子中正电荷和负电荷的中心不相重合,这一对等值而异号的点电荷系等效于一个电偶极子,它的电偶极矩的方向由 Cl 原子指向 H 原子.凡属于这种类型的分子叫做有极分子(图 9-20),例如氨(NH_3)、水蒸汽(H_2O)、一氧化碳

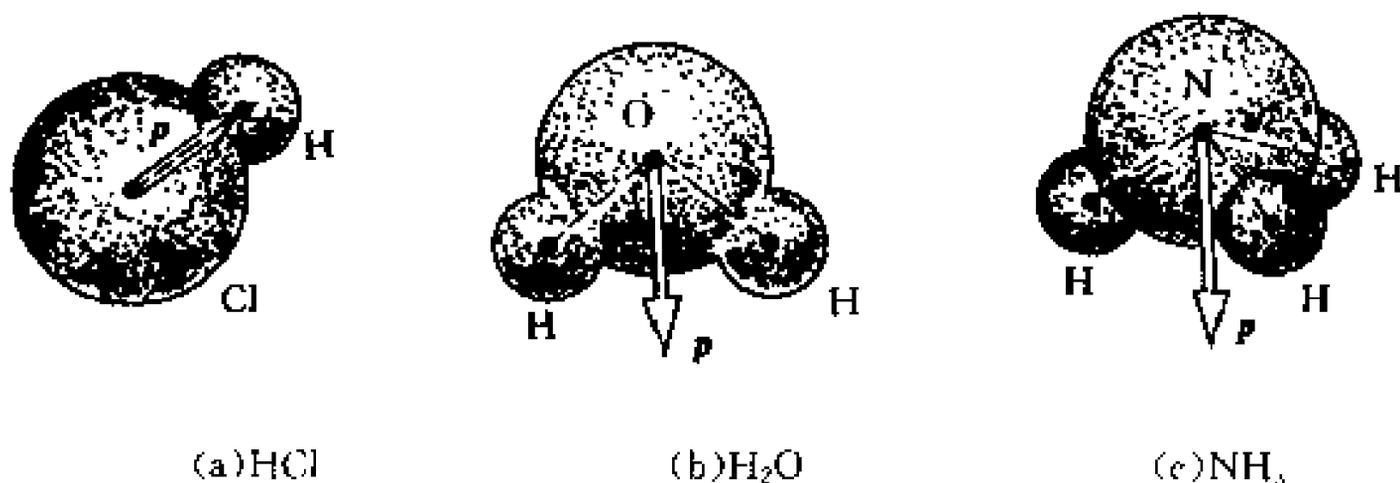


图 9-20 有极分子及其电偶极矩

(CO)、二氧化硫(SO_2)、硫化氢(H_2S)、甲醇(CH_3OH)等分子都是有极分子.设有极分子的正电荷中心和负电荷中心之间的距离为 r_c ,分子中全部正电荷或负电荷的总电荷量为 q ,则有极分子的等效电偶极矩 $p = qr_c$.整块电介质可以看成是无数的电偶极子的聚集体(图 9-21),虽然每一个分子的等效电偶极矩不为零,但由于

分子的无规则热运动,各个分子的电偶极矩的方向是杂乱无章地排列的,所以不论从电介质的整体来看,还是从电介质中的某一小体积(其中包含有大量的分子)来看,其中各个分子电偶极矩的矢量和 Σp 平均说来等于零,电介质是呈电中性的.

另有一类电介质,其分子各原子核外的价电子为几个原子所共有,即价电子是在几个原子核的联合电场中运动.例如,氢分子 H_2 中有二个价电子对称地绕二个氢原子核运动.因此,其正、负电荷的中心重合在一起,它的等效电偶极矩等于零,凡属于这种类型的分子叫做无极分子(图 9-22).例如氦(He)、氮(N_2)、甲烷(CH_4)等分子是无极分子.由于每个分子的等效电偶极矩 $p=0$,电介质整体也是呈电中性的.

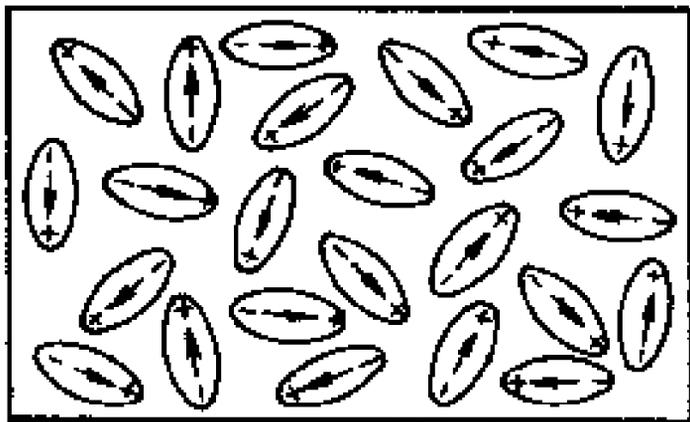
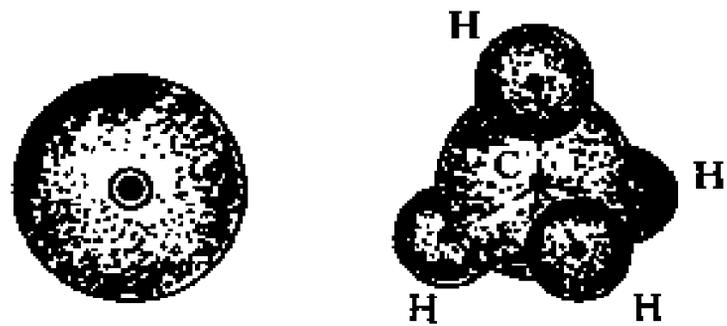


图 9-21 由有极子组成的电介质,
总的电偶极矩的矢量和等于零



(a)He (b) CH_4

图 9 22 无极分子

基于有极分子和无极分子的电结构不同,它们在外电场中的变化过程也不相同,下面将分别讨论.

2. 电介质的极化

当无极分子电介质处在外电场中时,在电场力作用下分子中的正、负电荷中心将发生相对位移,形成一个电偶极子,它们的等效电偶极矩 p 的方向都沿着电场的方向[图 9-23(b)].对于一块电介质整体来说,由于电介质中每一个分子都形成了电偶极子,它们在电介质中将作如图 9-23(c)所示的排列.在电介质内部,相邻

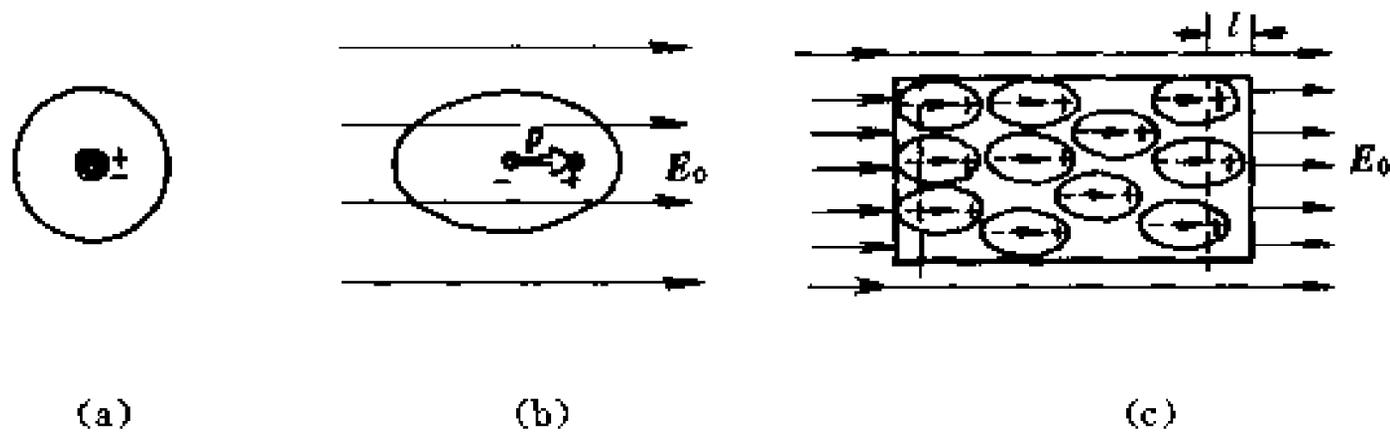


图 9-23 无极分子极化示意图

电偶极子的正负电荷相互靠近,如果电介质是均匀的,则在它内部处处仍然保持电中性,但是在电介质的两个和外电场强度 E_0 相垂直的表面层里(厚度为分子等效电偶极矩的轴长 l),将分别出现正电荷和负电荷[图 9-23(c)].这些电荷不能离开电介质,也不能在电介质中自由移动,我们称之为极化电荷^①.这种在外电场作用下,在电介质中出现极化电荷的现象叫做电介质的极化.外电场愈强,每个分子的正、负电荷中心之间的相对位移愈大,分子的电偶极矩也愈大,电介质两表面上出现的极化电荷也愈多,被极化的程度愈高.当外电场撤去后,正、负电荷的中心又重合在一起[$p=0$,图 9-23(a)],电介质表面上的极化电荷也随之消失.这类分子可看作由两个异号等量的等效电荷以弹性力相联系的一个弹性电偶极子,其电偶极矩 p 的大小与场强成正比.由于无极分子的极化在于正、负电荷中心的相对位移,所以常叫做位移极化.

对于有极分子电介质来说,每个分子本来就等效为一个电偶极子,它在外电场的作用下,将受到力矩的作用,使分子的电偶极矩 p 转向电场的方向[图 9-24(b)],但是,分子无规热运动和分子间的相互碰撞都会破坏分子偶极矩沿电场方向的取向排列,因此有极分子电介质的极化程度取决于外电场的强弱和电介质的温度,外电场愈强且温度愈低,分子电偶极矩沿电场取向排列的概率

① 有时称为束缚电荷,而把在电场作用下能移动一宏观距离,或电介质因破坏了电中性所带的电荷统称为自由电荷.

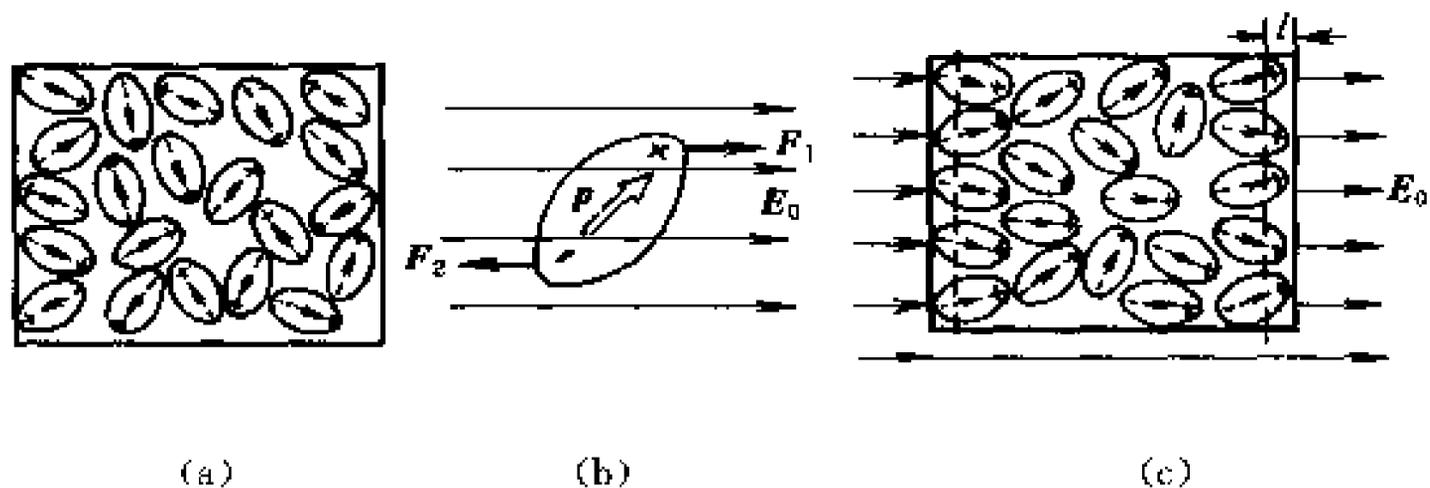


图 9-24 有极分子的极化示意图

也愈大. 在热平衡时, 分子电偶极矩沿电场方向的分布遵守玻耳兹曼分布律, 这样, 大量分子电偶极矩的统计平均便在沿外电场方向出现一附加的电偶极矩. 在宏观上, 则在电介质与外电场垂直的两表面上出现极化电荷[图 9-24(c)]. 当外电场撤去后, 由于分子的热运动而使分子的电偶极矩又变成沿各个方向均匀分布[图 9-24(a)], 电介质仍呈中性. 有极分子的极化就是等效电偶极子转向外电场的方向, 所以叫做取向极化. 一般说来, 分子在取向极化的同时还会产生位移极化, 但是, 对有极分子电介质来说, 在静电场作用下, 取向极化的效应比位移极化的效应强得多, 因而其主要的极化机理是取向极化.

3. 电极化强度

上面从分子的电结构出发, 说明了两类电结构不同的电介质的极化过程. 这两类电介质极化的微观过程虽然不同, 但宏观的效果却是相同的, 都是在电介质的两个相对表面上出现了异号的极化电荷, 在电介质内部有沿电场方向的电偶极矩. 因此下面从宏观上描述电介质的极化现象时, 就不分为两类电介质来讨论了.

在电介质内任取一物理无限小的体积元 ΔV , 当没有外电场时, 这体积元中所有分子的电偶极矩的矢量和 Σp 等于零. 但是, 在外电场的影响下, 由于电介质的极化, Σp 将不等于零. 外电场愈强, 被极化的程度愈大, Σp 的值也愈大. 因此我们取单位体积内分

子电偶极矩的矢量和,即

$$P = \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (9-11)$$

作为量度电介质极化程度的基本物理量,称为该点(ΔV 所包围的一点)的电极化强度(P 矢量).

当电介质处于稳定的极化状态时,电介质中每一点有一定的极化强度,不同点的极化强度可以不同,这表示不同部分的极化程度和极化方向不一样.如果在电介质中各点的电极化强度的大小和方向都相同,电介质的极化便是均匀的,否则极化是不均匀的.

在国际单位制中,电极化强度的单位是 C/m^2 .

电介质的极化是电场和介质分子相互作用的过程,外电场引起电介质的极化,而电介质极化后出现的极化电荷也要激发电场并改变电场的分布,重新分布后的电场反过来再影响电介质的极化,直到静电平衡时,电介质便处于一定的极化状态.所以,电介质中任一点的极化强度与该点的合场强 E 有关.对于不同的电介质, P 与 E 的关系是不同的.实验证明,对于各向同性的电介质, P 和电介质内该点处的合场强成正比,在国际单位制中,这个关系可写成

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \quad (9-12)$$

式中的比例因数 χ_e 和电介质的性质有关,叫做介质的电极化率,它是单位为 1 的量.如果是均匀电介质,则介质中各点的 χ_e 值相同;如果是不均匀电介质,则 χ_e 是电介质各点位置的函数 $\chi_e(x, y, z)$,电介质不同点的 χ_e 值不同.

前面已经提到过,在被极化了的电介质中,由于分子电偶极子的规则排列,会在局部区域出现未被抵消的极化电荷.对于均匀电介质,其极化电荷只集中在表面层里或在两种不同的界面层里.电介质极化后产生的一切宏观效应就是通过这些电荷来体现的,因此电介质的极化程度的强弱,必定和极化电荷之间有内在的联系.下面我们就来研究极化电荷面密度与电极化强度之间的关系.

为了简单起见,这里只讨论处在真空中的均匀电介质被极化的情况.设在介质表面某处任取一小面元 dS ,并向介质一侧割取底面为 dS 、轴长为 L 、体积为 dV 的斜柱体,它的轴线平行与电极化强度 \mathbf{P} ,其面元 dS 法向单位矢量 \mathbf{e}_n 与 \mathbf{P} 间的夹角为 θ ,如图 9-25 所示,因极化电荷只集中在 $l\cos\theta$ 的介质表面层里,而且 $l \ll L$,故介质面元 dS 上的电荷可看作是面电荷.设面元上的极化电荷面密度分别为 $+\sigma'$ 和 $-\sigma'$,则整个斜柱体相当于一个电荷量 q 为 $\sigma' dS$ 、轴长为 L 的电偶极子,其电偶极矩为 $qL = \sigma' L dS$,它应等于 dV 内所有分子偶极矩的矢量和 $\Sigma \mathbf{p}$,即

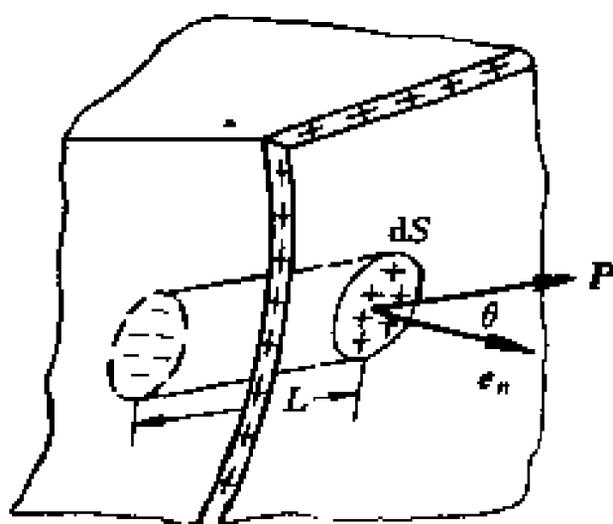


图 9-25 电极化强度和极化电荷面密度间的关系

$$\Sigma \mathbf{p} = \sigma' L dS$$

因斜柱体的体积为 $dV = dS L \cos \theta$,按定义,电极化强度 \mathbf{P} 的大小为

$$|\mathbf{P}| = \frac{|\Sigma \mathbf{p}|}{dV} = \frac{\sigma'}{\cos \theta}$$

所以

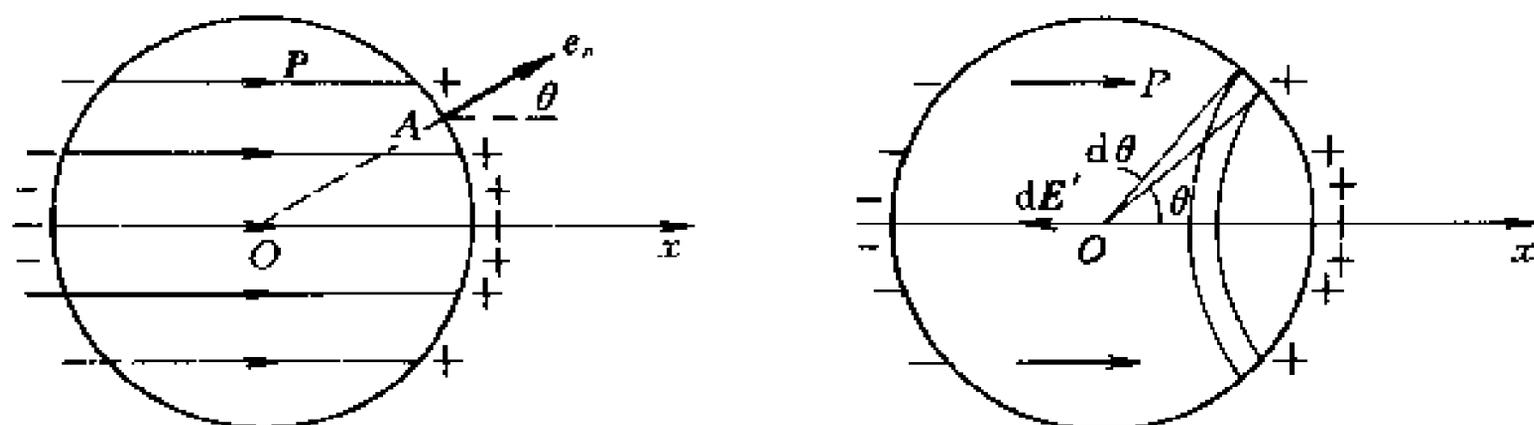
$$\boxed{\sigma' = |\mathbf{P}| \cos \theta = P_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}} \quad (9-13)$$

式中 P_n 是电极化强度 \mathbf{P} 沿介质表面外法线方向的分量.上式说明,电介质极化时产生的极化电荷的面密度,等于电极化强度沿外法线方向的分量.

上面所讨论的是均匀的电介质在均匀电场中被均匀极化的情况,其结果是在电介质表面上产生了极化电荷,但在电介质内部任一小体积中则呈中性.如果电介质是不均匀的,则除在电介质的表面上出现极化电荷外,在电介质的内部也将产生极化电荷体密度 ρ' , ρ' 也和该点的电极化强度 \mathbf{P} 有关,至于其具体关系式,由于数

学运算复杂,超出本教材要求,这里就不再推导了.

例题 9-4 一个半径为 R 的电介质球被均匀极化后,已知电极化强度为 P (图 9-26),求:



(a)极化电荷面密度

(b)球中心处的场强

图 9-26 均匀极化的电介质球

- (1) 电介质球表面上极化面电荷的分布;
- (2) 极化面电荷在电介质球心处所激发的场强.

解 (1) 取球心 O 为原点,取与 P 平行的直径为球的轴线,由于轴对称性,表面上任一点 A 的极化电荷面密度 σ' 只和 θ 角有关 (θ 是 A 点处外法线 e_n 和 P 矢量间的夹角),利用式(9-13)可知

$$\sigma' = P \cos \theta$$

此式表明极化电荷面密度在电介质球面上的分布是不均匀的.在右半球 $\theta < \frac{\pi}{2}$, σ' 为正;在左半球, $\theta > \frac{\pi}{2}$, σ' 为负;在两半球的分界处 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma' = 0$;在轴线两端处 ($\theta = 0$ 或 π), σ' 的绝对值最大.

(2) 取球坐标的轴线沿 x 轴,在球面上各点 P 与外法线 e_n 间的夹角就是球坐标中径矢与极轴间夹角.在球面上介于 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 之间的环带上的极化电荷为

$$dq' = \sigma' 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = P 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

此电荷在球心 O 处所激的场强大小,在例题 8-7 中已求得为

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

方向沿 x 轴的负方向.整个球面上的极化电荷在球心处所激发的

总场强的大小为

$$E' = \int dE' = \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

不难看出,这也应是极化电荷在介质球内任一点激发的场强的大小.

§ 9-5 电介质中的静电场

在上一节中讨论电极化强度与场强的关系时,已经初步提到电介质中的场强问题,这是一个十分复杂的问题,在这一节中将作较详细的探讨.

设想在一电场中放入某种电介质,由于电介质和外电场的相互作用和相互影响,最后达到静电平衡时在电介质上出现一定分布的极化电荷,极化电荷也会在空间激发电场,为了区别于极化电荷,我们把激发外电场的原有电荷系称为自由电荷,并用 E_0 表示它们所激发的场强,而用 E' 表示极化电荷所激发的场强,那么,空间任一点的合场强 E 应是上述两类电荷所激发场强的矢量和,即

$$E = E_0 + E' \quad (9-14)$$

在电介质的外部空间,两个场叠加的结果,使得有一些区域的合场强 E 增强(和 E_0 相比),有一些区域的合场强减弱,但在电介质内部,情况就变得比较复杂,因为构成电介质的原子是一个带电粒子系统,这就使得在电介质中的真实的场强,从一点到另一点之间会有十分急剧的变化,特别是靠近原子核附近场强十分强,而在两个原子核之间场强就相对要弱一些.然而在宏观上,实验能观察到的只是一种平均效果,所以,通常我们所说的电介质中的场强,实质上是指在物理无限小体积内真实场强的平均值,这是深入到电介质内部时,对一些物理量的意义应有的新的认识.由于在电介质

中,自由电荷的电场与极化电荷的电场的方向总是相反,所以在电介质中的合场强 E 和外场强 E_0 相比显著地削弱了.

为了定量地了解电介质内部场强被削弱的情况,我们讨论如下特例.图 9-27 表示一个“无限大”平行板电容器,两极板间充有极化率为 χ_e 的均匀电介质.设极板上的自由电荷面密度为 $\pm\sigma_0$,电介质表面上的极化电荷面密度为 $\pm\sigma'$.自由电荷的场强大小

$|E_0| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$,在图中用实线表示;极化电

荷的场强大小 $|E'| = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$,在图中用虚

线表示. E' 的方向和 E_0 的方向相反,因此极板间电介质中的合场强 E 的大小为

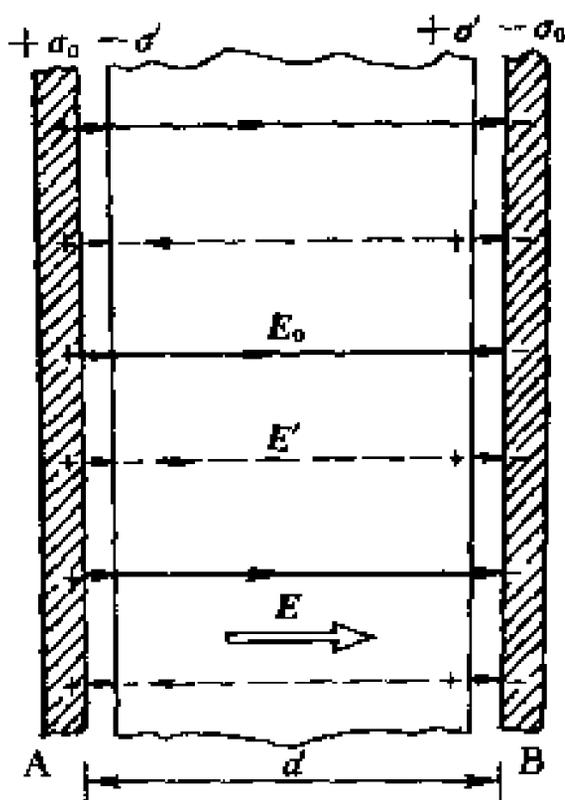


图 9-27 电介质中的场强

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad (9-15)$$

式(9-15)说明了电介质中场强 E 比 E_0 削弱的原由.又由式(9-12)可知电介质中的电极化强度应为 $P = \chi_e \epsilon_0 E$,而 $\sigma' = P$,于是代入上式得

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} \quad (9-16)$$

上式表明,在均匀电介质充满整个电场的情况下,电介质内部的场强 E 为场强 E_0 (极板上的自由电荷面密度不变)的 $\frac{1}{1 + \chi_e}$ 倍.

两极板间的电势差为

$$U = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}$$

设极板的面积为 S , 则极板上总的电荷量为 $q = \sigma_0 S$, 按电容器电容的定义, 当极板间充满均匀电介质后的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)S}{d} = (1 + \chi_e)C_0 \quad (9-17)$$

即电容为两极间是真空时电容 C_0 的 $(1 + \chi_e)$ 倍, 这就解释了电容器中充满电介质后其电容增大的实验事实. 由式(9-7)可得 ϵ_r 和 χ_e 有如下的关系

$$\boxed{\epsilon_r = 1 + \chi_e} \quad (9-18)$$

因为 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, 所以

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (9-19)$$

电极化率 χ_e 、相对电容率 ϵ_r 和电容率 ϵ 都是表征电介质性质的物理量, 三者中知道任何一个即可求得其他两个. 式(9-18)和式(9-19)虽然是从平行板电容器中均匀电介质的特例引出的, 但它们却是普遍适用的.

从式(9-16)可知 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$, 代入式(9-15)后, 可以求得电介质表面上的极化电荷面密度 σ' 和电容器极板上的自由电荷面密度之间的数量关系为

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \sigma_0 \quad (9-20)$$

应该指出, 电介质内部的场强减弱到 E_0 的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍 (即 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$) 这一结论并不是普遍成立的, 但电介质内部的场强通常要减弱, 这个现象却是比较普遍的.

作为一个例子, 再考虑一个均匀电介质球放入一均匀的外电场 E_0 中, 如图 9-28 所示. 电介球被均匀极化后, 球面上极化电荷所激发的场强 E' 的分布如图 9-28(c) 所示. 电介质球内的场强在例题 9-4 中已求出为

$$E' = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

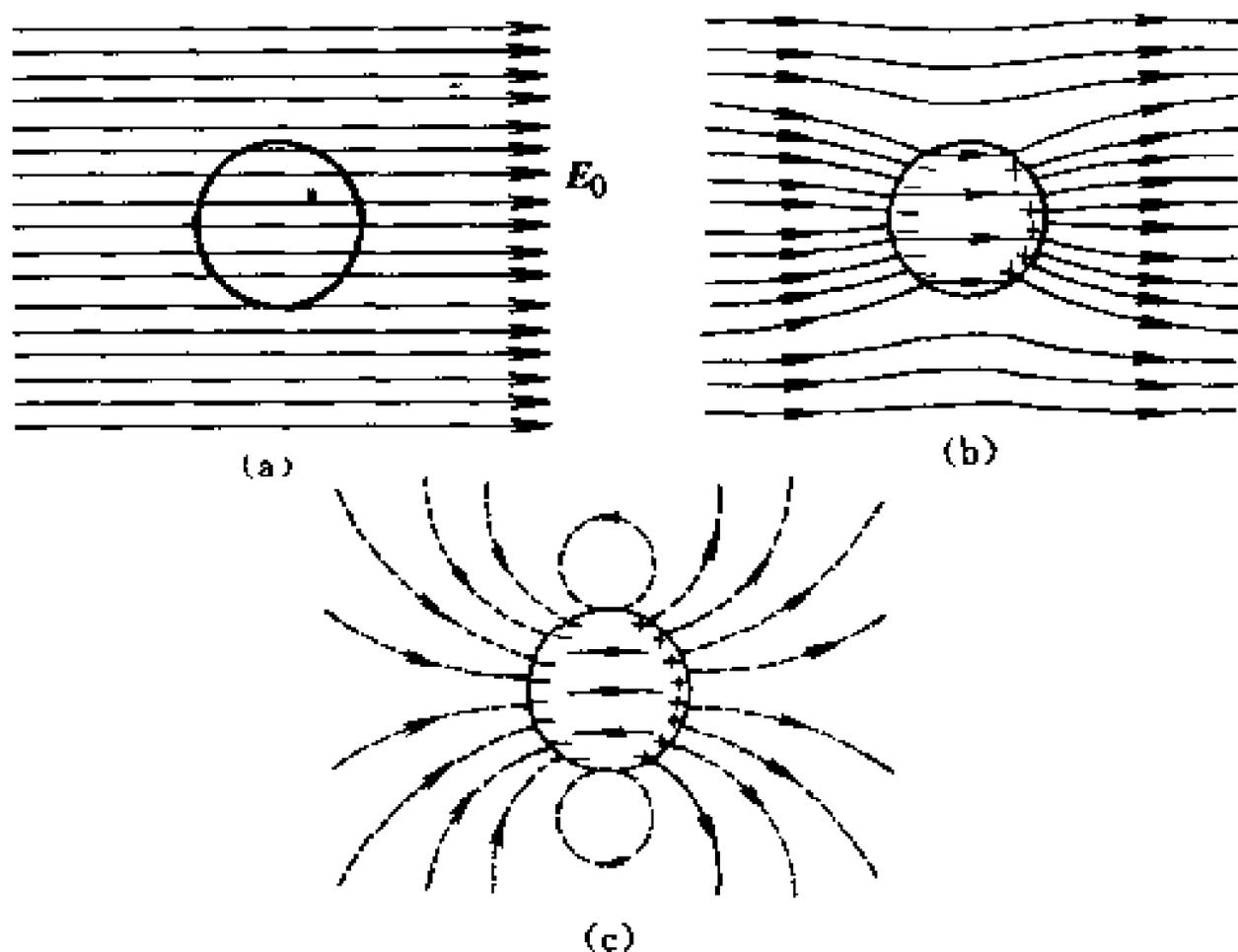


图 9-28 电场中的电介质球

E' 的方向和 E_0 的方向相反, 因而在介质球内的合场强 E 的大小为

$$E = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0}$$

因 $P = \chi_e \epsilon_0 E$, 代入得

$$E = E_0 - \frac{\chi_e}{3} E$$

或

$$E = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad (9-21)$$

因为 $\epsilon_r + 2 > 3$, 故电介质球内的场强也是减弱的.

在电介质球的外部空间里, 靠近球的上下区域, E' 和 E_0 的方向相反, 合场强减弱; 在球的左右区域, E' 和 E_0 的方向相同, 合场强增强. 球内外空间合电场的分布见图 9-28(b). 图 9-28(a) 表示原来的匀强电场, 圆的区域表示将放入一电介质球体.

§ 9-6 有电介质时的高斯定理 电位移

1. 有电介质时的高斯定理 电位移

现在,我们把真空中静电场的基本定理推广到有电介质存在的静电场中去.根据前面的讨论,电介质的极化过程不过是使原来各部分电中性的物体中有些区域出现过剩的电荷.作为电荷,不管它是如何形成的,我们有理由相信,因极化出现的极化电荷所激发的静电场的特性和自由电荷的电场应是一样的,即从激发电场的角度看,只相当于在真空中增加了极化电荷所激发的场而已.首先,极化电荷的场也是有势场,所以有电介质存在时,场强的环路定理仍然成立,即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

式中的 \mathbf{E} 是所有电荷(自由电荷和极化电荷)所激发的静电场中各点的合场强.

其次,我们考察高斯定理.根据 § 8-5 中的讨论,此时如果在电场中任作一闭合曲面 S ,那么,通过该面的 \mathbf{E} 通量等于它所包围的电荷量的 $1/\epsilon_0$,即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q$$

当然,式中的 Σq 应理解为处于该闭合曲面内所有正、负电荷量的代数和.在电介质存在的情况下,在 Σq 中既有自由电荷,又有极化电荷,为具体起见,上式可写为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\Sigma q_0 + \Sigma q') \quad (9-22)$$

式中的 Σq_0 和 $\Sigma q'$ 分别表示 S 面内自由电荷量的代数和与极化电荷量的代数和.由式(9-22)可知,要求解场强 \mathbf{E} ,必须同时知道自

由电荷和极化电荷的分布,但是,极化电荷的分布又取决于场强 E , $\Sigma q'$ 和 E 之间的这种相互影响,使极化电荷本身在求解场强时也是待求的量,这种相互关系上的环联给求解问题带来困难.为了解决这个问题,我们将设法把 $\Sigma q'$ 从式中消去,并引进一个新的物理量,使等式右边只包含自由电荷,从而得到一个便于求解的公式.为简单起见,仍以平板电容器中充满均匀电介质这个特例来进行讨论.

设平行板电容器的两极板所带自由电荷的面密度分别为 $\pm\sigma_0$,电介质极化后,在靠近电容器两极板的电介质两表面上分别产生极化电荷,面密度为 $\pm\sigma'$.如图 9-29 所示,作一圆柱形闭合面(图中虚线是所作闭合面的截面),闭合面的上下底面与极板平行,

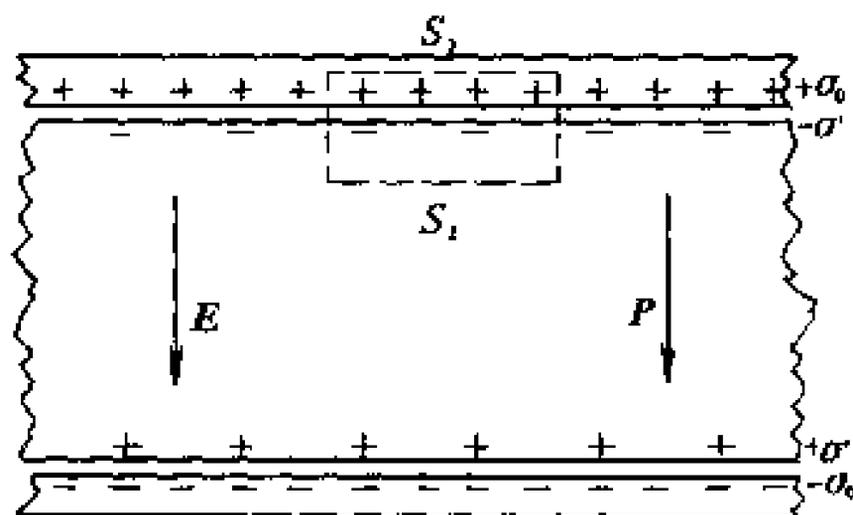


图 9-29 有电介质时的高斯定理

上底面 S_1 在导体极板内,下底面 S_2 紧贴着电介质的上表面.于是,对所作闭合面,式(9-22)可写为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2) \quad (9-23)$$

由式(9-13)知 $\sigma' = P$,又因电极化强度 P 对整个封闭面的积分 $\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ 等于对下底面 S_2 的积分 $\iint_{S_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$,考虑到在 S_2 面上 P 的大小相同,方向与 S_2 面垂直,于是有

$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = PS_2 = \sigma' S_2$$

代入式(9-23)得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 S_1 - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

用 $q_0 = \sigma_0 S_1$ 表示封闭面内所包围的自由电荷,经移项后得

$$\oiint_S \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

或

$$\oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

一般把式中的 $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 定义为电位移 \mathbf{D} , (通常称作 \mathbf{D} 矢量), 即

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (9-24)$$

则上式变为

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0} \quad (9-25)$$

我们看到, 引进电位移 \mathbf{D} 后, (9-25) 中就只包含自由电荷, 极化电荷不再明显地出现在式中. 式(9-25)就是高斯定理在电介质中的推广, 称为有电介质时的高斯定理. 方程(9-25)虽是从特殊情况下推出的, 但它是普遍适用的, 是静电场的基本定理之一.

为了对电位移 \mathbf{D} 的描述形象化起见, 我们仿照电场线方法, 在有电介质的静电场中作电位移线, 使线上每一点的切线方向和该点电位移 \mathbf{D} 的方向相同, 并规定在垂直于电位移线的单位面积上通过的电位移线数目等于该点的电位移 \mathbf{D} 的量值, 这样式(9-25)就表示: 通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和. \mathbf{D} 的单位是 C/m^2 .

从式(9-25)还可以看出, 电位移线是从正的自由电荷出发, 终止于负的自由电荷, 这与电场线不一样, 电场线起迄于各种正、负电荷, 包括自由电荷和极化电荷.

2. D 、 E 、 P 三矢量之间的关系

由式(9-24)定义的电位移 D 矢量说明电位移 D 与场强 E 和电极化强度 P 有关,但它和场强 E (单位正电荷所受的力)及电极化强度 P (单位体积的电偶极矩)不一样, D 没有明显的物理意义.引进 D 的优点在于计算通过任一闭合曲面的电位移通量时,可以不考虑极化电荷的分布,如果由此能算出 D ,再利用其他关系式,便有可能算出电介质中的场强 E .但必须指出,通过闭合曲面的电位移通量只和曲面内的自由电荷有关,并不是说电位移 D 仅决定于自由电荷的分布,它和极化电荷的分布也是有关的,式(9-24)正是说明了这一点.

式(9-24)是电位移矢量的定义式,无论对各向同性介质或各向异性介质都是适用的.

对于各向同性电介质,介质内任一点的电极化强度 P 与该点的合电场强度 E 成正比,而且方向相同,即

$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

代入式(9-24)后,得

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \chi_e \epsilon_0 E = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

或

$$\boxed{D = \epsilon E} \quad (9-26)$$

式(9-26)说明在各向同性的电介质中,电位移等于场强的 ϵ 倍.

如果是各向异性电介质,如石英晶体等,则 P 与 E 、 D 与 E 的方向一般并不相同,电极化因数 χ_e 也不能只用一个数值来表示,式(9-26)就失去意义,但式(9-24)仍旧适用.

例题 9-5 一半径为 R 的金属球,带有电荷 q_0 ,浸埋在均匀“无限大”电介质中(电容率为 ϵ),求球外任一点 P 的场强及极化电荷分布.

解 根据金属球是等势体,而且介质又以球体球心为中心对称分布,可知此时的电场分布必仍具球对称性,所以用有电介质时的高斯定理来计算球外 P 点的场强是很方便的.

如图 9-30 所示,过 P 点作一半径为 r 并与金属球同心的闭合球面 S ,由高斯定理知

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D4\pi r^2 = q_0$$

所以
$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$$

写成矢量式为

$$\mathbf{D} = \frac{q_0}{4\pi r^3} \mathbf{r}$$

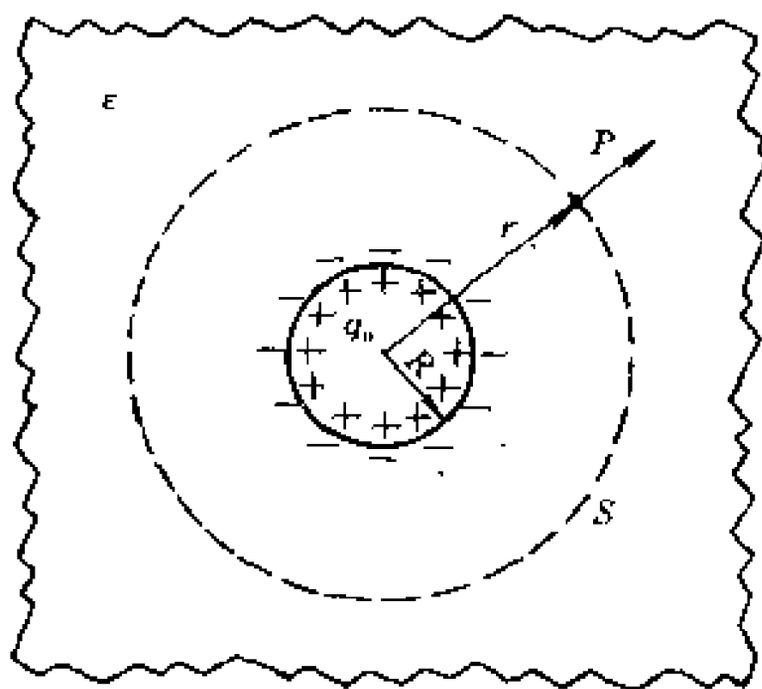


图 9-30 带电金属球浸埋在均匀无限大电介质中

因 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 所以, 离球心 r 处 P 点的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{q_0}{4\pi \epsilon r^3} \mathbf{r} = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^3} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$$

结果表明:带电金属球周围充满均匀无限大电介质后,其场强减弱到真空时的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍.

由式(9-24)可求出电极化强度为

$$\mathbf{P} = \frac{q_0}{4\pi r^3} \mathbf{r} - \epsilon_0 \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^3} \mathbf{r} = \frac{q_0}{4\pi r^3} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \mathbf{r}$$

电极化强度 \mathbf{P} 与 r 有关,是非均匀极化.在电介质内部极化电荷体密度等于零,极化面电荷分布在与金属交界处的电介质表面上(另

(-电介质表面在无限远处), 其电荷面密度 σ' 为

$$\sigma' = P \cdot e_n$$

式中 e_n 是金属球和电介质交界面处、由介质指向金属球的法线单位矢量. 代入交界面处的 P 式, 并注意 P 与 e_n 的方向相反, 于是得

$$\sigma' = -\frac{q_0}{4\pi R^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

因为 $\epsilon_r > 1$, 上式说明 σ' 恒与 q_0 反号. 在交界面处自由电荷和极化电荷的总电荷量为

$$q_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q_0 = \frac{q_0}{\epsilon_r}$$

总电荷量减小到自由电荷量的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍, 这是离球心 r 处场强减小到真空时的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍的原因.

例题 9-6 平行板电容器两极板的面积为 S , 如图 9-31 所示, 两极板之间充有两层电介质, 电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 厚度分别为 d_1 和 d_2 , 电容器两极板上自由电荷面密度为 $\pm\sigma$. 求 (1) 在各层电介质内的电位移和场强, (2) 电容器的电容.

解 (1) 设这两层电介质中的场强分别为 E_1 和 E_2 , 电位移分别为 D_1 和 D_2 , E_1 和 E_2 都与极板面垂直, 而且都属均匀场. 先在两层电介质交界面处作一高斯闭合面 S_1 , 如图 9-31 中中间的虚线所示, 在此高斯面内的自由电荷为零, 由有电介质时的高斯定理得

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -D_1 S + D_2 S = 0$$

所以

$$D_1 = D_2$$

即在两电介质内, 电位移 D_1 和 D_2 的量值相等. 由于

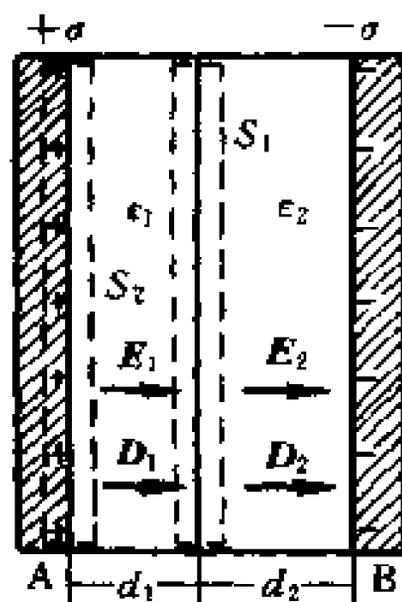


图 9-31 充满两种电介质的平行板电容器

$$D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2$$

所以

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

可见在这两层电介质中场强并不相等,而是和电容率(或相对电容率)成反比。

为了求出电介质中电位移和场强的大小,我们可另作一个高斯闭合面 S_2 ,如图 9-31 中左边的虚线所示,这一闭合面内的自由电荷等于正极板上的电荷 $S\sigma$,按有电介质时的高斯定理,得

$$\oiint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_1 S = S\sigma$$

$$D_1 = \sigma$$

再利用 $D_1 = \epsilon_1 E_1, D_2 = D_1, D_2 = \epsilon_2 E_2$,可求得

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_{r1} \epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_{r2} \epsilon_0}$$

D_1, D_2 和 E_1, E_2 的方向都是由左指向右。

(2) 正、负两极板 A、B 间的电势差为

$$V_A - V_B = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \sigma \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) = \frac{q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

式中 $q = \sigma S$ 是每一极板上的电荷,所以这个电容器的电容为

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$$

可见电容和电介质的放置次序无关。上述结果可以推广到两极板间有任意多层电介质的情况(每一层的厚度可以不同,但其相互叠合的两表面必须都和电容器两极板的表面相平行)。

最后必须指出,从上面二个例题,都得到 $D = \epsilon_0 E_0$ 和 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 的

关系式,再将电介质时的高斯定理 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q_0$ 和真空中静

电场的高斯定理 $\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \Sigma Q_0$ 相比较, 似乎 \mathbf{D} 也和 $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 相同, 亦即 \mathbf{D} 似乎应和极化电荷无关. 其实, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 这一关系只有在一定的条件下才能成立, 这条件是均匀电介质充满整个电场(例9-5)或电介质表面是等势面(例9-6), 除此之外并不成立. 图9-32表示一均匀电场中在放入电介质球的前后电场线与电位移线的分布情况, 从图中可以看出, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的上述关系在全部是真空的情况下是成立的, 当放入电介质球后, 球外 \mathbf{D} 线和 \mathbf{E} 线显然不同于原来的分布, 这时在球内各点两者间的关系就不是 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$, 而是 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 了.

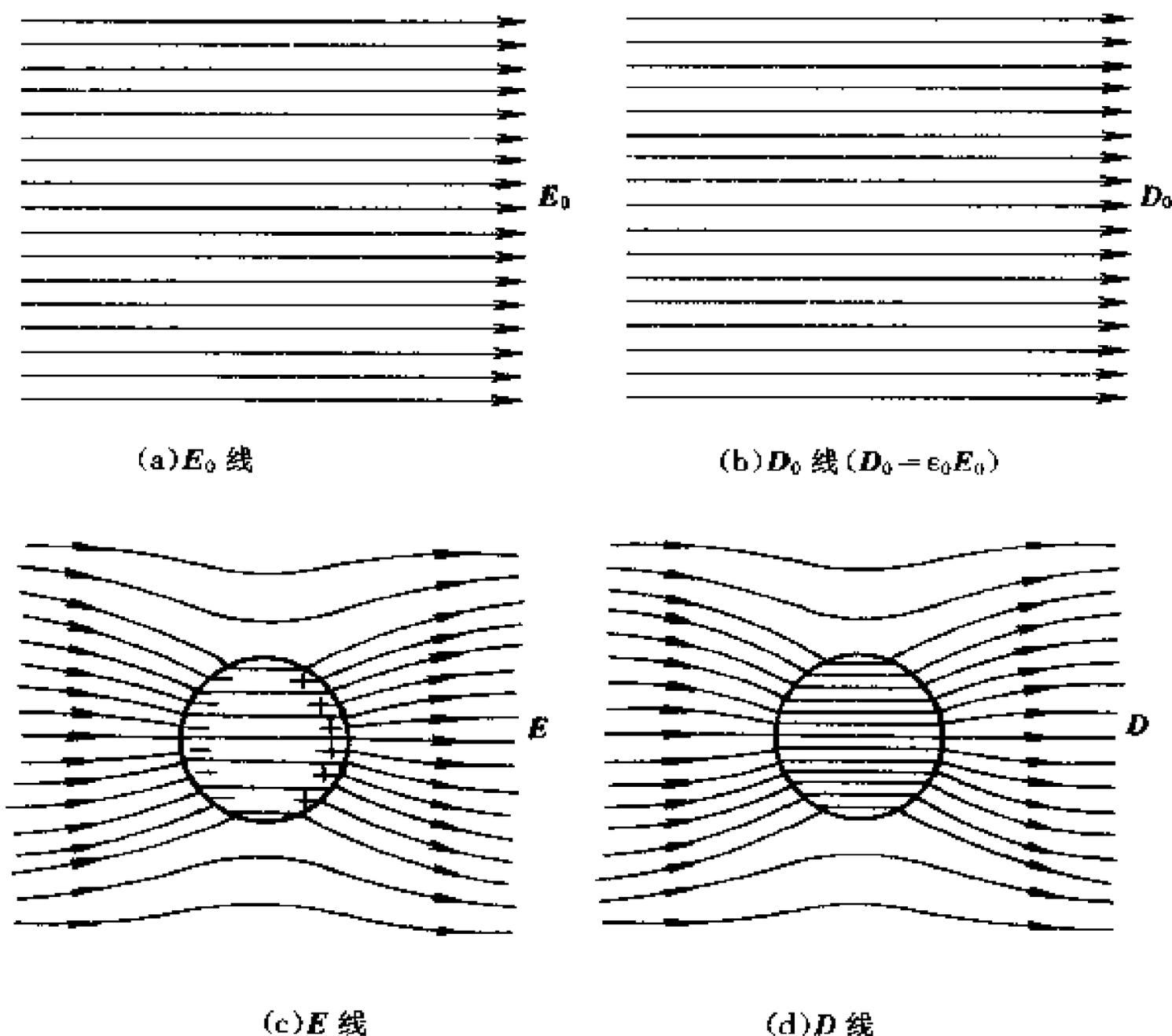


图 9-32 均匀电场 E_0 中放入电介质球后, 电介质内外的 E 线和 D 线

§ 9-7 * 电场的边值关系

在静电场中,如果同时有几种不同的均匀电介质存在,则在两种不同电介质的界面上,场强 E 和电位移 D 要发生突变.为了讲清楚这个问题,先用一简单的例子来定性说明.设在一平行板电容器的极板间平行板面插入一块平板电介质,它的厚度小于电容器两极板间的距离.当电容器充电后,在电介质面上出现极化电荷,由于电容器中的电场具有面对称性,用高斯定理很容易求出结果来,其 D 线和 E 线的分布大致如图 9-33 中所示.显然,电位移 D 在真空和电介质的分界面上连续,而场强 E 则有突变,但 D 和 E 的方向都垂直于界面.如果平板电介质斜着插在平行板电容器中,那么就破坏了电场分布的面对称性,此时电容器中 D 线和 E 线的分布大致如图 9-34 所示.从图中可定性看出,电位移 D 和场强 E 在真空和电介质的分界面上都有突变, D 线和 E 线在分界面处发生了偏折.

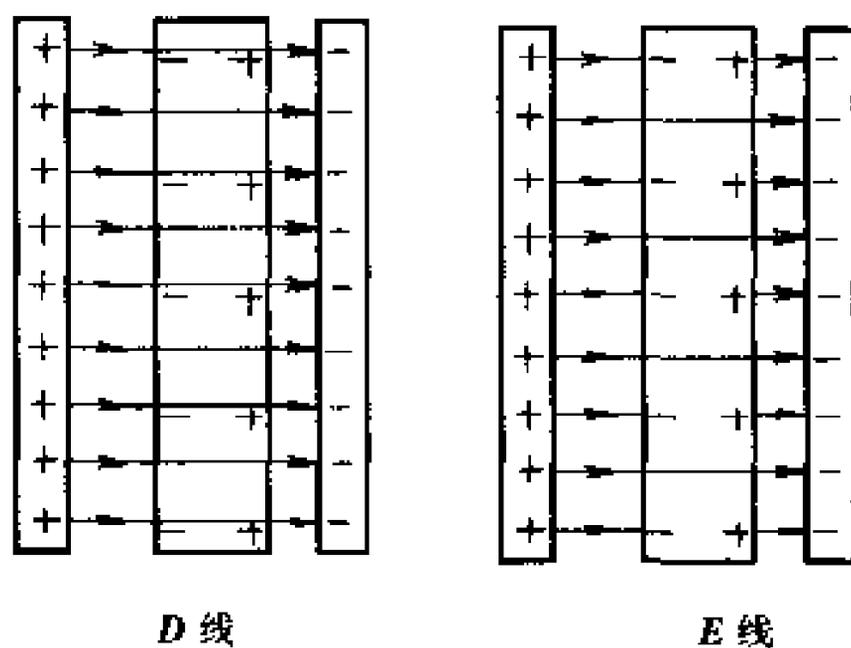


图 9-33 平行板电容器中正插入电介质板时的 D 线和 E 线

在普遍情况下,只要将描述静电场的两个普适定理应用到电介质的分界面上,便可得出电位移 D 和场强 E 在极靠近界面两侧处量值的变化关系,这就是通常所说的电场的边值关系.

考虑两个电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的均匀电介质,它们相接触的

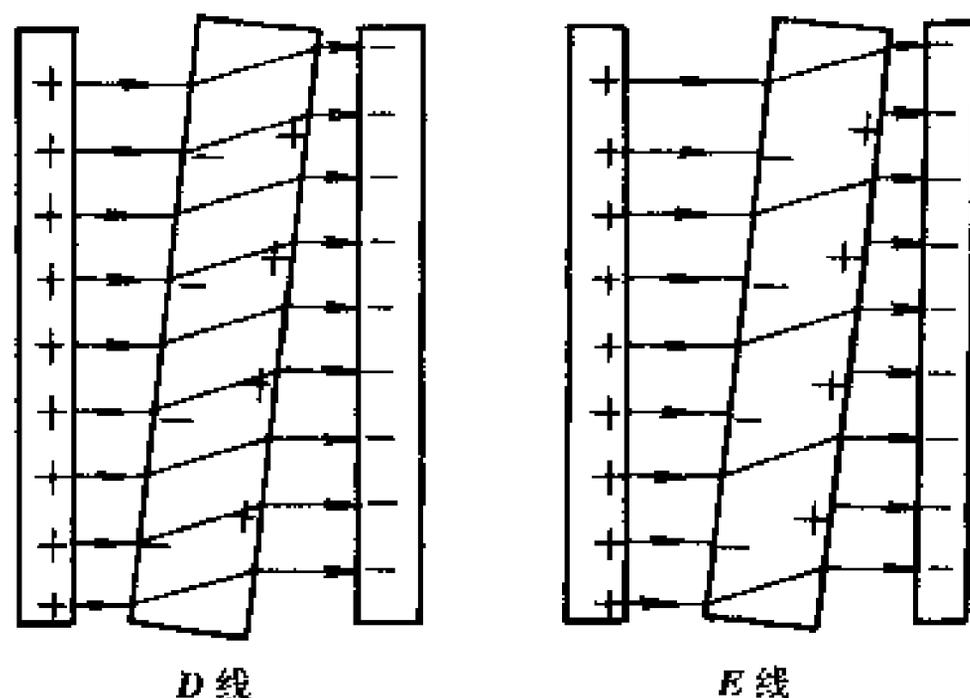


图 9-34 平行板电容器中斜插入电介质板时的 D 线和 E 线

分界面一般情况是曲面,但是,如果只是在分界面上取一面积元,则可把它看作是个平面,图 9-35 是这块面积元的放大图.设在分界面两侧的电位移 D_1 和 D_2 的方向与分界面法线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 .作如图中所示的圆柱形闭合面 S ,其轴线与分界面正交,圆柱两端的底面紧贴分界面的两侧,底面积为 S_0 .由于闭合面内的自由电荷为零,所以通过此闭合面的电位移通量等于零,又因圆柱面的高度极短,通过侧面的电位移通量可以略去.这样,由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -D_1 \cos \theta_1 \cdot S_0 + D_2 \cos \theta_2 \cdot S_0 = 0$$

所以 $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$ (9-27a)

即 $D_{1n} = D_{2n}$ (9-27b)

由此可见,在电介质分界面上没有自由电荷时,电位移的法向分量在分界面的两侧是相等的.

由式(9-26)知,在均匀电介质中 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$,所以式(9-27b)也可写成

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (9-28)$$

这说明在电介质分界面的两侧,电场强度的法向分量是不相等的.

再在两电介质分界面附近,作一极扁的矩形闭合回路 $ABCD$

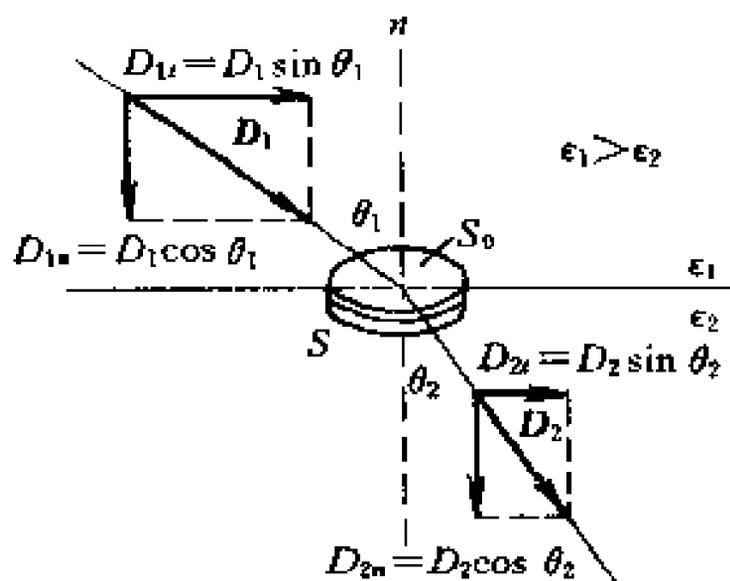


图 9-35 在两电介质分界面上,电位移的法向分量相等(电位移线连续)

(图 9-36),并以 E_1 和 E_2 分别表示在分界面两边的场强.由场强环路定理可知,在静电场中沿任意闭合回路 E 的线积分为零.回路

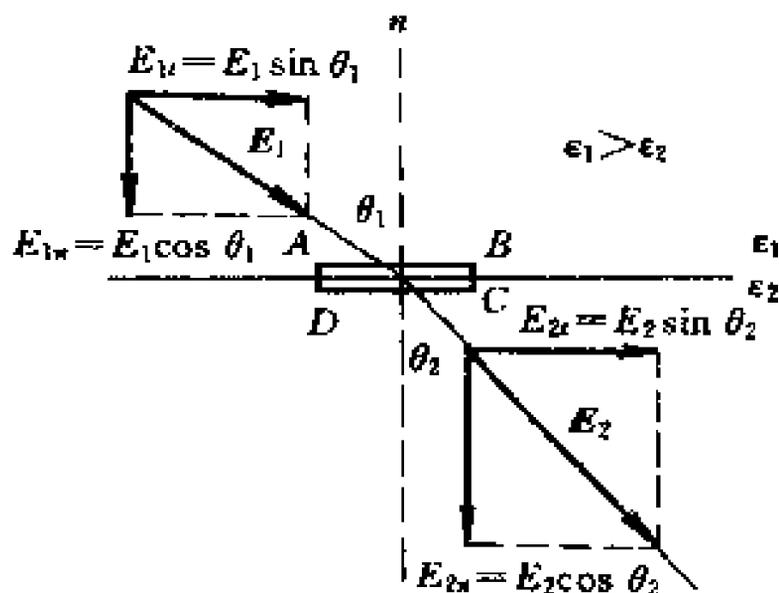


图 9-36 在两电介质分界面上,场强的切线分量相等(电场线不连续)

上的 BC 段和 AD 段都很短,接近于零,场强沿 BC 和 DA 段的积分计算可以略去,所以

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 \sin \theta_1 AB - E_2 \sin \theta_2 CD = 0$$

由此得

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (9-29a)$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \quad (9-29b)$$

由此可见,在电介质分界面的两边电场强度的切向分量是相等的.

因为 $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1}$, $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2}$, 由式(9-29b)可得

$$\boxed{\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}} \quad (9-30)$$

这说明在电介质分界面的两边电位移矢量的切向分量是不相等的。

式(9-27)、(9-28)和式(9-29)、(9-30)是在两电介质分界面上没有自由电荷时,分界面两边的电位移矢量 D 和电场强度 E 所必须同时满足的边值关系,它们是分析研究有介质时电场分布情况的重要依据之一.应该指出,在导出式(9-27)和(9-29)时,并不涉及电介质的性质,故两式适用于任何电介质,而式(9-28)和(9-30)只适用于各向同性电介质的情况.因为通过分界面的 E 通量只和场强的法向分量有关,而和与界面平行的切向分量无关,因此根据 $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$ 可知,到达分界面的电场线条数和离开分界面的电场线条数不等,即电场线在电介质的分界面上是不连续的.同样,根据 $D_{1n} = D_{2n}$ 可知,电位移线在电介质的分界面上是连续的. D 线和 E 线在分界面上存在区别的物理本质是因为 E 线的起止点既与自由电荷有关,也和极化电荷有关,而 D 线的起止点则仅与自由电荷有关.

电位移线在电介质分界面虽是连续的,但它的方向在越过界面后却要发生偏折,将式(9-30)和式(9-27)两边分别相除得

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1 D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2 D_{2n}}$$

从图 9-35 中知, $\tan \theta_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}$, $\tan \theta_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}$, 代入上式可得

$$\boxed{\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \quad (9-31)$$

这一关系式和光线在两介质分界面上的折射定律相似,所以有时也叫做电场中电位移线(或电场线)的折射定律,它表示了电位移线的方向在两电介质分界面处的变化情况.当 D 线从 ϵ 值小的电

介质进入 ϵ 值大的电介质时, D 线将偏离法线; 反之, D 线将偏向法线.

例题 9-7 高压电器设备中用一块均匀的陶瓷片 ($\epsilon_r = 6.5$) 作为绝缘, 其击穿场强为 10^7 V/m, 已知高压电在陶瓷片外空气中激发均匀电场, 其场强 E_1 与陶瓷面法线成 $\theta_1 = 30^\circ$ 角 (图 9-37), 大小为 $E_1 = 2.0 \times 10^4$ V/m. 求: (1) 陶瓷中的电位移 D_2 和场强 E_2 的大小和方向, (2) 陶瓷表面上极化电荷的面密度.

解 (1) 如图 9-37 中所示, 设陶瓷内电位移 D_2 的方向与法线成 θ_2 角, 由式 (9-28) 可知

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \tan \theta_1 = \frac{6.5}{1} \tan 30^\circ = \\ &6.5 \times 0.5774 = 3.753 \\ \theta_2 &\approx 75.1^\circ \end{aligned}$$

由边界条件 $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$ 可知

$$D_2 = D_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \epsilon_1 E_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 75.1^\circ} =$$

$$1 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2.0 \times 10^4 \times \frac{0.866}{0.258} \text{ C/m}^2 =$$

$$5.95 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{5.95 \times 10^{-7}}{6.5 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 1.03 \times 10^4 \text{ V/m}$$

E_2 小于击穿场强, 所以陶瓷不会被击穿.

(2) 极化电荷的面密度为

$$\sigma'_2 = -\chi_{e2} \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 = -\epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E_2 \cos 75.1^\circ =$$

$$-8.85 \times 10^{-12} \times (6.5 - 1) \times 1.03 \times 10^4 \times 0.258 \text{ C/m}^2 =$$

$$-1.27 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

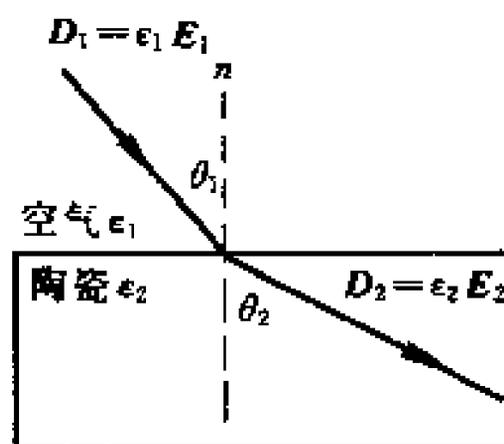


图 9-37

§ 9-8 电荷间的相互作用能 静电场的能量

电荷之间都存在着相互作用的电场力,当电荷之间相对位置变化时,电场力要作功,而且,这功与变化的路径无关,这表示电荷之间具有相互作用能(电势能).带电系统所以具有电势能,是因为任何物体的带电过程都可看作是电荷之间的相对迁移过程,在迁移电荷的过程中,外界必须消耗能量以克服电场力而作功.例如,用电池对电容器充电时就消耗电池中的化学能,根据能量守恒及转化定律,外界所提供的能量转化为带电系统的静电能.当带电系统的电荷减少时,或改变它们之间的相对位置时,静电能就转化为其他形式的能量.例如,当已充电的电容器放电时,它所储存的电能就会转化热、光、声等形式的能量.

1. 点电荷间的相互作用能

我们先来计算两个相距为 r 的点电荷 q_1 和 q_2 系统的相互作用能.假设 q_1 和 q_2 原来相距为无限远[图 9-38(a)],这时它们之间的相互作用力等于零,通常把电荷处于这种状态时的电势能规定为零.现先把 q_1 从无限远处移到 A 点[图 9-38(b)],在这过程中,因 q_2 与 A 点相距仍为无限远,对 q_1 没有作用力,外力所作的功等于零.把 q_1 移到 A 点固定下来后,再把 q_2 从无限远处移到 B 点[图 9-38(c)],在迁移 q_2 的过程中,因它已处在 q_1 所激发的电场中,因而外力要反抗电场力作功,其值为

$$A = q_2(V_2 - V_\infty)$$

这里, V_2 是 q_1 在 B 点处激发的电势, $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$, V_∞ 是 q_1 在无限远点的电势, $V_\infty = 0$, 所以

$$A = q_2 V_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

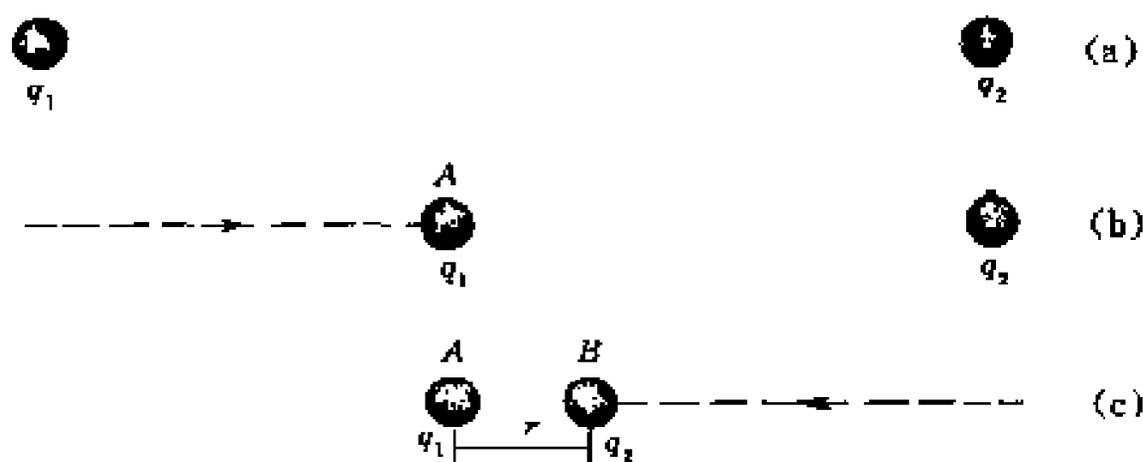


图 9-38 点电荷系统的形成过程

同理,如果先把 q_2 迁移到 B 点,再把 q_1 迁移到 A 点,同样可以求得外力反抗电场力所作的功 $A = q_1 V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$, 式中 V_1 是 q_2 在 A 处激发的电势. 可见,上述两种不同的迁移过程,外力所作的功相等,这也就是说,一电荷系统的形成过程中,外力所作的功和迁移电荷的先后次序无关. 根据功能原理, 这功就等于这两个点电荷系统所具有的相互作用能量(电势能) W , 即

$$W = A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (9-32)$$

我们可以把这一式子改写为

$$W = \frac{1}{2} q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 \quad (9-33)$$

式中 V_1 和 V_2 的含义同前. q_1 和 q_2 如果是同号电荷, 这能量为正值, 表示外力作正功; 如果是异号电荷, 这能量为负值, 表示外力作负功, 电场力作正功.

再考虑形成三个点电荷的系统的情况. 仿照上面的设想, 依次把 q_1, q_2, q_3 三个点电荷从无限远处移到所在的位置上去(彼此间的距离分别为 r_{12}, r_{23}, r_{13}). 根据电场力的叠加原理, 迁移各点电荷时外力反抗电场力所作的功分别为

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

$$A_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

因此三个点电荷系统所具有的相互作用能量(电势能)应等于建立这个电荷系统时外力反抗电场力所作的总功,即

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

或写成

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) + \right. \\ &\quad \left. q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \right] = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \frac{1}{2} q_3 V_3 = \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i \end{aligned} \quad (9-34)$$

式中 V_1 表示点电荷 q_2 和 q_3 在 q_1 所在位置激发的电势,余类推.

把式(9-34)推广到 n 个点电荷所组的系统时,则这一系统所具有的相互作用能量(电势能)可写成:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (9-35)$$

式中 V_i 表示在给定的点电荷系中,除第 i 个点电荷之外的所有其他点电荷在第 i 个点电荷所在处激发的电势.

公式(9-35)不管真空还是有介质时都是正确的.当有介质存在时, q_i 仍是自由点电荷,而 V_i 则应改为有介质时的电势.

例题 9-8 如图 9-39 所示,在一边长为 d 的立方体的每个顶点上放有一个点电荷 $-e$,立方体中心放有一个点电荷 $+2e$.求此带电系统的相互作用能量.

解一 相邻两顶点间的距离为 d ,八个顶点上的负电荷分别与相邻负电荷的相互作用能量共有 12 对,即 $12 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$;面对角线

长度为 $\sqrt{2}d$, 6 个面上 12 对对角顶点负电荷间的相互作用能量是

$$12 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}d};$$

立方体对角线长度为

$$\sqrt{3}d, 4 \text{ 对对角顶点负电荷间的相互作用能量是 } 4 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}d};$$

立方体中

中心正电荷与 8 个顶点负电荷间的相互作用能量是

$$-8 \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}d/2}.$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{12e^2}{d} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}d} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}d} - \frac{32e^2}{\sqrt{3}d} \right) = \frac{0.34e^2}{\epsilon_0 d}$$

解二 任一顶点处的电势为

$$V_1 = 3 \left(\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 d} \right) + 3 \left(\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}d} \right) + \left(\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}d} \right) + \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{2}d}$$

在体心处的电势为

$$V_0 = 8 \left(\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}/2d} \right)$$

按式(9-35), 可得这个点电荷系的总相互作用能为

$$W = 8 \cdot \frac{1}{2} (-e)V_1 + \frac{1}{2} (+2e)V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{12e^2}{d} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}d} - \frac{28e^2}{\sqrt{3}d} \right) = \frac{0.34e^2}{\epsilon_0 d}$$

结果与解一相同.

有一些离子型晶体, 其正负离子排列成整齐的立方点阵, 也可以根据上例的方法估算形成晶体时的相互作用能量(即静电结合能).

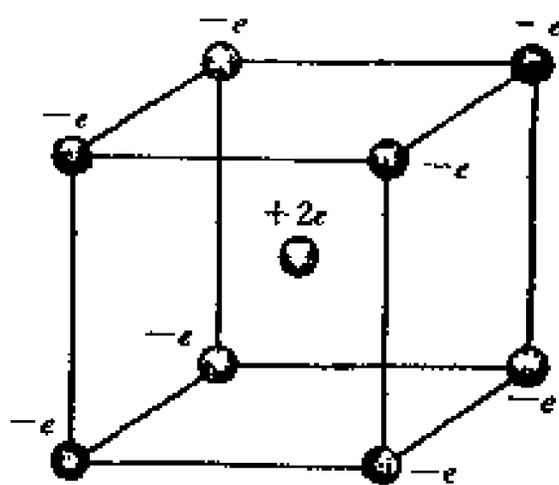


图 9-39 点电荷系的相互作用能

2. 电荷连续分布时的静电能

上面形成点电荷系统的过程,也可以推广到电荷连续分布的情况.以体电荷分布为例,我们设想不断把体电荷元 ρdV 从无穷远处迁移到物体上,这时只要把式(9-35)中的相加改为积分形式,就可得电荷为体分布时的静电能

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV \quad (9-36)$$

同理,对面电荷分布,其静电能为

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS \quad (9-37)$$

式中 ρ 和 σ 分别为电荷的体密度和面密度, φ 是所有电荷在体积元 dV 和面积元 dS 所在处激发的电势. 式(9-36)和式(9-37)是由式(9-35)演变而来,然而,它们在物理内容上是有差别的. 由于已将电荷无限分割为电荷元,而电荷元在本身所在处所激发的电势为一无限小量,故以上两式中的电势 φ 也包括了电荷元在内的整个电荷在该处所激发的电势. 因此由式(9-36)和(9-37)算出的能量不但包括了各个带电体之间的相互作用能,也包含着每一个带电体自身各部分电荷之间的相互作用能(称为固有能),而在式(9-35)中却没有考虑每一个被看作点电荷的固有能. 为了区别起见,我们把由式(9-36)和(9-37)所表出的能量叫做静电能.

我们以电容器为例,来计算电容器两极板 A 和 B 上分别带有电荷 $\pm Q$ 、两极板间电势差为 $V_A - V_B$ 时所具有的静电能. 可以设想,电容器两极板的带电过程是不断地把微小电荷 $+dq$ 从原来中性的 B 极板迁移到 A 极板上的过程,因此在极板带电过程中,两极板上所带的电荷总是等值而异号的. 当电容器的两极板已带电到 $\pm q$ 时,两极间的电势差为 $V'_A - V'_B$,这时再把电荷 $+dq$ 从 B 板移到 A 板上,外力克服电场力所作的功为

$$dA = (V'_A - V'_B)dq$$

设电容器的电容为 C , 此时电容器的带电量为 q , 则 $V'_A - V'_B = \frac{q}{C}$, 所以

$$dA = \frac{q}{C}dq$$

因此当电容器从 $q=0$ 开始充电到带有电荷量 $q=Q$ 时, 外力所作的总功为

$$A = \int dA = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

这个功应等于带电电容器的静电能. 利用关系式 $Q=C(V_A - V_B)$, 带电电容器的静电能 W 又可写为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2} Q (V_A - V_B) \textcircled{1} \quad (9-38)$$

这个结果也可以从式(9-37)直接计算得到. 按式(9-37), 其静电能应为

$$W = \frac{1}{2} \iint \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \iint \varphi dq = \frac{1}{2} \iint V_A dq - \frac{1}{2} \iint V_B dq$$

上式中的两项分别是对带正电和带负电的极板积分. 不难算出

$$W = \frac{1}{2} (V_A - V_B) \int dq = \frac{1}{2} (V_A - V_B) Q$$

结果和用上面算法所得相同. 不论电容器的具体结构如何, 式(9-38)都是正确的, 它是计算电容器所储存电能的普遍公式.

3. 静电场的能量

从上面的讨论中我们知道, 在物体或电容器的带电过程中, 外力所作的功等于带电系统能量的增量, 而带电系统的形成过程实际上也就是建立电场的过程, 这说明带电系统的静电能总是和电

① 亦可写成 $W = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 = \frac{1}{2} QU_{AB}$, U_{AB} 表示 A 和 B 之间的电势差.

场的存在相联系着的. 下面我们将通过平行板电容器的特例, 来说明静电场具有能量, 带电系统的静电能也就是电场的能量, 而且分布在电场所占的整个空间之中.

设平行板电容器极板的面积为 S , 两极板间的距离为 d , 当电容器极板上的电荷量为 Q 时, 极板间的电势差 $U_{AB} = Ed$, 已知 $C = \epsilon \frac{S}{d}$, 将这些关系式代入式(9-38)中, 得

$$W = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

由此可见, 静电能可以用表征电场性质的场强 E 来表示, 而且和电场所占的体积 $V = Sd$ 成正比. 这表明电能贮藏在电场中. 由于平板电容器中电场是均匀分布的, 所贮藏的静电场能量也应该是均匀分布的, 因此电场中每单位体积的能量, 即静电场能量的体密度为

$$w_c = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} DE \quad (9-39)$$

能量体密度的单位为 J/m^3 . 上述结果虽是从均匀电场的特例中导出的, 但可以证明这是一个普遍适用的公式, 在非均匀电场和变化的电磁场中仍然是正确的, 只是此时的能量密度是逐点改变的.

要计算任一带电系统整个电场中所储存的总能量, 只要将电场所占空间分成许多体积元 dV , 然后把这许多体积元中的能量累加起来, 也就是求如下的积分

$$W = \iiint_V w_c dV = \iiint_V \frac{1}{2} DE dV \quad (9-40)$$

式中 w_c 是和每一个体积元 dV 相应的能量密度, 积分区域遍及整个电场空间 V .

在本节开始, 我们先讨论了带电系统的静电能, 所给公式(9-35)、(9-36)和(9-37)都是由电荷量及所在点处的电势来表示的, 这样, 静电能的存在源于电荷的存在, 似乎电荷是能量的携带

者. 另一方面, 式(9-39)和式(9-40)又表明, 静电能也可用场强来表出, 这又表明静电能是储存于电场中, 电场是电能的携带者. 在静电场中, 电荷和电场都不变化, 而电场总是伴随着电荷而存在, 因此我们无法用实验来检验电能究竟是以哪种方式储存的. 但是在交变电磁场的实验中, 已经证明了变化的场可以脱离电荷独立存在, 而且场的能量是能够以电磁波的形式在空间传播的, 这就直接证实了能量储存在场中的观点. 能量是物质固有的属性之一, 所以能量这个概念是不能与物质这个概念分割开来的. 静电场具有能量的结论, 证明静电场是一种特殊形态的物质.

例题9-9 计算均匀带电球体的静电能. 设球的半径为 R , 所带电荷量为 q , 球外为真空.

解 (1) 用式 $W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV$ 来计算. 已知电荷体密度为 $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, 均匀带电球体所激发的电场分布由例题8-9可知为

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} r & (r > R) \end{cases}$$

于是, 离球心 r 处的电势为

$$\varphi = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \cdot dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r \cdot dr = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

由此, 可得带电球体的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R \left(\frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{3}{20} \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 R}$$

(2) 用式 $W = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E^2 dV$ 来计算. 能量分布在空间中, 将球内、外的场强代入, 即可求出带电球体的静电场能量为

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left(\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \\
 &\quad \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\
 &\quad \frac{q^2}{40\pi\epsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{20} \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 R}
 \end{aligned}$$

两种方法结果相同.

如果把电子看作单纯的球形电荷, 可利用本例的结果估算其半径. 为了简化计算, 设想电子是一个半径为 r 的小球, 再假设电子电荷为均匀体分布, 则它具有的静电能为

$$W = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

或假设电子电荷为均匀面分布, 很容易算出它具有的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在估算电子半径的数量级时, 一般可以略去式中的系数而采用

$$W \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

如果认为电子的静止能起源于静电能, 则

$$m_e c^2 \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由此可得电子的半径为

$$r \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

必须指明, 由于至今人们对电子的内部结构和运动情况尚不清楚, 所以把电子看作是一个电荷为球形分布的粒子纯是一种设想, 因而上面算出的 r 并不真实反映电子的几何线度.

例题9-10 一平行板空气电容器的极板面积为 S 、间距为 d ，用电源充电后两极板上带电分别为 $\pm Q$ 。断开电源后再把两极板的距离拉开到 $2d$ 。求(1)外力克服两极板相互吸引力所作的功；(2)两极板之间的相互吸引力。(空气的电容率取为 ϵ_0 。)

解 (1) 两极板的间距为 d 和 $2d$ 时，平行板电容器的电容分别为

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{2d}$$

当极板上带电 $\pm Q$ 时所储的电能为

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S}, \quad W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot 2d}{\epsilon_0 S}$$

故两极板的间距拉开到 $2d$ 后电容器中电场能量的增量为

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S}$$

按功能原理，这一增量应等于外力所作的功 A ，即

$$A = \Delta W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S}$$

(2) 设两极板间的相互吸引力为 F ，拉开两极板时所加外力应等于 F ，外力所作的功 $A = Fd$ ，所以

$$F = \frac{A}{d} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

例题9-11 平行板空气电容器每极板的面积 $S = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ，极板间的距离 $d = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。今以厚度为 $d' = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的铜板平行地插入电容器内。(1)计算此时电容器的电容；(2)铜板离极板的距离对上述结果是否有影响？(3)使电容器充电到两极板的电势差为 300 V 后与电源断开，再把铜板从电容器中抽出，外界需作功多少？

解 (1) 铜板未插入前的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

设平行板电容器两极板上带有电荷 $\pm q$,面密度为 $\pm\sigma$,即 $\sigma = \frac{q}{S}$.在铜板平行地插入后,铜板的两表面上将分别产生感应电荷,面密度也为 $\pm\sigma$,如图9-40所示,此时空气中场强 $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ 不变,铜板中场强为零.两极板A、B间的电势差为

$$U = V_A - V_B = E_0 d_1 + E_0 d_2 = E_0(d - d')$$

所以铜板插入后的电容 C' 为

$$C' = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}$$

(2) 由上式可见, C' 的值与 d_1 和 d_2 无关(d_1 增大时, d_2 减小, $d_1 + d_2 = d - d'$ 不变),所以铜板离极板的距离不影响 C' 的值.

(3) 铜板未抽出时,电容器被充电到 $U = 300 \text{ V}$,此时所带电荷量 $Q = C'U$,电容器中所储静电能为

$$W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'}$$

当电容器与电源切断后再抽出铜板,电容器所储的静电能增为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

能量的增量 $W - W'$ 应等于外力所需作的功,即

$$A = \Delta W = W - W' = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'} \right) = \frac{Q^2 d'}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S d' U^2}{2(d - d')^2}$$

代入已知数据,可算得

$$A = 2.99 \times 10^{-6} \text{ J}$$

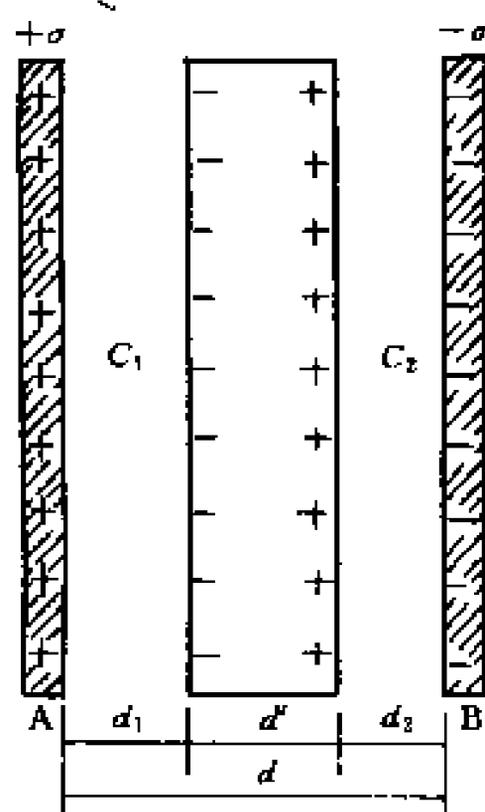


图9-40 插有平行铜板的平行板电容器

§ 9-9 铁电体 压电体 永电体

1. 铁电体

在各向同性的电介质中,电极化强度 P 和电介质中场强 E 成正比[式(9-12)],电介质的电极化率 χ_e 和电容率 ϵ 都与场强无关.但是也存在一些电介质,它们的极化规律(P 和 $\epsilon_0 E$ 的关系)有着复杂的非线性关系,在一定的温度范围内,它们的电容率并不是常量,而是随场强而变化的,并且在撤去外电场后,这些电介质会留有剩余的极化.为了和铁磁性物质(见 § 12-5)能保持磁化状态相类比,通常把这种性质叫做铁电性.具有铁电性的电介质则叫做铁电体,其中以钛酸钡陶瓷 (BaTiO_3)、酒石酸钾钠单晶 ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)等最为突出.

铁电体在电极化过程中将显示出电滞现象.例如,钛酸钡在电场中的极化规律是:在温度高于 120°C 时,电极化强度 P 与场强 E 成正比[图9-41(a)];温度低于 120°C 时, P 的变化并不与 E 成正比[图9-41(b)], P 的增长落后于 E 的增长.当外电场足够强时,极化达到饱和(如图中 P_s).此后,当 E 减小时, P 也随着减小,但并不按原来的曲线关系而减小.当 $E=0$ 时,电介质有剩余的极化(如图中 P_r 所示).当场强 E 的大小和方向作周期性变化时, P 与 E 的关系形成如图9-41(b)所示回线 $ABCD$,称为电滞回线.铁电体的相对电容率 ϵ_r 并非常量,而是随外加电场的变化而变化的,从变化关系可观察到,在很宽的电场强度数值范围内有很高的 ϵ_r 值,最大可达到数千以上.铁电体可以用作绝缘材料,适应各种不同的需要,特别是用来制作电容器,其电容值将大大地增加.也可以利用它的电容率随电压变化的特性,制成非线性的电容器,应用于振荡电路及介质放大器和倍频器中.

另外,铁电体还有奇特的光学性质,能在强光作用下产生非线性

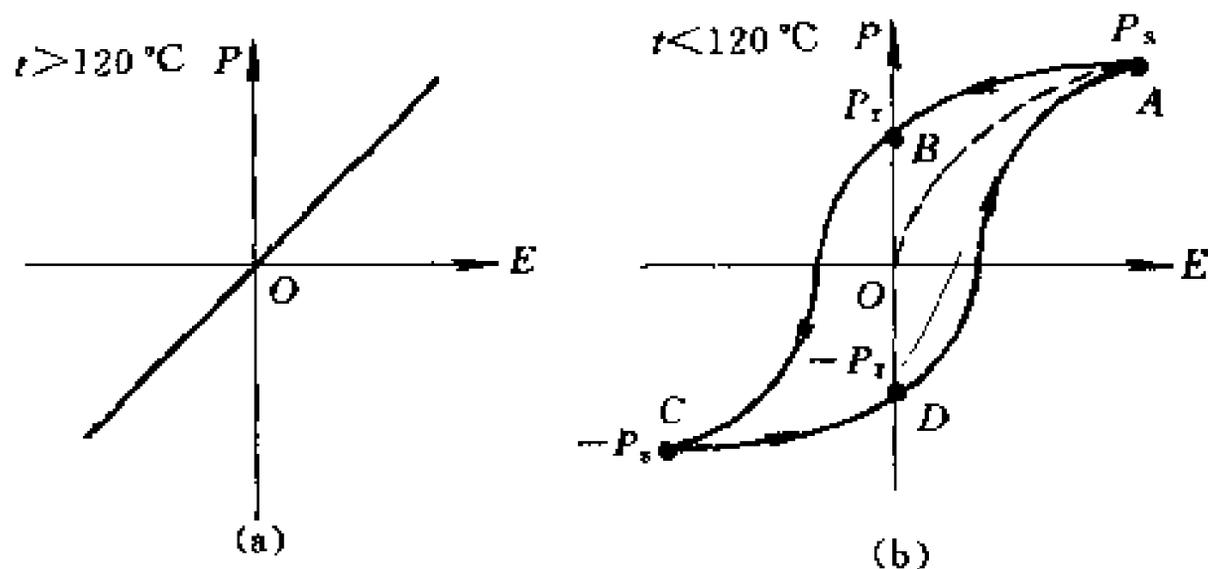


图9-41 钛酸钡的 P 与 E 之间的关系

性效应,这些效应在现代激光技术、全息照相中都有着广泛的应用.

2. 压电体

本章前面各节所讨论的电介质的极化,都是由外电场引起的,但某些离子型晶体的电介质(如石英、电气石、酒石酸钾钠、钛酸钡、糖、闪锌矿等),由于结晶点阵的有规则分布,当发生机械变形(例如拉伸或压缩)时,也能产生电极化现象,称为压电现象.石英晶体在 10 N/cm^2 的压力下,于承受正压力的两个表面上出现正负电荷,产生约 0.5 V 的电势差.

压电现象有其逆现象,亦即在晶体带电时或在电场中时,晶体的大小将发生变化,即伸长或缩短,这种逆现象称为电致伸缩.目前已知的压电体超过数千种,除前述的离子型晶体电介质外,非晶、聚合物等材料以及在金属、半导体、铁磁体和生物体(如骨骼)中也发现有压电性.研究表明,凡材料的微观结构中电荷分布极不对称的,一般都具有压电性.

在现代技术上,上述两种现象都有广泛的应用.一般地说,压电现象可用来变机械振动为电振荡,电致伸缩可用来变电振荡为机械振动.例如,在两块平行金属板之间放置石英片,再在金属板上加上交变电压,而且使交变电压的频率与石英片的固有频率相

同,石英片将发生机械共振,利用压电石英可以获得超声波.在无线电技术上压电石英可以制成稳定性很高的高频振荡器,可作为时间的标准(石英钟)及选择性灵敏的滤波器等.

3. 永电体

前面所述电介质,在外电场(或外力)作用下会产生极化效应,当外加条件撤去后,除铁电体能保留剩余极化外,其他电介质的极化效应也随之消失.但是有一类物质,在外界条件撤销后,仍能长期保留其极化状态,且与铁电体不同,它的电极化状态不受外电场的影响,这类物体叫做永电体(又称驻极体).

1919年,日本物理学家江口元太郎用巴西棕榈蜡和树脂混合熔融,略加蜂蜡,然后在强电场下使之凝固,首先成功地制成一块能保持极化状态数月甚至数年的永电体.现在知道,一些有机材料(蜡、碳氢化合物、固体酸)和无机材料(钛酸钡、钛酸钙等)都可用来制备永电体,最有前途的是合成有机高分子材料.20世纪40年代末,人们开始研究聚合物永电体,直到60年代才有所突破,并从实验室研究发展到工业产品的问世.

永电体的制备方法很多,按制备方法分类有:热驻极法、电驻极法、光和磁驻极法等.各种制备方法的过程都是在电介质极化时用加热后冷却、在暗处用强光照射或用电晕放电向电介质注入离子,使整个电介质产生一个能长期保留下来的电矩,并在永电体上出现一定分布的电荷面密度.永电体的特性用电荷面密度 σ 来表征,探索新的永电体,也就是要找到一个具有合理且稳定 σ 分布的永电体.

永电体有多方面的应用,其中最重要的领域是永电体换能器(传感器),如用高分子薄膜永电体作为振动元件的传声器,它比一般电容传声器有较好的频率响应及灵敏度高等优点.永电体换能器除用在麦克风、耳机和电话盘中外,在一些近代技术中,如超声全息技术、放射性检测、静电式空气过滤等方面也得到应用.

思考题

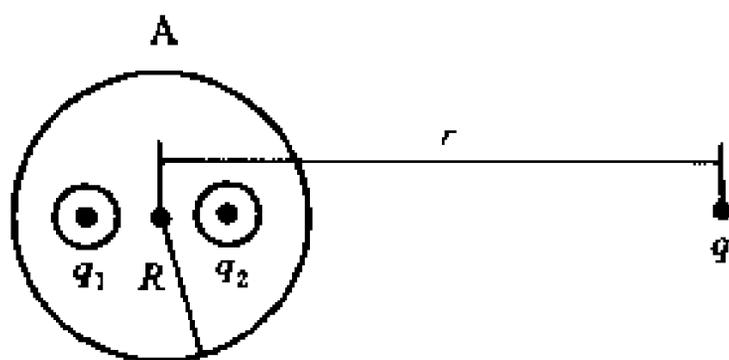
9-1 将一电中性的导体放在静电场中,在导体上感应出来的正负电荷量是否一定相等?这时导体是否是等势体?如果在电场中把导体分开为两部分,则一部分导体上带正电,另一部分导体上带负电,这时两部分导体的电势是否相等?

9-2 一个孤立导体球带有电荷量 Q ,其表面附近的场强沿什么方向?当我们把另一带电体移近这个导体球时,球表面附近的场强将沿什么方向?其上电荷分布是否均匀?其表面是否等电势?电势有没有变化?球体内任一点的场强有无变化?

9-3 如何能使导体

- (1) 净电荷为零而电势不为零;
- (2) 有过剩的正或负电荷,而其电势为零;
- (3) 有过剩的负电荷而其电势为正;
- (4) 有过剩的正电荷而其电势为负.

9-4 如图所示,在金属球 A 内有两个球形空腔,此金属球体上原来不带电,在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2 ,求金属球 A 的电荷分布.此外,在金属球外很远处放置一点电荷 q ($r \gg R$),问 q_1 、 q_2 、 q 各受力多少?



思考题9-4图

9-5 离点电荷 q 为 r 的 P 点的场强为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,现将点电荷用一金属球壳包围起来,分别讨论 q 在球心或不在球心时 P 点的场强是否改变?若改用金属圆筒包围电荷, P 点的场强是否改变?(只讨论 P 点在金属球壳及在金属圆筒外的情况.)

9-6 一带电导体放在封闭的金属壳内部,

- (1) 若将另一带电导体从外面移近金属壳,壳内的电场是否会改变?金

属壳及壳内带电体的电势是否会改变?金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变?

(2) 若将金属壳内部的带电导体在壳内移动或与壳接触时,壳外部的电场是否会改变?

(3) 如果壳内有两个带异号等值电荷的带电体,则壳外的电场如何?

9-7 (1) 一导体球上不带电,其电容是否为零?

(2) 当平行板电容器的两极板上分别带上等值同号电荷时,其电容值是否改变?

(3) 当平行板电容器的两极板上分别带上同号不等值的电荷时,其电容值是否改变?

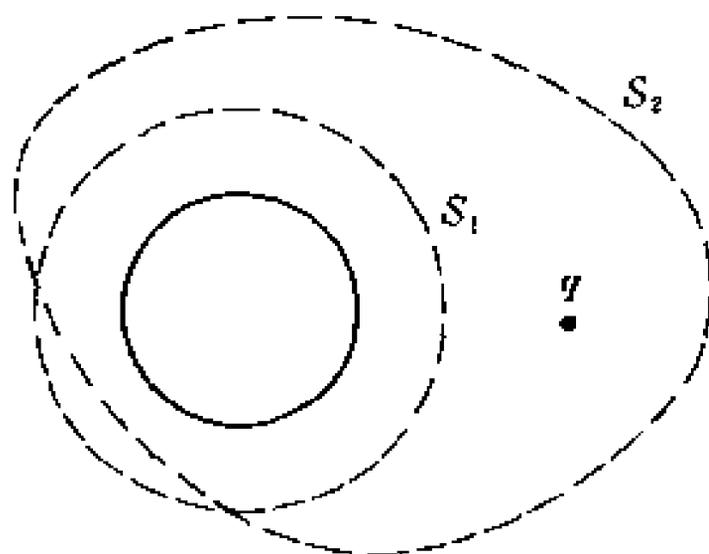
9-8 有两个彼此远离的金属球,一大一小,所带电荷同号等量,问这两个球的电势是否相等?其电容是否相等?如果用一根细导线把两球相连接,是否会有电荷流动?

9-9 有一平板电容器,保持板上电荷量不变(充电后切断电源),现在使两极板间的距离 d 增大,试问:两极板的电势差有何变化?极板间的电场强度有何变化?电容是增大还是减小?

9-10 平板电容器如保持电压不变(接上电源),增大极板间距离,则极板上的电荷、极板间的电场强度、平板电容器的电容有何变化?

9-11 一对相同的电容器,分别串联、并联后连接到相同的电源上后,问哪一种情况用手去触及极板较为危险?说明其原因。

9-12 在一均匀电介质球外放一点电荷 q ,分别作如图所示的两个闭合曲面 S_1 和 S_2 ,求通过两闭合曲面的 E 通量、 D 通量.在这种情况下,能否找到



思考题9-12图

一合适的闭合曲面,可应用高斯定理求出闭合曲面上各点的场强?

9-13 (1) 将平行板电容器的两极板接上电源以维持其间电压不变,用相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质填满极板间,极板上的电荷量为原来的几倍? 电场为原来的几倍?

(2) 若充电后切断电源,然后再填满介质,情况又如何?

9-14 在球壳形的均匀电介质中心放置一点电荷 q ,试画出电介质球壳内外的 E 和 D 线的分布. 在电介质球壳内外的场强和没有介质球壳时是否相同?为什么?

9-15 (1) 一个带电的金属球壳里充填了均匀电介质,球外是真空,此球壳的电势是否为 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$?为什么?

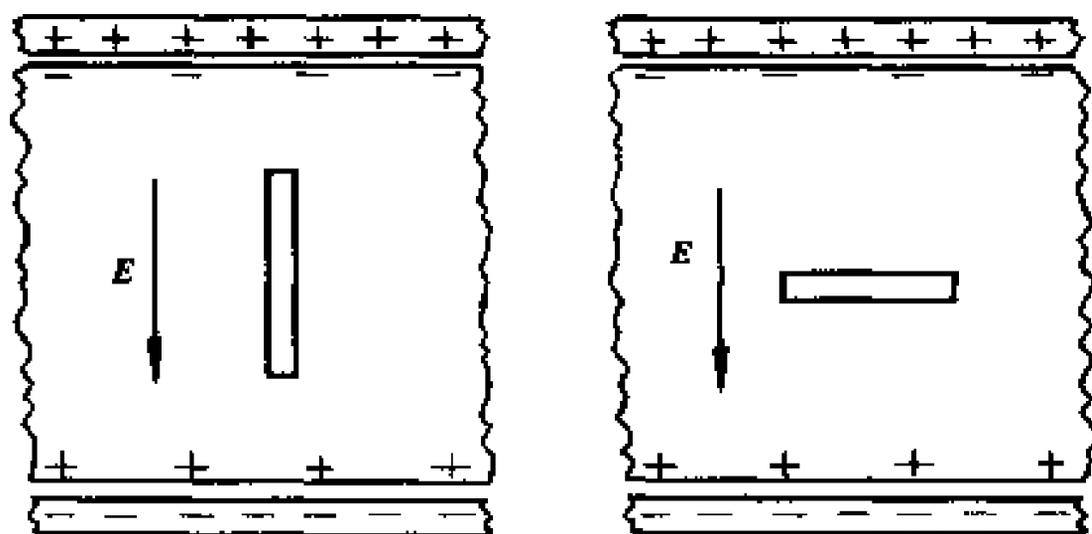
(2) 若球壳内为真空,球壳外充满无限大均匀电介质,这时球壳的电势为多少?(Q 为球壳上的自由电荷, R 为球壳半径, ϵ_r 为介质的相对电容率.)

9-16 平行板电容器两极板间充满均匀电介质后电介质中的场强为 E ,若

(1) 在电介质中挖一针状小空腔,空腔垂直极板面;

(2) 在电介质中挖一平行于极板面的扁平圆柱形空腔.

则两种情况下空腔中心点的 E' 和 D' 与电介质中的 E 和 D 的关系如何?



思考题9-16图

9-17 为什么点电荷系统的相互作用能的公式 $W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$ 中有因子 $\frac{1}{2}$, 而点电荷在外电场中的电势能公式 $W = qV$ 中没有这个因子?

9-18 真空中两个点电荷 q_1 、 q_2 在空间激发的合场强 $E = E_1 + E_2$, 两点电荷系的静电场能为

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV =$$

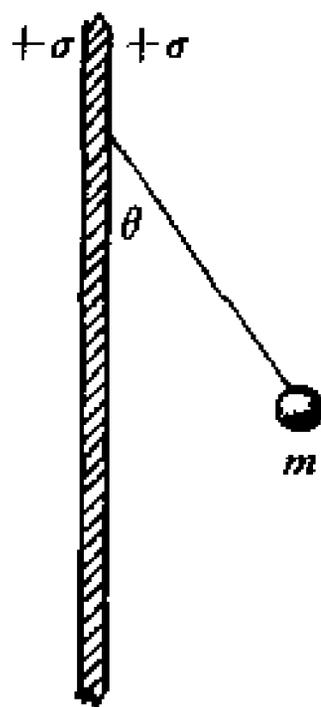
$$\iiint_V \frac{1}{2} \epsilon \cdot \mathbf{E}_1^2 dV + \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV$$

- (1) 说明上式相加的三项能量的物理意义；
 (2) q_1, q_2 之间相互作用能是指哪一项？
 (3) 将 q_1 或 q_2 从给定位置移到另一位置，电场力做功改变静电场能又是指哪些项？

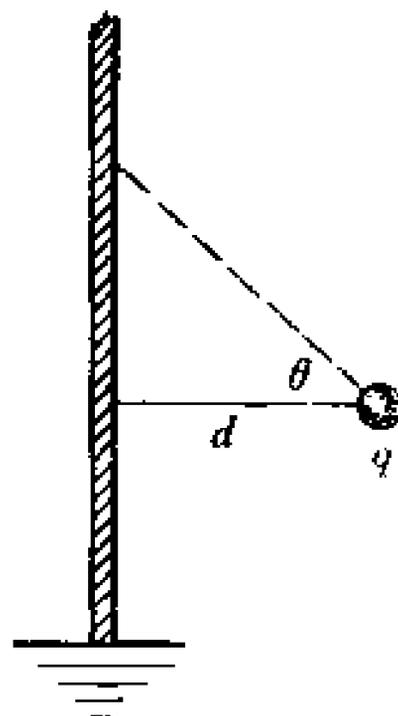
习 题

9-1 一块很大的带电金属薄板，其电荷面密度为 σ ，离金属板为 d 处有一质量为 m 、电荷量为 $-q$ 的点电荷从静止释放，计算电荷的加速度及落到板上时的速度和时间。（忽略重力和 $-q$ 对金属板上电荷分布的影响。）

9-2 有一块很大的带电金属板及一小球，已知小球的质量为 $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ g}$ ，带有电荷量 $q = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。小球悬挂在一丝线的下端，平衡时悬线与金属板面间的夹角为 30° ，如图所示。试计算带电金属板上的电荷面密度 σ 。



习题9-2图



习题9-5图

9-3 证明在静电平衡时，导体表面某面元 ΔS 所受的静电力为 $F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S \mathbf{e}_n$ 。

9-4 一质量为 m 、面积为 S 的均质薄金属盘，放置在一无限大导体平板上，平板水平放置。最初盘和平板都不带电，然后逐渐使它们带电。问电荷面密度增加到何值时，金属盘将离开平板。

9-5 在一无限大接地导体平板附近有一点电荷 q ，它离板面的距离为 d 。求导体表面上各点的感应电荷面密度 σ 。

9-6 半径为 r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) 的两个同心导体球壳互相绝缘，现把 $+q$ 的电

荷量给予内球,求:

- (1) 外球的电荷量及电势;
- (2) 把外球接地后再重新绝缘,外球的电荷量及电势;
- (3) 然后把内球接地,内球的电荷量及外球的电势的改变.

9-7 点电荷 $q=4.0 \times 10^{-10} \text{ C}$,处在导体球壳的中心,壳的内外半径分别为 $R_1=2.0 \text{ cm}$ 和 $R_2=3.0 \text{ cm}$,求:

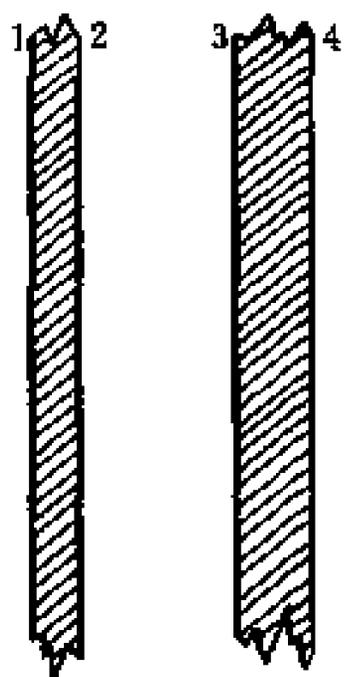
- (1) 导体球壳的电势;
- (2) 离球心 $r=1.0 \text{ cm}$ 处的电势;
- (3) 把点电荷移开球心 1.0 cm 后导体球壳的电势.

9-8 有直径为 16 cm 及 10 cm 的非常薄的两个铜制球壳,同心放置时,内球的电势为 2700 V ,外球带有电荷量为 $8.0 \times 10^{-9} \text{ C}$. 现把内球和外球接触,两球的电势各变化多少?

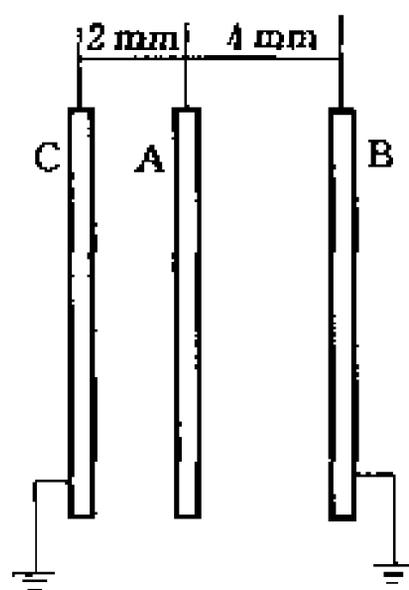
9-9 半径为 $R_1=1.0 \text{ cm}$ 的导体球,带有电荷 $q_1=1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$,球外有一个内、外半径分别为 $R_2=3.0 \text{ cm}$ 、 $R_3=4.0 \text{ cm}$ 的同心导体球壳,壳上带有电荷 $Q=11 \times 10^{-10} \text{ C}$,试计算:

- (1) 两球的电势 V_1 和 V_2 ;
- (2) 用导线把球和壳联接在一起后 V_1 和 V_2 分别是多少?
- (3) 若外球接地, V_1 和 V_2 为多少?

9-10 两块无限大带电平板导体如图排列,证明在(1)相向的两面上(图中的2和3),其电荷面密度总是大小相等而符号相反;(2)背向的两面上(图中的1和4),其电荷面密度总是大小相等且符号相同.



习题9-10图



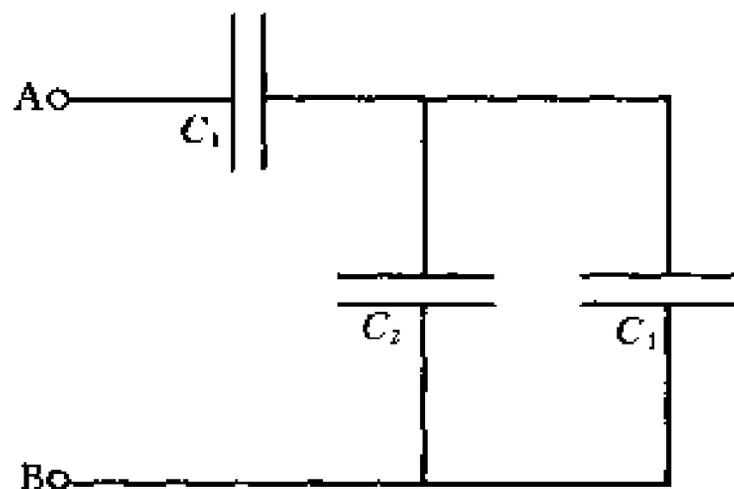
习题9-11图

9-11 三平行金属板 A、B、C 面积均为 200 cm^2 , A、B 间相距 4.0 mm , A、C 间相距 2.0 mm , B 和 C 两板都接地. 如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, 求:

- (1) B、C 板上感应电荷;
- (2) A 板的电势.

9-12 两个半径相同的金属球, 其中一个实心的, 另一个空心的, 电容是否相同? 如果把地球看作半径为 6400 km 的球形导体, 试计算其电容.

9-13 如图所示, 证明 A、B 间的总电容等于 C_2 的条件是 $C_2 = 0.618C_1$.



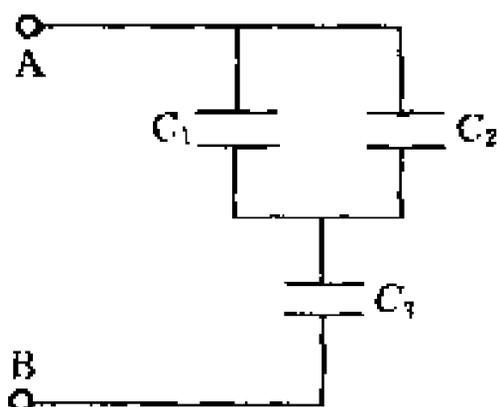
习题9-13图

9-14 如图, $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 5.0 \mu\text{F}$, $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$.

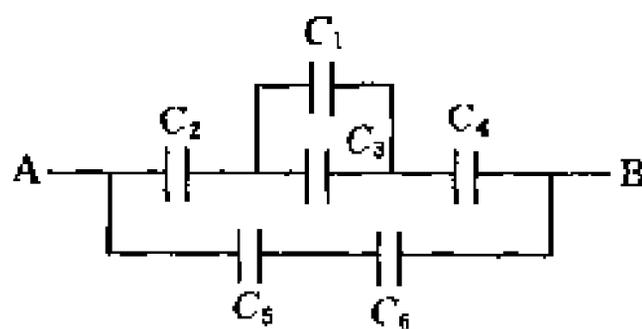
- (1) 求 A、B 间的电容;
- (2) 在 A、B 间加上 100 V 的电压, 求 C_2 上的电荷量和电压;
- (3) 如果 C_1 被击穿, 问 C_3 上的电荷量和电压各是多少?

9-15 如图, $C_1 = C_2 = C_4 = 2.0 \mu\text{F}$, $C_3 = C_5 = C_6 = 4.0 \mu\text{F}$.

- (1) 求 A、B 间的电容;
- (2) 如 A、B 间的电压为 200 V , 求每块板上的电荷量;
- (3) 求出每一电容器中贮藏的能量.



习题9-14图



习题9-15图

9-16 一块相对电容率 $\epsilon_r = 5$ 的扁平电介质, 垂直放置于 $D = 1 \text{ C/m}^2$ 的均匀电场中, 已知电介质的体积为 0.1 m^3 , 并且是均匀极化, 求:

- (1) 电介质里的电极化强度;
- (2) 电介质总的电偶极矩.

9-17 一扁平的电介质板 ($\epsilon_r = 4$) 垂直放在一均匀电场里, 如果电介质表面上的极化电荷面密度为 $\sigma' = 0.5 \text{ C/m}^2$, 求:

- (1) 电介质里的电极化强度和电位移;
- (2) 介质板外的电位移;
- (3) 介质板里和板外的场强.

9-18 平板电容器极板间的距离为 d , 保持极板上的电荷不变, 把相对电容率为 ϵ_r 、厚度为 $\delta (< d)$ 的玻璃板插入极板间, 求无玻璃板时和插入玻璃板后极板间电势差的比.

9-19 两个电容相同的平行板电容器, 串联后接入电动势为 \mathcal{E} 的电源, 若不切断电源, 在第二个电容器中充以相对电容率 $\epsilon_r = 7$ 的电介质, 那么第一个电容器两极板间的电势差将改变多少倍.

9-20 两个相同的电容器并联后, 用电压 U 的电源充电后切断电源, 然后在其中一个电容器中充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 求此时极板间的电势差.

9-21 两个同心球壳组成的球形电容器, 半径为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$), 通过其中心的平面把它一分为二, 其中一半是空气, 另一半充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 试证明其电容等于用相对电容率为 $\frac{1 + \epsilon_r}{2}$ 的电介质充满全部电容器的电容.

9-22 一个可变电容器, 由于某种原因使所有动片相对定片都产生了一个相对位移, 使得两个相邻的极板间隔之比为 $1:2$, 问电容器的电容与原来的相比改变了多少?

9-23 两块相互平行的大金属板, 板面积均为 S , 间距为 d , 用电源使两板分别维持在电势 V 和零电势. 现将第三块相同面积而厚度可略的金属板插在两板的正中间, 已知该板上原带有电荷量 q , 求该板的电势.

9-24 一平板电容器 (极板面积为 S , 间距为 d) 中充满两种介质 (如图), 设两种介质在极板间的面积比 $\frac{S_1}{S_2} = 3$, 试计算其电容. 如两电介质尺寸相同, 电容又如何?

9-25 平板电容器 (极板面积为 S , 间距为 d) 中间有两层厚度各为 d_1 和

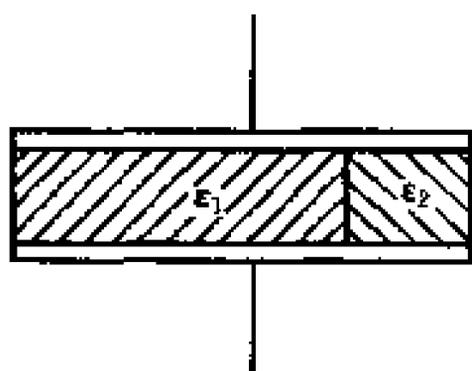
$d_2(d-d_1+d_2)$ 、电容率各为 ϵ_1 和 ϵ_2 的电介质, 试计算其电容. 如 $d_1=d_2$, 则电容又如何?

9-26 一平行板电容器的电容为 100 pF , 极板的面积为 100 cm^2 , 极板间充满相对电容率为 5.4 的云母电介质, 当极板上电势差为 50 V 时, 求:

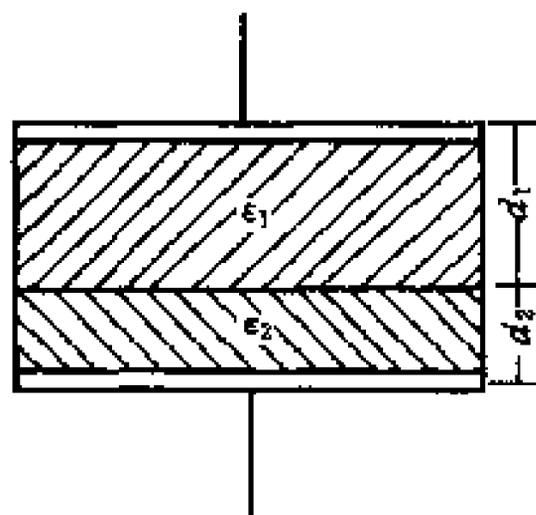
- (1) 云母中的场强 E ;
- (2) 电容器极板上的自由电荷;
- (3) 云母介质面上的极化面电荷.

9-27 有两块平行板, 面积各为 100 cm^2 , 板上带有 $8.9 \times 10^{-7} \text{ C}$ 的等值异号电荷, 两板间充以介电物质, 已知介质内部电场强度为 $1.4 \times 10^6 \text{ V/m}$, 求:

- (1) 介质的相对电容率;
- (2) 介质面上的极化面电荷.



习题9-24图



习题9-25图

9-28 在一平行板电容器的两板上带有等值异号的电荷, 两板间的距离为 5.0 mm , 充以 $\epsilon_r = 3$ 的介质, 介质中的电场强度为 $1.0 \times 10^6 \text{ V/m}$, 求:

- (1) 介质中的电位移矢量;
- (2) 平板上的自由电荷密度;
- (3) 介质中的极化强度;
- (4) 介质面上的极化电荷面密度;
- (5) 平行板上自由电荷及介质面上极化电荷所产生的那一部分电场强度.

9-29 两板相距为 5.0 mm 的平板电容器, 板上带有等值异号的电荷, 电荷的面密度为 $20 \text{ } \mu\text{C/m}^2$, 两板间平行于板面放置两片电介质, 一为 2.0 mm 厚, 相对电容率为 3 , 另一为 3.0 mm 厚, 相对电容率为 4 , 求:

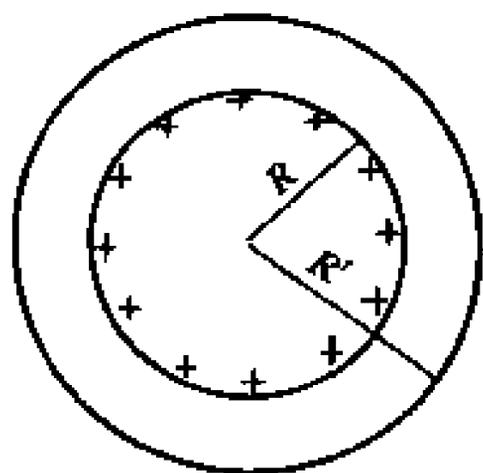
- (1) 各介质中的电位移矢量；
- (2) 各介质中的电场强度；
- (3) 各介质面上的极化电荷面密度。

9-30 在半径为 R 的金属球之外包有一层均匀介质层(见图),外半径为 R' . 设电介质的相对电容率为 ϵ_r , 金属球的电荷量为 Q , 求:

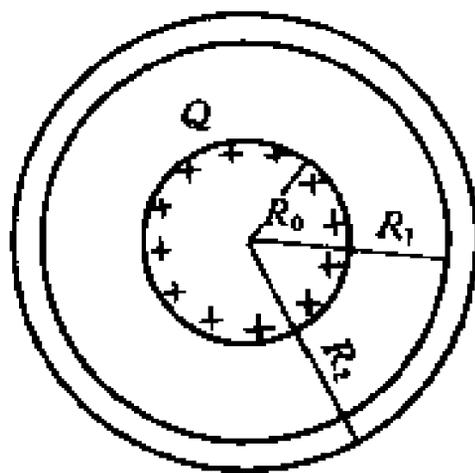
- (1) 介质层内、外的场强分布；
- (2) 介质层内、外的电势分布；
- (3) 金属球的电势。

9-31 半径为 R_0 的导体球带有电荷 Q , 球外有一层均匀电介质的同心球壳, 其内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 相对电容率为 ϵ_r (见图), 求:

- (1) 介质内外的电场强度 E 和电位移 D ;
- (2) 介质内的极化强度 P 和表面上的极化电荷面密度 σ' 。



习题9-30图



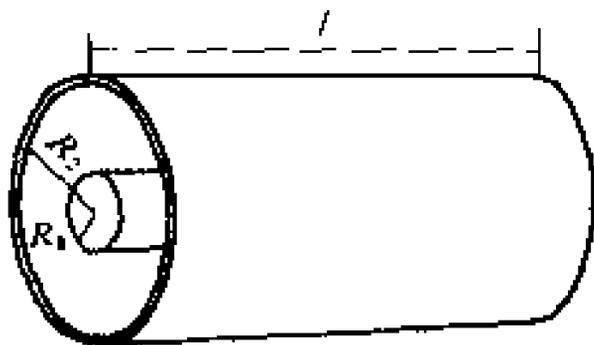
习题9-31图

9-32 圆柱形电容器是由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成, 圆筒内半径为 R_2 , 长为 l , 其间充满了相对电容率为 ϵ_r 的介质(见图). 设导线沿轴线单位长度上的电荷为 λ_0 , 圆筒上单位长度的电荷为 $-\lambda_0$, 忽略边缘效应. 求:

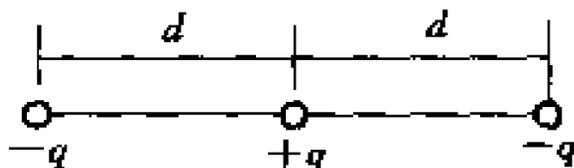
- (1) 介质中的电场强度 E 、电位移 D 和极化强度 P ;
- (2) 介质表面的极化电荷面密度 σ' 。

9-33 一块石蜡($\epsilon_r = 2.1$)平面上方(空气)的场强 E 与石蜡平面的交角为 45° , 试求石蜡内部场强与平面的交角。

9-34 一分界面左、右两侧电介质的相对电容率分别 $\epsilon_{r1} = 3$ 和 $\epsilon_{r2} = 7$. 设在分界面左侧的场强大小为 $E_1 = 10^4 \text{ V/m}$, 方向与界面法线成 45° 角, 且指向左侧. 求分界面右侧的场强 E_2 。



习题9-32图



习题9-35图

9-35 三个点电荷位置如图,试计算:

- (1) 任两个电荷间的相互作用能;
- (2) 这电荷系统的相互作用能.

9-36 三个相同的点电荷放置在等边三角形的各顶角上,设三角形的边长为 l ,顶点上的电荷都是 q ,计算电荷系的相互作用能.如果三角形中心放置电荷 $-\frac{\sqrt{3}}{3}q$,计算中心电荷在其余三电荷的外电场中的电势能.

9-37 重原子的核可粗略地看作是电荷密度恒定的物质小球,电荷体密度 $\rho = \frac{4}{3} \times 10^{25} \text{ C/m}^3$.如果一总电荷量 $Q = 92e$ 的铀核分裂为两个带有等量电荷、半径相同的核相离远去,求在此过程中电势能变化多少,用 MeV 表示.(设分裂后仍保持原来的电荷体密度.)

9-38 电容分别为 C_1 和 C_2 的两个电容器,把它们并联充电到电压 U 和把它们串联充电到电压 $2U$,在电容器组中,哪种形式储存的电荷量、能量大些?大多少?

9-39 半径为 2.0 cm 的导体球,外套同心的导体球壳,壳的内外半径分别为 4.0 cm 和 5.0 cm ,球与壳之间是空气,壳外也是空气,当内球的电荷量为 $3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 时,

- (1) 这个系统储藏了多少电能?
- (2) 如果用导线把壳与球联在一起,结果如何?

9-40 一空气电容器充电后切断电源,然后灌入煤油,问电容器的能量有何变化?如果在灌油时电容器一直与电源相连,能量又如何变化?

9-41 两个相同的空气电容器,其电容都是 $0.90 \times 10^{-9} \text{ F}$,都充电到电压各为 900 V 后断开电源,把其中之一浸入煤油 ($\epsilon_r = 2$) 中,然后把两个电容器并联,求:

- (1) 浸入煤油过程中损失的静电场能;

(2) 并联过程中损失的静电场能.

9-42 一平行板电容器有两层介质, $\epsilon_1=4$, $\epsilon_2=2$, 厚度为 $d_1=2.0\text{ mm}$, $d_2=3.0\text{ mm}$, 极板面积为 $S=40\text{ cm}^2$, 两极板间电压为 200 V . 计算:

(1) 每层介质中的电场能量密度;

(2) 每层介质中的总电能;

(3) 用式 $\frac{1}{2}qU$ 计算电容器的总电能.

9-43 电容 $C_1=4\text{ }\mu\text{F}$ 的电容器在 800 V 的电势差下充电, 然后切断电源, 并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为 $C_2=6\text{ }\mu\text{F}$ 的两极板相连, 求:

(1) 每个电容器极板所带电荷量;

(2) 连接前后的静电场能.

9-44 两个同轴的圆柱, 长度都是 l , 半径分别为 R_1 及 R_2 , 这两个圆柱带有等值异号电荷 Q , 两圆柱之间充满电容率为 ϵ 的电介质.

(1) 在半径为 r ($R_1 < r < R_2$) 厚度为 dr 的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少?

(2) 这柱壳中的总电场能是多少?

(3) 电介质中的总电场能是多少?

(4) 从电介质中的总电场能求圆柱形电容器的电容.

9-45 两个半径都是 R 、电荷量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的金属小球相距 r , 设 $r \gg R$, 计算系统的静电能. 在释放两球后, 两球相互吸引而相碰时的速率多大? 如果(1)两球的质量相等;(2)带正电荷小球的质量比带负电荷小球的质量大很多(按经典理论计算).

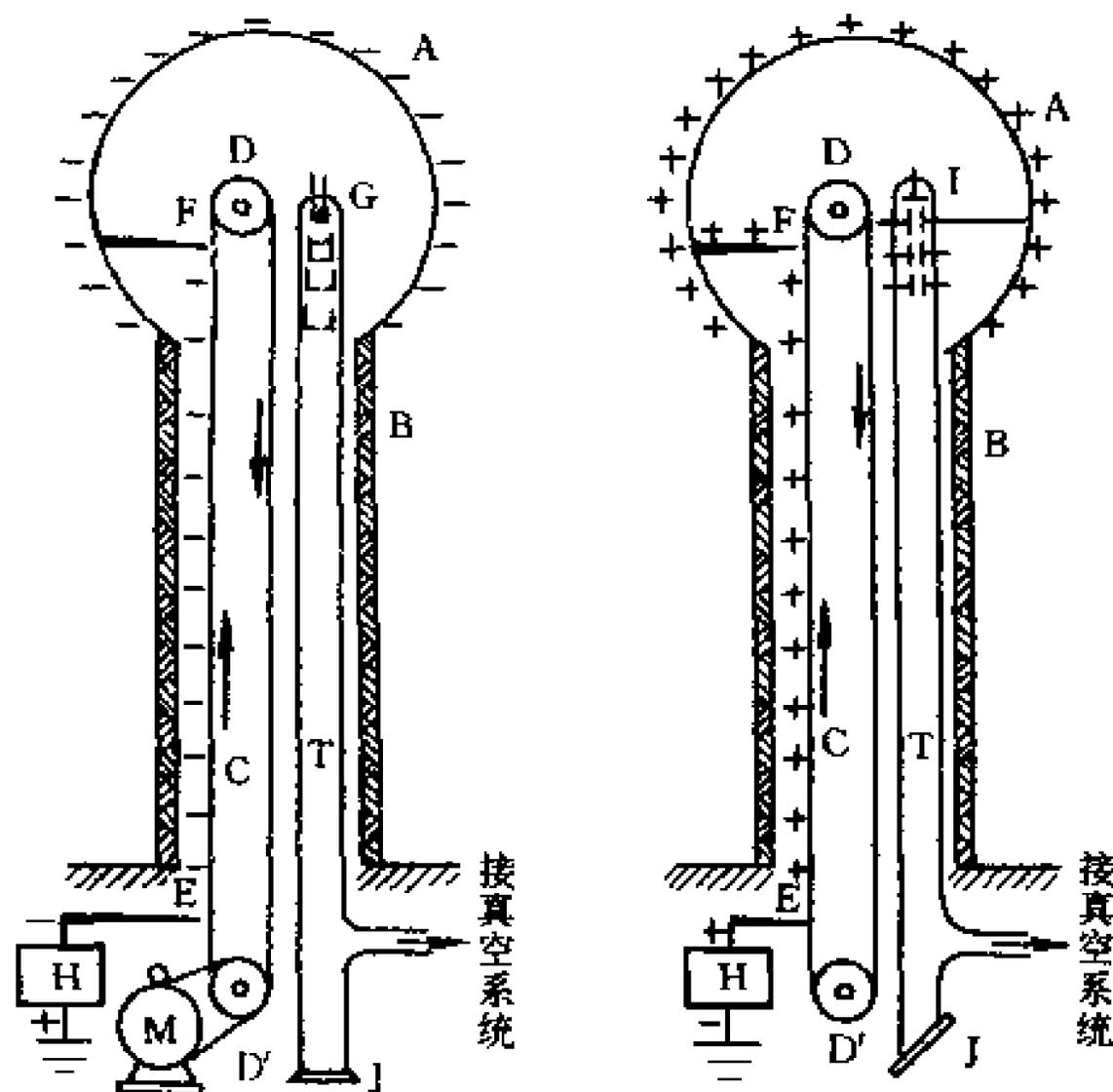
阅读材料 C

静电现象的应用

1. 范德格拉夫(R. J. Van de Graaff)静电起电机

利用导体带电时的静电特性和尖端现象, 可使导体连续不断地带有大量电荷, 这样的装置称为静电起电机. 范德格拉夫起电机

是一种新型的静电起电机,大型的范德格拉夫起电机能产生 10^7 V以上的高电压,是研究原子核反应时用来加速带电粒子的重要设备之一,它的构造和工作原理可用图 G-1来说明.



(a)电子静电加速器

(b)质子静电加速器

图 G 1 范德格拉夫大静电起电机和静电加速器的示意图

图 G-1(a)中的 A 是空心金属球壳,由绝缘柱 B 支撑.绝缘柱内有套在两个滑轮 D 和 D' 上的传送带 C(由橡胶或丝织物制成),下面的滑轮用电动机 M 拖动,使传送带不停地运转.放电针 E 和刮电针 F 由正对着绝缘传送带的一排尖齿的金属针组成,放电针 E 与 $(5\sim 10)\times 10^4$ V 的高压直流电源 H 的负极相接,H 的正极接地.由于放电针 E 的尖端放电,使传送带上带有负电荷.当负电荷随传送带移到刮电针 F 附近时,负电荷就通过 F 而传递到金属球 A 的外表面上.随着传送带不停地将负电荷输送到金属球 A 上,球上的负电荷就愈积愈多,负电势也愈来愈大.为了使球 A 有很

高的负电势,通常要把整个装置放在充有几兆帕的干燥气体(如氮、二氧化碳、氟里昂等气体)的密封钢筒内,这样金属球 A 上的负电势就可达到几兆伏。

在金属球 A 内可装有抽成真空的加速管 T,加速管的上端是能产生电子束的电子枪 G,由于金属球相对于外界具有高电势差,因此当电子束在金属球壳内进入加速管之后,将在强电场的作用下,由上而下地作加速运动,电子获得很大的动能,当它轰击在加速管下端的靶 J 上时,便能产生射线。例如,用金作靶时会产生 γ 射线;用铝作靶时会产生 β 射线。此外,也可将被加速的电子束从加速器中引出,供科研、医疗和生产上应用。

如图 G-1(b)所示的静电起电机中,把电源 H 的负极接地,把正极接放电针 E,使 A 球获得很高的正电势,可用来加速带正电的粒子。例如,用离子源 I 产生质子流注入加速管中,使质子加速到一定的高能量。这种被加速的质子轰击在不同材料制成的靶上,可产生各种射线或引起核反应。如果用它加速离子束,则可使离子注入材料中以达到预定的渗透作用,这就是新发展的离子注入技术。

经静电加速器加速的带电粒子的能量十分稳定,并可以进行连续调节。被加速粒子的能量可达 10 MeV,但静电加速器还只是一种低能加速器。

2. 静电除尘

在制造手表、光学仪器、半导体元件等精密器件时,车间里要求尽量降低空气中的含尘量,否则由于尘埃的吸附而会影响产品的质量。在燃煤的火力发电厂,每天从烟囱里排出多达数百吨的灰尘,如不采取措施,将使大气遭受严重的污染,从而严重损害人体的健康以及影响周围其他工农业的正常生产。因此,必须对车间里的空气及从烟囱中排出的烟气进行除尘处理。

静电除尘是利用气体放电原理设计的一种有效的除尘方法,现代的除尘装置能排除烟气中的煤灰或尘埃高达 99% 以上。下面

用图 G-2 来说明静电除尘的基本工作原理, 图中 A 是烟气入口、B 是净气出口、C 是尘埃出口、D 是重物、E 是绝缘子。高压电源(一般用 40~1 000 kV)的两极分别与输送管中心的金属丝和管壁相接, 在管中形成一个指向金属丝的电场。因为金属丝的半径很小, 所以在金属丝附近形成一个极强的电场区, 足以引起电晕放电, 结果使进入输送管的烟气形成正、负离子及电子。当电子和负离子在不均匀电场中向管壁加速运动时, 在气流中与尘埃相碰, 负离子便被吸附在尘埃上, 使大部分尘埃粒子带上负电, 并在不均匀电场作用下向管壁加速运动, 聚积在带高压正电的管道内壁上, 然后用振动或水冲的方法, 把在管壁上堆积成团的尘埃收集于管底, 而净气则从 B 口排出, 这就达到了除尘的目的, 同时, 还可以从排出的烟灰中回收到一些有价值的金属氧化物。

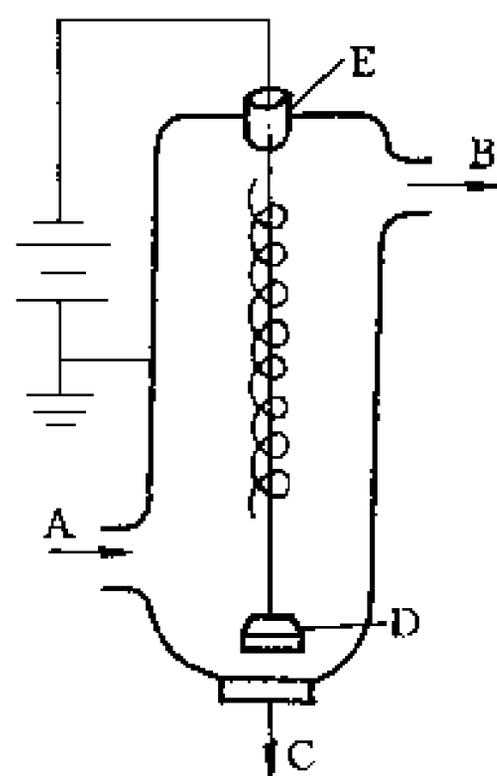


图 G-2 静电除尘装置示意图

3. 静电复印

静电复印机是依据静电电子照相原理设计而成的, 其基本思想是在光导材料上形成与原稿相对应的文字和图象。目前, 它已成为各级办事机构、研究室及图书馆等的必备设备, 而且近代复印机的功能仍在不断开发中。

静电复印术的基本过程如图 G-3 所示。首先在一底板表面(或滚筒)上涂一层在黑暗中是不良导体而在光照下是良导体的光导材料(常用硒或硒化合物), 并在黑暗中使光导面上带有正电荷, 如图 G-3(a)。然后将待印文件通过光源及透镜进行曝光, 使在光导面上形成不同的感光区, 即形成各区域电荷密度不同、电场也不同且与文件相对应的所谓“静电潜象”[图 G-3(b)]。接着再将带负电荷的墨粉撒在光导面上, 这样墨粉就在静电潜象的静电力作用下,

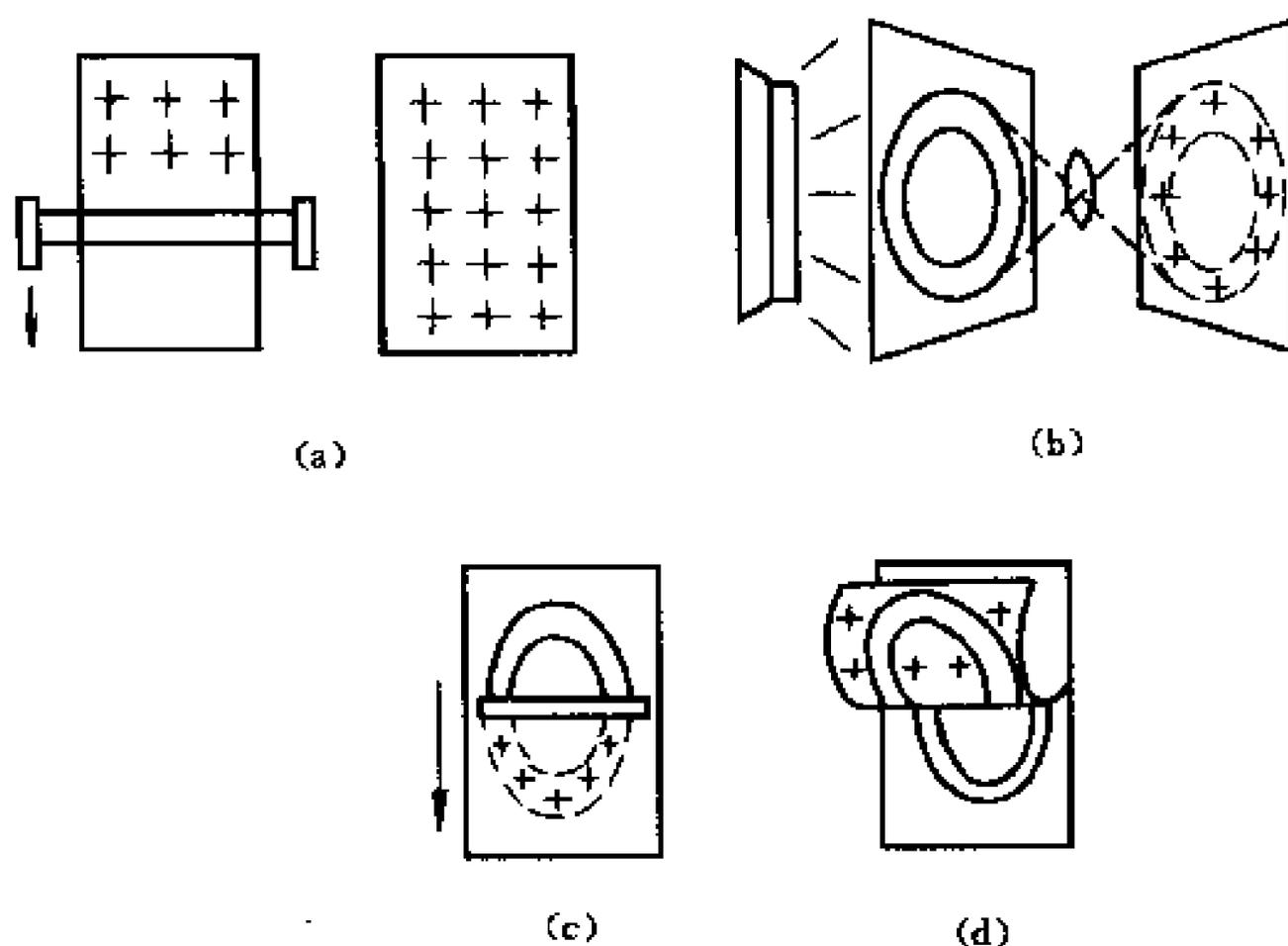


图 G 3 静电复印过程示意图

被吸附在光导体的表面上,由于不同感光区中潜象的电场对墨粉的作用不同,便形成与原稿相对应的可见象,这就是通常所称的显象[图 G-3(c)].然后用带正电的纸覆盖在上面,墨粉又被吸附在纸上,这样便完成了图象转移的复印过程.最后通过加热,使墨粉牢固地附着在纸上而定影[图 G-3(d)].

第十章 恒定电流和恒定电场

我们在上两章中研究了静止电荷所激发的静电场,本章将讨论因电荷的有规则移动而形成的电流,以及与之相应的电场和在导体内形成不随时间而变化的恒定电流的条件,着重从场的观点阐明电流遵循的基本规律.鉴于在中学已学过一段均匀电路的欧姆定律,为了避免不必要的重复,本章一开始就介绍电流密度和电源的电动势等重要概念,并从欧姆定律的微分形式导出熟知的几个电路公式.最后将扼要介绍金属导电的经典电子理论,这能对金属导电、接触电势差、温差电现象等的微观本质有较深入的了解.

§ 10-1 电流密度 电流连续性方程

1. 电流密度

电荷在空间运动就形成电流,通常可用电流密度 δ 来描述电荷在空间各点的运动情况.电流密度是一个矢量,其方向和该点正电荷运动的方向一致,大小等于单位时间通过该点垂直于电荷运动方向的单位面积的电荷量.如果空间某点的运动电荷的体密度为 ρ ,其运动速度为 v ,则该点的电流密度为

$$\delta = \rho v \quad (10-1a)$$

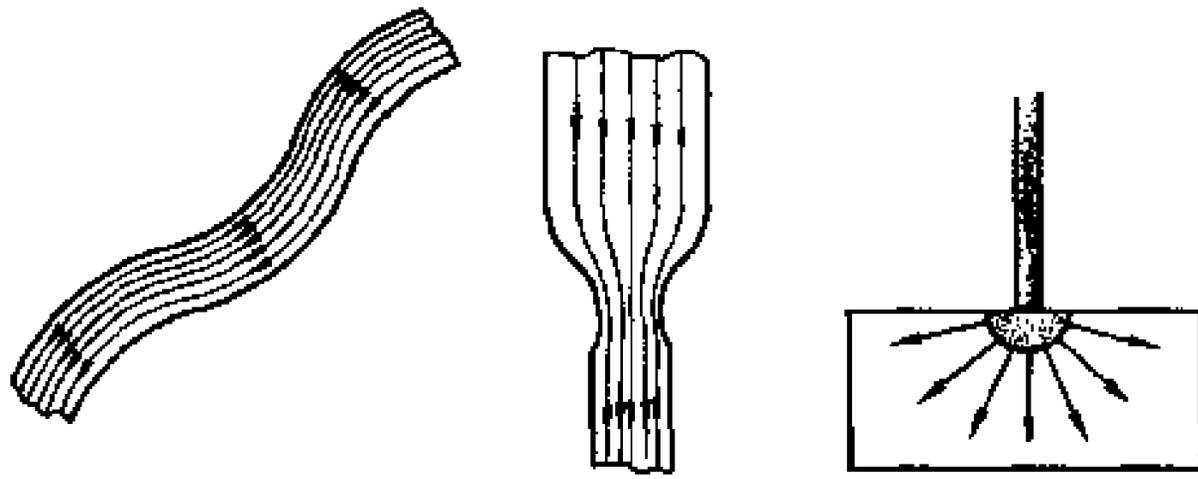
式中 ρ 为代数量,在 $\rho > 0$ 时, δ 与 v 同向;在 $\rho < 0$ 时, δ 与 v 反向.如果同时有几种体密度不同的电荷各以不同的速度通过该点,则上式应改为

$$\delta = \sum_i \rho_i v_i \quad (10-1b)$$

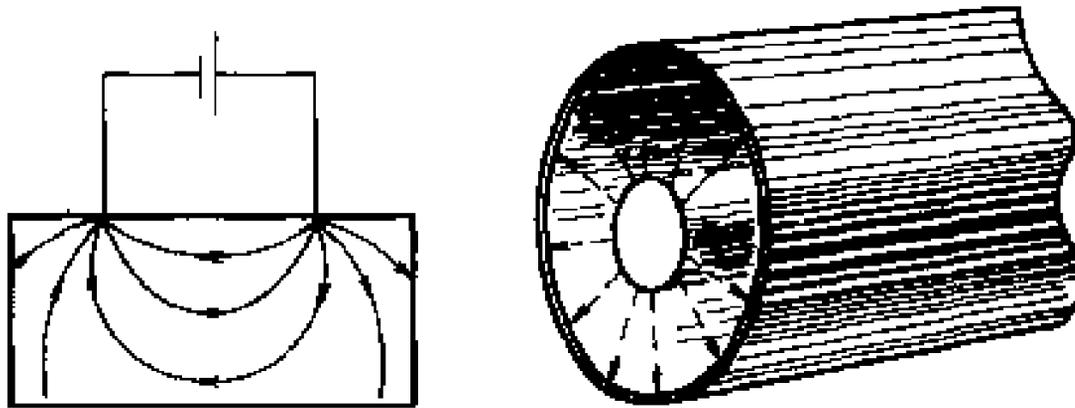
式(10-1)对不同物理过程所产生的电流都是适用的。

在电路理论中,我们所讨论的是电荷被限定在细长的导线中作定向运动引起的电流,这时,通常用电流强度(简称电流) I 来描述导线中电流的强弱.如果在 dt 时间内,通过导线某一截面的电荷量为 dq ,则该截面的电流 $I = \frac{dq}{dt}$,即:电流 I 等于单位时间通过该截面的电荷量.应注意到这里电流 I 的概念是对导线的截面定义的,它也可推广到任意曲面上去.因为负电荷运动对电流的贡献和等量的正电荷沿反方向运动时对电流的贡献是等效的,故在讨论电流时,我们习惯上常将正电荷流动的方向规定为电流的方向.这里要注意,电流是标量,因为电流只决定于单位时间内通过指定截面的电荷量总值,所谓电流的方向是指电流沿导线循行的指向,而与一般矢量的方向性截然不同.电流 I 虽能描写电流的强弱,但它只能反映导体截面的整体电流特征,并不能说明电流通过截面上各点的情况.在实际问题中,常会遇到电流在粗细不均或材料不均匀、甚至大块金属中通过的情况,这时,假定在单位时间内通过某一根粗细不均的导线各截面的电荷量相等,即各截面的电流 I 相同,但在导线内部不同点的电流情况却可能存在差异.因此,电流 I 这个物理量不能细致反映出电流在导体中的分布,而电流密度是空间位置的矢量函数,用它却能精确地描述导体中电流分布的情况.图10-1中分别画出在导线和大块导体中的电流分布情况.

电流 I 和电流密度 δ 两者都是描述电荷流动的物理量,它们之间必然存在着一般的联系,下面就来讨论这个问题.设想在导体中任取一截面元 dS ,该面元法线的单位矢量 e_n 与该点电流密度 δ 之间的夹角为 θ ,如图10-2所示.设面元处的电荷密度为 ρ ,其运动速度为 v .则在 dt 时间内通过截面元的电荷量等于以 dS 为底、 $v \cdot e_n dt$ 为高的圆注体中所包含的运动电荷量,而通过一有限截面 S 的电荷量则为



(a)粗细均匀,材料均匀的金属导体 (b)粗细不均匀的导线 (c)半球形接地电极附近的电流



(d)电阻法勘探矿藏时大地中的电流

(e)同轴电缆中的漏电流

图 10-1 在导线和大块导体中的电流分布情况

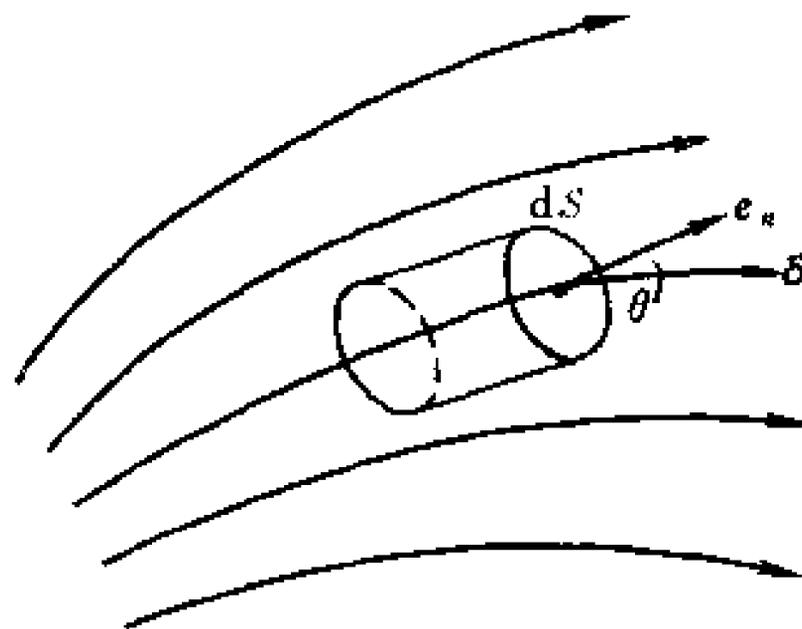


图 10-2 电流 I 与电流密度 J 关系的推导

$$I dt = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n dS dt = \iint_S \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} dt$$

由此可得电流 I 与电流密度 $\boldsymbol{\delta}$ 间的关系为

$$I = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n dS = \iint_S \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} \quad (10-2)$$

因为 $\boldsymbol{\delta}$ 是空间位置的矢量函数, 在导体中各点的 $\boldsymbol{\delta}$ 可以有不同的量值和方向, 这样在导体中形成一个矢量场, 称为电流场. 这样, 从场的观点来理解, 式(10-2)所表明的 $\boldsymbol{\delta}$ 和 I 的关系, 就是一个矢量和它的通量之间的关系。

在国际单位制中规定电流为基本量, 单位是安培, 用符号 A 表示. 关于安培的定义, 参看 § 11-9 和附录. 电流密度的单位为 A/m^2 . 电流具有某些效应, 例如热效应、机械效应、化学效应和磁效应等, 我们可以利用这些效应来检验电流是否存在或量度电流的强弱.

2. 电流连续性方程

在第八章中, 根据实验证实了一个重要的事实, 即在一个孤立的系统中, 总的电荷量不会减少也不会增多, 始终保持不变; 在有电荷运动的区域, 一处电荷密度增多必定是有电荷从他处流动而来, 反之, 一处电荷密度减少, 则表示有电荷从该处流动出去, 这个事实叫做电荷守恒定律。

设想在有电流的导体内任取一闭合曲面 S , 根据式(10-2) 单位时间通过 S 向外净流出的电荷量应是 $\oiint \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S}$, 由电荷守恒定律它应等于闭合面内单位时间电荷量的减少, 即

$$\boxed{\oiint \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dq}{dt}} \quad (10-3)$$

式(10-3) 就是电荷守恒定律的数学表述, 又称电流连续性方程, 其物理意义是: 如果闭合曲面 S 内有正电荷积累起来, $\frac{dq}{dt} > 0$, 则流入 S 面内的电荷量多于从 S 面内流出的电荷量, $\oiint \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} < 0$; 反

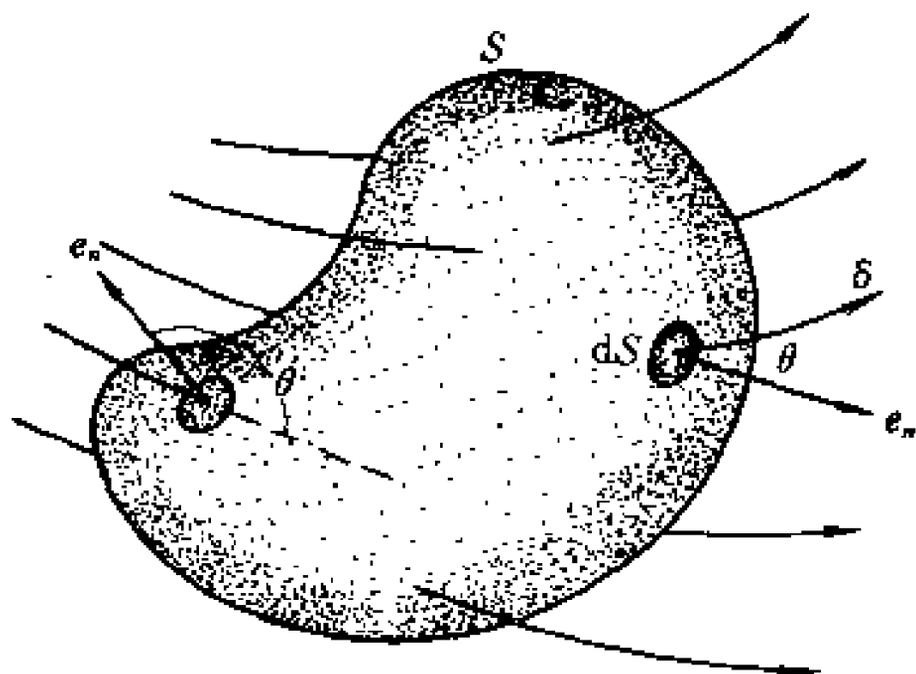


图 10-3 电流连续性原理

之,如果 S 面内正电荷减少, $\frac{dq}{dt} < 0$, 则从 S 面内流出的电荷量多于流入 S 面内的电荷量, $\oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} > 0$. 式(10-3)也可表述为在电流场中,通过任一闭合曲面的电流密度通量等于面内电荷量的减少率。

§ 10-2 恒定电流和恒定电场 电动势

1. 恒定电流

下面我们主要讨论金属导体内的电流. 如前所述,在金属导体内存在着可以移动的自由电子,当金属导体中的电场强度为零时,这些自由电子相似于气体分子,在金属中仅作无规则的热运动,这种热运动并不会引起电荷沿任一方向的定向漂移;如果导体中的电场强度不等于零,金属导体内的自由电子便在电场力的作用下,形成一个与电场方向相反的有规则的宏观定向运动,这些自由电子运动的平均效果,便是在导体中形成电流. 下面先讨论一个在导体内形成电流的例子.

如图 10-4 所示, A 和 B 是两个彼此隔开的导体, 导体 A 带正

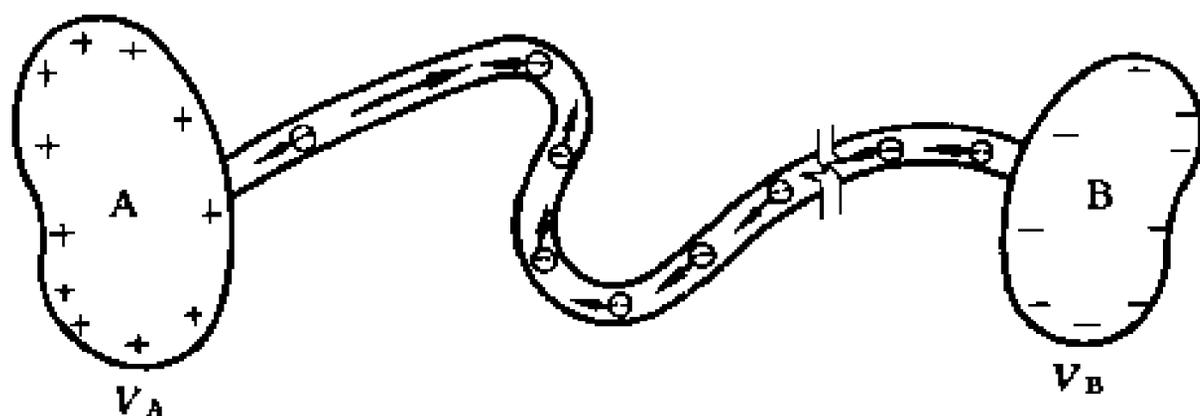


图 10-4 导线中暂时电流的产生

电荷, 电势为 V_A , 导体 B 带等量的负电荷, 电势为 V_B . 如果用长度为 l 的细长金属导线把两者连接起来, 由于两导体间存着电势差 $V_A - V_B$, 在金属导线内出现沿导线从 A 指向 B 的电场. 由于这电场的作用, 导体内部的自由电子从 B 沿导线向 A 作宏观定向运动而形成电流. 但是这个电流的持续时间很短暂, 随着自由电子的不断迁移, 两导体 A 和 B 间的电势差逐渐减小, 导线中的电流也随着减小, 直至 A 和 B 的电势相等, 金属导线内的场强为零, 电流也随之停止. 这时, 整个导体组达到静电平衡, 所以, 仅仅依靠短暂的静电场, 不可能使金属导体内的自由电子保持持久的宏观定向运动.

上例说明, 由于导体 A 和 B 上的电荷分布随时间在变, 它在导线中所激发的电场也随时间而变, 通过导线内的电流也将随时间而变. 如果要在导线中维持一个各点电流密度的大小和方向都不随时间变化的恒定电流, 必须在导线内建立一个不随时间变化的恒定电场, 这就要求激发电场的电荷分布不随时间变化. 可见, 在导体中维持恒定电流的条件是: 空间各处的电荷分布必须满足 $\frac{dq}{dt} = 0$. 把这一结论和方程(10-3)相结合, 得

$$\oiint \delta \cdot dS = 0 \quad (10-4)$$

式(10-4)就是在导体内维持恒定电流条件的数学表式, 它表明, 电流分布恒定时, 在导体内从任一闭合曲面流入的电荷量等于流出

的电荷量,即导体内各处的电荷分布不变.必须指出,电荷分布不变并不意味着电荷没有运动,否则电流也就不存在了.

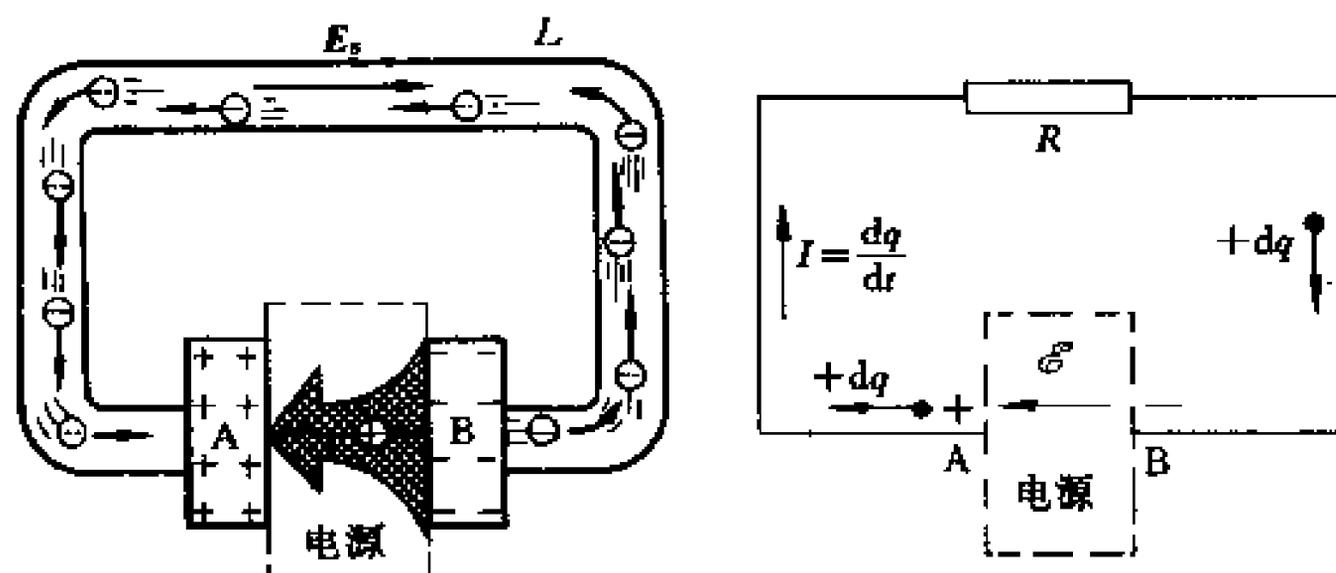
仿照对静电场的形象描述,在电流场中也可引入电流线的概念,即在电流场中描绘一些曲线,使曲线上每一点的切线方向和该点电流密度的方向一致.那么,式(10-4)可理解为:在恒定电流场中的电流线是既无起点又无终点的闭合曲线,这叫做恒定电流的闭合性.

2. 导体内恒定电场的建立 电源的电动势

根据以上分析,要在导体内形成恒定电流必须在导体内建立一个恒定电场.如何实现在导体内建立恒定电场呢?为了便于说明问题,我们把图 10-4 改画成图 10-5(a).在电流流动过程中,如果我们把每一瞬时到达导体 A 的负电荷不断地送回到导体 B 上(或者说,把到达导体 B 上的正电荷不断地输送到导体 A 上),那么我们就保持导体 A 和 B 之间的电势差不变,也就是说,在金属导线内建立了恒定电场.显然,这个过程单靠静电力是不能实现的,因为静电力不可能使正电荷从低电势的 B 移向高电势的 A,为此,必须有一种提供非静电力的装置,这种装置称为电源,利用它所产生的非静电力,迫使正电荷逆着静电场从低电势处流向高电势处,从而维持导体 A 和 B 之间有不变的电势差.在这个过程中,电源不断地消耗其他形式的能量以克服静电力做功,所以电源实质上是把其他形式的能量转化为电势能的一种能源,电源的作用与水泵可以使水由水位低处经水泵移动到水位高处类似.

因为各种形式的能量都可转化为电势能,所以有各种各样的电源.例如,有化学电池、发电机、热电偶、硅(硒)太阳电池等电源,它们分别是把化学能、机械能、热能、太阳能变为电势能的装置.应该指明,电源既不创造电荷,也不创造能量,它只是在分离正负电荷时(或者说在维持电流流通时)做功,把其他形式的能量转化为电势能而已.

每一电源都有正负两极. 通常把电源内部正、负两极之间的电路称为内电路, 它是相对于电源外部正、负两极之间的外电路来说的. 当内、外电路连接成闭合电路时, 正电荷由正极流出, 经过外电路流入负极, 然后正电荷再从负极经过内电路流到正极, 如图 10-5(b)所示. 于是, 在电源的作用下, 电荷在闭合电路中继续不断地流动而形成恒定电流, 保持了电流线的闭合性.



(a) 电源的作用——把正电荷从 B 经电源内部移到 A, 使导线内 (回路 L) 保持恒定电场 E_0 .

(b) 电源的电动势 $\mathcal{E} = \frac{dA}{dq}$, dA 是正电荷 dq 从负极经电源内部到正极时电源克服静电力所作的功

图 10-5

设在 dt 时间内, 电源迫使正电荷 dq 从负极经电源内部移到正极所作的功为 dA , 那么, 电源的电动势 \mathcal{E} 可由下式定义:

$$\mathcal{E} = \frac{dA}{dq} \quad (10-5)$$

这就是说, 电源的电动势等于电源把单位正电荷从负极经内电路移到正极时所做的功. 电源电动势的大小只取决于电源本身的性质, 而与外电路无关. 电动势的单位和电势相同, 也是 J/C , 即 V . 根据定义, 电动势是标量. 习惯上, 为便于应用, 常规定电动势的指向为自负极经内电路到正极的指向. 沿着电动势的指向, 电源将提高正电荷的电势能.

由于电源的存在,在闭合电路中出现了恒定电场,恒定电场和静电场一样,也服从场强环流定律

$$\oint_L \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$$

在电源内部,电荷不仅受到恒定电场的作用力,而且还受到性质和静电力很不相同的“非静电力”的作用,正是这种“非静电力”的作用,才能迫使正电荷从电源负极经内电路移到电源正极,从而使正电荷的电势能增加,这种“非静电力”在外电路中并不存在.如果用 E_k 表示单位正电荷所受到的“非静电力”,并把 E_k 叫做“非静电性场的场强”,那么电源的电动势 \mathcal{E} 可定义为:单位正电荷从电源负极 B 移到电源正极 A 时,“非静电力”所作的功.即

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad (10-6)$$

必须指明,不同电源有不同性质的非静电作用,这些作用的机制有的是很复杂的,这里笼统地都把它们看是一种非静场,并用 E_k 表示其场强.但是这只说明在电路中引起电流这一点上, E_k 和通常的场强 E 有相同的作用,至于其它性质, E_k 和 E 可能是绝然不同的.由于在图 10-5 所示的闭合电路中,外电路中的 $E_k = 0$,而且,今后还会遇到在整个闭合电路中处处存在非静电力的情况,这时就无法区分“电源内部”和“电源外部”,于是,电动势可表为“非静电性场强 E_k ”沿闭合电路上的环流,即

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad (10-7)$$

这是电动势的又一种表述法,它比式(10-6)更具有普适性.

§ 10-3 欧姆定律 焦耳-楞次定律

1. 欧姆(G. S. Ohm)定律

前节已提到过,只有在金属导体中存在电场时,自由电子才会在电场力的作用下逆电场方向作定向运动而形成电流,由此可以想到,电流密度和场强之间必定有着某种联系.仍以金属导体为例,当体内没有电场时,在任一点处的小体积中,自由电子只是在晶格间作不规则的热运动,并不断地和晶格相碰撞.当体内存在电场时,在电场的作用下,自由电子将逆着场强的方向相对于晶格作有规则的定向运动,这种有规则的定向运动是叠加于杂乱无章的热运动之上的,通常称为电子的漂移运动,其情况如图 10-6 所示.这就是说,在电场作用下,被加速的自由电子虽然仍与晶格进行频繁的碰撞,每碰撞一次就打乱了它的定向运动,但是,在任一点处,对大量自由电子来说,此起彼落,却总有一个方向一定的平均漂移速度.这些大量自由电子的平均漂移运动如果是稳定的,它们的对外表现便是在导体中形成恒定电流.

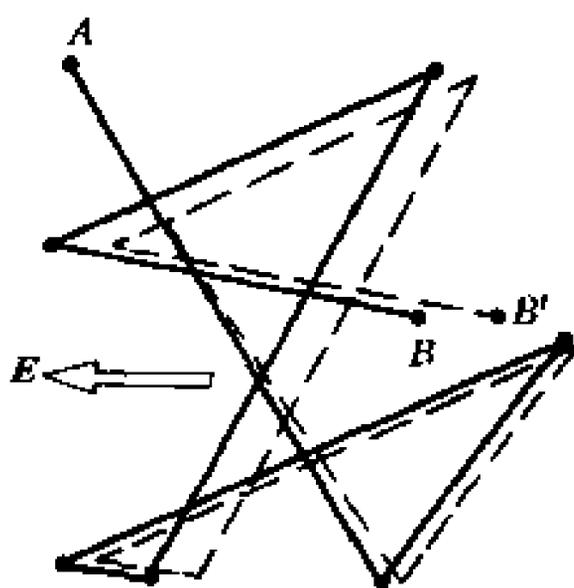


图 10-6 金属中自由电子
漂移运动示意图(图中
实线表示自由电子的热运动,
虚线表示有电场时的叠加运动)

设大量自由电子的平均漂移速度为 v , 导体内某点处单位体积内的自由电子数为 n , 则按式(10-1), 在导体内该点的电流密度为

$$\delta = -nev \quad (10-8)$$

式中 e 是电子电荷量的绝对值, 负号表示 δ 和 v 的方向相反. 显

然,由于自由电子带负电,它们的漂移方向也和场强方向相反,于是在导体中各点电流密度的方向和该点场强的方向一致.另外,对于金属导体,从其导电的微观机制出发,理论上可以证明自由电子的平均漂移速度和场强成正比,由此可得金属导体中电流密度与场强间的关系为

$$\delta = \gamma E \quad (10-9)$$

式(10-9)称为欧姆定律的微分形式,它表明导体中任一点处电流密度与场强之间的关系.式中的 γ 叫做电导率,它是表征导体中该点处的导体导电性质的量,当材料不均匀或温度不均匀时,导体中各点处的 γ 值并不一样.在恒定电场情况,即各点 E 的大小和方向都不改变时,各点 δ 的大小和方向也都不改变,所以导体中呈现恒定的电流分布情况.不但如此,即使在可变电场中,式(10-9)也是成立的.当场强 E 的量值增加或减小时,相应的 δ 的量值也正比地改变.总之,欧姆定律的微分形式是用场的观点表述了大块导体中的电场(描述场的矢量就是场强 E)和导体中的电流分布(描述电流分布的矢量就是电流密度 δ)之间逐点的细节的关系,它是电磁理论中反映介质的电磁性质的基本方程之一.但是,直接测量 δ 和 E 是很困难的,所以在研究电路问题时,通常用容易测量的电流 I 和电势差 U_{AB} 相联系的方程来描述.设在电路中任取一段细长而截面均匀的载流导线 AB ,在这段导线上不存在非静电力(图10-7).令导线长为 l ,横截面积为 S ,应用式(10-9)可求出

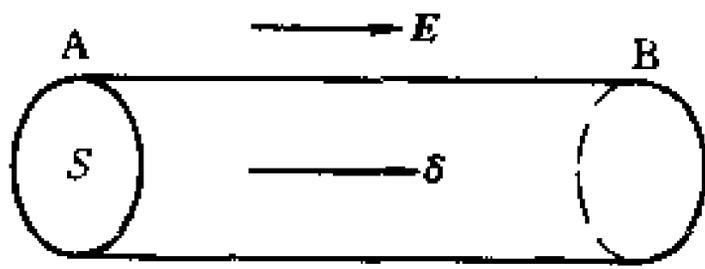


图 10-7 以一段细长导线为例从 $\delta = \gamma E$

$$\text{导出 } I = \frac{U_{AB}}{R}$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\delta}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{I}{\gamma S} d\mathbf{l} = IR$$

上式左边是 AB 段导线两端的电势差(又称电压),右边 $R = \frac{l}{\gamma S}$ 是此段导线的电阻,于是上式又可写成

$$V_A - V_B = U_{AB} = RI \quad (10-10)$$

这就是最早由欧姆通过实验总结出来的定律,叫做欧姆定律.

从历史发展的顺序来看,欧姆首先从实验证实了导体两端的电势差和通过导体的电流成正比的关系式(10-10),而欧姆定律的微分形式(10-9)是在进一步研究了各种情况时推广得出的,在这里,我们没有遵循上述历史顺序,而是从以场量表出的方程(10-9)出发,通过积分导出电路方程(10-10),故也把它看成为欧姆定律的积分形式.

实验表明,欧姆定律对金属导体是十分准确的,仅在电流密度大到每平方厘米几百安时,观察到的结果才会与欧姆定律有很小的偏差(1%).但在真空管、半导体等器件中,欧姆定律是不适用的[这时,电流 I 和电势差 U_{AB} 之间并没有如式(10-10)所示的线性关系].

由式 $R = \frac{l}{\gamma S}$ 可知,一个截面均匀导体的电阻和其长度成正比、与其截面积和导体材料的电导率成反比. R 的倒数 $G \left(G = \frac{1}{R} \right)$ 称为电导,电导率的倒数 $\frac{1}{\gamma} = \rho$ 称为电阻率. 在国际单位制中,电阻的单位为欧姆,用符号 Ω 表示,电导的单位为西门子,用符号 S 表示,电阻率的单位为 $\Omega \cdot m$,电导率的单位为 S/m.

2. 焦耳-楞次(Joule-Lenz)定律

实验表明,电流通过导体时会放出热量,这称为电流的热效应,所放出的热量叫做焦耳热.根据金属导电机制可简单说明焦耳热的产生原因,自由电子在电场作用下,因电场力对电子作功,所

以经过某一自由程后,将获得与定向速度相联系的动能,这部分能量在电子和晶格相碰撞的过程中不断地传给金属导体的晶格,使晶格的热运动加剧而温度升高,从而以焦耳热的形式散布出来.

下面计算单位时间内电子传递给金属晶格的能量. 当一个自由电子在电场力的作用下,以平均漂移速度 v 运动时,单位时间内电场力对它所作的功为

$$F \cdot v = -eE \cdot v$$

设导体内单位体积中有 n 个自由电子,则单位时间内电场力对 n 个自由电子所作的总功为

$$p = -nev \cdot E$$

利用式 $\delta = -nev$ 和 $\delta = \gamma E$,可得

$$p = \delta \cdot E = \gamma E^2$$

这功通过电子与金属导体晶格相碰撞的过程,转化为导体内单位时间、单位体积中所产生的热量,通常称为热功率密度,用 p 表示,于是

$$\boxed{p = \delta \cdot E = \gamma E^2} \quad (10-11)$$

上式称为焦耳-楞次定律的微分形式. 它说明,在导体内某一点的热功率密度既和该点的电场强度的平方有关,也和导体的电导率有关,它的大小等于两者的乘积. 焦耳-楞次定律的微分形式和欧姆定律的微分形式一样,不论导体的形状怎样,导体是否均匀,导体中通过的电流是否恒定都是成立的.

现在把式(10-11)应用于图 10-7 所示的一段导线,该段导线的体积为 Sl ,所以在时间 t 内,导线 AB 内的电场对其中所有自由电子所作的功为

$$A = \delta E S l t = I t (V_A - V_B) \quad (10-12)$$

式中应用了 $\delta S = I$ 、 $E l = V_A - V_B$ 的关系,通常称上式为电流的功,相应的功率

$$\boxed{P = \frac{A}{t} = I(V_A - V_B)} \quad (10-13)$$

称为电流的功率。根据欧姆定律 $V_A - V_B = IR$ ，可得

$$A = I(V_A - V_B)t = \frac{(V_A - V_B)^2 t}{R} = I^2 R t \quad (10-12a)$$

和
$$P = I(V_A - V_B) = \frac{(V_A - V_B)^2}{R} = I^2 R \quad (10-13a)$$

电流的功的单位为焦耳，而电流的功率的单位为瓦特，简称瓦，用符号 W 表示。

应当注意，电流的功是外电源供给这段导体的能量的量度。根据能量守恒定律，电源所供给的电能为导体所吸收，并转变为其他形式的能量。事实上，当一段导体内通有电流时，导体的温度将增高，也就是导体的内能在增高，于是以热量传递的方式向导体周围的物体传递。这时式(10-12a)也就表示导体所放出的热量，而式(10-13a)相应地表示导体每秒所放出的热量，为此，可把式(10-12a)写成热量 Q 的表式

$$Q = I(V_A - V_B)t = \frac{(V_A - V_B)^2}{R} t = I^2 R t \quad (10-12b)$$

这个关系式是焦耳和楞次两人各自独立地从实验中得出的结论，称为焦耳-楞次定律，焦耳-楞次定律说明电能可转换为热能，这是能量守恒定律的又一例证。

最后必须指明，对于那些不遵守欧姆定律的非线性器件，如电子管、晶体管、电动机等，式(10-13)仍旧适用，而式(10-13a)就不适用了，因为这种类型的用电器所吸收的电流的功率并不全部转换为焦耳-楞次热功率。

例题 10-1 一铜质导线的截面积为 $3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ，其中通有电流 10 A。试估算导线中自由电子平均漂移速率的数量级。

解 设每个铜原子有一个自由电子，那么铜线内单位体积中的自由电子数为 $n = \frac{N_A \rho}{M}$ ，式中 N_A 是阿伏加德罗常数， M 是铜的摩尔质量，而 ρ 是铜的密度，即

$$n = \frac{N_A \rho}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}) \times 8.95 \times 10^3}{63.5 \times 10^{-3}} \text{ m}^{-3} = 8.48 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

由此可求得

$$v = \frac{I}{neS} = \frac{10}{(8.48 \times 10^{28}) \times (1.6 \times 10^{-19}) \times (3 \times 10^{-6})} \text{ m/s} = 2.46 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

如果把金属中的自由电子看作为容器中的气体分子,由经典统计力学可以算出金属中自由电子热运动的平均速率的数量级为 10^5 m/s ,可见电子的平均漂移速率远小于其热运动的平均速率.按此速率,一个电子大约需化 68 min 方能通过 1 m 长的导线,这就产生一个疑问,为什么当电路中电键一接通,离电源很远的灯会立刻亮起来呢?对这个问题应这样来理解,当电键未接通时,导线处于静电平衡状态,导线内场强等于零,线中也无电流.当电键接通时,由于电源两极上积累的电荷在空间所建立的电场使电路中各处的电荷分布发生变化,并导致电场的变化,这种变化的场以速度 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 向外传播,迅速地在导线内各处建立电场,并驱使当地的自由电子作定向漂移而形成电流,因此,这里起主导作用的是场的传播速度,而不是自由电子的定向漂移速率.同样,在导线中消耗的电功率也是通过场的输送从导线侧面进入导线的.

§ 10-4 一段含源电路的欧姆定律 * 基尔霍夫定律

1. 一段含源电路的欧姆定律

在实际电路中,我们所遇到的大多数电路都是由电阻元件和电源联接而成的闭合电路,但在分析电路时,往往要从闭合电路中抽出其中一段电路来加以研究.在上节中,我们曾从欧姆定律的微

分式 $\delta = \gamma E$ 导出只含有电阻电路的欧姆定律 $U_{AB} = IR$. 如果抽出的一段电路中, 还包含有电源, 则在这段电路中, 除了电场力引起电荷的运动外, 电源中的非静电性场强也要驱使电荷运动, 这时欧姆定律的微分形式应推广为

$$\delta = \gamma(E + E_k) \quad (10-14)$$

或
$$E = \frac{\delta}{\gamma} - E_k \quad (10-14a)$$

将上式应用于图 10-8 所示的一段电路, 从 A 端经电源到 B 端取式 (10-14a) 的线积分得

$$\int_A^B E \cdot dl = \int_A^C \frac{\delta}{\gamma} \cdot dl +$$

$$\int_C^B \frac{\delta}{\gamma} \cdot dl - \int_A^B E_k \cdot dl$$

积分时注意到, 在 10-8(a) 的电路中, δ 和 dl 方向相反; 在图 10-8(b) 的电路中, δ 和 dl 方向相同; 而 E_k

和 dl 的方向都相反. 因为 $\int_A^B E \cdot dl = V_A - V_B$, $\int_A^B E_k \cdot dl = \int_A^C E_k \cdot dl = -\mathcal{E}$, $\delta = \frac{I}{S}$, 故上式可写成

$$V_A - V_B = \mp (RI + R_1 I) + \mathcal{E} \quad (10-15)$$

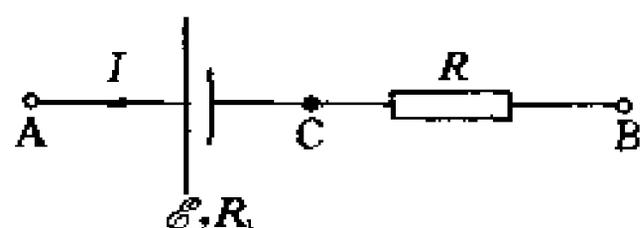
式中 $R_1 = \int_A^C \frac{dl}{\gamma S}$ 是电源的内电阻. 式 (10-15) 称为一段含源电路的欧姆定律.

如果在图 10-8 所示的一段电路中 $R=0$, 则式 10-15 化为

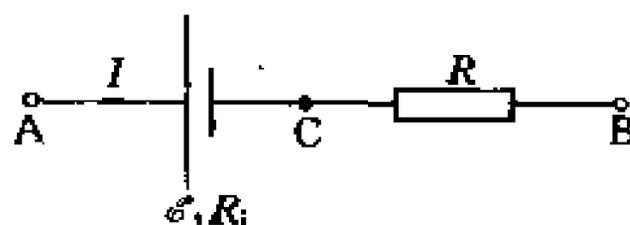
$$V_A - V_B = \mathcal{E} - IR_1 \text{ (放电)} \quad (10-15a)$$

$$V_A - V_B = \mathcal{E} + IR_1 \text{ (充电)} \quad (10-15b)$$

两式分别表示电源处于放电和充电状态, 这时 $V_A - V_B$ 是电源正、负极间的电势差, 通常称为电源的端电压. 式 (10-15a) 表明, 电源



(a) 放电



(b) 充电

图 10-8 一段含源电路

处在放电状态时,电源的端电压小于电源的电动势;电源处在充电状态时,电源的端电压大于电源的电动势.当 $I=0$ (电路断开时) 或 $R_i=0$ (无内阻电源),则电源的端电压等于电源的电动势.

如果把图 10-8 所示的一段电路的 A 端和 B 端接合在一起,则电阻 R 和电源联接成一闭合电路(图 10-9),这时 $V_A = V_B$,由式(10-15)可得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i} \quad (10-16)$$

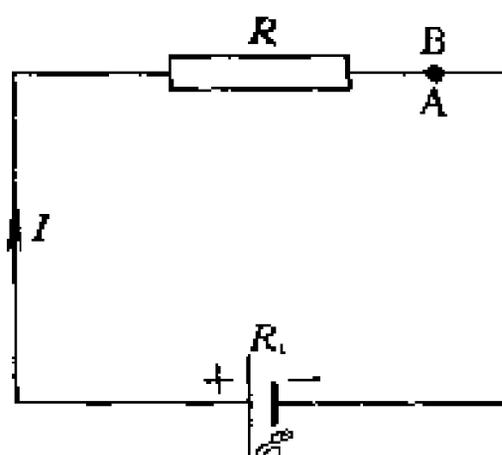


图 10-9 闭合电路

$R + R_i$ 为闭合电路的总电阻.上式表示闭合电路中的电流等于电源的电动势与总电阻之比,称为闭合电路的欧姆定律.

我们还会遇到抽出的一段电路中包含有几个电源,而且在此段电路中各部分的电流也不相同,如图 10-10 所示.这时,应用前

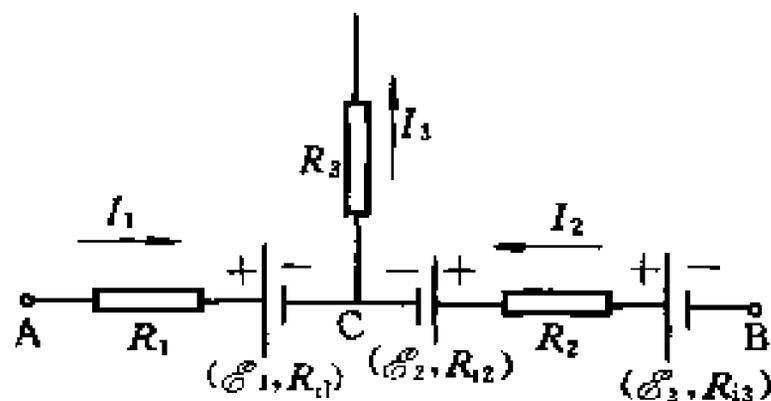


图 10-10 一段复杂的含源电路

述的计算方法,可得任意一段电路 A、B 两端点间的电势差的一般计算式为

$$V_A - V_B = \Sigma IR - \Sigma \mathcal{E} \quad (10-17)$$

式中 ΣIR 是 AB 段电路中所有电阻(包括电源的内电阻)上电势降之和, $\Sigma \mathcal{E}$ 是该段电路中所有电源电动势的代数和.式(10-17)也就是一段含源电路的欧姆定律.

根据以上的讨论,可以定出式(10-17)右边两项选取正负号的规则如下.

先任意选取沿电路积分路径的方向,写出初末两端点的电势差 $V_0 \cdots V_n$.

(1) 如果通过电阻中电流的流向和积分路径的方向相同,该电阻上电势降项前取“+”号,相反则取“-”号;

(2) 如果电动势的指向和积分路径的方向相同,该电动势 \mathcal{E} 前取“+”号,相反则取“-”号.

应用上述符号规则,在图 10-10 中,选取从 A 端出发沿着电路经 C 到达 B 端作为积分路径,则 A、B 两端间的电势差为

$$V_A - V_B = (I_1 R_1 + I_1 R_{i1} - I_2 R_2 - I_2 R_{i2} - I_2 R_{i3}) - (-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)$$

如果算得的 $V_A - V_B$ 为正值,这就表示 A 端的电势高于 B 端;如果是负值,表示 B 端的电势高于 A 端.

例题 10-2 在图 10-11 所示的电路中,已知电池 A 的电动势 $\mathcal{E}_A = 24 \text{ V}$,内电阻 $R_{iA} = 2 \Omega$,电池 B 的电动势 $\mathcal{E}_B = 12 \text{ V}$,内电阻 $R_{iB} = 1 \Omega$,而外电阻 $R = 3 \Omega$. 试计算(1)电路中的电流,(2)电池 A 的端电压 U_{12} ,(3)电池 B 的端电压 U_{34} ,(4)电池 A 所消耗的的化学能功率以及所输出的有效功率,(5)输入电池 B 的功率及转变为化学能的功率,(6)电阻 R 所产生的热功率.

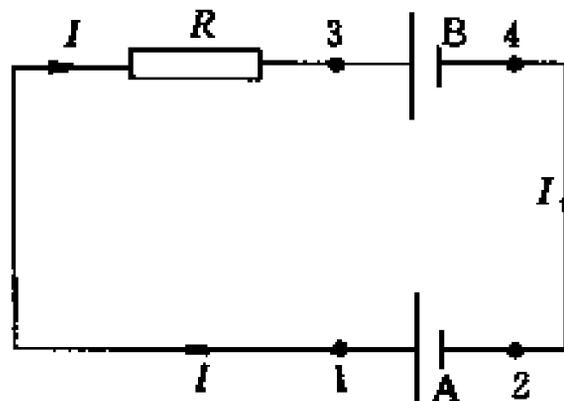


图 10-11 欧姆定律的应用

解 (1) 应用闭合电路的欧姆定律及所定的符号规则得

$$I = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{R + R_{iA} + R_{iB}} = \frac{24 - 12}{3 + 2 + 1} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

电流的指向如图中箭头所示的方向.

(2) 设所选定的积分路径自 1 经过电池 A 而到 2,应用一段

含源电路的欧姆定律得

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \Sigma IR - \Sigma \mathcal{E} = -2 \times 2 - (-24) \text{ V} = 20 \text{ V}$$

计算结果表示 1 处的电势 V_1 高于 2 处的电势 V_2 . 现在再从 1342 这一积分路径来计算 1、2 之间的电势差, 得

$$\begin{aligned} U_{12} = V_1 - V_2 &= \Sigma IR - \Sigma \mathcal{E} = 2 \times (3 + 1) - (-12) \text{ V} \\ &= 20 \text{ V} \end{aligned}$$

所得的结果与前相同.

(3) 设所选定的积分顺序方向自 3 经过电池 B 而到 4, 仍应用一段含源电路的欧姆定律得

$$\begin{aligned} U_{34} = V_3 - V_4 &= \Sigma IR - \Sigma \mathcal{E} = \\ &2 \times 1 - (-12) \text{ V} = 14 \text{ V} \end{aligned}$$

(4) 由电动势的定义可知, 当电源中通有电流 I 时, 电源做功的功率为

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathcal{E} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} I$$

电池 A 所消耗的化学能功率 $P_1 = I\mathcal{E}_A = 2 \times 24 \text{ W} = 48 \text{ W}$, 而其输出功率 $P_2 = IU_{12} = 2 \times 20 \text{ W} = 40 \text{ W}$, 消耗于内电阻的功率 $P_3 = I^2 R_{iA} = 4 \times 2 \text{ W} = 8 \text{ W}$. P_3 等于 P_1 减去 P_2 .

(5) 输入电池 B 的功率 $P_4 = IU_{34} = 14 \times 2 \text{ W} = 28 \text{ W}$, 其中变为化学能的功率 $P_5 = \mathcal{E}_B I = 12 \times 2 \text{ W} = 24 \text{ W}$, 消耗于内电阻的功率 $P_6 = P_4 - P_5 = I^2 R_{iB} = 4 \text{ W}$.

(6) 电阻 R 上的热功率 $P_7 = I^2 R = 4 \times 3 \text{ W} = 12 \text{ W}$.

最后应当指出: 按能量守恒定律, 电池 A 所消耗的化学能功率, 应等于电池 B 中转变为化学能的功率以及消耗在外电阻和两电池内电阻上的热功率, 以上算出的结果正是如此.

2. 基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)定律

在工程技术中或者在实验室中, 经常需要解决一些比较复杂

的电路问题,例如图 10-12 所示分支电路中的一部分.对于这类电

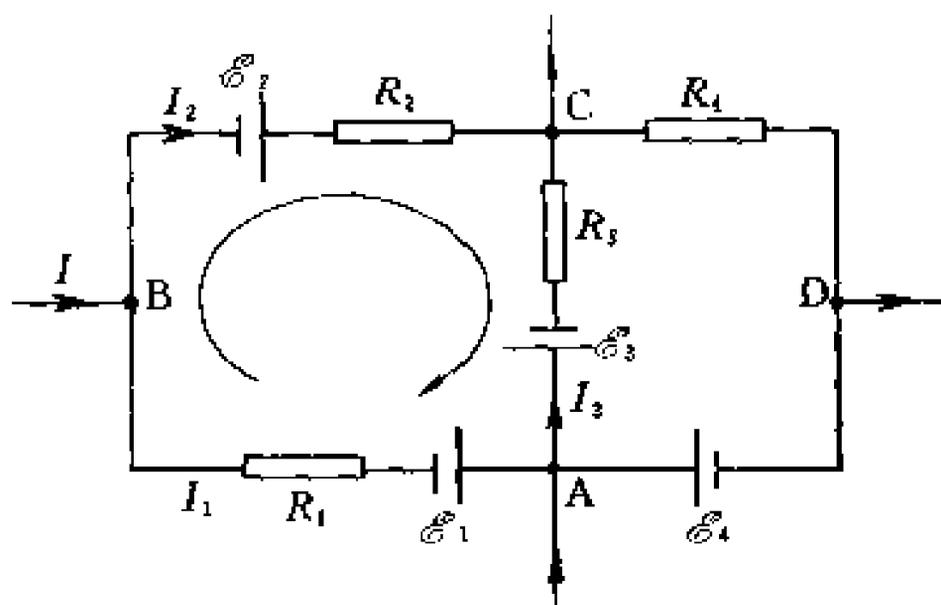


图 10-12 分支电路

路,我们不能用电阻串、并联的方法把电路化成等效的简单电路,这类电路叫做复杂电路.求解复杂电路的基本方程是本节所讲的基尔霍夫定律,如果已知电路中所有电源的电动势、内电阻和各个电阻值,那么应用基尔霍夫方程很容易算出各分支电路中的电流.

(1) 基尔霍夫第一定律

在分支电路中,三条或三条以上的通电导线会合的一点,称为分支点或节点,例如图 10-12 中的 A、B、C、D 各点都是节点.根据恒定电流的闭合性,通过包围节点的任一闭合曲面的电流密度的

通量恒等于零,即 $\oiint \delta \cdot dS = 0$, 或用电流表示,记作

$$\boxed{\Sigma I = 0} \quad (10-18)$$

式中把流向节点的电流取为负值,从节点流出的电流取为正值.式(10-18)表明,在任一节点处,流向节点的电流和流出节点电流的代数和等于零,称为基尔霍夫第一定律.例如对图 10-12 中的 B 点来说有,

$$I_2 - I - I_1 = 0$$

对电路中各个节点,应用基尔霍夫第一定律,可以写出一组方程,称为基尔霍夫第一方程组.

(2) 基尔霍夫第二定律

在分支电路中,我们可选取若干个闭合回路.例如图 10-12 中的 ABCA 和 ACDA 都是闭合回路.把恒定电场的环路定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ 及电动势的定义式 } \mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \text{ 应用于此闭合回路,}$$

令式(10-17)中的 $V_A - V_B = 0$ 便得

$$\boxed{\Sigma \mathcal{E} = \Sigma IR} \quad (10-19)$$

公式表明,沿任一闭合回路中电动势的代数和等于回路中电阻上电势降落的代数和,称为基尔霍夫第二定律.使用公式时,仍用本节中所定的符号规则,对各个闭合回路可以写出一组方程,称为基尔霍夫第二方程组.以 ABCA 闭合回路为例,从 A 点出发按顺时针沿回路环绕一周(即积分路径的方向)得到

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3$$

应用基尔霍夫的两个方程组来解决分支电路问题时,必须注意下列各点.(1)如果电路中有 n 个节点,那么其中只有任意的 $(n-1)$ 个节点电流方程是相互独立的,另一个节点的电流方程必然是这 $(n-1)$ 个节点方程约化后的结果.(2)取闭合回路时,也应注意回路的独立性.例如取图中 ABCA 及 ACDA 两个闭合回路,这两个闭合回路方程是相互独立的,因为不能从其中一个导出另一个;如果已经选取了这两个回路,那么闭合回路 ABCDA 就不是独立的了,因为相应的回路方程可以由以上两个方程得出.具体的规则是:新选定的回路中,至少应有一段电路是在已选过的回路中所未曾出现过的,这样所得的一组闭合回路方程将是独立的.(3)独立方程的个数(包括第一第二两方程组)应等于所求未知数的个数.(4)每一电路上的电流方向可以任意假定,解出的结果如为负值即说明电流实际的方向与假定的相反.

基尔霍夫第一定律和第二定律分别体现了电路中电荷流动时的电荷量守恒定律和能量守恒定律,在解决实际问题中起着很重要的作用.

3. 基尔霍夫方程组的应用

(1) 惠斯通电桥

惠斯通电桥是用比较法来测量电阻的仪器,其构造略图如图 10-13 所示,AC 为均匀的拉紧了的导线,两端分别与电池 \mathcal{E} 的正

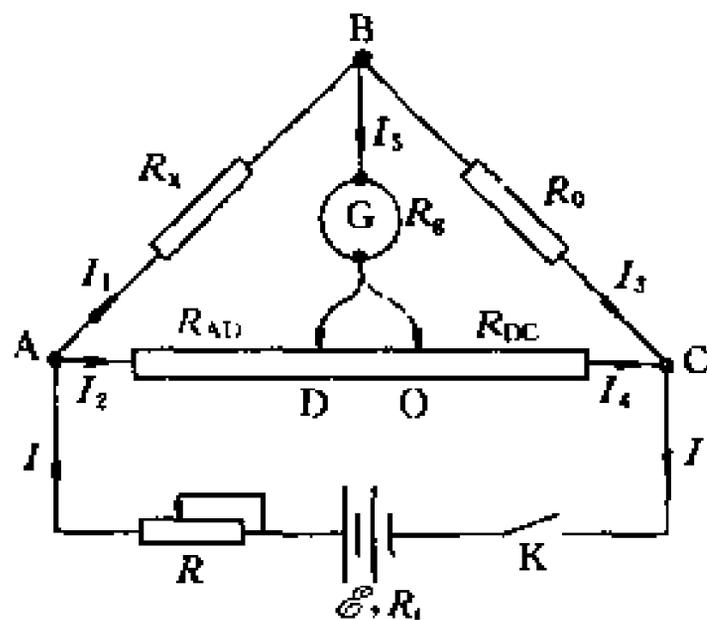


图 10-13 惠斯通电桥线路图

极和负极(通过电阻 R)相接, R 为电阻值可以调节的某固定电阻, R_x 为待测电阻, R_0 为已知电阻, G 为电流计. 电流计的一端固定在 AB 和 BC 的接点处, 另一端接到可以在 AC 导线上滑动的接头 D 上. 按图 10-13 连接后成一分支电路, 电流 I 从电源的正极流出, 在节点 A 处分成两支: 一支 I_1 流过 R_x , 另一支 I_2 流过 AD 线. 假定通过 G 、 R_0 、DC 的电流分别为 I_5 、 I_3 、 I_4 , 其方向各如图所示.

应用第一定律, 可得三个独立的节点电流方程.

$$\left. \begin{aligned} \text{节点 A: } I_1 + I_2 - I &= 0 \\ \text{节点 B: } I_3 + I_5 - I_1 &= 0 \\ \text{节点 D: } I_4 - I_5 - I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

沿顺时针的方向环绕各回路, 则应用第二定律可得独立的回路方程组.

$$\left. \begin{aligned} \text{回路 ADCEA: } \mathcal{E} &= I_2 R_{AD} + I_4 R_{DC} + I(R_1 + R) \\ \text{回路 ABGDA: } 0 &= I_1 R_x + I_5 R_g - I_2 R_{AD} \\ \text{回路 BCDGB: } 0 &= I_3 R_0 - I_4 R_{CD} - I_5 R_g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式中, R_g 表示 BD 电路中包括电流计的电阻, R_{DC} 和 R_{AD} 分别表示导线 AC 上的 DC 段和 AD 段的电阻. 解以上六个方程, 就可得到惠斯通电路中各支路电流的量值.

实验时, 调节滑动接头 D 的位置, 直到在某一位置 O 时, 电流计 G 的指针没有偏转为止. O 点称为平衡点. 在这情形下, 因为 $I_5 = 0$, 式(1)中后二个方程简化为

$$I_1 = I_3, \quad I_2 = I_4$$

把这些结果代入式(2)中后二个方程得

$$I_1 R_x = I_2 R_{AO}, \quad I_1 R_0 = I_2 R_{OC}$$

消去 I_1 和 I_2 得

$$R_x = R_0 \frac{R_{AO}}{R_{OC}}$$

因为 AC 是截面均匀的导线, 所以 AO 与 OC 两段导线的电阻之比等于相应的长度之比 $\frac{l_1}{l_2}$. 因此, 上式也可写作

$$R_x = R_0 \frac{l_1}{l_2}$$

因为 R_0 为已知, l_1 与 l_2 之比可由实验测定, 所以未知电阻 R_x 即可由上式计算出来.

(2) 电势差计

电势差计(通常也叫电位差计或电位计)是用来测定未知电动势的一种装置. 图 10-14 是一个电势差计的线路图, 各个电源的电动势以及各电流的方向已经在图上标出, \mathcal{E}_x 是待测电动势. 对于节点 A, 应用第一定律得

$$0 = I + I' - I_0 \quad (1)$$

对于闭合回路 ABCDA, 应用第二定律得

$$-\mathcal{E}_x = IR_i + IR_g - I'R \quad (2)$$

解式(1)和(2)得

$$I = \frac{I_0 R - \mathcal{E}_x}{R + R_i + R_g}$$

其中 AD 间的电阻 R 是可变的, 如果通过改变滑动头 D 的位置来调节 R 使电流计 G 的指针没有偏转, 这时通过回路 ABCDA 中的电流 I 等于零, 也就是说电势差计达到平衡. 设这时电阻 R 为 R_x , 由上式得

$$I_0 R_x = \mathcal{E}_x \quad (3)$$

如果 I_0 为已知, 从式(3)就可算出未知电动势 \mathcal{E}_x . 但实际上常用的标准方法是一种比较法, 在完全不加变动的线路中, 用已知的标准电动势 \mathcal{E}_s 来代替 \mathcal{E}_x , 再调节 R 使电势差计达到平衡, 设这时 R 为 R_s , 由于 I_0 保持不变, 同理得

$$I_0 R_s = \mathcal{E}_s \quad (4)$$

由式(3)和(4)得

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \frac{R_x}{R_s}$$

因此, 从已知的标准电动势 \mathcal{E}_s , 通过测量 R_x 和 R_s 就能很精确地求出未知电动势 \mathcal{E}_x .

例题 10-3 图 10-15 表示把两个无内阻的直流电源并联起来给一个负载供电, 设已知电源的电动势以及各个电阻, 试求每一电源所供给的电流 I_1 、 I_2 以及通过负载的电流 I .

解 利用基尔霍夫定律来解这个问题时, 可先根据基尔霍夫第一定律(节点定律)列出电流方程,

对节点 A:

$$I - I_1 - I_2 = 0 \quad (1)$$

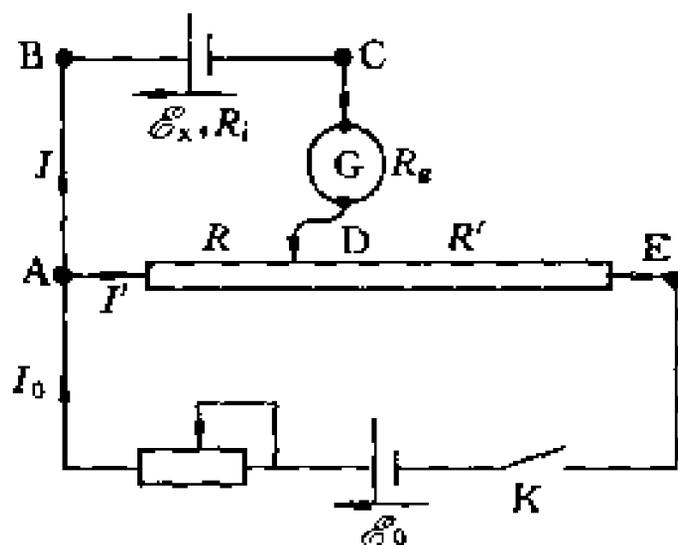


图 10-14 电势差计线路图

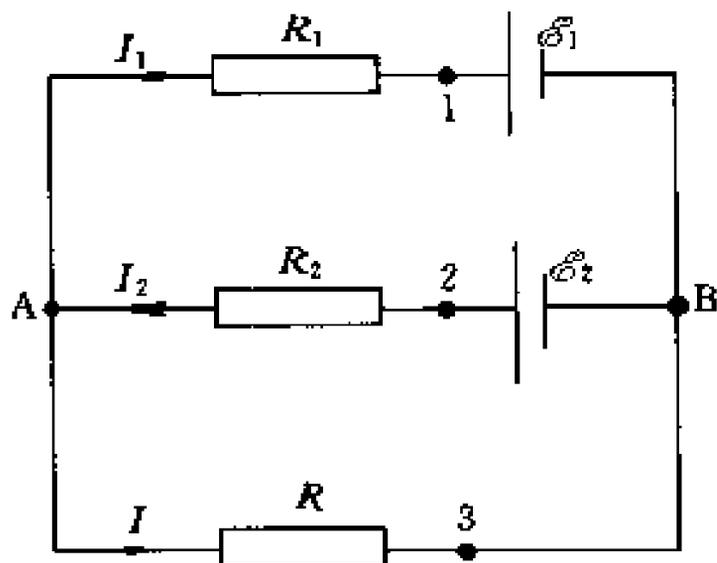


图 10-15 两个并联电源对一个负载供电

由于这电路只有两个节点, 所以从节点定律只能得出一个独立的方程, 因此对节点 B 没有必要再列方程式了. 为了求出各未知电流, 还需要两个方程, 这两个方程必须利用基尔霍夫第二定律(回路定律)列出, 例如,

对回路 B1A2B:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (2)$$

对回路 B2A3B:

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + IR \quad (3)$$

对这三个联立方程求解, 即得各电流为

$$I_1 = \frac{(R_2 + R)\mathcal{E}_1 - R\mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R)\mathcal{E}_2 - R\mathcal{E}_1}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} \quad (5)$$

$$I = \frac{R_2 \mathcal{E}_1 + R_1 \mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} \quad (6)$$

我们可以把式(6)改写为如下形式

$$I = \frac{\frac{R_2 \mathcal{E}_1 + R_1 \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\mathcal{E}_c}{R + R_c} \quad (6')$$

其中 $\mathcal{E}_e = \frac{R_2 \mathcal{E}_1 + R_1 \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}$, $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. 式(6')表明图 10-15 中的负载 R 就象是连接在一个电动势为 \mathcal{E}_e 和内电阻为 R_e 的电源上一样. 换句话说, 对于负载 R 来说, 图 10-15 中的两个并联电源可以用一个“等效电源”来代替, 如图 10-16 所示, 等效电动势和等效内

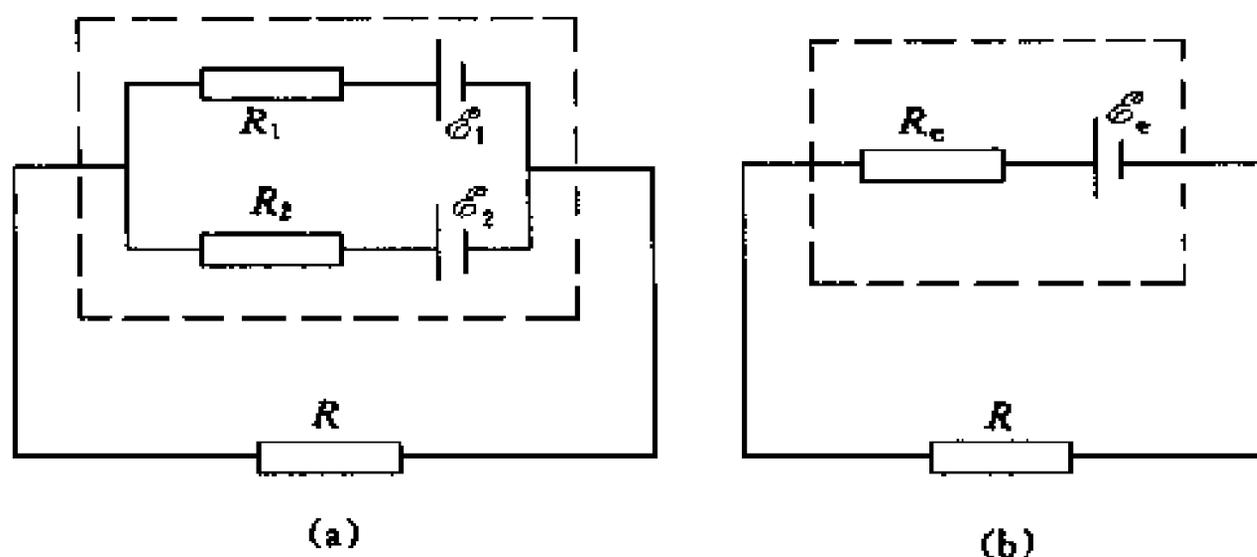


图 10-16 等效电源示意图

电阻的公式如上所示. 这里顺便指出, 不仅两个并联使用的电源可以用一个等效电源来代替, 在分析多回路电路中某一分支电路的电流或电压时, 也可以将电路的其余部分用一个等效电动势和一个等效内电阻来代替, 这就是所谓的等效电源原理.

上面, 我们已求出各电流 I_1 、 I_2 、 I 的表达式, 现再以具体的数值来讨论.

(1) 设已知 $\mathcal{E}_1 = 220 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 200 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$, $R = 45 \ \Omega$, 则算出各电流分别为

$$I_1 = \frac{(10 + 45) \times 220 - 45 \times 200}{10 \times 10 + 10 \times 45 + 10 \times 45} \text{ A} = \frac{3100}{1000} = 3.1 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{(10 + 45) \times 200 - 45 \times 220}{10 \times 10 + 10 \times 45 + 10 \times 45} \text{ A} = \frac{1100}{1000} = 1.1 \text{ A}$$

$$I = \frac{10 \times 220 + 10 \times 200}{10 \times 10 + 10 \times 45 + 10 \times 45} \text{ A} = \frac{4200}{1000} = 4.2 \text{ A}$$

这三个电流都是正的, 表明图 10-15 中所假定的电流方向与实际的电流方向一致, 这时两电源都向负载供电.

(2) 设已知 $\mathcal{E}_1 = 220 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 200 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \ \Omega$, 但 $R = 145 \ \Omega$, 则算出各电流分别为

$$I_1 = \frac{(10 + 145) \times 220 - 145 \times 200}{10 \times 10 + 10 \times 145 + 10 \times 145} \text{ A} = \frac{5100}{3000} = 1.7 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{(10 + 145) \times 200 - 145 \times 220}{10 \times 10 + 10 \times 145 + 10 \times 145} \text{ A} = \frac{-900}{3000} = -0.3 \text{ A}$$

$$I = \frac{10 \times 220 + 10 \times 200}{10 \times 10 + 10 \times 145 + 10 \times 145} \text{ A} = \frac{4200}{3000} = 1.4 \text{ A}$$

此时电流 I_2 为负值, 表明电流方向与图中所假设的方向相反, 即 I_2 不是从第二个电源的正极流出, 反而是从它的正极流进去. 也就是说, 它非但没有向负载供电, 反而要由第一个电源对它充电.

上述计算表明, 如果两个电源的电动势不相等, 则两者并联使用时并不一定是两个电源同时都向负载供电, 而是有可能一个电源输出功率, 另一个却接受功率(即处于充电状态). 这是两个电源并联使用时应当注意的问题, 一般地说, 如果希望两个并联使用的电源同时供电, 那么应尽可能采用电动势相等的电源来并联.

§ 10-5 * 金属导电的经典电子理论

在第九章中, 用物质电结构的学说说明了物体的带电现象以及静电感应、电介质极化的内在机理; 在本章开始时, 又用物质电结构的学说说明了在金属导体中形成电流的机构. 实际上这些学说是在 19 世纪末期电子发现以后才日臻完善的, 1900 年特鲁德 (P. Drude) 首先提出可用金属中自由电子的运动来解释金属导电性的问题, 以后洛伦兹进一步发展了特鲁德的概念, 建立了金属的经典电子理论.

一般金属都具有微晶结构, 金属的正离子按一定的方式排列成为各种晶格, 从原子中分离出来的外层电子可以在晶格间自由地作无规则热运动, 一般把这种电子称为金属中的自由电子. 这些自由电子与容器中的气体分子很相似, 所以这些自由电子也称为

电子气. 按气体动理论, 在室温时可以算出电子的平均速率约为 10^5 m/s, 远大于气体分子热运动的速度. 由于电子热运动的不规则性, 它们沿任一方向运动的概率都相等, 从宏观上看, 单位时间内通过金属中任一截面的电荷量都为零, 所以在平常情况下金属中并没有电流.

当金属中有电场时, 每个自由电子都将受到电场力的作用, 使电子逆着场强方向相对于晶格作定向的加速运动, 应该注意, 这个定向加速运动是叠加在自由电子的无规热运动之上的. 电子在运动过程中不断地与晶格相碰撞, 每当电子与晶格碰撞时就破坏了电子的定向运动; 而且电子被碰撞后向各个方向运动的机会是均等的, 这样, 对大量自由电子统计平均可以得出电子被碰后定向运动的速度为零. 因此, 每个电子在相邻两次碰撞之间的定向运动是一个初速度为零的匀加速直线运动, 其定向漂移速度只有在各自的自由程上飞行了一段时间后才累积起来. 但各个电子相邻两次碰撞之间的定向运动的时间间隔也是或长或短, 参差不齐, 故每个电子所累积的定向速度也不一样, 而对大量电子来说, 我们可以认为电子是以平均定向速度 \bar{v} 逆着电场的方向漂移, 大量自由电子的这种定向漂移运动就形成了金属导体中的电流.

下面我们从金属的电子理论, 导出欧姆定律的微分形式. 设导体内的恒定场强为 E , 则导体中每个自由电子在电场力作用下的加速度为

$$a = \frac{F}{m_e} = - \frac{eE}{m_e}$$

式中 m_e 为电子的质量. 如果 t 是电子下一次碰撞前所经历的时间, v_0 是上次碰撞后的初速度, 那么电子在与晶格再次碰撞前的速度为

$$v = v_0 - \frac{eE}{m_e}t$$

现在将上式对各种可能时间 t 的 v 值和所有可能的 v_0 求统计平均

(或对大量自由电子在同一时刻求平均),显然 v_0 的平均值为零,于是可得到电子的平均定向速度为

$$\bar{v} = -\frac{eE}{m_e} \bar{t}$$

式中 \bar{t} 是电子在相邻两次碰撞之间自由飞行的平均时间. 用电子热运动的平均速度 \bar{v} 除电子的平均自由程 $\bar{\lambda}$, 就得到电子行经一平均自由程的平均时间 \bar{t} , 这是因为电子的定向运动速度较之热运动速率 v 小得很多, 所以定向速度可以略而不计. 把

$$\bar{t} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$$

代入前式得

$$\bar{v} = -\frac{eE}{m_e} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$$

因电流密度 $\delta = -ne\bar{v}$, 所以

$$\delta = \frac{ne^2}{m_e} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} E = \gamma E$$

式中

$$\gamma = \frac{ne^2}{m_e} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \quad (10-20)$$

这里, 我们从金属电子理论导出了欧姆定律的微分形式, 以及金属电导率 γ 的表式. 从式(10-20)可定性说明金属电导率的物理实质, 金属单位体积内自由电子数 n 和电子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 愈大, 金属的电导率也愈大. 这是很明显的, 因为电子与晶格的碰撞相当于电子受到一种粘滞阻力, $\bar{\lambda}$ 愈大, 碰撞机会愈小, 电导率愈大, 电阻也就愈小. 式(10-20)还定性地说明了电导率 γ 随温度升高而减小的实验事实, 这是由于电子的热运动平均速率 \bar{v} 随温度升高而增加的缘故. 应该指出经典电子理论只能给出一个粗略的微观导电图象, 并不能给出与实验事实相符合的定量结果. 例如, 按电子气的假设, 电子热运动的平均速率与热力学温度 T 的平方根成正比, 也就是说电导率应与热力学温度的平方根成反比, 而实验结果

得出电导率却约与热力学温度成反比。

经典自由电子理论虽然在定性和定量上都有缺陷,然而,由于当时人们已确信金属导电是电子引起的,再加上相信牛顿定律是正确的,在这基础上建立起来的简单的导电图象仍被采纳了.经典电子理论的主要缺点在于把适用于宏观物体的牛顿定律应用到电子的运动中去,并且承认能量的连续性.近代物理的实验和理论指出,只有在量子理论基础上建立起来的金属导电理论,才能得到与实验相符的理论表达式.

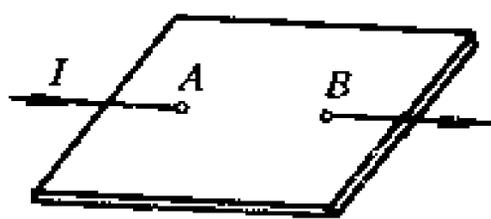
思 考 题

10-1 电流是电荷的流动,在电流密度 $\delta \neq 0$ 的地方,电荷的体密度 ρ 是否可能等于零?

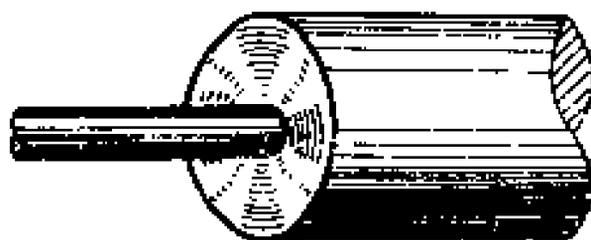
10-2 如果通过导体中各处的电流密度不相同,那么电流能否是恒定的?为什么?

10-3 一金属板(如图)上 A 、 B 两点如与直流电源连接,电流是否仅在 AB 直线上存在?为什么?试说明金属板上电流分布的大致情况.

10-4 两截面不同的铜杆串接在一起(如图),两端加有电压 U ,问通过两杆的电流是否相同?两杆的电流密度是否相同?两杆内的电场强度是否相同?如两杆的长度相等,两杆上的电压是否相同?



思考题 10-3 图



思考题 10-4 图

10-5 一铜线外涂以银层,两端加上电压后在铜线和银层中通过的电流是否相同?电流密度是否相同?电场强度是否相同?

10-6 电源中存在的电场和静电场有何不同?

10-7 电源的电动势和端电压有什么区别?两者在什么情况下才相等?

10-8 焦耳-楞次定律可写成 $P = I^2 R$ 和 $P = \frac{U^2}{R}$ 两种形式,从前式看热功

率正比于 R , 从后式看热功率反比于 R , 两种说法是否矛盾?

10-9 电灯的钨丝断后再碰上接入电路中, 电灯比原来亮还是比原来暗? 为什么?

10-10 一长为 l 截面积为 S 的铅线熔化后重新制成长为 $2l$ 截面积为 $\frac{1}{2}S$ 的铅线, 问:

(1) 铅线的电阻率是增大、减小还是保持不变?

(2) 铅线的电阻是增大、减小还是保持不变?

10-11 将电压 U 加在一根导线的两端, 设导线的截面半径为 r , 长度为 l . 试分别讨论下列情况对自由电子漂移速率的影响.

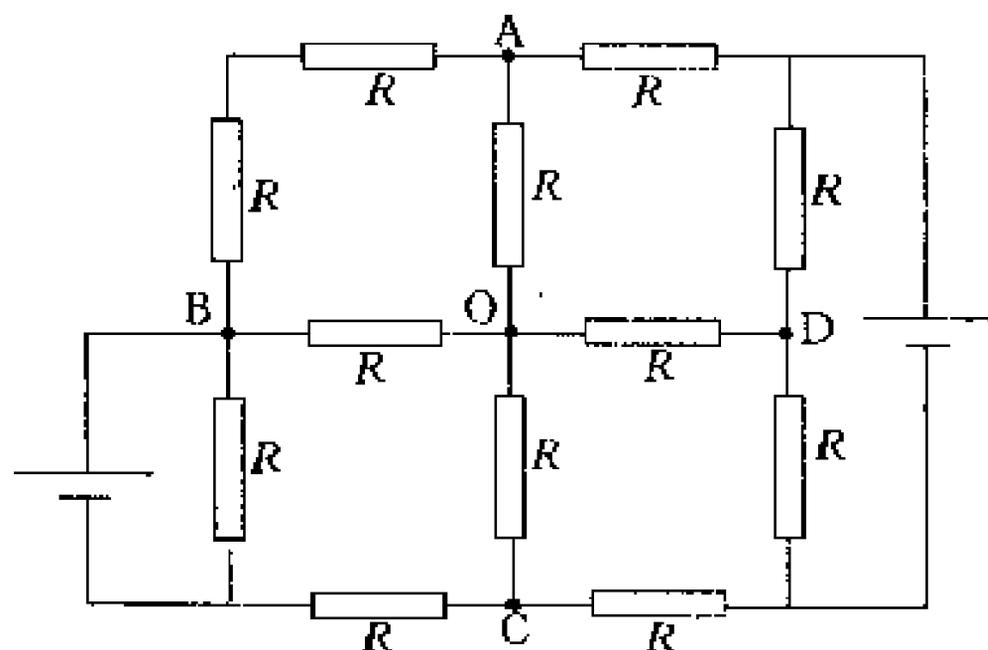
(1) U 增至原来的两倍;

(2) r 不变, l 增至原来的两倍;

(3) l 不变, r 增至原来的两倍.

10-12 如图所示, 证明节点 O 的电势是相邻四个节点电势的平均值:

$$V_O = \frac{V_A + V_B + V_C + V_D}{4}.$$



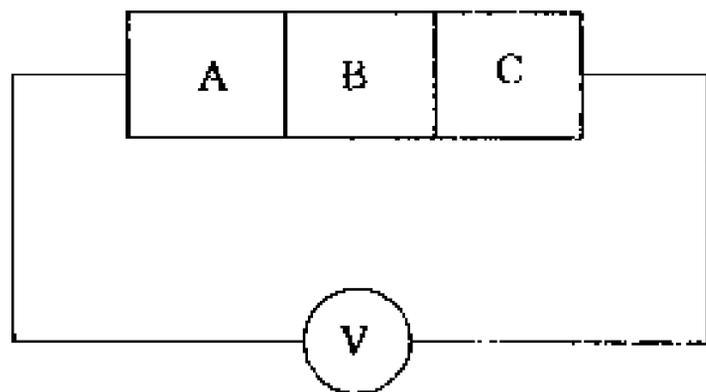
思考题 10-12 图

10-13 在两层楼道之间安装一盏电灯, 试设计一个电路, 使得在楼上和楼下的住户都能开关这盏电灯(用单刀双掷开关).

10-14 为什么在室温时金属不容易发射电子?

10-15 如果选择两种逸出功和电子密度差别都非常大的金属 A 和 B, 让它们互相接触, 是否就可以作为具有几伏电动势的永远不会耗竭的电源呢?

10-16 把三种温度不同的不同金属 A、B 和 C 串联,问能否用灵敏的伏特计按图示的接法测出它们之间的接触电势差?



思考题 10-16 图

习 题

10-1 有一灵敏电流计可以测量小到 10^{-10} A 的电流,当铜导线中通有这样小的电流时,每秒内有多少个自由电子通过导线的任一截面?如导线的截面积是 1 mm^2 ,自由电子的密度是 $8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$,自由电子沿导线漂移 1 cm 需要多少时间?

10-2 已知导线中的电流按 $I = t^2 - 0.5t + 6$ 的规律随时间 t 变化,式中电流和时间的单位分别为 A 和 s. 计算在 $t = 1$ 到 $t = 3$ 的时间内通过导线截面的电荷量.

10-3 在一个特制的阴极射线管中,测得其射线电流为 $60 \mu\text{A}$,求每 10 s 有多少个电子打击在管子的荧屏上.

10-4 截面积为 10 mm^2 的铜线中,允许通过的电流是 60 A . 试计算铜线中的允许电流密度. 设每个铜原子贡献一个自由电子,则可算得铜线中的自由电子密度是 $8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$,试计算铜线中通有允许电流时自由电子的漂移速度.

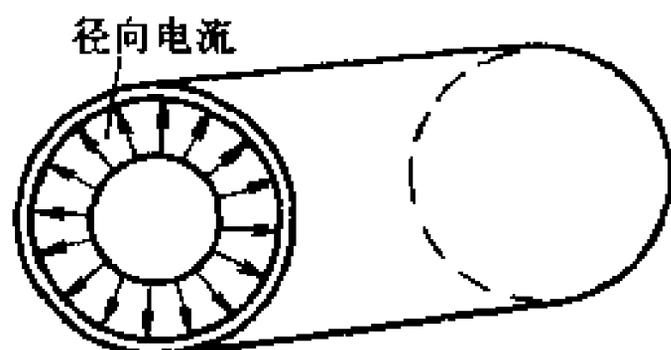
10-5 一铜棒的横截面积为 $20 \times 80 \text{ mm}^2$,长为 2.0 m ,两端的电势差为 50 mV . 已知铜的电导率 $\gamma = 5.7 \times 10^7 \text{ S/m}$,铜内自由电子的电荷体密度为 $1.36 \times 10^{16} \text{ C/m}^3$. 求:(1)它的电阻;(2)电流;(3)电流密度;(4)棒内的电场强度;(5)所消耗的功率;(6)棒内电子的漂移速度.

10-6 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的两个同心球壳构成一电阻元件,当两球壳间填满电阻率为 ρ 的材料后,证明该电阻器的电阻值为 $R =$

$$\frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

10-7 一圆柱形钨丝原来的长度为 L_1 , 截面积为 S , 现将钨丝均匀拉长, 最后的长度为 $L_2 = 10L_1$, 并算得拉长后的电阻为 75Ω . 求未拉长时的电阻值.

10-8 电缆的芯线是半径为 $r_1 = 0.5 \text{ cm}$ 的铜线, 在铜线外面包一层同轴的绝缘层, 绝缘层的外半径为 $r_2 = 1.0 \text{ cm}$, 电阻率 $\rho = 1.0 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$. 在绝缘层外面又用铅层保护起来(如图).



习题 10-8 图

(1) 求长 $L = 1000 \text{ m}$ 的这种电缆沿径向的电阻.

(2) 当芯线与铅层间的电势差为 100 V 时, 在这电缆中沿径向的电流多大?

(提示: 电缆在工作时, 芯线和铅层处于不同的电势, 因此其间存在着电场, 即存在径向电流.)

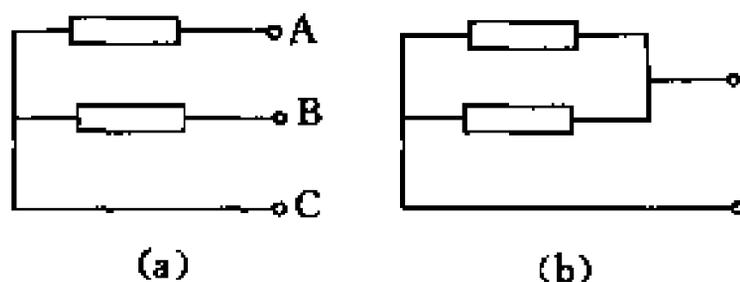
10-9 为了节约用铜, 将导线改用铝线, 由于铝线的强度不够, 通常以铜作为“芯线”. 设有铜芯铝皮的电缆 1000 m , 已知外直径为 6 mm , 芯线直径为 2 mm , $\rho_{\text{Cu}} = 0.15 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, $\rho_{\text{Al}} = 0.03 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, 试计算这种电缆的

(1) 芯线的电阻;

(2) 铝皮的电阻;

(3) 总电阻.

10-10 一个功率为 45 W 的电烙铁, 额定电压是 $220/110 \text{ V}$. 其电阻丝有中心抽头如图(a)所示. 当电源是 220 V 时, 用 A、B 两点接电源; 当电源是 110 V 时, 则将电阻丝并联后接电源, 如图(b)所示. 试问:



习题 10-10 图

(1) 电阻丝串联时的总电阻是多少?

(2) 接 110 V 电源时, 电烙铁的功率是否仍是 45 W ?

(3) 在两种接法里, 流过电阻丝的电流是否相同? 从电源中取用的电流

(即总电流)是否相同?

10-11 一电源的电动势为 \mathcal{E} , 内电阻为 R , 若与可变的外电阻 R 连接, 则电源供给的电流 I 将随 R 而改变.

(1) 求电源端电压与外电阻 R 的关系.

(2) 断路时(即 $R = \infty$)的端电压多大? 电流多少?

(3) 短路时(即 $R = 0$)的端电压多大? 电流多少?

(4) 设消耗于外电阻的功率为 P (称为输出功率), 求 P 与 R 的关系式.

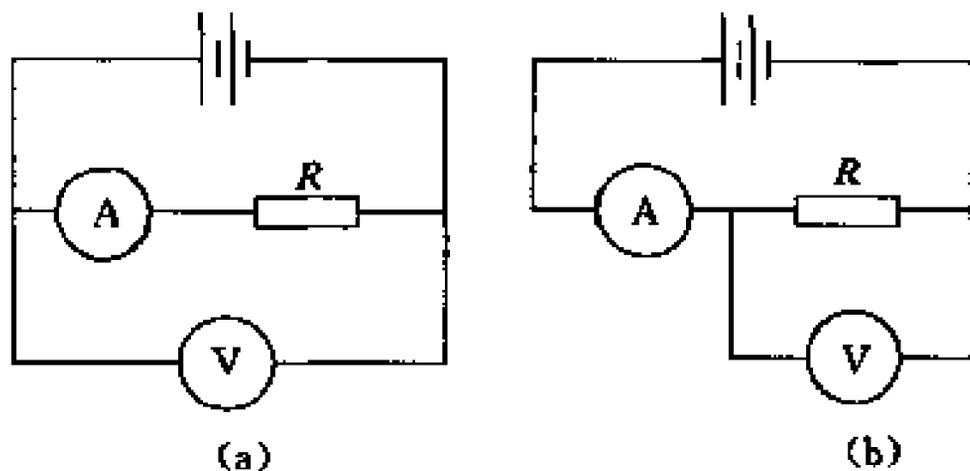
(5) 欲使电源有最大输出功率, R 应为多大?

(6) 电源的能量一部分消耗于外电阻, 另一部分消耗于内电阻. 外电阻中消耗的功率与电源总的功率之比, 称为电源的效率 η , 求 η 与 R 的关系. 当电源有最大输出功率时, η 为多少?

10-12 一蓄电池在充电时通过的电流为 3.0 A , 此时蓄电池两极间的电势差为 4.25 V . 当这蓄电池在放电时, 通过的电流为 4.0 A , 此时两极间的电势差为 3.90 V . 求这蓄电池的电动势和内电阻.

10-13 利用安培计与伏特计来测量电阻(已知安培计的电阻 $R_A = 0.03\ \Omega$, 伏特计的电阻 $R_V = 1\ 000\ \Omega$), 有下列两种方法.

(1) 按图(a)的接法, 安培计的读数为 $I_1 = 0.32\text{ A}$, 伏特计的读数为 $U_1 = 9.60\text{ V}$. 试求由于在计算电阻值时因未将安培计的电阻计算在内而造成的相对误差.



习题 10-13 图

如 $I'_1 = 7.00\text{ A}$, $U'_1 = 2.10\text{ V}$, 作同样的计算.

(2) 按图(b)的接法, 安培计的读数为 $I_2 = 2.40\text{ A}$, 伏特计的读数为 $U_2 = 7.20\text{ V}$. 试求由于在计算电阻值时因未将通过伏特计中的电流计算在内而造成的相对误差.

如 $I'_2 = 20 \text{ mA}$, $U'_2 = 7.20 \text{ V}$, 作同样的计算.

(3) 通过上面的计算, 讨论所得的结果.

10-14 当电流为 1 A , 端电压为 2 V 时, 试求下列各情形中电流的功率以及 1 s 内所产生的热量.

(1) 电流通过导线;

(2) 电流通过充电的蓄电池, 这蓄电池的电动势为 1.3 V ;

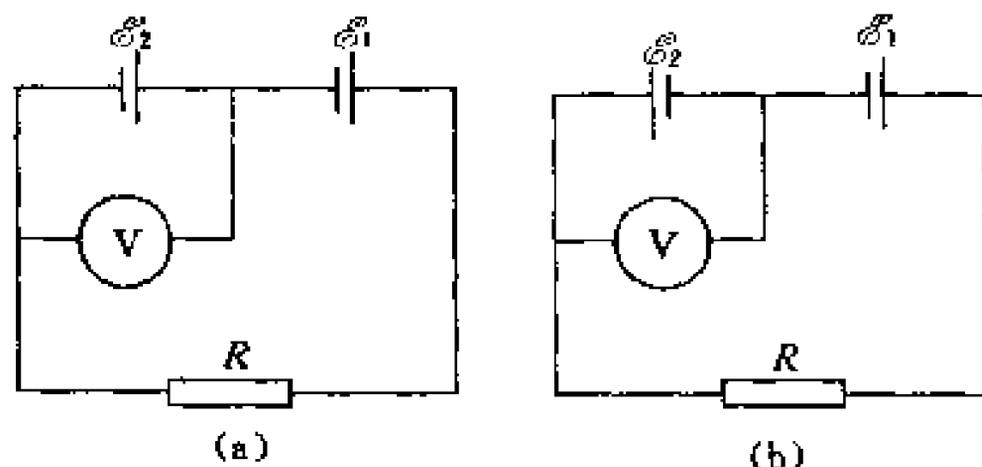
(3) 电流通过放电的蓄电池, 这蓄电池的电动势为 2.6 V .

10-15 一导线电阻 $R = 6 \Omega$, 其中有电流通过, 设在下列各种情形中, 通过的总电荷量都是 30 C , 求各情形中导线所产生的热量.

(1) 在 $t = 24 \text{ s}$ 内有恒定电流通过导线;

(2) 在 $t = 24 \text{ s}$ 内电流均匀地减少到零;

(3) 电流按每经过 24 s 减小一半的规律一直减到零.



习题 10-16 图

10-16 电动势为 $\mathcal{E}_1 = 1.8 \text{ V}$ 和 $\mathcal{E}_2 = 1.4 \text{ V}$ 的两电池, 与外电阻 R 连接如图(a), 伏特计的读数为 $U_1 = 0.6 \text{ V}$ 。若将两电池连接如图(b), 问伏特计的读数将为多少? (伏特计的零点刻度在中央.)

问电池(2)在两种情形中的能量转换关系如何? 列式并加以讨论.

10-17 一电路如图所示, 其中 B 点接地, $R_1 = 10.0 \Omega$, $R_2 = 2.5 \Omega$, $R_3 = 3.0 \Omega$, $R_4 = 1.0 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 6.0 \text{ V}$, $R_5 = 0.40 \Omega$, $\mathcal{E}_2 = 8.0 \text{ V}$, $R_6 = 0.6 \Omega$. 求:

(1) 通过每个电阻中的电流;

(2) 每个电池的端电压;

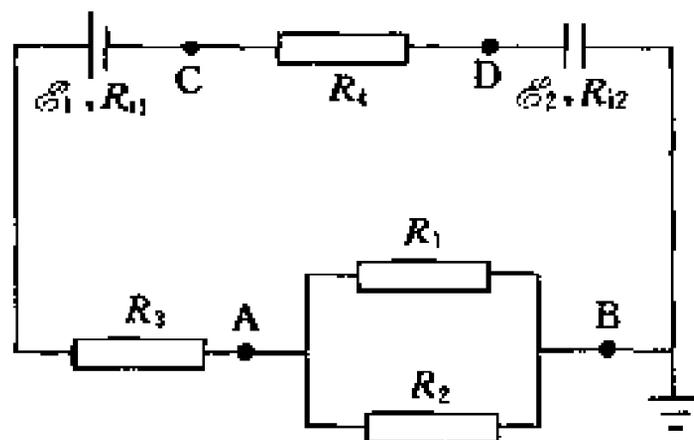
(3) A、D 两点间的电势差;

(4) B、C 两点间的电势差;

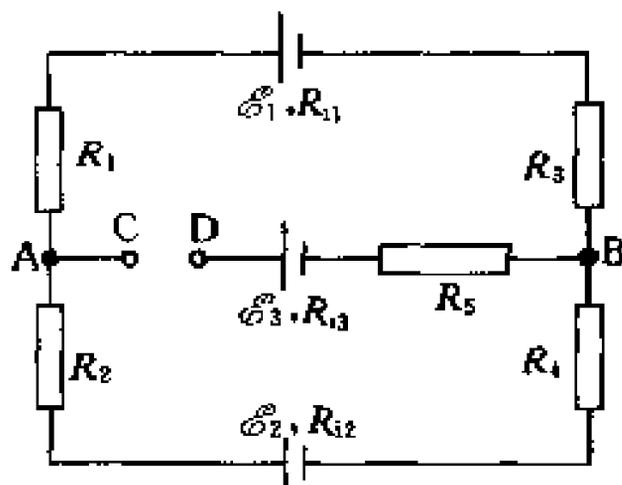
(5) A、B、C、D 各点处的电势.

10-18 在如图所示的电路中,已知 $\mathcal{E}_1=12\text{ V}$, $\mathcal{E}_2=9\text{ V}$, $\mathcal{E}_3=8\text{ V}$, $R_{11}=R_{12}=R_{13}=1\ \Omega$, $R_1=R_2=R_3=R_4=2\ \Omega$, $R_5=3\ \Omega$,求:

- (1) A、B 两点间的电势差;
- (2) C、D 两点间的电势差;
- (3) 如 C、D 两点短路,这时通过 R_5 的电流多大?

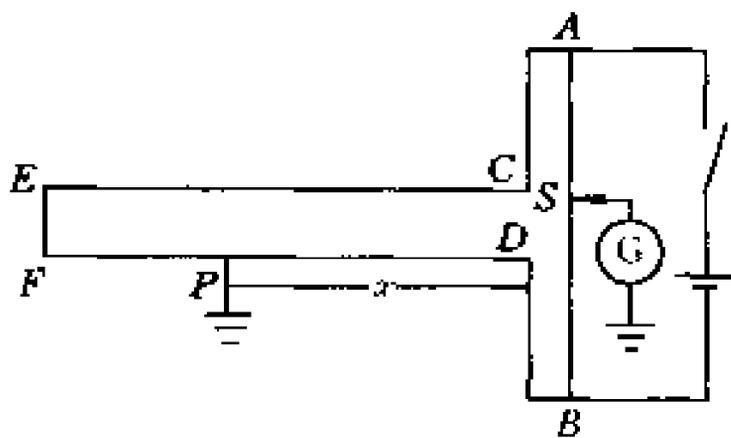


习题 10-17 图



习题 10-18 图

10-19 为了找出电缆由于损坏而接地的地方,可用如图所示的电路. AB 是一条长为 100 cm 的均匀电阻线,接触点 S 可在 AB 上滑动. 已知电缆长 $CE=FD=7.8\text{ km}$,当 S 滑到 $SB=41\text{ cm}$ 时,通过电流计的电流为零. 求电缆损坏处离检查处的距离 x . 测量时,不计 AC 、 DB 两段接线的电阻及接线 EF 段的长度和电阻.

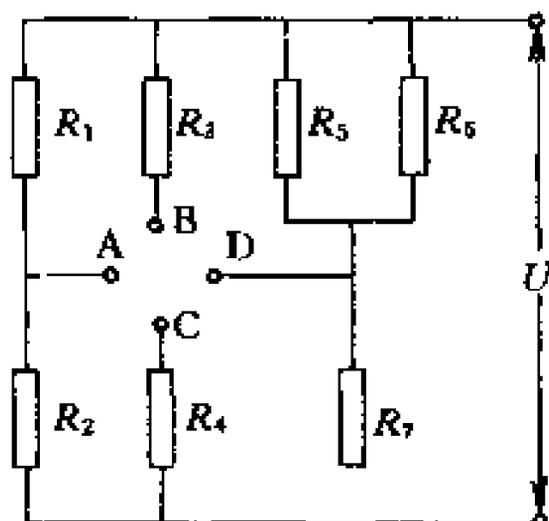


习题 10-19 图

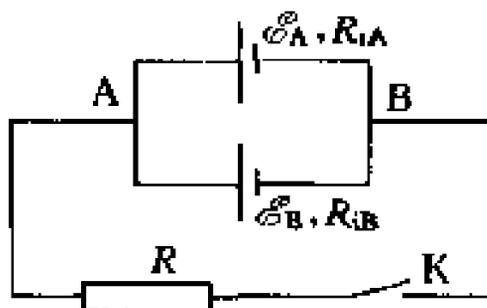
10-20 如图所示的电路, $U=12\text{ V}$, $R_1=30\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$, $R_3=100\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$, $R_5=100\ \Omega$, $R_6=1\ \Omega$, $R_7=2\ \Omega$. 求电压 U_{AB} 、 U_{AC} 和 U_{AD} .

10-21 如图, A、B 两电池的电动势及内电阻分别为 $\mathcal{E}_A=12.0\text{ V}$, $R_A=2.0\ \Omega$, $\mathcal{E}_B=6.0\text{ V}$, $R_B=1.0\ \Omega$, 电阻 $R=10\ \Omega$.

- (1) 当 K 断开时, A、B 两点间的电势差是多少?
 (2) 当 K 接通时, A、B 两点间的电势差是多少?



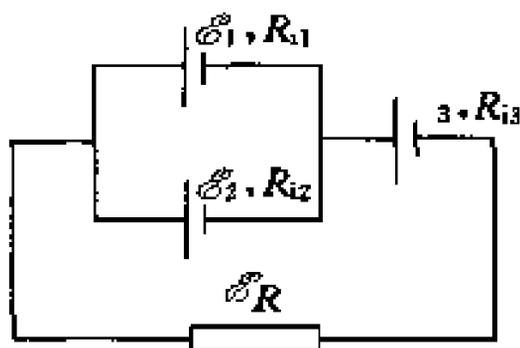
习题 10-20 图



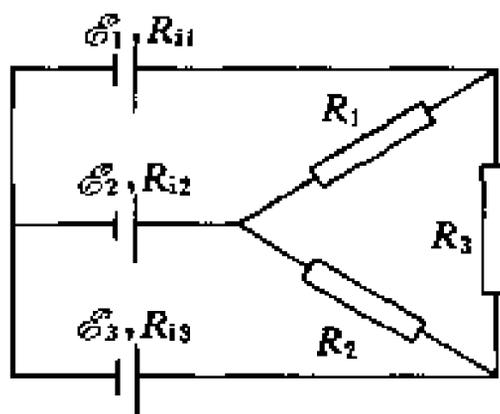
习题 10-21 图

10-22 三只电池连接如图, 它们的电动势及内电阻分别为 $\mathcal{E}_1 = 1.3 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1.5 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 2.0 \text{ V}$, $R_{i1} = R_{i2} = R_{i3} = 0.20 \Omega$, 外电阻 $R = 0.55 \Omega$, 求各电池中的电流, 并指明方向。

10-23 如图所示的电路, $\mathcal{E}_1 = 6.0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 4.5 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 2.5 \text{ V}$, $R_{i1} = 0.2 \Omega$, $R_{i2} = 0.1 \Omega$, $R_{i3} = 0.1 \Omega$, $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.5 \Omega$, $R_3 = 2.5 \Omega$. 求通过电阻 R_1 , R_2 , R_3 中的电流。



习题 10-22 图



习题 10-23 图

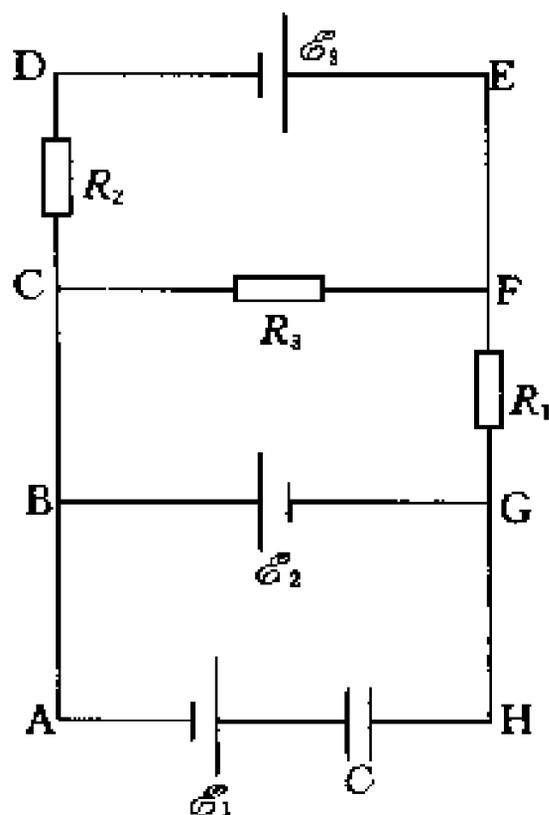
10-24 如图, $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $C = 6 \mu\text{F}$. 求在恒定情况下

- (1) 流过各段电路中的电流;
- (2) 电容器上的电荷量;
- (3) 如果在 G、H 间改为连接上 10Ω 的电阻, 电路中的电流是否改变?

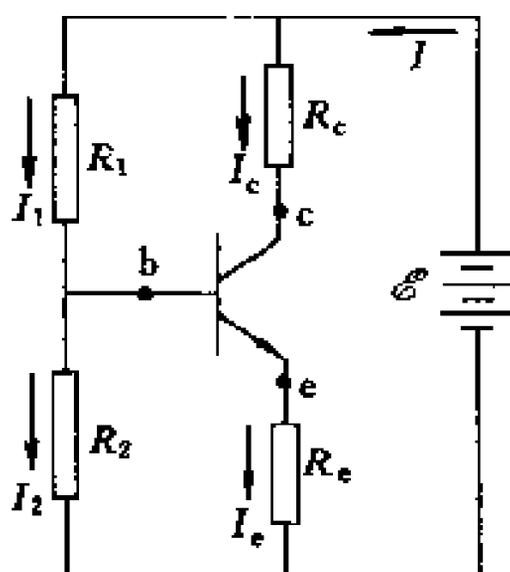
10-25 如图 e 为晶体三极管发射极, b 为基极, c 为集电极。

(1) 如测得电源电流 $I=1.35\text{ mA}$, 集电极电流 $I_c=1.00\text{ mA}$, 发射极电流 $I_e=1.05\text{ mA}$. 试求其它支路中的电流.

(2) 如果电源电动势 $\mathcal{E}=9\text{ V}$, 内阻不计, $R_c=3\text{ k}\Omega$, $R_e=2.2\text{ k}\Omega$, $R_1=17\text{ k}\Omega$. 试求电阻 R_2 上的电压降 U_2 , 以及晶体管上的电压降 U_{bc} 及 U_{ce} .



习题 10-24 图



习题 10-25 图

10-26 一根铝线的截面积为 0.10 mm^2 , 在室温 300 K 时通有 $5.0 \times 10^{-4}\text{ A}$ 的电流. 设每个铝原子有三个电子参与导电, 已知铝的相对原子质量为 27, 室温时的密度为 2.7 g/cm^3 , 电阻率为 $2.8 \times 10^{-6}\text{ }\Omega \cdot \text{m}$, 电子质量 $m_e=9.1 \times 10^{-31}\text{ kg}$, 阿伏加德罗常数为 $6.0 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$, 玻耳兹曼常数 $k=1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$. 求铝线内

- (1) 电子定向运动的平均速率 \bar{v} ;
- (2) 电子热运动的方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$;
- (3) 一个电子相继两次碰撞之间的时间;
- (4) 电子的平均自由程;
- (5) 电场强度 E 的大小;
- (6) 使 \bar{v} 值等于 $\sqrt{\bar{v}^2}$ 值时所需的电场强度.

10-27 已知铜线中的自由电子数为 $8.48 \times 10^{23}\text{ m}^{-3}$, 应用电子导电的经典模型, 估算铜线中自由电子的平均碰撞时间. 假定铜线中自由电子的热

运动平均速率为 1.6×10^6 m/s, 再估算电子在铜线中的平均自由程. 铜的电阻率为 $1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

阅读材料 II

接触电势差 温差电现象

1. 逸出功与热电子发射

金属中的自由电子虽然都在作无规的热运动, 但在常温情况下, 由于这些电子热运动的平均动能不大, 很少能观测到电子逸出金属表面的现象, 这表明在金属表面层内存在着一种阻止电子逸出金属表面的作用力. 首先, 金属中的自由电子处在由正离子所组成的晶体点阵之中, 它们受到周期性排列的正离子的电场的作用, 在金属外面自由电子不受场力可以认为电势能为零, 而在金属内部其电势能则是负的, 外界不提供足够的能量, 它们无力逸出金属表面. 其次, 少数电子由于其热运动能量较大, 有可能逸出金属表面, 这些电子一旦逸出金属表面后, 金属内就出现正电荷, 这些正电荷又将吸引电子, 迫使逸出的电子重新返回到金属表面中去. 这样, 就不断地有电子出入于金属表面, 结果在金属表面外附近包围一层薄的电子层(如图 H-1), 这电子层的电场也阻止其它电子从金属中逸出. 由此可知, 一个自由电子要逸出金属表面必须克服上述两种阻力作一定的功, 这个功称为电子的逸出功, 这个功的数值等于在金属表面内外电子势能的差值. 电子势能在金属表面内外的跃变情况可以形象地用图 H-2 所示的势阱图来表示, 显然, 势阱的深度就等于电子的逸出功, 即

$$A = eU \quad (10-21)$$

式中 U 称为逸出电势, 通常逸出功用电子伏特来量度.

逸出功的大小不但和金属材料有关, 还与金属表面的情况有关. 如果在金属表面涂上其他物质, 根据所涂材料的不同, 可以使

逸出功增加或减小. 例如, 钨的逸出功为 4.52 eV, 钪为 3.5 eV, 而涂钪的钨逸出功则为 2.63 eV. 金属的逸出功可以直接测量, 实验表明, 绝大多数金属的逸出功在 1 eV 到 6 eV 之间.

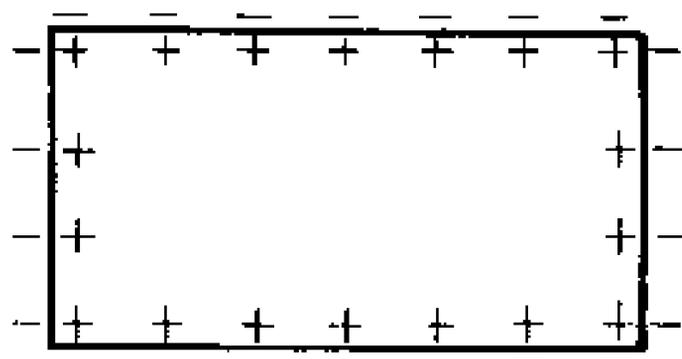


图 H-1 金属表面附近的电子分布

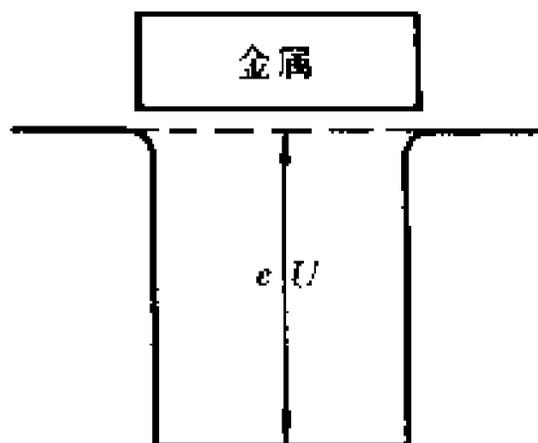


图 H-2 势阱示意图

本节开始已经提到过, 在室温情况下, 由于自由电子热运动的平均动能不大, 只有极少数动能大的电子才可能逸出金属表面. 但是, 当金属的温度逐渐升高时, 金属中动能大于逸出功并能逸出金属表面的电子数也逐渐增多, 这种现象和被加热的水不断地蒸发水分子的过程相似. 当金属温度升高到一定的时候, 开始显著地发射电子, 这一现象叫做热电子发射.

根据经典统计理论, 在温度为 T 时, 金属中自由电子气的平均平动动能为 $\frac{3}{2}kT$, 则用对金属加热的方法使电子的平均平动动能达到等于逸出功, 从而使它能逸出金属表面所必须的温度 T 应满足下式

$$T = \frac{2eU}{3k}$$

例如, 金属钨的逸出功为 4.52 eV, 代入上式, 则相应的温度应为

$$T = \frac{2 \times 4.52 \times 1.6 \times 10^{19}}{3 \times 1.38 \times 10^{23}} \text{ K} = 3.49 \times 10^4 \text{ K}$$

从计算结果来看, 似乎需要极高的温度电子才具有足以逸出金属表面所需的平均平动动能, 实际上因为金属中自由电子的速率遵

从麦克斯韦速率分布律,一般当温度达到 1 000 K 以上时就有一部分电子的动能远大于平均平动动能,因而金属温度未达到上述计算温度时便有大量电子从金属表面发射出来了。

热电子发射在无线电技术中应用很广泛,如各种电子管、电子射线管都是利用热电子发射来产生电子流的。

除热电子发射外,还有许多其他类型的发射电子的过程,例如,用电子流或离子流轰击金属表面而发射电子,叫做次级电子发射;靠外加强电场引起电子的发射,叫做场致发射;用光照射金属表面而引起的电子发射,叫做光电发射。所有这些现象,都证实了电子逸出功的存在。上述各种电子发射过程都有着各自的实际应用。

2. 接触电势差

1797 年伏打(A. Volta)发现:温度相同的两种不同的金属相接触时,在它们的接触面两侧会产生电势差,这种电势差称为接触电势差。伏打根据实验结果指出,将金属排成下述序列

铝、锌、锡、镉、铅、铋、铟、汞、铁、铜、银、金、铂、钨

当其中任何一种金属与排列在其后的金属相接触时,它本身的电势将高于其后面金属的电势,即前者带正电,后者带负电。

接触电现象是金属的一种表面效应,它是由于两种金属电子的逸出功不同和由于金属中自由电子密度不同所产生的电势差。下面我们概要地分析一下产生接触电势差的物理原因。

设有两种不同的金属 A 和 B 互相接触,如图 H-3 所示。首先假定它们的电子密度相同,但具有不同的逸出电势 U_A 和 U_B , 并设 $U_A < U_B$ 。由于在接触面两侧逸出电势不同引起的不对称性以及电子的热运动,使从金属 A 逸出通过接触面进入金属 B 的电子数多于从金属 B 逸出进入金属 A 的电子数,这种现象可以等效地看作在接触面邻近,电子受到一个由 A 指向 B 的非静电性力的作用,相应的非静电性场强 E'_k 由 B 指向 A,也就是说可把接触面看作

是一个电源. 随着电子的转移, 金属 A 因缺少电子而带正电, 金属 B 因电子增多而带负电, 于是在 A 和 B 的接触处又形成一个由 A 指向 B 的场强 E' , 并随着电子转移过程的继续进行而不断增强, 它同时阻挡过多的电子从金属 A 进入金属 B, 直到从金属 A 转移到金属 B 的电子数和从金属 B 转移到 A 的电子数相等时, 便达到动态平衡状态, 同时在金属 A 和 B 接触面两侧建立了一个恒定的电势差 U'_{AB} . 由实验测得源于金属电子逸出功不同而形成的接触电势差数量级为 $10^{-1} \sim 1$ V.

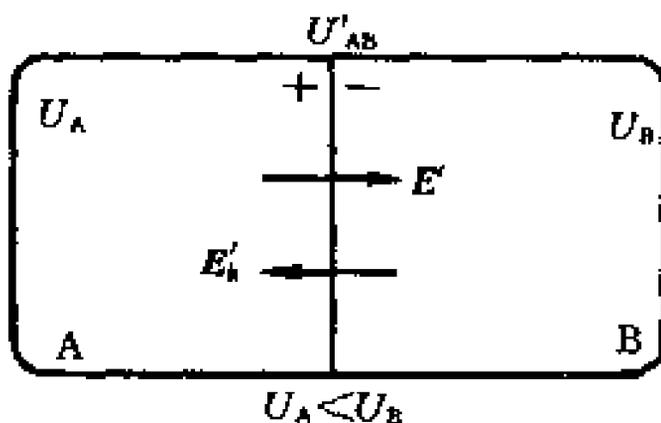


图 H-3 由于逸出功不同而形成接触电势差

其次, 我们再说明源于两种金属内电子密度不同而形成的接触电势差. 设 A 和 B 内的自由电子密度分别为 n_A 和 n_B , 并设 $n_A > n_B$. 两金属相接触后, 两边的电子相互扩散, 显然, 从金属 A 向 B 扩散的电子数要比从 B 向 A 扩散的电子数多, 结果在接触面两侧形成一个由 A 指向 B 的电场 E'' (图 H-4). 这个电场阻挡从 A 向 B 扩散的电子, 但促进从 B 向 A 扩散的电子, 这两种运动趋势最后达到动态平衡, 同时在金属 A 和 B 的接触面两侧形成一个恒定的电势差 U''_{AB} . U''_{AB} 的值一般很小, 其数量级约为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ V.

如果温度相同的几种金属依次串联接触, 如图 H-5 所示, 则两端金属 A 和 C 之间的电势差, 仍和它们直接接触时的接触电势差相同, 中间的金属不论其个数及材料性质如何, 对两端金属的接触电势差都不会产生影响.

当温度相同的不同金属首尾相接成一闭合回路, 则在整个闭合回路中, 各接触面处接触电势差之和等于零, 即在闭合回路中, 不会产生一个总电动势.

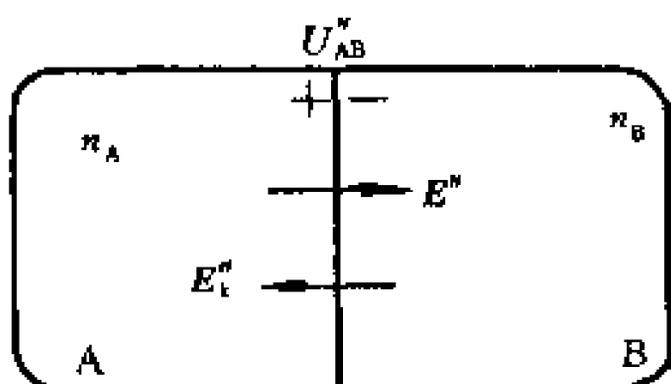


图 H 4 由于电子密度不同而形成
接触电势差

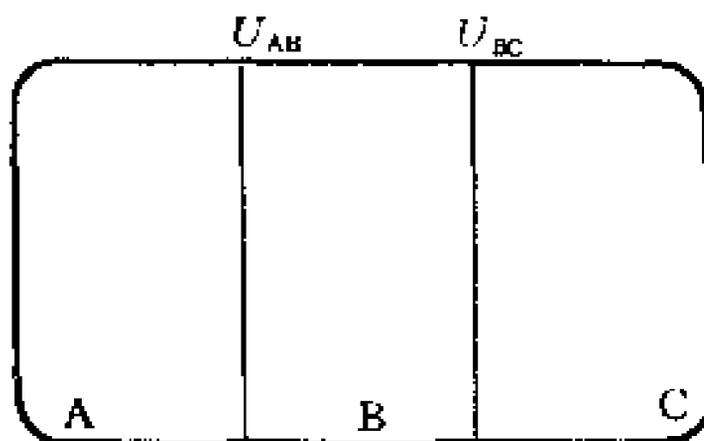


图 H 5 两端电势差与中间金属无关

3. 温差电动势

热和电之间存在着许多相互联系的现象. 例如, 通电导线中的焦耳-楞次热、电介质的电容率和导体的电阻随温度的变化而变值、以及金属表面的热电子发射等, 都是重要的电热或热电现象. 在这里将介绍当金属及其接触面处温度不均匀时所引起的温差电现象.

(1) 泽贝克(T. J. Seebeck)效应

1826年泽贝克发现: 当两种不同金属 A 和 B 接成闭合回路, 并在两个连接处保持不同的温度时, 则在回路中有电流通过, 如图 H-6 所示. 这就是说, 由于两种不同金属连接处的温度差, 在回路中产生了电动势, 这一现象称为泽贝克效应, 所产生的电动势叫做温差电动势, 图示的简单回路称为温差电偶.

根据上面所讲形成接触电势差的知识, 可以概略地说明产生温差电动势的原因. 在图 H-6 中, 由于两金属的两个连接处的温度不同, 使得在两连接处的接触电势差也不相等, 这样, 回路中等效于反向串联着两个电动势不等的电源, 整个回路中电动势不为零, 因此有电流流通.

实验指出, 当冷接头处保持温度为 T' , 热接头处的温度为 T , 且温度变化范围不大时, 温差电动势 \mathcal{E}_{AB} 与温度差 $(T - T')$ 的关

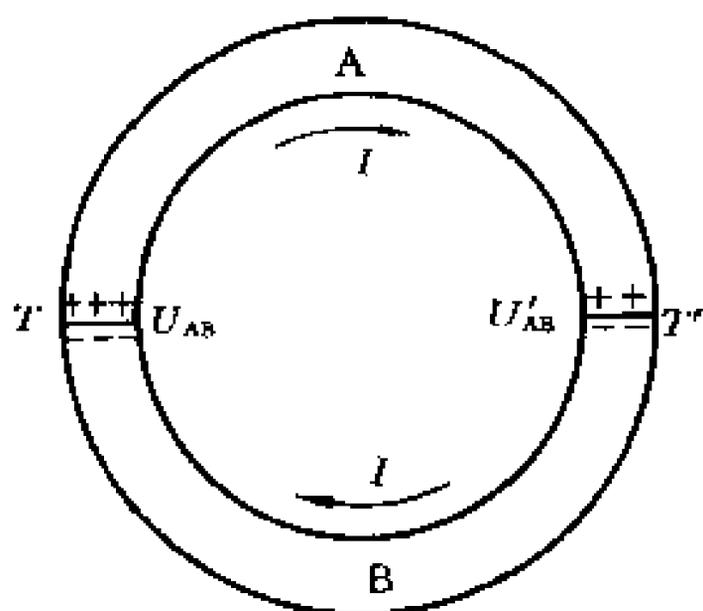


图 H-6 温差电偶 ($T > T'$)

系可以近似地表为

$$\mathcal{E}_{AB} = a(T - T') + \frac{1}{2}b(T - T')^2 \quad (10-22)$$

式中 a 和 b 是和两种金属性质有关的常量, 可以通过实验测得. 在通常的温度变化范围内 ($300 \sim 3\,000\text{ K}$), 温差电动势的值一般都很小, 约为几毫伏到几十毫伏. 因此, 一般不把温差电偶作为电源使用, 但是, 温差电动势具有随温度变化的特点, 可以通过测量温差电动势的值算出热端的温度, 为此温差电偶被广泛应用于测温技术, 它具有热惯性小、灵敏度高的优点.

(2) 佩尔捷 (J. C. A. Peltier) 效应

1834 年佩尔捷发现泽贝克效应的逆效应, 即当电流通过两种不同金属的连接处时, 在连接处会出现与电流流向有关的放出或吸收热量的现象, 这种现象称为佩尔捷效应. 实验表明, 在连接处放出或吸收的热量值, 只与金属的性质及连接处的温度有关, 与回路中其他部分的温度无关.

佩尔捷效应可用接触电势差来定性说明. 如图 H-7 所示, 当金属 A 和 B 接成回路时, 在连接处因有接触电势差存在, 使每个连接处相当于一个电动势由 B 指向 A 的电源. 当电流如图中所示通过回路时, 连接处 1 的电源处于充电状态, 它将消耗电能并转为

以热量形式放出；连接处 2 的电源处于放电状态，它将吸收热量转换为电能。

(3) 汤姆孙 (W. Thomsen) 效应

1851 年汤姆孙从热力学理论分析指出：当电流通过具有温度梯度的导体时，导体中除放出焦耳楞次热外，还会在导体内出现放热或吸热现象，这个原先只是理论上预言的、后来为实验所证实的现象称为汤姆孙效应。

汤姆孙效应也可以用经典电子理论来解释。由于导体中存在温度梯度，温度较高处的电子具有较大的压强，它将驱使温度较高处的自由电子向温度较低处扩散，这个过程等效于在导体中有一个从低温区指向高温区的非静电性场强 E_k ，即相当于一个电动势由低温区指向高温区的电源。当电流顺着温度下降方向通过导体时 [图 H-8(a)]，这段导体中电能就转换为汤姆孙热而放出；当电流逆着温度下降方向通过导体时 [图 H-8(b)]，这段导体将吸收汤姆孙热而转化为电能。

上面我们分别介绍了三种不同的温差电现象，实际上当两种不同金属接成一闭合回路时，上述三种效应可以同时出现，这说明它们之间以及它们和接触电现象存在着内在的联系，有关这类问题，在这里就不作深入讨论了。

金属的佩尔捷效应和汤姆孙效应的实用价值不大，但是泽贝克效应却在生产、科学研究、甚至日常生活中有着广泛的应用，它主要被用来测量温度（如冶炼及热处理炉的高温）、辐射强度（如红外辐射）、电流强度等量。用温差电偶测量温度有许多优点，如测温范围广，灵敏度和准确度高，还由于接触点很小，所以能够测量极

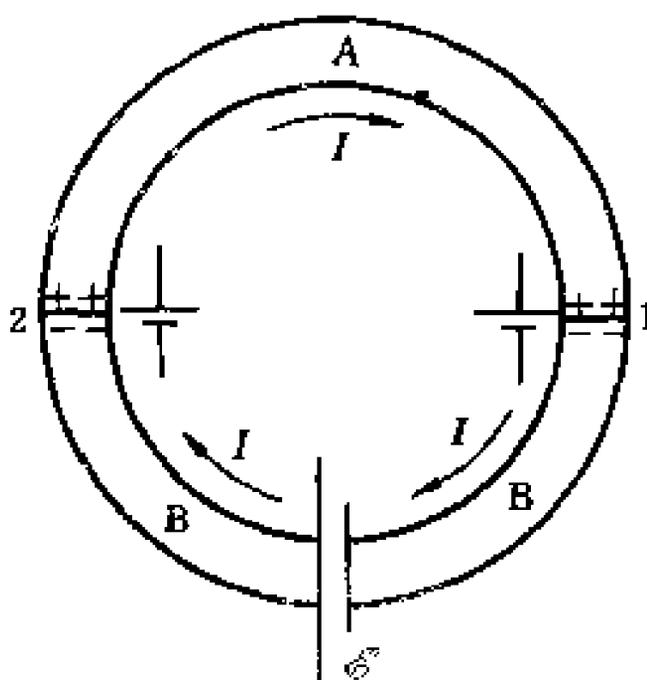


图 H-7 佩尔捷效应

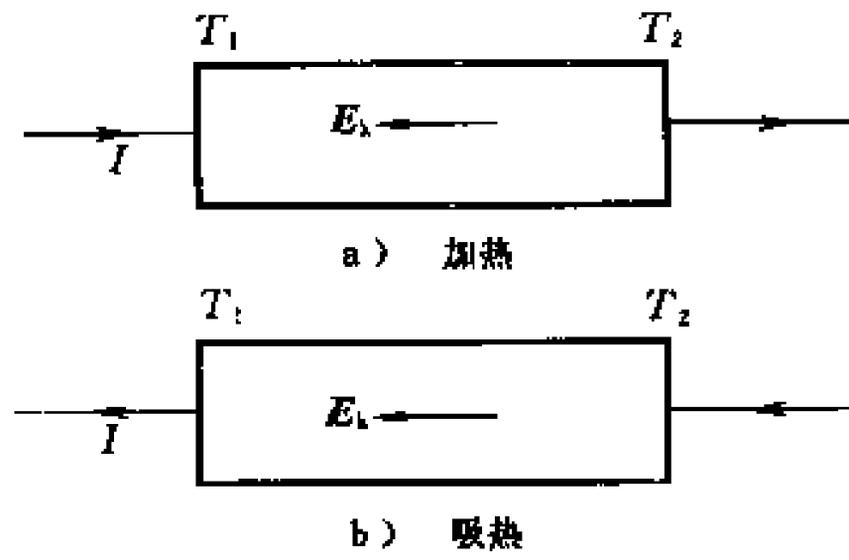


图 H-8 汤姆孙效应 ($T_1 > T_2$)

小区域内的温度或微小的热量。

液体流动
产生地磁

第十一章 真空中的恒定磁场

在静止电荷的周围存在着电场,电场的特征是对引入电场的电荷施加作用力.如果电荷在运动,那么在它的周围就不仅有电场,而且还有磁场.磁场也是物质的一种形态,它只对运动电荷施加作用,对静止电荷则毫无影响.因此,通过实验分别测定电荷静止时和运动时所受的力,可以把磁场从电磁场中区分出来,并用磁感应强度和磁场强度描写磁场,它们也都是空间位置的函数.最有实际意义的是电荷在导体中作恒定流动(恒定电流)时在它周围所激发的磁场,这时场中各点的磁感应强度和磁场强度都不随时间而变化,是一个恒定场.本章研究真空中的恒定磁场以及磁场对电流(运动电荷)的作用,在介绍描述磁场的重要物理量磁感应强度之后,着重讨论毕奥-萨伐尔定律、磁场的高斯定理、安培环路定理、洛伦兹力公式、安培定律以及它们的应用.要求掌握低速运动电荷和几个典型形状的载流导线所激发的磁场的计算,以及它们在磁场中的受力分析.

§ 11-1 磁感应强度 磁场的高斯定理

1. 基本磁现象

根据历史记载,约在公元前 600 年人们就发现天然磁石吸引铁的现象,它的化学成分是 Fe_3O_4 . 现在所用的磁铁多半是人工制成的,例如用铁、钴、镍等合金制成的永久磁铁.还有一种磁性材料,称为铁淦氧磁体,它是氧化铁(Fe_2O_3)与二价金属氧化物(例如 CuO , ZnO , MnO 等)的一种烧结物,由于是用类似制造陶瓷的方

法烧制成的,故又称为“磁性瓷”。无论是天然磁石或是人造磁铁,都具有吸引铁、钴、镍等物质的特性,这种性质称为磁性。进一步研究发现,条形磁铁的两端磁性最强,而中部几乎无磁性,磁铁两端磁性最强的区域称为磁极。若将一条形磁铁悬挂起来,磁铁会自动地转向南北方向,指北的一极称为指北极(用N表示),指南的一极称为指南极(用S表示)。两块磁铁的磁极之间存在着相互作用力,称为磁力,同号磁极之间相互排斥,异号磁极之间相互吸引。1750年米歇尔(J. Michell)用扭秤实验证得两磁极之间的相互作用力与两磁极间距离的平方成反比。虽然两磁极之间的相互作用力的规律与两个点电荷之间相互作用力相似,但两者却有一个重要的区别,那就是在自然界中正负电荷可以独立存在,如电子和质子,但不存在独立的N极和S极,任一磁铁,不管把它分割得多小,每一小块磁铁仍然具有N和S两极^①。

磁现象和电现象虽然早已被人们发现,但在很长时期内,磁学和静电学各自独立地发展着。直到1819年,奥斯特(H. Oersted)发现放在载流导线周围的磁针会受到磁力作用而偏转;安培(A. Ampère)发现(1820年)放在磁铁附近的载流导线也会受到磁力的作用而发生运动,随后又发现载流导线之间或载流线圈之间也有相互作用,并总结出两电流之间的作用力和两磁铁之间的作用力遵从相似的规律;这时人们才知道磁现象与电荷的运动是密切相关的。1822年,安培由此提出了有关物质磁性本质的假说,他认为一切磁现象的根源是电流。任何物质中的分子都存在有回路电流,称为分子电流,分子电流相当于一个基元磁铁,物质对外显示出磁性,就是物质中的分子电流在外界作用下趋向于沿同一方向排列的结果。安培的假说与现代对物质磁性的理解是相符合的,近代理论表明,原子核外电子绕核的运动和电子自旋等运动就构成了等效的分子电流。

^① 近代理论认为可能有单独磁极存在,这种具有磁南极或磁北极的粒子,叫做磁单极了。但至今尚未观察到这种粒子。

由此可知,实验和近代理论都证实了一切磁现象起源于电荷的运动.电荷(不论静止或运动)在其周围空间激发电场,而运动电荷在周围空间还要激发磁场;在电磁场中,静止的电荷只受到电力的作用,而运动电荷除受到电力作用外,还受到磁力的作用.电流或运动电荷之间相互作用的磁力是通过磁场而作用的,故磁力也称为磁场力.

最后必须指明,这里所说的运动和静止都是相对观察者说的,同一客观存在的场,它在某一参考系中表现为电场,而在另一参考系中却可能同时表现为电场和磁场.

2. 磁感应强度

电流(运动电荷)的周围存在磁场,为了描述磁场的特性,我们采用与研究静电场类似的方法.在描述电场时,我们是用电场对试探电荷的电场力来表征电场的特性,并用电场强度 E 来对电场各点作定量的描述.仿此,磁场对外的重要表现是:磁场对引入场中的运动试探电荷、载流导体或永久磁体有磁力的作用,因此也可用磁场对运动试探电荷(或载流导体和永久磁体)的作用来描述磁场,并由此引进磁感应强度 B 作为定量描述磁场中各点特性的基本物理量,其地位与电场中的电场强度 E 相当.^①

实验发现:(1)当运动试探电荷以同一速率 v 沿不同方向通过磁场中某点 P 时,电荷所受磁力的大小是不同的,但磁力的方向却总是与电荷运动方向(v)垂直;(2)在磁场中的 P 点处存在着一个特定的方向,当电荷沿这特定方向(或其反方向)运动时,磁力为零.显然,这个特定方向与运动试探电荷无关,它反映出磁场本身的一个性质.我们定义: P 点处磁场的方向是沿着运动试探电荷通过该点时不受磁力的方向(至于磁场的指向是沿两个彼此相反的哪一方,将在下面另行规定).实验还发现,如果电荷在 P 点沿着

^① B 矢量本应叫做磁场强度,但由于历史上的原因,这个名称已用于 H 矢量.

与磁场方向垂直的方向运动时,所受到的磁力最大(参看图11-1,为简便起见,这里只考虑正电荷),而且这个最大磁力 F_m 正比于运动试探电荷的电荷量 q ,也正比于电荷运动的速率 v ,但比值 $\frac{F_m}{qv}$ 却在该点 P 具有确定的量值而与运动试探电荷的 qv 值的大小无关.

由此可见,比值 $\frac{F_m}{qv}$ 反映该点磁场强弱的性质.这样,从运动试探电荷所受磁力的特征,可引入描述磁场中给定点性质的基本物理量

——磁感应强度(B 矢量)如下,即该点磁感应强度的大小可定义为

$$B = \frac{F_m}{qv} \quad (11-1)$$

该点磁场方向就是磁感应强度的方向.

实验同时发现,磁力 F 总是垂直于 B 和 v 所组成的平面,这样就可以根据最大磁力 F_m 和 v 的方向,确定 B 的方向如下:由正电荷所受力 F_m 的方向,按右手螺旋法则,沿小于 π 的角度转向正电荷运动速度 v 的方向,这时螺旋前进的方向便是该点 B 的方向,如图 11-1 所示.这就是说,对正电荷而言,可由矢积 $F_m \times v$ 的方向确定 B 矢量的方向.由这种规定所确定的磁场方向和用小磁针的 N 极来确定的磁场方向是一致的.

在国际单位制中,按上述定义式,力 F_m 的单位用 N,电荷量 q 的单位用 C,速度 v 的单位用 m/s,磁感应强度 B 的单位定为 $N \cdot s / (C \cdot m) = N / (A \cdot m)$,称为特斯拉(tesla),国际代号为 T.以前,磁感应强度的单位按习惯还用高斯(用符号 Gs 表示)这一单位,这两个单位的换算关系为 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$ (关于高斯这一单位的出处参看附录).

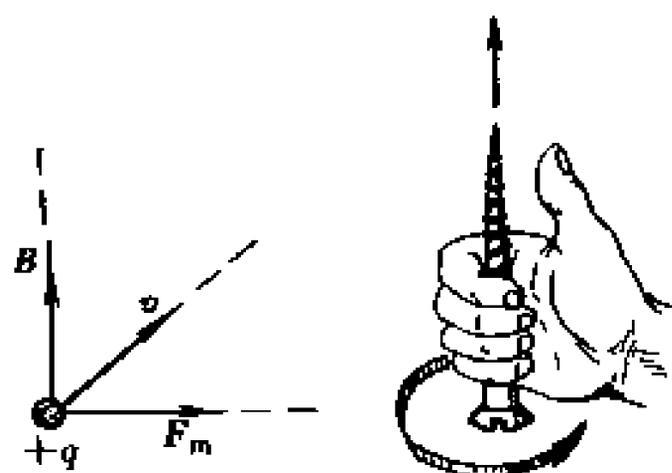
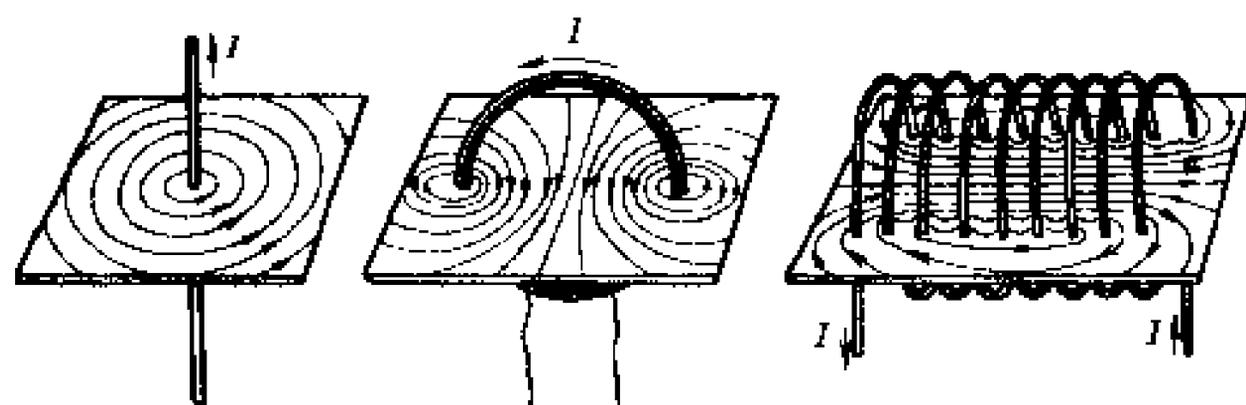


图 11-1 B, F_m, v 的方向关系
(对正电荷而言)

地球磁场的数量级大约是 10^{-4} T,严格讲地球表面的磁场在赤道处约为 0.3×10^{-4} T,在两极处约为 0.6×10^{-4} T.大型的电磁铁能激发大于2 T的恒定磁场,超导磁体能激发高达25 T的磁场,人体心脏激发的磁场约为 3×10^{-10} T,而脉冲星表面的磁场约为 10^8 T,某些原子核附近的磁场可达 10^4 T.

3. 磁场的高斯定理

我们曾用电场线来形象地描绘静电场的分布,同样,也可用磁感应线来描绘磁场的分布;使磁感应线上任一点的切线方向和该点处的磁场方向一致,并在线上用箭头标出.在实验上很容易把磁感应线显示出来,在水平放置的玻璃板上,撒上铁屑,使导线穿过玻璃板并通以电流,铁屑便在磁场作用下变成小磁针,轻轻地敲击玻璃板,铁屑就会有规则的排列起来,显示出磁感应线的分布图象.图 11-2 所示是几种不同形状的电流通激发的磁场的磁感应线图.



(a) 直电流

(b) 圆电流

(c) 螺线管电流

图 11-2 几种不同形状电流通激发的磁场的磁感应线

从磁感应线的图示中,可以得到一个重要的结论:在任何磁场中,每一条磁感应线都是和闭合电流相互套链的无头无尾的闭合线,而且磁感应线的环绕方向和电流流向形成右手螺旋的关系,如图 11-3 所示.

无源有旋磁感应线

如何表示磁场的强弱呢?我们规定:通过磁场中某点处垂直于

B 矢量的单位面积的磁感应线数等于该点 B 矢量的量值. 因此, 磁场较强的地方, 磁感应线较密; 反之, 磁感应线就较疏.

✓ 在磁场中, 通过一给定曲面的总磁感应线数, 称为通过该曲面的磁通量, 用 Φ 表示. 在曲面上取面积元 dS (图 11-4), dS 的法线

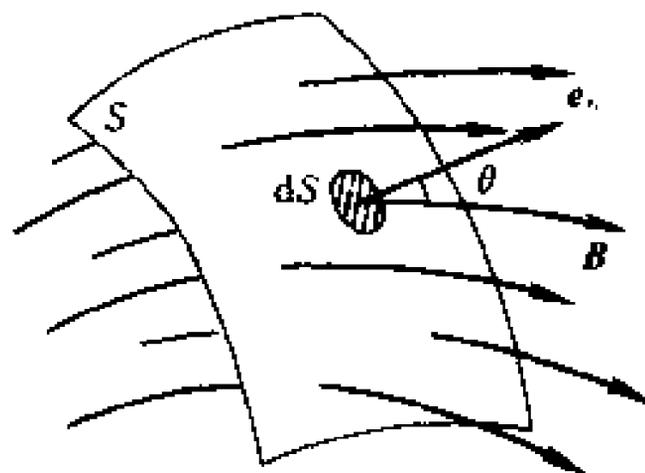
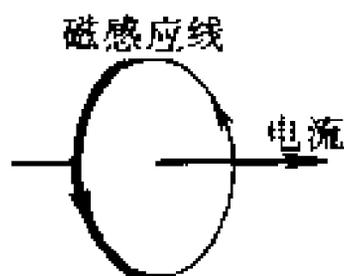


图 11-3 磁感应线环行方向与
电流方向的关系

图 11-4 磁通量

方向与该点处磁感应强度方向之间的夹角为 θ , 则通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi = B \cos \theta dS \quad (11-2)$$

或写成矢量标积的形式

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (11-2a)$$

所以, 通过有限曲面 S 的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (11-3)$$

磁通量的单位为 $T \cdot m^2$, 叫做韦伯 (weber), 国际代号为 Wb . 由此, $1 T$ 也可用 $1 Wb/m^2$ 来表示.

对闭合曲面来说, 一般规定取向外的指向为正法线的指向, 这样, 磁感应线从闭合面穿出处的磁通量为正, 穿入处的磁通量为负. 由于磁感应线是闭合线, 因此穿入闭合曲面的磁感应线数必然等于穿出闭合曲面的磁感应线数, 所以通过任一闭合曲面的总磁通量必然是零, 亦即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11-4)$$

上式称为磁场的高斯定理，是电磁场理论的基本方程之一，它与静电学中的高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$ 相对应。这两个方程的差别反映出磁场和静电场是两类不同特性的场，磁场是属涡旋式的场，其磁感应线无头无尾，恒是闭合的；而静电场是属发散式的场，激发静电场的场源(电荷)是电场线的源头或尾间。

§ 11-2 毕奥-萨伐尔定律

1. 毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律

在这一节中，我们将研究真空中电流与它在空间任一点所激发的磁场之间的定量关系。在研究静电场时，我们先从库仑定律得出点电荷电场的场强，然后讨论任意带电体所激发的电场，采取的方法是先把带电体分割成许多电荷元 dq ，列出电荷元所激发的场强 $d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$ ，再应用叠加原理，便可得出任意带电体电场中各点的场强 $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$ 。与此相似，为了求出任意形状的线电流所激发的磁场，我们也可以把电流看作是无穷多小段电流的集合。各小段电流称为电流元，并用矢量 $I d\mathbf{l}$ 来表示， $d\mathbf{l}$ 表示在载流导线上(沿电流方向)所取的线元， I 为导线中的电流。任意形状的线电流所激发的磁场等于各段电流元所激发磁场的矢量和。拉普拉斯在研究和分析了毕奥、萨伐尔等人的实验资料后，找出了电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间任一点 P 处所激发的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} \quad (11-5)$$

式中的 r 是从电流元所在点到 P 点的矢量 \mathbf{r} 的大小， α 为 $I d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{r}

之间小于 180° 的夹角, $d\mathbf{B}$ 的方向垂直于 $I d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{r} 组成的平面, 指向为由 $I d\mathbf{l}$ 经 α 角转向 \mathbf{r} 时右螺旋前进的方向, 如图11-5所示. 在国

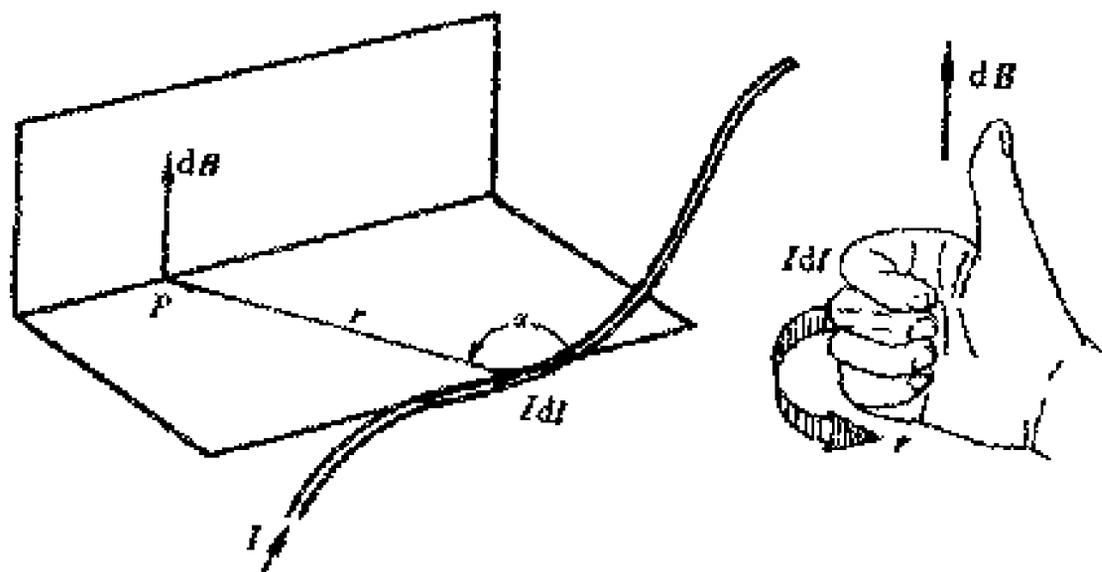


图11-5 电流元所激发的磁感应强度

际单位制中, 式中 $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$, 称为真空磁导率. 把式(11-5)写成矢量式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (11-6)$$

式(11-6)称为毕奥-萨伐尔定律, 是计算电流磁场的基本公式. 任意线电流所激发的总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (11-7)$$

必须指出, 毕奥-萨伐尔定律是根据大量实验事实进行分析后得出的结果, 但在实验上我们无法得到电荷能在其中作恒定运动的电流元, 所以式(11-6)不能直接用实验来验证. 但当我们把式(11-7)应用到各种形状的电流分布时, 计算得到的总磁感应强度和实验测得的结果相符, 这就间接证明了式(11-6)的正确性, 同时也证明了和场强 E 一样, 磁感应强度 B 也遵守叠加原理.

2. 运动电荷的磁场

按经典电子理论, 导体中的电流就是大量带电粒子的定向运

动. 由此可知, 所谓电流激发磁场, 实质上就是运动的带电粒子在其周围空间激发磁场, 下面将从毕奥-萨伐尔定律出发导出运动电荷的磁场表达式.

设在导体的单位体积内有 n 个可以作自由运动的带电粒子, 每个粒子带有电荷量 q (为了简单起见, 这里讨论正电荷), 以速度 v 沿电流元 Idl 的方向作匀速运动而形成导体中的电流 (图 11-6). 如果电流元的截面为 S , 那么单位时间内

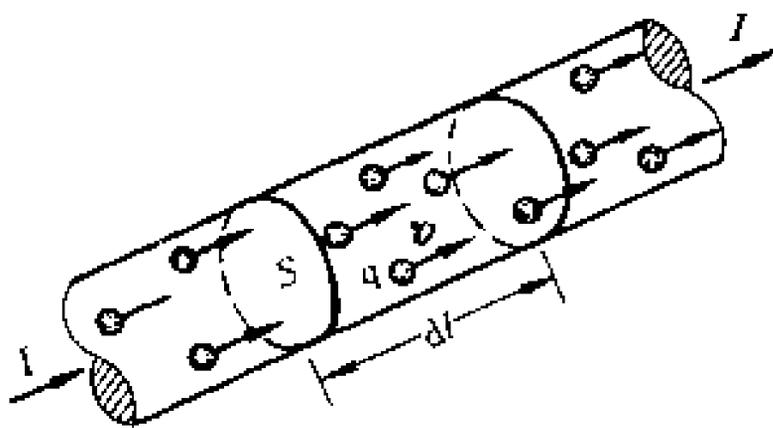


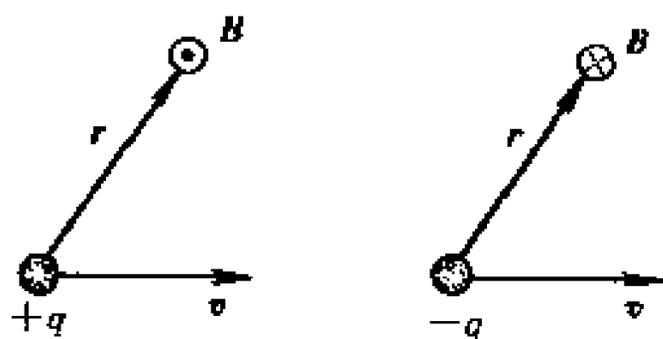
图 11-6 电流元中的运动电荷

通过截面 S 的电荷量为 $qnvS$, 即电流 I 为

$$I = qnvS$$

注意到 Idl 的方向和 v 相同, 在电流元 Idl 内有 $dN = nSdl$ 个带电粒子以速度 v 运动着, dB 就是这些运动电荷所激发的磁场, 将 I 、 dN 代入毕奥-萨伐尔定律, 我们就可以得到每一个以速度 v 运动的电荷所激发的磁感应强度 B 为

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (11-8)$$



(a) B 垂直于纸面向外; (b) B 垂直于纸面向内

图 11-7 运动电荷的磁场方向

式中 r 是运动电荷所在点指向场点的矢量, B 的方向垂直于 v 和 r 所组成的平面. 如果运动电荷是正电荷, 那么 B 的指向符合右手螺旋定则; 如果运动电荷带负电荷, 那么 B 的指向与之相反 (图 11-7). 从式 (11-8) 可看出一个事实, 两个等量异号的电荷作相反方向运动时,

其磁场相同. 因此, 金属导体中假定正电荷运动的方向作为电流的流向所激发的磁场, 与金属中实际上是电子作反向运动所激发的

磁场是相同的,进一步的理论表明,只有当电荷运动的速度远小于光速($v \ll c$)时,才可近似得到与恒定电流元的磁场相对应的式(11-8),当带电粒子的速度 v 接近光速 c 时,它就不再成立(参看§14-4中的例题).

运动电荷除激发磁场外,同时还在其周围空间激发电场,如若电荷运动的速度 v 比光速小得多,则场点(图11-8中的 P 点)的场强仍可用电荷的瞬时位置指向场点的矢量 r 表出,即仍为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

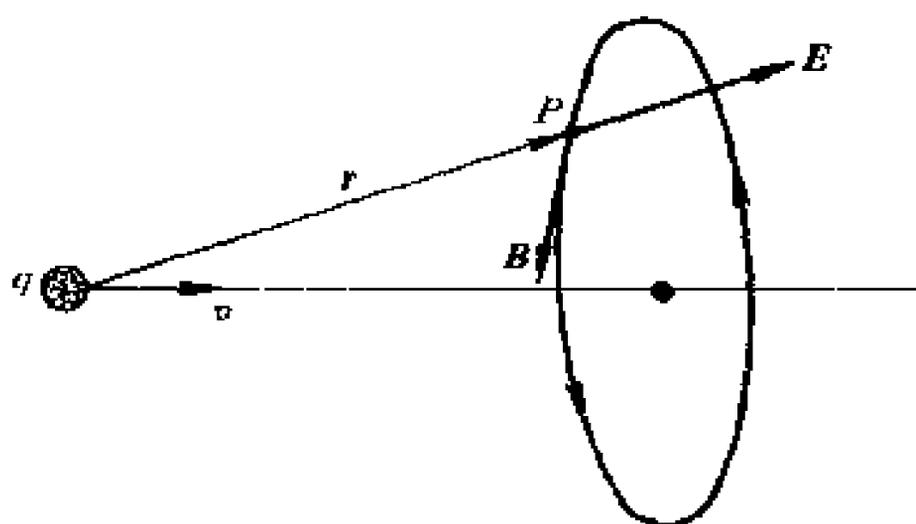


图11-8 运动正电荷所激发的电场和磁场

由此,式(11-8)可以写成

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (11-9)$$

式(11-9)表明,运动电荷所激发的电场和磁场是紧密联系着的.必须指出,一个运动电荷所激发的电磁场不再是恒定场.

运动电荷的磁场已被实验所证实,例如,宏观带电物体在平动或转动时能够激发磁场,亦即运动电荷的磁场;电子射线也能够激发磁场.下面简单介绍测定电子射线所产生磁场的实验.如图11-9所示,在真空管 T 中,电子从阴极 K 发射,经阴极 K 与阳极 A 之间的电场加速前进.在穿过阳极 A 上的小孔 a 之后,由于没有电场,电子就在真空中作匀速直线运动,最后进入金属圆筒 F ,由电流计 G 量度这些运动电子所形成的电流.在靠近管子的中部,悬

挂两条磁极相反的磁针，一条在管子上面，一条在管子下面(为了消除外磁场的干扰和影响)。当电子流在两磁针之间通过时，使磁针组转向。这样，电子流所激发的磁感应强度就可由磁针组的偏转角来量度。

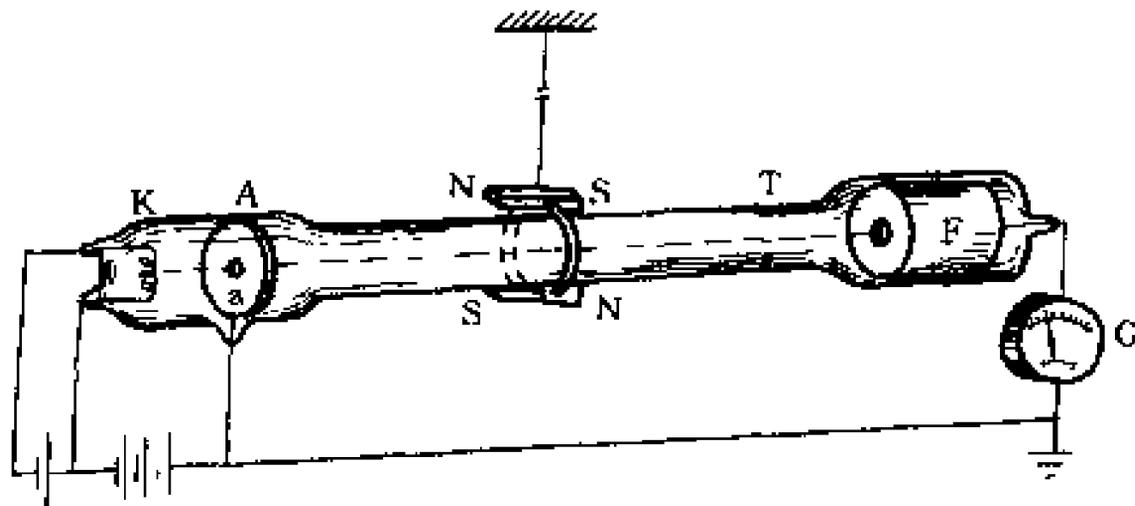


图11-9 测定电子射线磁场的实验装置简图

如果用一根载流的金属丝来代替上述的电子射线，实验指明，要使磁针组发生相同的偏转角，通过金属丝的电流必须等于电子流的电流。这样就定量地证明了电子射线与普通的传导电流激发磁场的等值性。

§ 11-3 毕奥-萨伐尔定律的应用

1. 载流长直导线的磁场

设有长为 L 的载流直导线，其中电流为 I 。计算离直导线距离为 d 的 P 点的磁感应强度时，先在直导线上任取一电流元 Idl ，如图11-10所示。按毕奥-萨伐尔定律，这电流元在给定点 P 的磁感应强度 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

dB 的方向由 $Idl \times r$ 来确定，即垂直纸面向内，在图中用 \otimes 表示，这相当于看到箭的尾端(如果是垂直纸面向外，则用 \odot 表示，相当于看到箭的尖端)。由于长直导线 L 上每一个电流元在 P 点的磁

感应强度 $d\mathbf{B}$ 的方向都是一致的(垂直纸面向内),所以矢量积分 $\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B}$ 可改变为标量积分

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

式中的 l, r, α 都是变量,但它们是有联系的,必须统一到同一变量才能积分. 由图 11-10 可见

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad r = d \sec \beta,$$

$$l = d \tan \beta, \quad dl = d \sec^2 \beta d\beta$$

从而

$$B = \int_L \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{I}{d} \cos \beta d\beta =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \quad (11-10)$$

式中 β_1 和 β_2 分别为直线的两个端点到 P 点的矢量与 P 点到直导线垂线之间的夹角. 角 β 从垂线向上转的取正值,从垂线向下转的取负值.

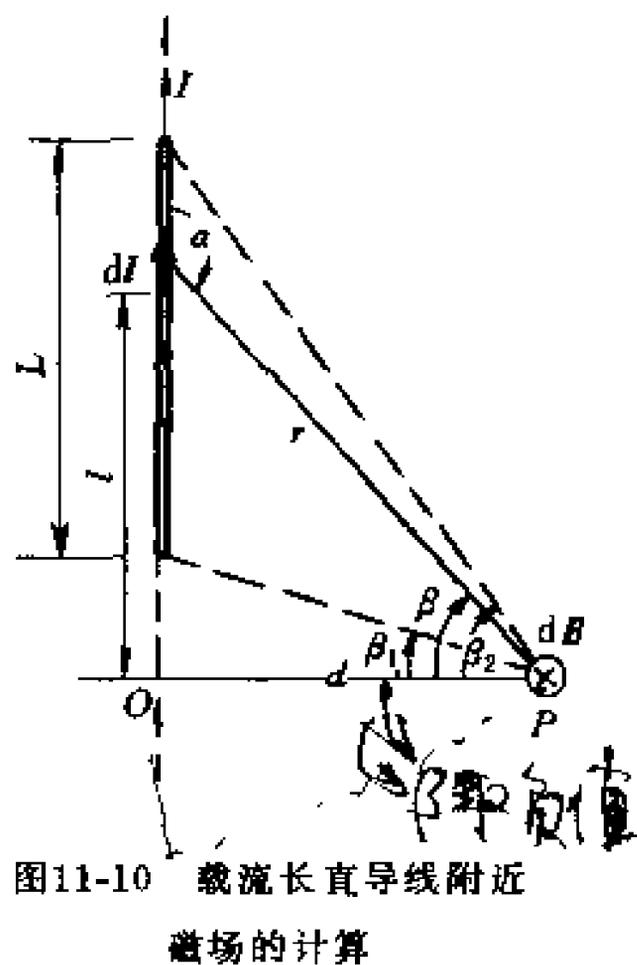
对于“无限长”载流直导线,则取 $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}, \beta_2 = \frac{\pi}{2}$, 因此由上式得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (11-11)$$

与实验结果完全符合.

2. 载流圆线圈轴线上的磁场

设有圆形线圈 L , 半径为 R , 通以电流 I , 如图 11-11 所示. 圆上任一电流元 $I dl$ 与电流元到轴线上 P 点的矢量 r 之间的夹角为 90° , 按毕奥-萨伐尔定律, 这电流元在 P 点的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 为



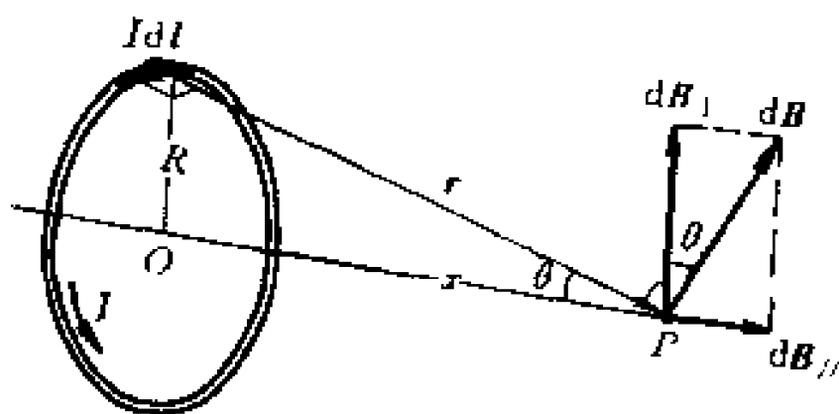


图11-11 圆电流轴线上磁场的计算

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

各电流元在 P 点的磁感应强度大小相等, 方向各不相同, 但各 dB 与轴线成一相等的夹角(图11-11). 我们把 dB 分解为平行于轴线的分矢量 dB_{\parallel} 与垂直于轴线的分矢量 dB_{\perp} . 由于对称关系, 任一直径两端的电流元在 P 点的磁感应强度的垂直轴线的分量 dB_{\perp} 大小相等, 方向相反, 因此, 载流圆线圈上电流在 P 点 dB_{\perp} 互相抵消, 而 dB_{\parallel} 互相加强. 所以 P 点磁感应强度为圆形线圈上所有电流元的 dB_{\parallel} 的代数和, 即

$$B = \int_L dB_{\parallel} = \int_L dB \sin \theta$$

式中 θ 为 r 与轴线的夹角. 将 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$ 代入得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R$$

因为

$$r^2 = R^2 + x^2, \sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (11-12)$$

式中 $S = \pi R^2$ 为圆线圈的面积。

圆线圈轴线上各点的磁感应强度都沿轴线方向，与电流方向组成右手螺旋关系，离圆心距离 x 越远，磁场越弱。轴线以外的磁场计算比较复杂，这里不作讨论，但读者从图 11-2(b) 中所绘出的磁感应线的分布图中可以对它所激发的磁场分布有一个定性的了解。

下面讨论两个特殊点处的情况。

(1) 在圆心 O 点处， $x=0$ ，由上式得

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (11-13)$$

(2) 在远离线圈处，即 $x \gg R$ ， $x \approx r$ ，则轴线上各点的 B 值近似为

$$B = \frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3} \quad (11-14)$$

引入

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{e}_n \quad (11-15)$$

并且把式 (11-14) 写成矢量式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{2\pi r^3} \quad (11-16)$$

式 (11-16) 和电偶极子在轴线上场强 $E =$

$\frac{p_e}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ 相似，所以我们把 \mathbf{p}_m 称为载流线圈的磁矩，它的大小等于 IS ，它的方向与线圈平面的法线方向（由线圈中电流流向按右手螺旋法则确定，参看图 11-12）相同，式中的 \mathbf{e}_n 表示法线方向的单位矢量。

如果线圈有 N 匝，则磁场加强 N 倍，这时线圈磁矩要定义为

$$\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{e}_n \quad (11-17)$$

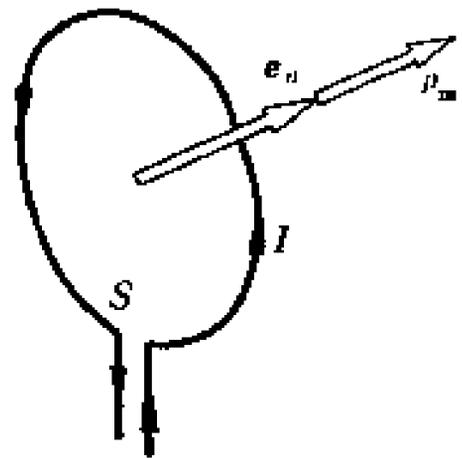


图 11-12 载流平面线圈的法线方向和磁矩 \mathbf{p}_m 方向的规定

3. 载流直螺线管内部的磁场

直螺线管是指均匀地密绕在直圆柱面上的螺旋形线圈[见图11-13(a)].

设螺线管的半径为 R , 电流为 I , 每单位长度有线圈 n 匝, 如图11-13(b)所示, 在螺线管上任取一小段 dl , 这小段上有线圈 ndl 匝. 由于管上线圈绕得很紧密, 这小段上的线圈相当于电流为 $Indl$ 的一个圆形电流. 应用公式(11-12), 可知这小段上的线圈在轴线上某点 P 所激发的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 Indl}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

式中 l 是 P 点到螺线管上 dl 处这一小段线圈的长度, 磁感应强度的方向沿轴线向右. 因为螺线管的各小段在 P 点所产生的磁感应强度的方向都相同, 因此整个螺线管所产生的总磁感应强度

$$B = \int_l dB = \int_l \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 Indl}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

为了便于积分, 我们引入参变量 β 角, 也就是螺线管的轴线与从 P 点到 dl 处小段线圈上任一点的矢量 r 之间的夹角. 于是从图11-13(b)中可以看出

$$l = R \cot \beta$$

微分上式得

$$dl = -R \csc^2 \beta d\beta$$

又

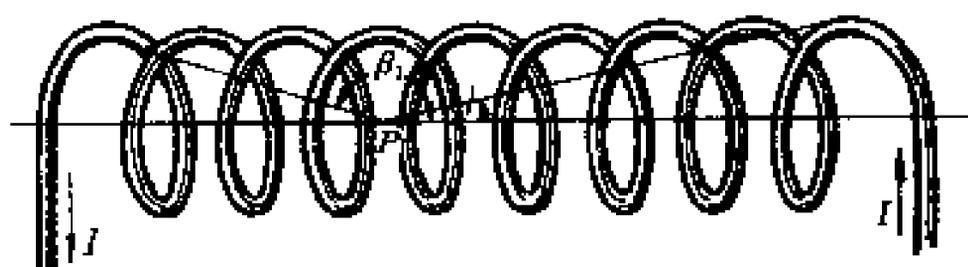
$$R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$$

将以上关系式及积分变量 β 的上下限 β_2 和 β_1 代入上式后得

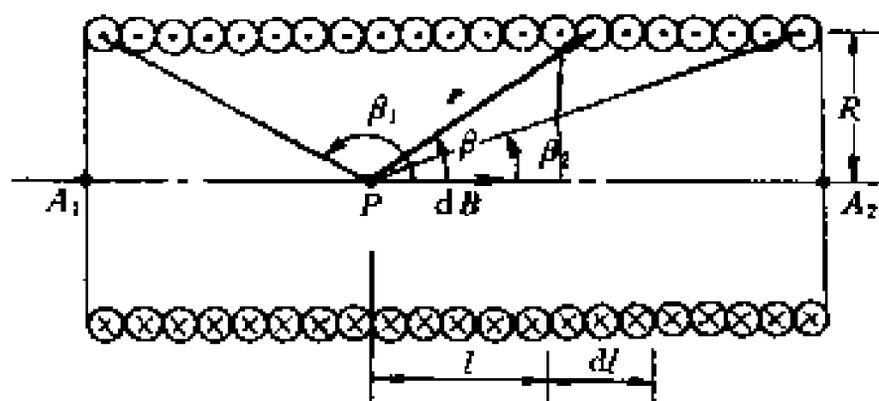
$$B = \frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} [-\sin \beta] d\beta = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

(11-18)

如果螺线管为“无限长”, 亦即螺线管的长度较其直径大得多时, $\beta_1 \rightarrow \pi, \beta_2 \rightarrow 0$, 所以



(a) 载流直螺线管



(b) 直螺线管轴上各点磁感应强度的计算用图

图11-13

$$B = \mu_0 n I \quad (11-19)$$

这一结果说明：任何绕得很紧密的长螺线管内部轴线上的磁感应强度和点的位置无关，还可以证明，对于不在轴线上的内部各点 B 的值也等于 $\mu_0 n I$ ，因此“无限长”螺线管内部的磁场是均匀的。

对长螺线管的端点来说，例如在 A_1 点， $\beta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ，所以在 A_1 点处的磁感应强度为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

恰好是内部磁感应强度的一半。长直螺线管所激发的磁感应强度的方向沿着螺线管轴线，其指向可按右手定则确定，右手四指表示电流的流向，拇指就是磁场的指向。轴线上各处 B 的量值变化情况大致如图11-14所示。

例题11-1 亥姆霍兹(Helmholtz)线圈 在实验室中，常应用亥姆霍兹线圈产生所需要的不太强的均匀磁场。它是由一对相同半径的同轴载流圆线圈组成，当它们之间的距离等于它们的半径

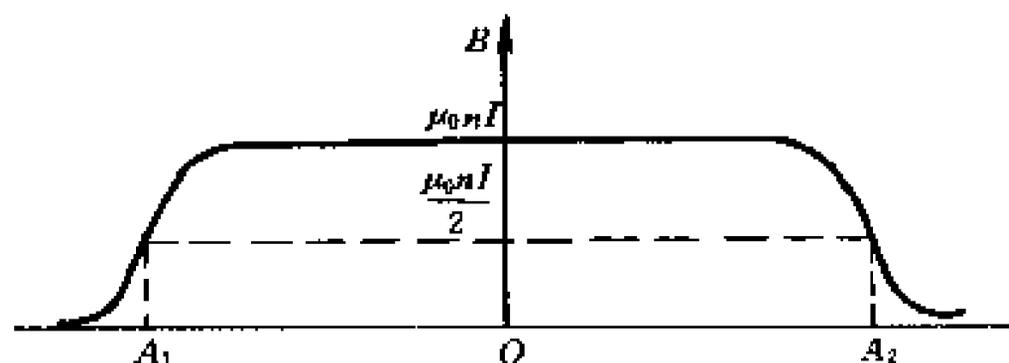


图11-14 螺线管轴线上的磁场分布

时,试计算两线圈中心处和轴线上中点的磁感应强度.从计算结果将看到,这时在两线圈间轴线上中点附近的磁场是近似均匀的.

解 设两个线圈的半径为 R ,各有 N 匝,每匝中的电流均为 I ,且流向相同(图11-15).两线圈在轴线上各点的磁场方向均沿轴线向右,在圆心 O_1 、 O_2 处,磁感应强度相等,大小都是

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = 0.677 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

在两线圈间轴线上中点 P 处,磁感应强度的大小是

$$B_P = 2 \frac{\mu_0 NIR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R} = 0.716 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

此外,在 P 点两侧各 $\frac{R}{4}$ 处的 Q_1 、 Q_2 两点,磁感应强度都等于

$$B_Q = \frac{\mu_0 NIR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{4} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{3R}{4} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left(\frac{4^3}{17^{3/2}} + \frac{4^3}{5^3} \right) = 0.712 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

在线圈轴线上其它各点,磁感应强度的量值都介乎 B_0 与 B_P 之间.由此可见,在 P 点附近轴线上的磁场基本上是均匀的,其分布情况约如图11-16所示.图中虚线是按式(11-12)绘出的每个圆形载流线圈在轴线上所激发的磁场分布,实线是代表两线圈所激发磁

场的叠加曲线.

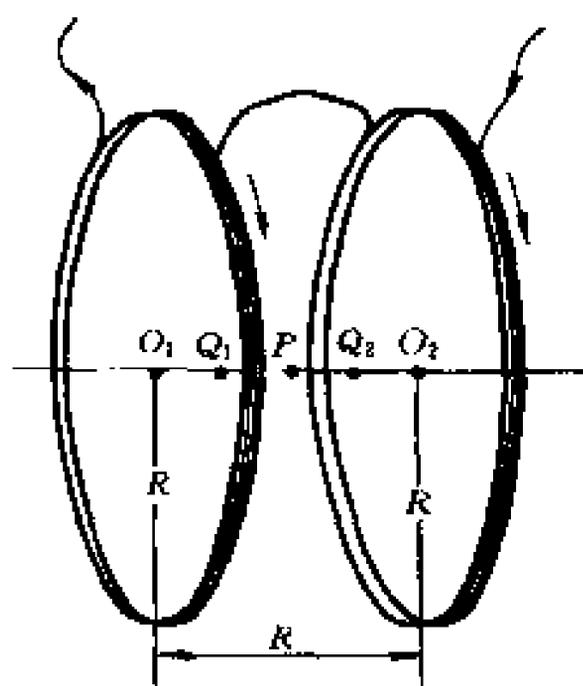


图11-15 亥姆霍兹线圈

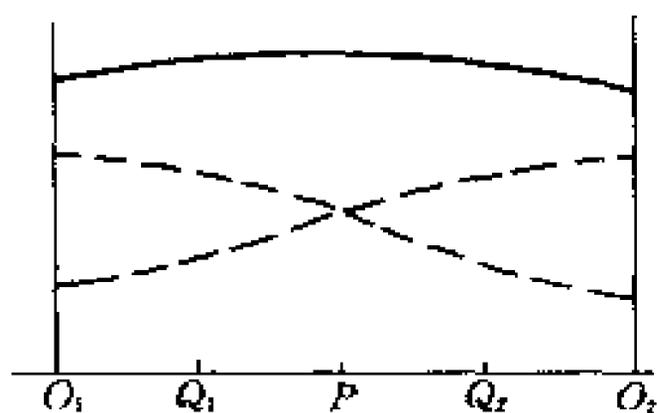


图11-16 亥姆霍兹线圈轴线上的
磁场分布

例题11-2 在玻尔的氢原子模型中,电子绕原子核运动相当于一个圆电流,具有相应的磁矩,称为轨道磁矩.试求轨道磁矩 μ 与轨道角动量 L 之间的关系,并计算氢原子在基态时电子的轨道磁矩.

解 为简单计,设电子绕核作匀速圆周运动,圆的半径为 r ,转速为 n .电子的运动相当于一个圆电流,电流的量值为 $I=ne$,圆电流的面积为 $S=\pi r^2$,所以相应的磁矩为

$$\mu = IS = ne\pi r^2$$

电子的角动量为

$$L = m_e v r = m_e 2\pi r n r = 2m_e n \pi r^2$$

式中 m_e 为电子的质量.比较以上两式可知 L 和 μ 量值上的关系是

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L$$

角动量和磁矩的方向可分别按右手螺旋规则确定.因为电子运动方向与电流方向相反,所以 L 和 μ 的方向恰好相反,如图11-17所示.上式关系写成矢量式为

$$\mu = -\frac{e}{2m_e}L$$

这一经典结论与量子理论导出的结果相符。由于电子的轨道角动量是满足量子化条件的，在玻尔理论中，其量值等于 $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ 的整数倍。所以氢原子在基态时，其轨道磁矩为

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \left(\frac{h}{2\pi} \right) = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

它是轨道磁矩的最小单位(称为玻尔磁子)。将 $e=1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m_e=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 普朗克常量 $h=6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 代入, 可算得

$$\mu_B = 9.273 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

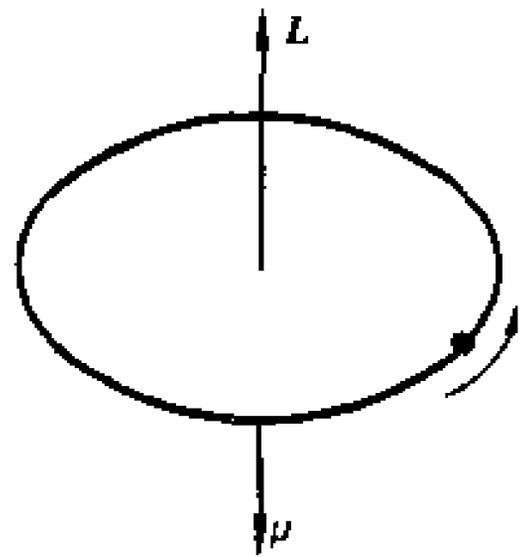


图11-17 轨道磁矩和角动量方向的关系

原子中的电子除沿轨道运动外, 还有自旋, 电子的自旋是一种量子现象, 它有自己的磁矩和角动量, 电子自旋磁矩的量值等于玻尔磁子。

§ 11-4 安培环路定理

在研究静电场时, 我们曾从场强 E 的环流 $\oint E \cdot dl = 0$ 这个特性知道静电场是一个保守力场, 并由此引入电势这个物理量来描述静电场。

对由恒定电流所激发的磁场, 也可用磁感应强度沿任一闭合曲线的线积分 $\oint B \cdot dl$ (又称 B 矢量的环流) 来反映它的某些性质。由于 B 线总是闭合曲线, 可以预期, 对任一闭合曲线, B 的环流可以不为零。和 E 矢量的环流不同, B 矢量的环流不具有功的意义, 但它的规律却揭示了磁场的—一个重要特性。

下面通过长直载流导线周围磁场的特例具体计算 B 沿任一闭合路径的线积分。

已知长直载流导线周围的磁感应线是一组以导线为中心的同心圆[图11-18(a)]. 在垂直于导线的平面内任意作一包围电流的闭合曲线 L [图11-18(b)], 线上任一点 P 的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

式中 I 为导线中的电流, r 为该点离开导线的距离. 由图可知, $dl \cos \theta = r d\varphi$, 所以按图中所示的绕行方向沿这条闭合曲线 B 矢量的线积分将为

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L B \cos \theta dl = \oint_L B r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I \end{aligned}$$

如果闭合曲线 L 不在垂直于直导线的平面内, 则可将 L 上每一段线元 $d\mathbf{l}$ 分解为在垂直于直导线平面内的分矢量 $d\mathbf{l}_\perp$ 与垂直于此平面的分矢量 $d\mathbf{l}_\parallel$, 所以

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l}_\perp + d\mathbf{l}_\parallel) = \oint_L B \cos 90^\circ d\mathbf{l}_\perp + \\ &= \oint_L B \cos \theta d\mathbf{l}_\parallel = 0 + \oint_L B r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I \end{aligned}$$

积分结果与上相同.

如果沿同一曲线路径但改变绕行方向积分[图11-18(c)], 则得

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L B \cos(\pi - \theta) dl = \\ &= \oint_L -B \cos \theta dl = - \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = -\mu_0 I \end{aligned}$$

积分结果将为负值. 如果把式中的负号和电流流向联系在一起, 即令 $-\mu_0 I = \mu_0(-I)$, 就可认为对闭合曲线的绕行方向来讲, 此时电流取负值.

以上计算结果表明, B 矢量的环流与闭合曲线的形状无关, 它

只和闭合曲线内所包围的电流有关。

如果所选闭合曲线中没有包围电流,如图11-18(d)所示,此时

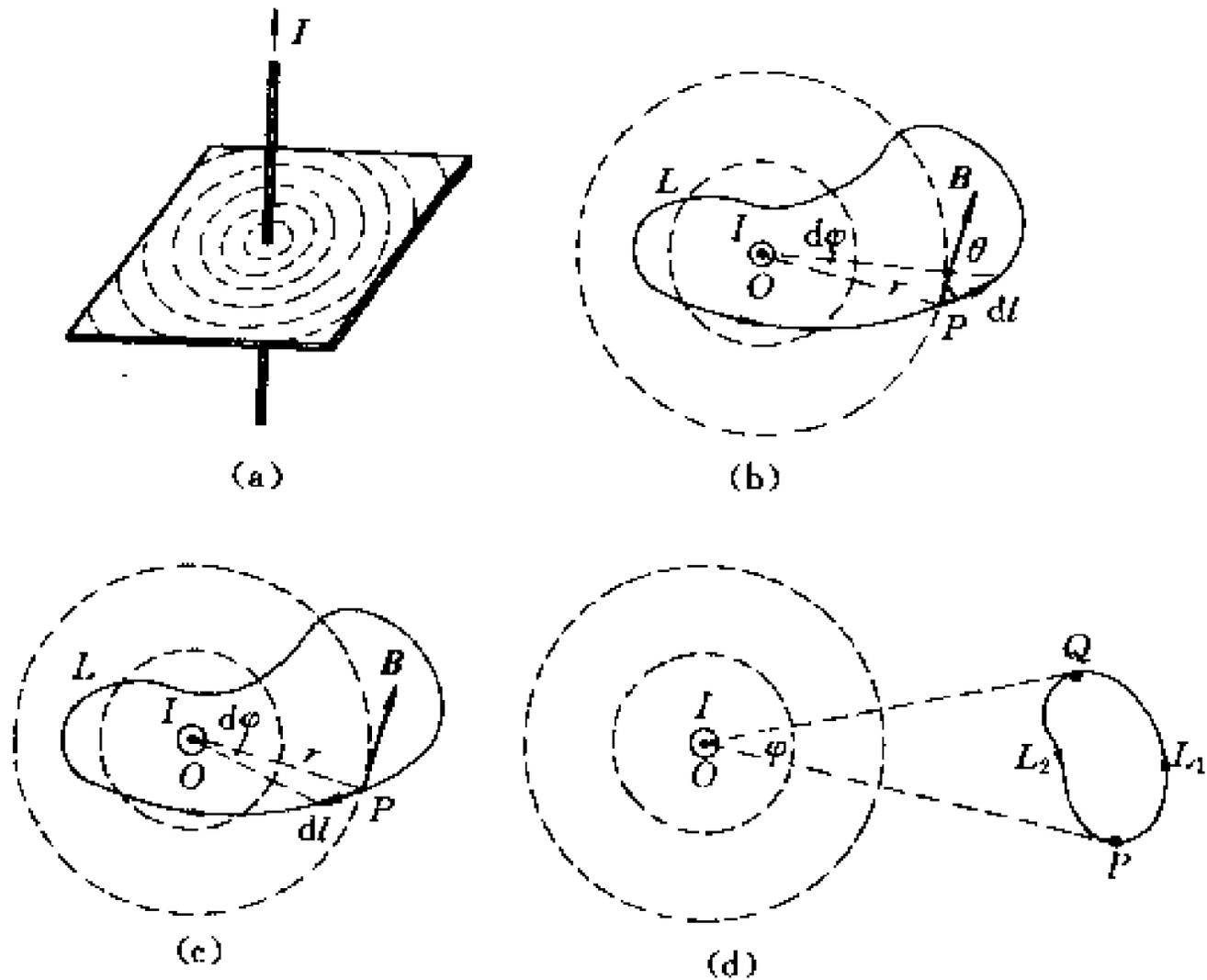


图11-18 安培环路定理

我们从 O 点作闭合曲线的两条切线 OP 与 OQ , 切点 P 和 Q 把闭合曲线分割为 L_1 和 L_2 两部分. 按上面同样的分析, 可以得出

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{L_1} d\varphi - \int_{L_2} d\varphi \right) = 0$$

即闭合曲线不包围电流时, \mathbf{B} 矢量的环流为零。

以上结果虽然是从长直载流导线的磁场的特例导出的, 但其结论具有普遍性, 对任意几何形状的通电导线的磁场都是适用的, 而且当闭合曲线包围多根载流导线时也同样适用, 故一般可写成

$$\boxed{\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma I} \quad (11-20)$$

式(11-20)表达了电流与它所激发磁场之间的普遍规律, 称为安培环路定理, 可表述如下:

~~此定理只适用于~~ dl 是在空间中任意画它的一曲线，并不是导线。

在磁场中，沿任何闭合曲线 B 矢量的线积分（也称 B 矢量的环流），等于真空的磁导率 μ_0 乘以穿过以这闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

式(11-20)中电流的正、负与积分时在闭合曲线上所取的绕行方向有关，如果所取积分的绕行方向与电流流向满足右手螺旋法则关系，则电流为正，相反的电流为负。例如，如图11-19所示的三种情况， B 沿各闭合曲线的线积分分别为

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I_1 - I_2)$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_{L_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I - I) = 0$$

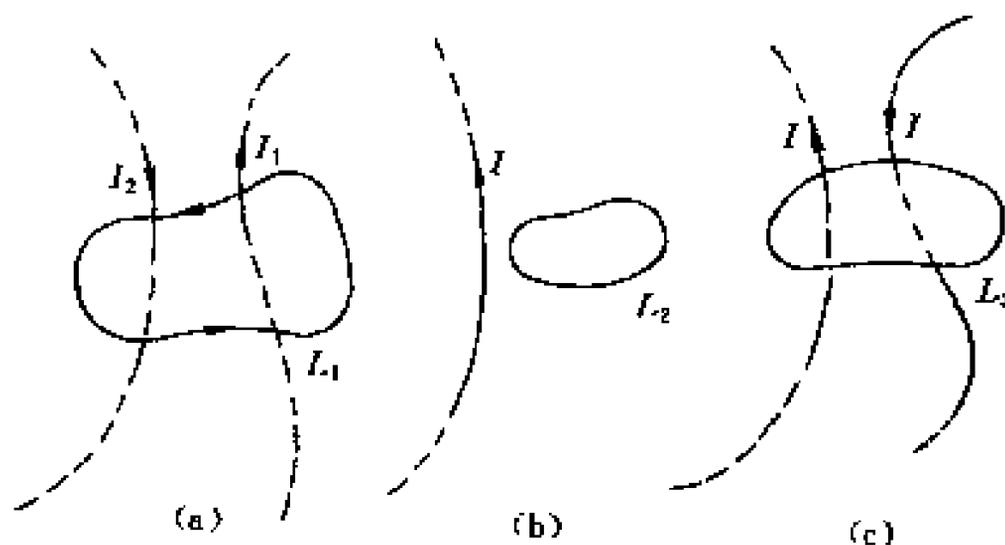


图11-19 解释安培环路定理的符号规则

应当注意，定理中的 I 只是穿过环路的电流，它说明 B 的环流 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 只和穿过环路的电流有关，而与未穿过环路的电流无关，但是环路上任一点的磁感应强度 B 却是所有电流（无论是否穿过环路）所激发的场在该点叠加后的总场强。另外，定理仅适用于闭合的载流导线，而对于任意设想的一段载流导线是不成立的。

B 矢量的环流不一定等于零，表明磁场不是保守力场，它不是有势场，一般不能引进标量势的概念来描述磁场，这说明磁场和静

电场是本质上不同的场。

下一章我们还要进一步研究有介质存在时的安培环路定理，这个定理在电磁场理论中占有重要地位，经麦克斯韦推广发展后，成为全电流定律，是电磁场理论中的基本方程，在电工学中，它又是磁路计算的重要依据。

§ 11-5 安培环路定理的应用

安培环路定理以积分形式表达了恒定电流和它所激发磁场间的普遍关系，而毕奥-萨伐尔定律是部分电流和部分磁场相联系的微分表式。原则上两者都可以用来求解已知电流分布的磁场问题，但当电流分布具有某种对称性时，利用安培环路定理能很简单地算出磁感应强度来。下面举几个例子来说明。

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场

设圆柱截面的半径为 R ，恒定电流 I 沿轴线方向流动，并呈轴对称分布，当所考察的场点 P (或 Q) 离导线的距离比 P (或 Q) 点离导线两端的距离小得很多时，可以把导线看作是无量长的。在这区域内，磁场对圆柱形轴线具有对称性，磁感应线是在垂直轴线平面内以轴线为中心的同心圆 [如图 11-20(a) 中所示]。过 P 点 (或 Q 点) 取一半径为 r 的磁感应线为积分回路，由于线上任一点的 B 的量值相等，方向与该点的 dl 的方向一致，所以， B 矢量的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r$$

如果 $r > R$ (图中 P 点)，全部电流 I 穿过积分回路，由安培环路定理得

$$B2\pi r = \mu_0 I$$

即

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (11-21)$$

由此可见长圆柱形载流导线外的磁场与长直载流导线激发的磁场相同。

如果 $r < R$, 即在圆柱形导线内部(图中 Q 点), 考虑两种可能的电流分布。(1) 当电流均匀分布在圆柱形导线表面层时, 则穿过积分回路的电流为零, 由安培环路定理给出 $B2\pi r = 0$, 即 $B = 0$, 柱内任一点的磁感应强度为零。(2) 当电流均匀分布在圆柱形导线截面上时, 则穿过积分回路的电流应是 $\frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$, 所以应用安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

由此算出导线内 Q 点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I r}{R^2} \quad (11-22)$$

可见在圆柱形导线内部, 磁感应强度和离开轴线的距离 r 成正比。

图11-20(b)、(c)中分别绘出了电流作体分布和面分布时的磁

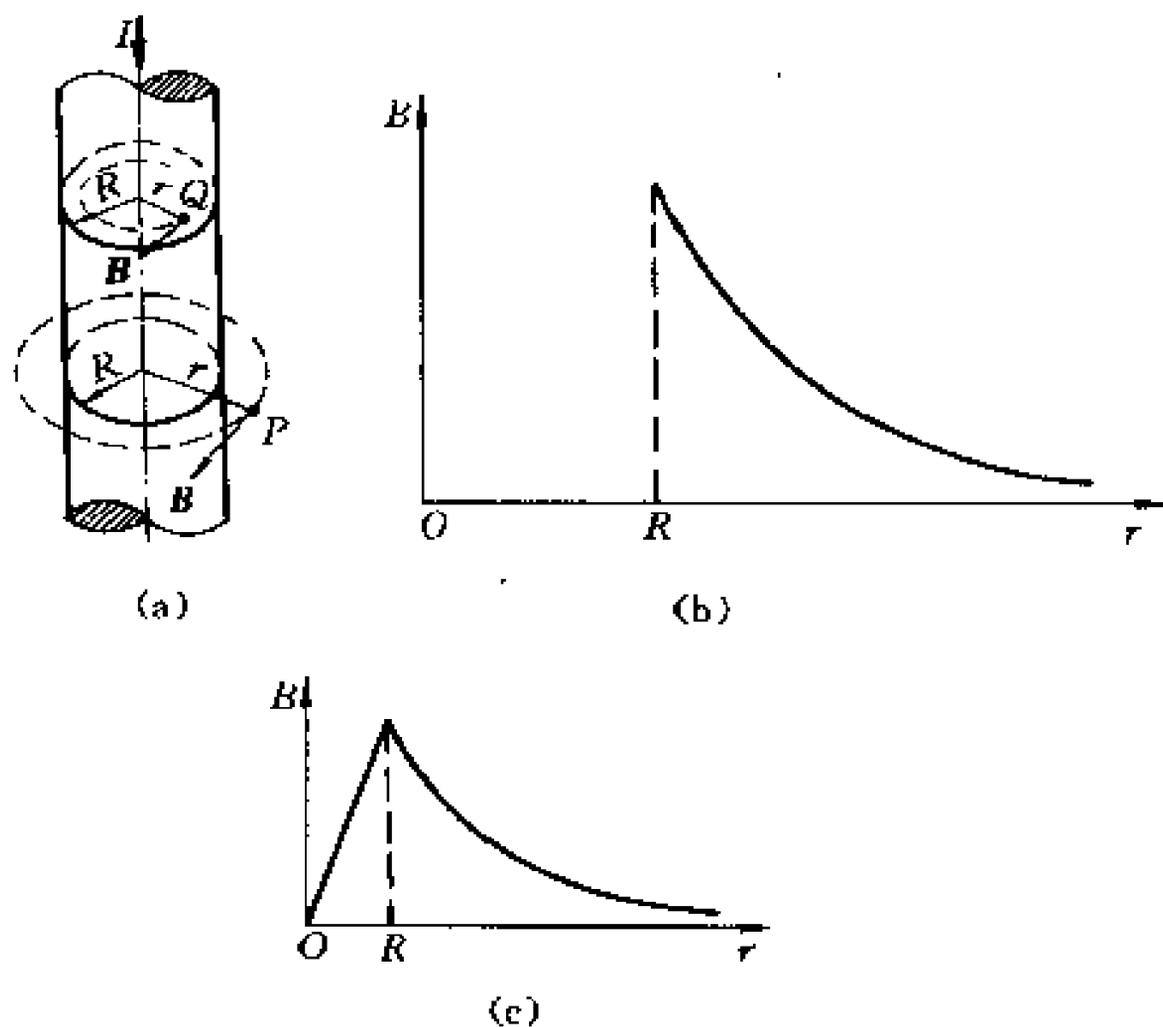


图11-20 圆柱形电流的磁场的计算

感应强度与离轴线距离 r 的关系曲线。

2. 载流长直螺线管内的磁场

设有绕得很均匀紧密的长螺线管, 通有电流 I . 由于螺线管相当长, 所以管内中间部分的磁场可以看成是无限长螺线管内的磁场, 这时, 再根据电流分布的对称性, 可确定管内的磁感应线是一系列与轴线平行的直线, 而且在同一磁感应线上各点的 B 相同. 在管的外侧, 磁场很弱, 可以忽略不计.

为了计算管内中间部分的一点 P 的磁感应强度, 可以通过 P 点作一矩形的闭合回路 $ABCD$, 如图11-21所示. 在线段 CD 上, 以

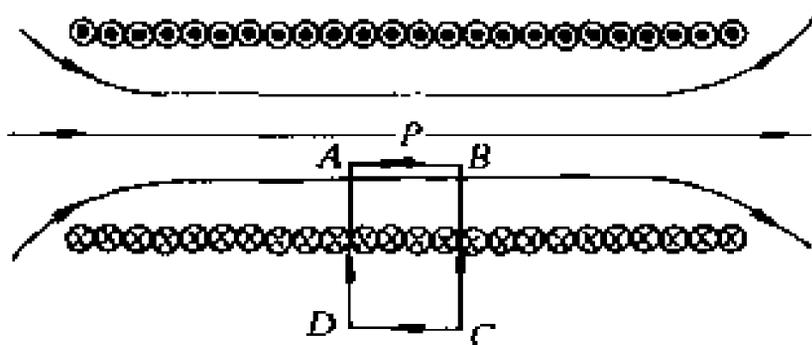


图11-21 长螺线管内磁场的计算

及在线段 BC 和 DA 的位于管外部分, 因为在螺线管外, $B=0$. 在 BC 和 DA 的位于管内部分, 虽然 $B \neq 0$, 但 $d\mathbf{l}$ 与 B 垂直, 即

$$B \cdot d\mathbf{l} = 0$$

线段 AB 上各点磁感应强度大小相等, 方向都与积分路径 $d\mathbf{l}$ 一致, 即从 A 到 B . 所以 B 矢量沿闭合回路 $ABCD$ 的线积分为

$$\begin{aligned} \oint B \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} B \cdot d\mathbf{l} + \int_{BC} B \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} B \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} B \cdot d\mathbf{l} = \\ & \int_{AB} B \cdot d\mathbf{l} = B \cdot AB \end{aligned}$$

设螺线管的长度为 l , 共有 N 匝线圈, 则单位长度上有 $\frac{N}{l} = n$ 匝线圈, 通过每匝线圈电流为 I , 所以回路 $ABCD$ 所包的电流总和为 $AB nI$, 根据右手螺旋法则应为正值. 于是, 由安培环路定理, 得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B AB = \mu_0 AB nl$$

所以

$$B = \mu_0 nI$$

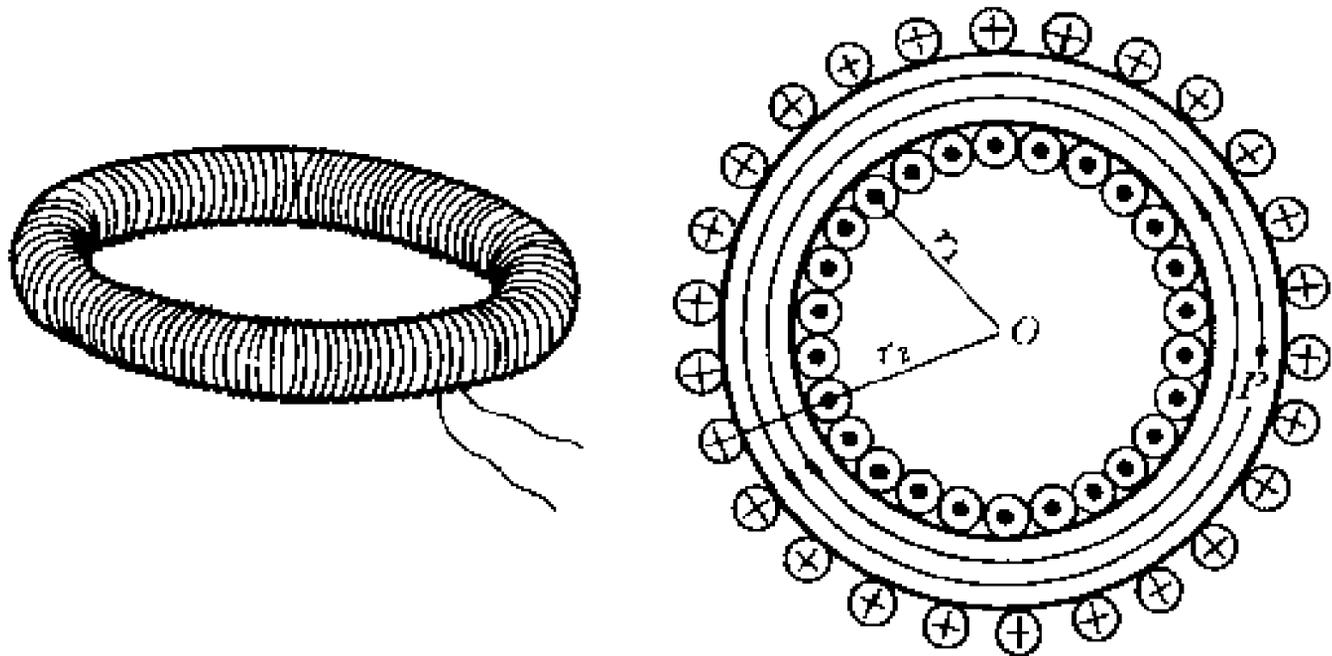
或

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (11-23)$$

由于矩形回路是任取的,不论 AB 段在管内任何位置,式(11-23)都成立.因此,无限长螺线管内任一点的 B 值均相同,方向平行于轴线,即无限长螺线管内中间部分的磁场是一个均匀磁场.上式与根据毕奥-萨伐尔定律算出的结果相同,但应用安培环路定理的计算方法比较简便.

3. 载流螺绕环内的磁场

绕在环形管上的一组圆形电流形成螺绕环,如图11-22所示.如环上的线圈绕得很紧密,则磁场几乎全部集中在螺绕环内,环外



(a) 螺绕环

(b) 螺绕环内磁场的计算

图11-22

磁场接近于零.由于对称性的缘故,环内磁场的磁感应线都是一些同心圆,圆心在通过环心垂直于环面的直线上.在同一条磁感应线上各点磁感应强度的量值相等,方向处处沿圆的切线方向,并和环面平行.

为了计算管内某一点 P 的磁感应强度,可选择通过 P 点的磁感应线 L 作为积分回路,由于线上任一点磁感应强度 B 的量值相等,方向都与 dI 同向,故得 B 矢量的环流

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_L dl = B2\pi r$$

式中 r 为回路半径. 设环上线圈的总匝数为 N , 电流为 I , 则由安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 NI$$

计算出 P 点磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当环形螺线管的截面积很小时,管的孔径 $r_2 - r_1$ 比环的平均半径 r 小得多时[如图11-22(b)中所示],管内各点磁场强弱实际上相同. 因而可以取圆环平均长度为 $l = 2\pi r$, 则环内各点的磁感应强度的量值为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI \quad (11-24)$$

式中 n 为螺绕环单位长度上的匝数, B 的方向与电流流向成右手螺旋关系.

§ 11-6 带电粒子在磁场中所受作用及其运动

1. 洛伦兹力

在 § 11-1 中我们已指出,当带电粒子沿磁场方向运动时,作用在带电粒子上的磁力为零;带电粒子的运动方向与磁场方向相垂直时,所受磁力最大,记作 F_m , 其值为

$$F_m = qvB$$

并且磁力 F_m 、电荷运动速度 v 和磁感应强度 B 三者相互垂直.

在一般情况下,如果带电粒子运动的方向与磁场方向成夹角 θ ,则所受磁力 F 的大小为

$$F = qvB\sin\theta \quad (11-25)$$

方向垂直于 v 和 B 所决定的平面,指向由 v 经小于 180° 的角转向 B 按右手螺旋法则决定.用矢量式可表示为

$$\boxed{F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \quad (11-25a)$$

上式就是洛伦兹力——磁场对运动电荷的作用力的公式,式中各量的方向关系如图11-23所示.对于正电荷, F 在 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向上,对于负电荷,则所受的力的方向正好相反.

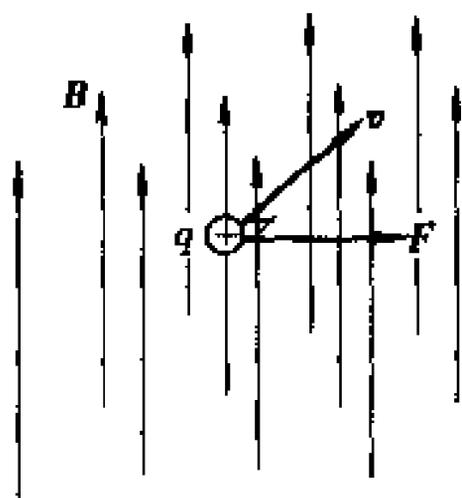


图11-23 运动电荷在磁场中所受磁力的方向

洛伦兹力总是和带电粒子运动速度相垂直这一事实说明磁力只能使带电粒子的运动方向偏转,而不会改变其速度的大小,因此磁力对运动带电粒子所作的功恒等于零,这是洛伦兹力的一个重要特征.

例题11-3 宇宙射线中的一个质子以速率 $v = 1.0 \times 10^7$ m/s 竖直进入地球磁场内,估算作用在这个质子上的磁力有多大.

解 在地球赤道附近的地磁场沿水平方向,靠近地面处的磁感应强度约为 $B = 0.3 \times 10^{-4}$ T,已知质子所带电荷量为 $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C,按洛伦兹力公式,可算出磁场对质子的作用力为

$$F = qvB\sin\theta = 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^7 \times 0.3 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ \text{ N} = 4.8 \times 10^{-17} \text{ N}$$

这个力约是质子重量($mg = 1.6 \times 10^{-26}$ N)的 10^9 倍,因此当讨论微观带电粒子在磁场中的运动时,一般可以忽略重力的影响.

2. 带电粒子在磁场中的运动

下面讨论带电粒子在均匀及不均匀磁场中运动的基本规律.

(1) 设有一均匀磁场,磁感应强度为 B ,一电荷量为 q 、质量为 m 的粒子,以初速 v_0 进入磁场中运动.分三种情况进行分析.

(i) 如果 v_0 与 B 相互平行,作用于带电粒子的洛伦兹力等于零,带电粒子不受磁场的影响,进入磁场后仍作匀速直线运动.

(ii) 如果 v_0 与 B 垂直(图11-24),这时粒子将受到与运动方向垂直的洛伦兹力 F , F 的大小为

$$F = qv_0B$$

方向垂直于 v_0 及 B . 所以粒子速度的大小不变,只改变方向.带电粒子将作匀速圆周运动,而洛伦兹力起着向心力的作用,因此

$$qv_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

或

$$R = \frac{mv_0}{qB} \quad (11-26)$$

式中 R 是粒子的圆形轨道半径.

从式(11-26)可知,对于一定的带电粒子(即 $\frac{q}{m}$ 一定),其轨道半径与带电粒子的运动速度成正比,而与磁感应强度成反比.速度愈小,洛伦兹力也愈小,轨道弯曲得愈厉害.

带电粒子绕圆形轨道一周所需的时间(周期)为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (11-27)$$

这一周期与带电粒子的运动速度无关,这一特点是后面将介绍的磁聚焦和回旋加速器的理论基础.

(iii) 如果 v_0 与 B 斜交成 θ 角(图11-25),我们可把 v_0 分解成两个分矢量:平行于 B 的分矢量 $v_{0\parallel} = v_0 \cos \theta$ 和垂直于 B 的分矢量 $v_{0\perp} = v_0 \sin \theta$. 由于磁场的作用,带电粒子在垂直于磁场的平面内以 $v_{0\perp}$ 作匀速圆周运动.但由于同时有平行于 B 的速度分矢量 $v_{0\parallel}$ 不受

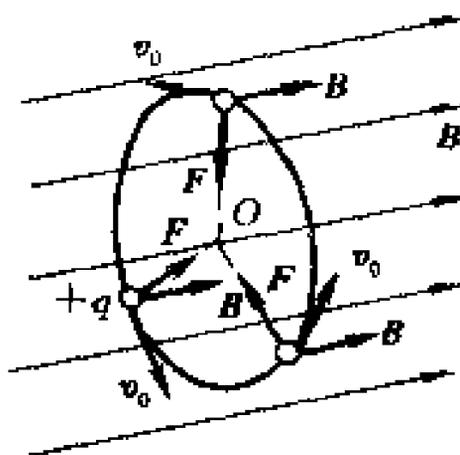


图11-24 带电粒子在匀强磁场中运动(初速 v_0 与 B 正交)

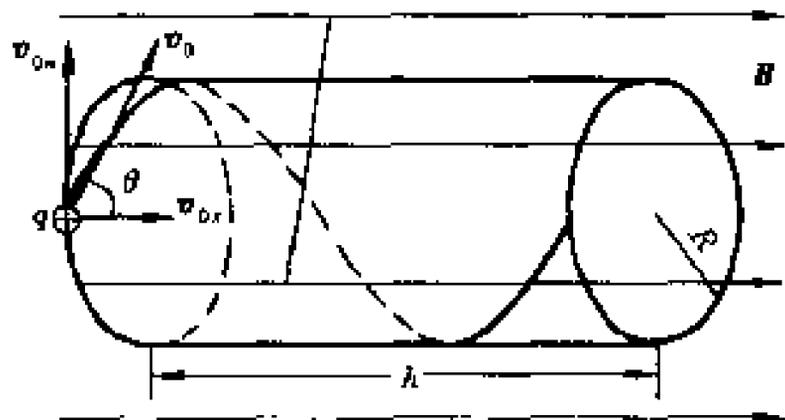


图11-25 带电粒子在匀强磁场中的运动
(初速 v_0 与 B 斜交)

磁场的影晌,所以带电粒子合运动的轨道是一螺旋线,螺旋线的半径是

$$R = \frac{mv_{0n}}{qB}$$

螺距是

$$h = v_{0x}T = v_{0x} \frac{2\pi R}{v_{0n}} = v_{0x} \frac{2\pi m}{qB} \quad (11-28)$$

式中 T 为旋转一周的时间.式(11-28)表明,螺距 h 只和平行于磁场的速度分量 v_{0x} 有关,而和垂直于磁场分量速度 v_{0n} 无关.

(2) 带电粒子在非均匀磁场中运动.从式(11-26)可知,带电粒子在均匀磁场中可绕磁感应线作螺旋运动,螺旋线的半径 R 与磁感应强度 B 成反比,所以当带电粒子在非均匀磁场中向磁场较强的方向运动时,螺旋线的半径将随着磁感应强度的增加而不断地减小,如图11-26所示.同时,这带电粒子在非均匀磁场中受到的

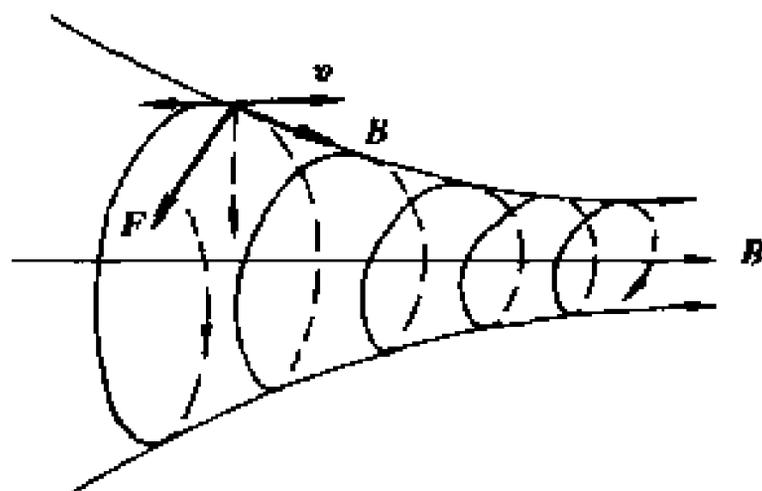


图11-26 会聚磁场中作螺旋运动的带正电的粒子掉向反转

洛伦兹力,恒有一指向磁场较弱的方向的分力,此分力阻止带电粒子向磁场较强的方向运动.这样有可能使粒子沿磁场方向的速度逐渐减小到零,从而迫使粒子掉向反转运动.如果在一长直圆柱形真空室中形成一个两端很强、中间较弱的磁场(图11-27),那么两端较强的磁场对带电粒子的运动起着

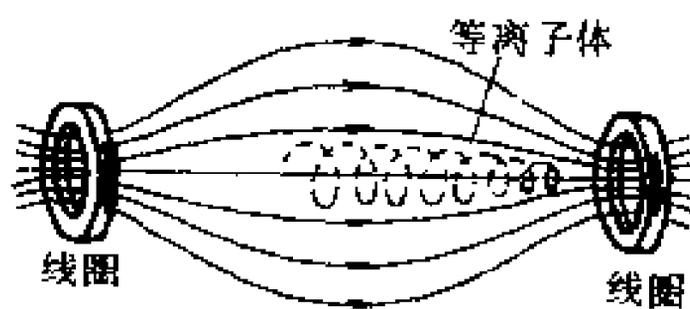


图11-27 磁约束装置

阻塞的作用,它能迫使带电粒子局限在一定的范围内往返运动,这种装置称为磁塞.由于带电粒子在两端处的这种运动好象光线遇到镜面发生反射一样,所以这种装置也称为磁镜.在受控热核反应装置中,一般都采用这种磁场把等离子体约束在一定的范围内.

上述磁约束的现象也存在于宇宙空间.因为地球是一个磁体,它的磁感应线分布情况如图11-28所示,磁场在两极强而中间弱.当来自外层空间的大量带电粒子(宇宙射线)进入磁场影响范围后,粒子将绕地磁感应线作螺旋运动,因为在近两极处地磁场增强,作螺旋运动的粒子将被折回,结果粒子在沿磁感应线的区域内来回振荡,形成范艾仑(J. A. Van Allen)辐射带(见图11-29),此带

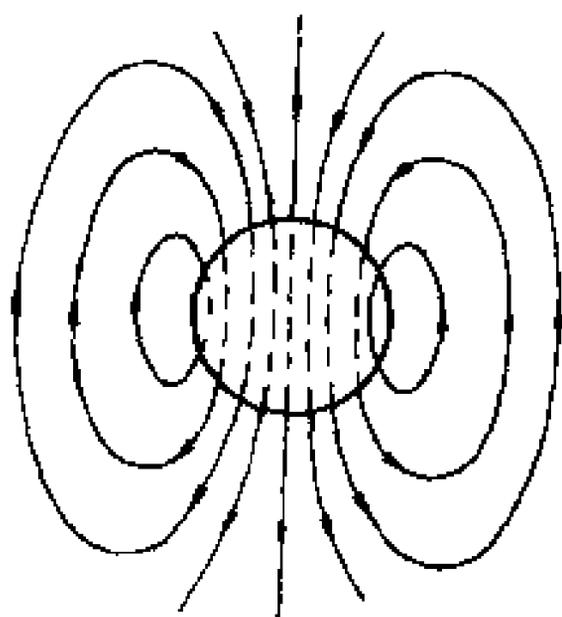


图11-28 地磁场的磁感应线分布

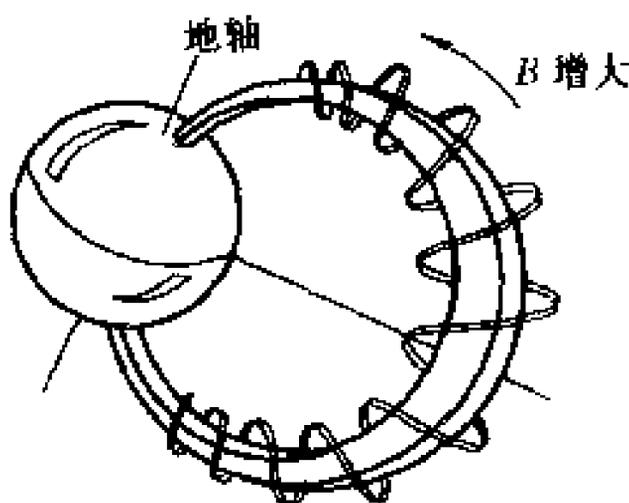


图11-29 带电粒子被地磁场捕获,绕磁感应线作螺旋运动,并被磁场折回,形成范艾仑辐射带

相对地球轴对称分布,在图中只绘出其中一支.有时,太阳黑子活动使宇宙中高能粒子剧增,这些高能粒子在地磁感应线的引导下在地球北极附近进入大气层时将使大气激发,然后辐射发光,从而出现美妙的北极光.

§ 11-7 带电粒子在电场和磁场中运动的应用

如果在空间内除了磁场外还有电场存在,那么带电粒子还要受到电场力的作用.这时,带有电荷量 q 的粒子在静电场 E 和磁场 B 中以速度 v 运动时受到的作用力将是

$$\boxed{F = qE + qv \times B} \quad (11-29)$$

式(11-29)叫做洛伦兹关系式.当粒子的速度 v 远小于光速 c 时,根据牛顿第二定律,带电粒子的运动方程(设重力可略去不计)为

$$qE + qv \times B = ma \quad (11-30)$$

式中 m 为粒子的质量, a 表示粒子的加速度.在一般的情况下,求解这一方程是比较复杂的.事实上,我们经常遇到利用电磁力来控制带电粒子运动的例子,所用的电场和磁场分布都具有某种对称性,这就使求解方程简便得多.下面我们讨论几种简单而重要的实例.

1. 磁聚焦

图11-30是磁聚焦装置的示意图,从阴极 F 发射出来的电子束经过极板 P 和阴极 F 间的电压 U 加速后,先通过一横向电场,再进入一纵向均匀磁场.通常是在一组平行板上加一幅值很小的交变电压以产生横向电场,并用一载流长螺线管得到沿轴向的均匀磁场.由于电子束受横向电场作用后稍有散开,各电子将以不同的角度(一般很小)进入磁场,所以各电子垂直磁场的速度分量不相等,电子将沿着磁感应线作不同半径的螺旋线运动,但它们平行磁场的速度分量近似相等,以致经过一个螺距的运动之后,散开的电

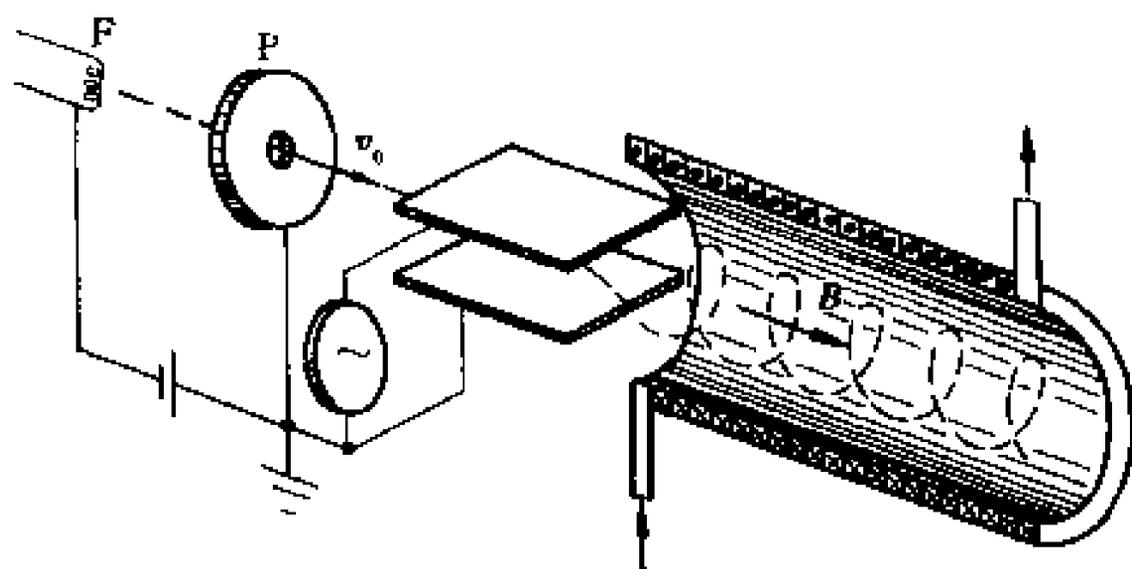


图11 30 磁聚焦

子束重又会聚于一点. 如电子在磁场中运动的纵向路径长度为 l , 调节磁感应强度 B , 使比值 $\frac{l}{v_{0x}T} = n$ 为一整数, 则可以在电子射线管的荧光屏上观察到一个细小的亮点, 这和一束近轴光线经过透镜后聚焦的现象类似, 叫做磁聚焦. 电子的纵向速度 v_{0x} 可以由电子枪的加速电压 U 求得, 即 $\frac{1}{2}mv_{0x}^2 = eU$, 由式(11-27) $T = \frac{2\pi m}{Be}$, 将 v_{0x} 和 T 代入 $\frac{l}{v_{0x}T} = n$ 得

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 n^2 U}{B^2 l^2} \quad (11-31)$$

上式右端各量都可直接测量, 故利用纵向磁场聚焦的方法, 可以测得电子的比荷 $\frac{e}{m_e}$. 测定电子比荷的方法很多, 其基本原理不外乎利用电场的偏转、磁场的偏转等等. 目前公认的数值为

$$\frac{e}{m_e} = (1.758\ 819\ 62 \pm 0.000\ 000\ 53) \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

根据电子比荷与电子电荷量的数值, 可以求得电子的质量

$$m_e = (9.109\ 389\ 7 \pm 0.000\ 005\ 4) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

2. 回旋加速器

在 § 9-2 中所介绍的静电加速器, 是利用静电场一次加速的方

法来获得高能粒子流。因为粒子获得的末速度和加速电势差有关，如要获得更高能的粒子，就要求有更高的加速电势差，但在增大加速电势差的同时，必须加长加速管的长度，以保证管内的场强小于管内物质的击穿强度。制造一个十分长的加速管以及产生极高的电压，都会遇到一系列较大的技术上的困难。即将介绍的回旋器则是利用带电粒子在电场和磁场的联合作用下，用多次加速的方法来获得高能粒子的装置，它是原子核物理、高能物理等实验研究的一种基本设备。

图11-31是回旋加速器的结构示意图， D_1 和 D_2 是封在高度真

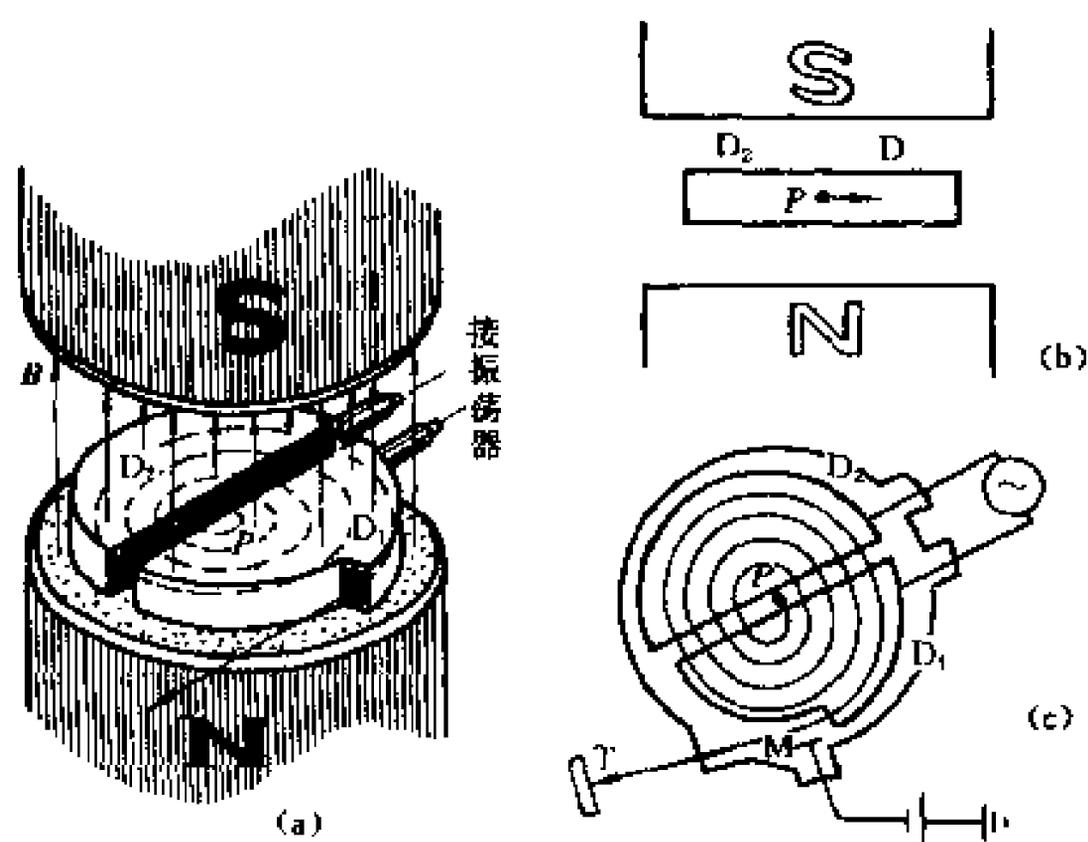


图11 31 回旋加速器外形

空室中的两个半圆形铜盒，常称为D形电极。两个D形电极与高频振荡器连接，于是在电极之间的缝隙处，就产生按一定频率变化着的交变电场。把两个D形电极放在电磁铁的两个磁极之间，便有一恒定的均匀强磁场垂直于电极板平面。如果在两盒间缝隙中央的 P 处由离子源发射出带电粒子，这些粒子在电场作用下被加速而进入盒 D_1 。当粒子在盒内运动时，因为盒内空间没有电场，粒子的速率将保持不变，但由于受到垂直方向恒定磁场的作用而作

圆形轨道运动,根据式(11-26)其轨道半径 R 为

$$R = \frac{v}{\left(\frac{q}{m}\right)B} \quad (11-32)$$

式中 v 是粒子进入盒内的速率, $\frac{q}{m}$ 是粒子的比荷, B 是磁感应强度. 粒子在这一半盒内运动所需的时间 t 是

$$t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}$$

由上式可见, t 的大小仅与粒子的比荷和磁感应强度有关. 当粒子运动速度远小于光速时, m 随速度的改变可以忽略不计, 因此 t 是恒量, 它与粒子的速度和粒子的回旋半径无关. 如果振荡器的频率 $\nu = \frac{1}{2t}$, 那么当粒子从 D_1 盒出来到达缝隙时, 缝隙中的电场方向恰已反向, 因而粒子将再被加速, 以较大的速度进入 D_2 盒, 并在 D_2 盒内以相应的较大半径作圆弧运动, 再经过相同的时间 t 后, 又回到缝隙而再次被加速进入 D_1 盒. 所以, 只要加在 D 形电极上的高频振荡器的频率和粒子在 D 形盒中的旋转频率保持相等, 便能保证带电粒子经过缝隙时受到电场力的加速. 这样, 随着加速次数的增加, 轨道半径也将逐渐增大, 形成图中所示螺旋形线的运动轨道. 最后将粒子用致偏电极 M 引出, 从而获得高能粒子束, 以进行实验工作. 如果在粒子被引出前最后一圈的半径为 R , 按式(11-32)可知, 引出粒子的速度为

$$v = \frac{q}{m}BR$$

而粒子的动能是

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2m}B^2R^2 \quad (11-33)$$

式(11-33)表明, 一个已建成的回旋加速器, 它的 D 形电极的半径和最大磁感应强度都已确定, 那么它能产生的最大能量的粒子也就确定了.

从式(11-33)看,要获得高能量的粒子,似乎只要制造半径很大的电极和相应大的电磁铁,这样做不仅投资大,原材料消耗多,而且要在较大范围内保证磁场的均匀性也不易做到,更重要的是当粒子的能量增加到使粒子的速度接近光速时,它的质量随速度的变化就不能再忽略.例如,氘核的能量达100 MeV时,其质量已超过静止质量的5%.当粒子的速度接近光速时,按相对论效应,物体的质量随速度变化的规律为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

随着粒子质量 m 的增加,粒子在半盒内运动所需的时间 t 也增大,

$$t = \frac{m\pi}{qB} = \frac{m_0\pi}{qB \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

因此,为了使粒子每次穿过缝隙时仍能不断得加速,必须使交变电场的频率随着粒子的加速过程而同步变化,即要相应地降低振荡器的频率,以保证下式

$$vm = \frac{qB}{2\pi} \quad (11-34)$$

成立.式中 q 和 B 是不变的,根据这个原理设计的回旋加速器,叫做同步回旋加速器.

从式(11-32)还可以看出,当粒子的速度增加时,可以用增加磁感应强度的方法来保持粒子的轨道半径不变.这样磁极可以做成环形,从而减少原材料和投资,这是现今同步加速器在技术上的一大改进.加速器的种类很多,目前欧洲最大的同步加速器能够加速质子的能量达400 GeV,美国最大的加速器加速粒子的能量已达500 GeV.

例题11-4 一架回旋加速器的振荡频率为12 MHz,D形电极的半径为54 cm.求加速氘核(质量为 3.3×10^{-27} kg,带电荷量为

$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)需要多大的磁感应强度. 氦核的最大动能和最大速度各为多少?

解 由 $\nu = \frac{1}{2t}$ 及式 $t = \frac{\pi}{\frac{q}{m}B}$ 得

$$B = \frac{2\pi\nu m}{q} = \frac{2\pi \times 12 \times 10^6 \times 3.3 \times 10^{-27}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ T} = 1.6 \text{ T}$$

由式(11-33)知氦核的最大动能为

$$E_k = \frac{q^2}{2m} B^2 R^2 = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 3.3 \times 10^{-27}} \times (1.6)^2 \times (0.54)^2 \text{ J} = 2.8 \times 10^{-12} \text{ J} = 17 \text{ MeV}$$

根据式(11-32), 氦核的最大速度为

$$v = \frac{qBR}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 0.54}{3.3 \times 10^{-27}} \text{ m/s} = 4.2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

这个速度和光速相比是比较小的. 如果将电子加速到和氦核具有相同的能量, 由于电子的质量远小于氦核, 其速度就远大于氦核, 这时必须考虑相对效应的限制. 因而回旋加速器一般适用于加速质量较大的粒子, 不宜用于加速电子. 加速电子可利用电子感应加速器(参看 § 13-3).

3. 质谱仪

带电粒子的电荷和质量是粒子的最基本的属性. 对带电粒子的电荷量、质量和两者的比值的测定, 在近代物理学的发展中是具有重大意义的, 它是研究物质结构的基础. 质谱仪是用磁场和电场的各种组合来达到把电荷量相等但质量不同的粒子分离开来的一种仪器, 它是研究同位素的重要工具, 也是测定离子比荷的仪器. 最早的质谱仪是根据汤姆孙(J. J. Thomson)的方法而设计的, 以后阿斯通(Aston)、倍恩勃立奇(Bainbridge)等创用了一些新的方法.

现在我们介绍结构较简单的倍恩勃立奇的方法.

倍恩勃立奇质谱仪的结构如图11-32所示. 从离子源所产生的

离子经过狭缝 S_1 与 S_2 之间的加速电场后, 进入 P_1 与 P_2 两板之间的狭缝. 在 P_1 和 P_2 两板之间有一均匀电场 E , 同时还有垂直图面向外的均匀磁场 B' . 当离子 ($q > 0$) 进入两板之间, 它们将受到电场力 $F_e = qE$ 和磁场力 $F_m = qv \times B'$ 的作用, 两力的方向正好相反. 显然, 只有某一速度的离子才能满足 $qvB' = qE$ 的条件, 也就是说, 只有速度为 $v = \frac{E}{B'}$ 的离子, 才能无偏转地通过两板间的狭缝沿直线运动, 对那些速度比 v 较大或较小的离子, 都将发生偏转而落到 P_1 或 P_2 板上. 因此, 我们可以利用这种装置把从离子源中射出的具有不同速度的离子, 挑选出具有一定速度的离子来, 这种装置叫做速度选择器(图11-33). 在离子比荷的测定中, 速度选择器是

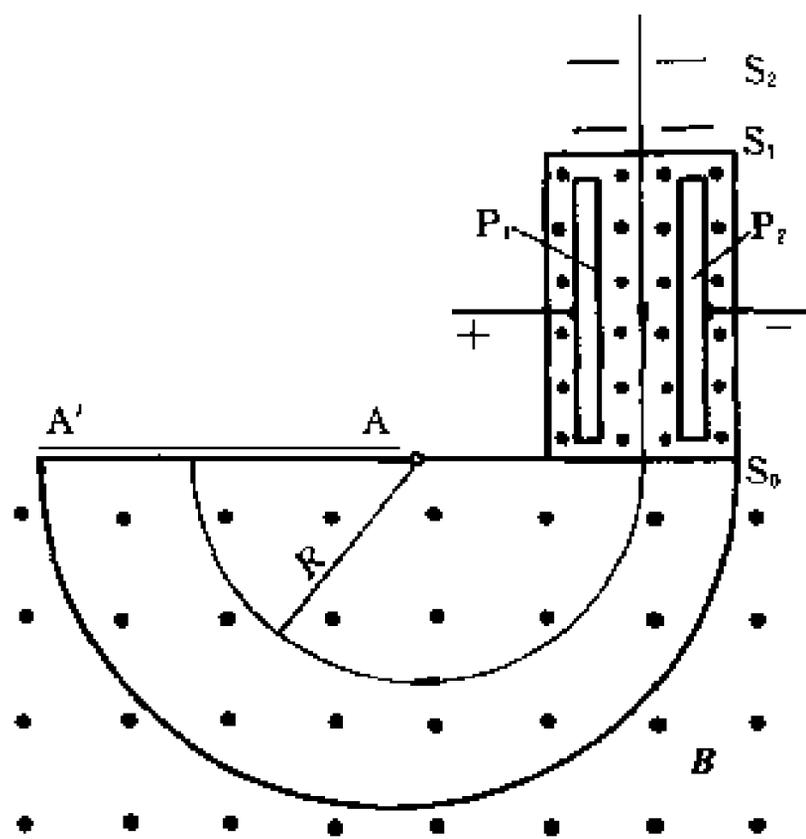


图11-32 离子比荷的测定

(倍恩勃立奇方法示意图)

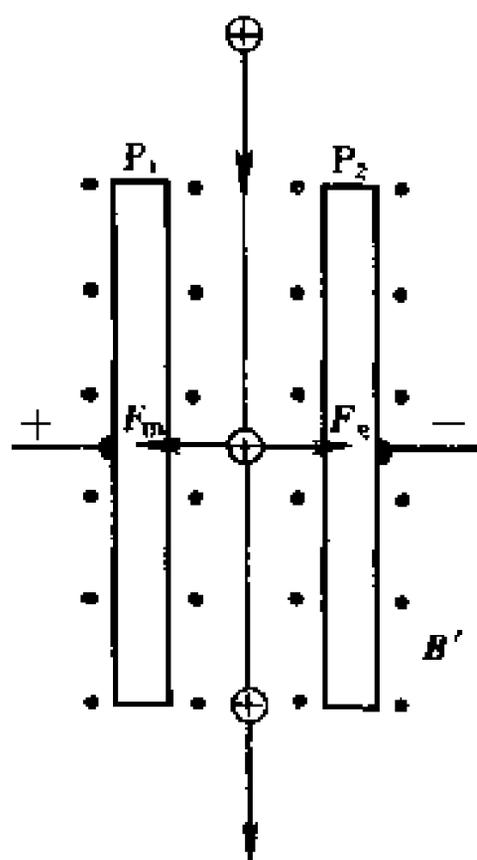


图11-33 速度选择器

十分必要的, 因为原子性的或分子性的离子, 通常总是在放电的气体管内产生的, 在放电管内不同区域产生的离子可以有不同的速度, 通过加速电场后, 速度当然也不会相同, 所以必须用速度选择器使具有一定速度的离子被选择出来. 经过速度选择器, 从 S_0 射出的离子都具有一定的速度 $v = \frac{E}{B'}$. 在狭缝 S_0 以外的空间中没有电

场,仅有垂直于图面向外的匀强磁场,磁感应强度为 B . 离子进入这磁场后,受到磁场力的作用而作匀速圆周运动,设半径为 R ,按式(11-32)可得

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB}$$

以离子的速度 $v = \frac{E}{B'}$ 代入得

$$R = \frac{mE}{qB'B} \quad (11-35)$$

式中 m 为离子的质量. 如果离子是一价的, q 与电子的电荷量 e 等值;如果是二价的, q 为 $2e$, 余类推. 上式中 q 、 E 、 B' 和 B 均为定值,因而 R 与离子质量 m 成正比,即从狭缝 S_0 射出来的不同质量的同位素离子,在磁场 B 中作半径不同的圆周运动. 因此,这些离子就将按照质量的不同而分别射到照相底片 AA' 上的不同位置,形成若干线谱状的细条,每一细条相当于一定的质量. 根据细条的位置可知圆周的半径 R ,因此可算出相应的质量,所以这种仪器叫做质谱仪. 利用质谱仪可以精确地测定同位素的相对原子质量,图11-34是用质谱仪测得的锗(Ge)元素的质谱,数字表示各同位素的相对质量数,即最靠近相对原子质量的整数.

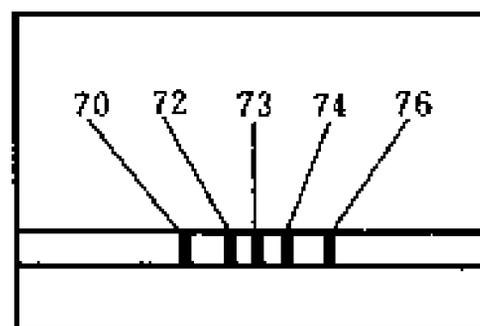


图11-34 锗的质谱

质谱仪的应用之一是通过对铅的各种同位素含量的测定,可确定岩石的年代. 我们知道,经过长时期后,放射性铀-238衰变为铅-206,铀-235衰变为铅-207,钍-232衰变为铅-208. 用化学分析测出矿石样品中铀、钍、铅的含量,同时用质谱仪分析出铅的三种同位素含量,则由这三种放射性同位素的衰变常量,可以估算出矿石的年代. 用这种方法,人们已经估算出地球、月球和其他一些天体的年龄. 例如,地球的年龄为 4.55×10^9 年.

1897年汤姆孙利用电场和磁场使阴极射线发生偏转,证实了组成阴极射线的是带电粒子,并测出其比荷与构成阴极的金属材

料和管内气体的种类无关,说明这些带电粒子是一切物质原子的组成部分,从而在物理史上首先发现第一个基本粒子——电子.

4. 霍耳(E. C. Hall)效应

1879年霍耳首先观察到,把一载流导体薄板放在磁场中时,如果磁场方向垂直于薄板平面,则在薄板的上、下两侧面之间会出现微弱电势差(图11-35).这一现象称为霍耳效应.这电势差称为霍耳电势差.

实验测定,霍耳电势差的大小与电流 I 及磁感应强度 B 成正比,而与薄片沿 B 方向的厚度 d 成反比,即

$$V_1 - V_2 \propto \frac{IB}{d}$$

或写成

$$U = V_1 - V_2 = R_H \frac{IB}{d} \quad (11-36)$$

式中 R_H 是一常量,称为霍耳系数,它仅与导体的材料有关.

霍耳效应的出现是由于导体中的载流子(形成电流的运动电荷)在磁场中受洛伦兹力的作用而发生横向漂移的结果,以金属导体为例,导体中的电流是自由电子在电场作用下作定向运动形成的,其运动方向与电流的流向正好相反,如果在垂直电流方向有一均匀磁场 B ,这些自由电子受洛伦兹力作用,其大小为

$$F_m = evB$$

式中 \bar{v} 是电子定向运动的平均速度, e 是电子电荷量的绝对值,力的方向向上[图11-35(a)].这时自由电子除宏观的定向运动外,还将向上漂移,这使得在金属薄板的上侧有多余的负电荷积累,而下侧缺少自由电子有多余的正电荷的积累,结果在导体内部形成方向向上的附加电场 E_H ,称为霍耳电场.这电场给自由电子的作用力

$$F_e = eE_H$$

方向向下. 当这两个力达到平衡时, 电子不再有横向漂移运动, 结果在金属薄板上下两侧间形成一恒定的电势差. 由于 $F_m = F_e$, 所以

$$eE_H = e\bar{v}B$$

或

$$E_H = \bar{v}B$$

这样霍尔电势差

$$V_1 - V_2 = -E_H b = -\bar{v}Bb$$

设单位体积内的自由电子数为 n , 则电流 $I = ne\bar{v}db$, 代入得

$$U = V_1 - V_2 = -\frac{IB}{ned} \quad (11-37)$$

如果导体中的载流子带正电荷量 q , 则洛伦兹力向上, 使带正电的载流子向上漂移[图11-35(b)], 这时霍尔电势差为

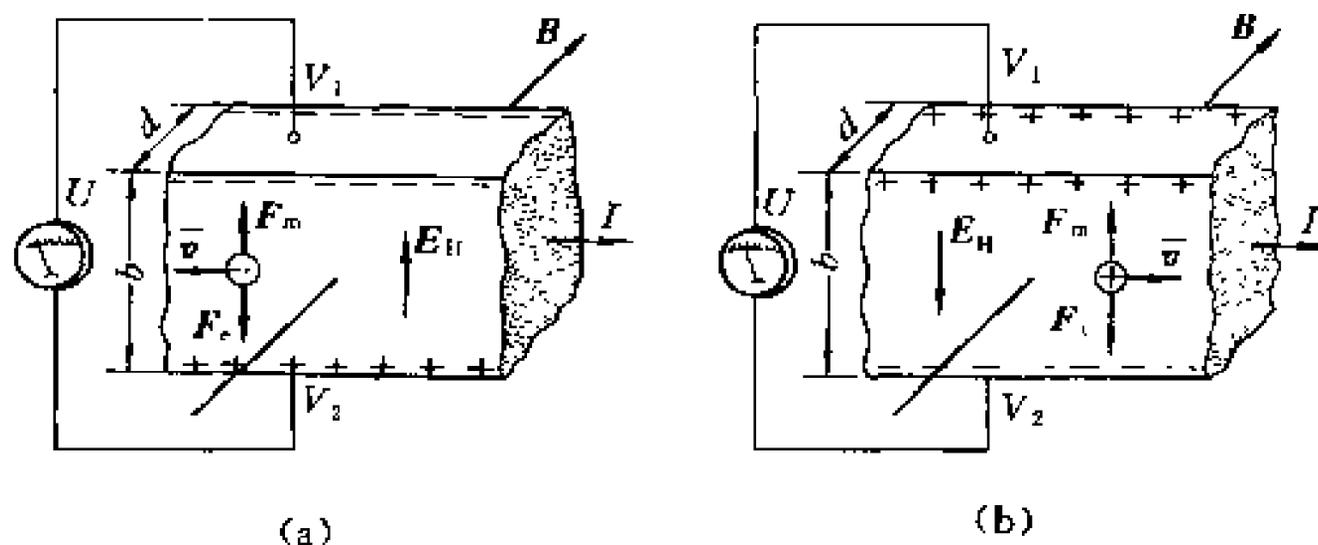


图11-35 霍尔效应

$$U = V_1 - V_2 = \frac{IB}{nqd} \quad (11-37a)$$

比较式(11-36)和式(11-37)、(11-37a)可以得到霍尔系数

$$R_H = -\frac{1}{ne} \text{ 或 } R_H = \frac{1}{nq} \quad (11-38)$$

霍尔系数的正负决定于载流子的正负性质. 因此, 实验测定霍尔电

势差或霍尔系数,不仅可以判定载流子的正负,还可以测定载流子的浓度,即单位体积中的载流子数 n . 例如,半导体材料就是用这个方法判定它是空穴型的(p型——载流子为带正电的空穴)还是电子型的(n型——载流子是带负电的自由电子).

表11-1列出了几种金属霍尔系数的实测值与理论计算值,可以看出,对于单价金属锂(Li)、钠(Na)、钾(K)、铯(Cs)和铜(Cu),实测值和计算值相当符合.而对于某些二价金属及半导体,其实验值和计算值的差异极大,甚至符号相反,说明上述理论还存在缺陷,这个缺陷已为近代固体量子理论所解决.1980年又发现,在极低温和强磁场下,宏观霍尔电压和电阻将呈量子化变化,这种宏观量子效应称为量子霍尔效应.

表11-1 霍尔系数

金 属	实测值/($10^{11} \text{ m}^3/\text{C}$)	计算值/($10^{11} \text{ m}^3/\text{C}$)
锂(Li)	-17.0	-13.1
钠(Na)	25.0	-24.4
钾(K)	-42	-47
铯(Cs)	-78	-73
铜(Cu)	-5.5	-7.4
铍(Be)	+24.4	-2.5
锌(Zn)	+3.3	-4.6
镉(Cd)	+6.0	-6.5

霍尔效应在工业生产中已有广泛应用.例如,根据霍尔效应的电势差来测量磁感应强度、电流,还可以用来测量压力、转速等.在自动控制和计算技术等方面,霍尔效应的应用也越来越多.

除了在固体中的霍尔效应外,在导电流体中同样会产生霍尔现象,这就是目前正在研究中的“磁流体发电”的基本原理.把由燃

料(油、煤气或原子能反应堆)加热而产生的高温(约3 000 K)气体,以高速 v (约1 000 m/s)通过用耐高温材料制成的导电管.气体在高温情况下,原子中的一部分电子克服了原子核引力的束缚而变成自由电子,同时原子则因失去了电子变成带正电的离子,再在这种高温气流中加入少量容易电离的物质(如钾或铯),更能促进气体的电离,从而提高气流的导电率,使气体差不多达到等离子状态.若在垂直于气体运动的方向加上磁场,如图11-36,则气流中的正、负离子由于受洛伦兹力的作用,将分别向垂直于 v 和 B 的两个相反方向偏转,结果在导电管两侧的电极上产生电势差.如果不断提供高温高速的等离子气体,便能在电极上连续输出电能.这种发电方式没有转动的机械部分,因而损耗少而可以提高效率,但目前还存在某些技术上的问题有待解决,所以磁流体发电还没有能达到实用阶段.

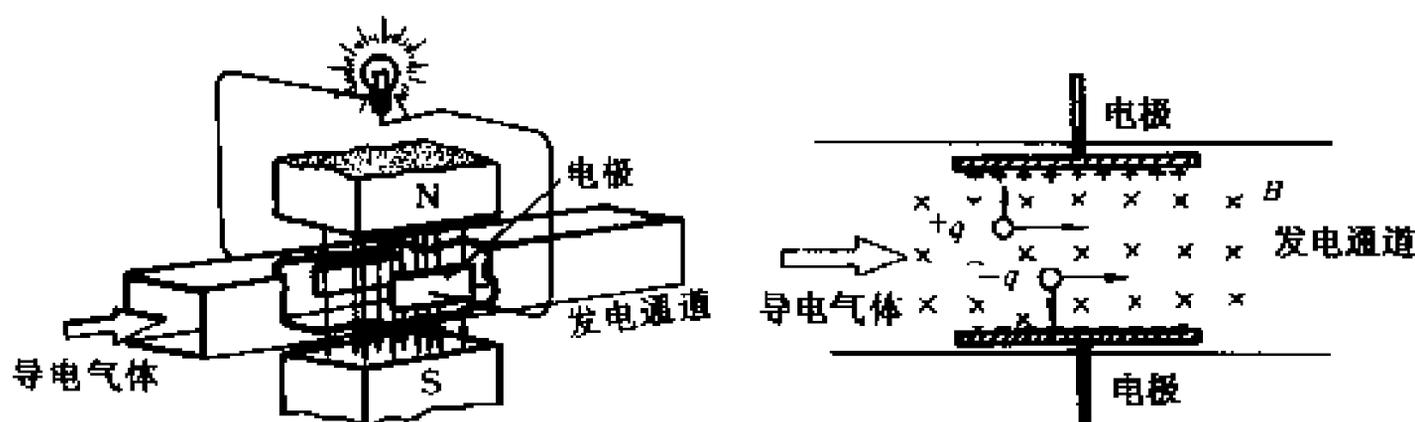


图11-36 电离气体的霍尔现象

例题11-5 把一宽2.0 cm,厚1.0 mm的铜片,放在 $B=1.5\text{ T}$ 的磁场中,磁场垂直通过铜片(图11-35).如果铜片载有电流200 A,求呈现在铜片上下两侧间的霍尔电势差有多大?

解 每个铜原子中只有一个自由电子,故单位体积内的自由电子数 n 即等于单位体积内的原子数.已知铜的相对原子质量为64,1 mol铜(0.064 kg)有 6.0×10^{23} 个原子(阿伏加德罗常数),铜的密度为 $9.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3$,所以铜片中自由电子的密度

$$n = 6.0 \times 10^{23} \times \frac{9.0 \times 10^3}{0.064} \text{ m}^{-3} = 8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

由式(11-37)得霍耳电势差

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= -\frac{IB}{ned} = \\ &= -\frac{200 \times 1.5}{8.4 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.001} \text{ V} = \\ &= -2.2 \times 10^{-5} \text{ V} = -22 \mu\text{V} \end{aligned}$$

铜片中电流为200 A时,霍耳电势差只有22 μV ,可见在通常情况下铜片中的霍耳效应是很弱的.

在半导体中,载流子浓度 n 远小于单价金属中自由电子的浓度,因此可得到较大的霍耳电势差.在这些材料中能产生电流的数量级约为1 mA,如果选用和例中铜片大小相同的材料,取 $I = 0.1 \text{ mA}$, $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$,则可算出其霍耳电势差约为9.4 mV,用一般的毫伏表就能测量出来.

§ 11-8 磁场对载流导线的作用

1. 安培定律

实验指出,放置在磁场中的载流导线要受到磁力的作用,这个力叫做安培力,产生安培力的微观机制如下.

我们在载流导线上任取一电流元,该电流元所在处的磁感应强度为 B (图11-37).设导线中每个自由电子以平均速度向右作定向运动,则每个自由电子在洛伦兹力 $F_L = -e\boldsymbol{v} \times B$ 的作用下以圆周运动的方式作侧向漂移,结果在导线的下侧堆积负电荷,上侧堆积正电荷,在上、下两侧间形成一横向霍耳电场 E_H ,这电场阻碍自由电子的侧向漂移,当电场力 $F_H = -eE_H$ 与洛伦兹力 F_L 平衡时,

$$E_H = -\boldsymbol{v} \times B$$

自由电子便不再作侧向漂移,仍以平均速度 \boldsymbol{v} 向右作定向运动,而

晶格中的正离子只受到霍尔电场力 F_H 的作用. 设导线中单位体积的自由电子数为 n , 它等于导线中单位体积的正离子数, 因此, 在电流元 Idl 中的正离子数为 $dN = nSdl$ (S 为导线的截面积), 这些正离子所受霍尔电场的合力的宏观效果便是电流元在磁场中所受的安培力

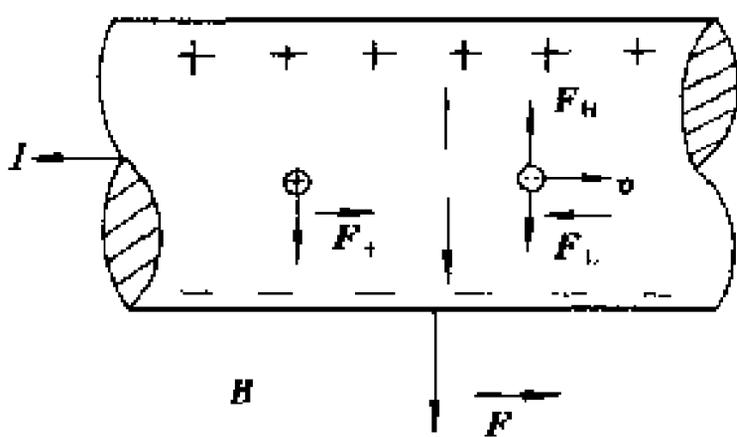


图11-37 安培力的推导

$$dF = dNF_H = -dNe\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -nSe\mathbf{v} \times \mathbf{B} = Idl \times \mathbf{B} \quad (11-39)$$

式中 $Idl = -neS\mathbf{v}$, 注意, 自由电子定向运动的方向与电流元的方向相反. 顺便指出, 在上述推导过程中, 我们没有考虑载流导线自身激发的磁场, 事实上, 载流导线不可能产生作用在导线自身上的力.

式(11-39)称为安培定律, 是安培首先由实验总结出来的基本规律.

具体地说, 一段任意形状的载流导线所受的磁力等于作用在它各段电流元上的安培力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \int_L Idl \times \mathbf{B} \quad (11-39a)$$

下面讨论均匀磁场中的一段长直载流导线所受的安培力.

设直导线长 l , 通有电流 I , 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 导线与 B 的夹角为 θ , 如图11-38所示. 在这种情况下, 作用在各电流元上的安培力 dF 的方向都沿 z 轴正向, 所以作用在长直导线上的合力即等于各电流元上的各个分力的代数和, 即

$$F = \int_L dF = \int_0^l IdlB \sin \theta = IB \sin \theta \int_0^l dl = IBl \sin \theta \quad (11-40)$$

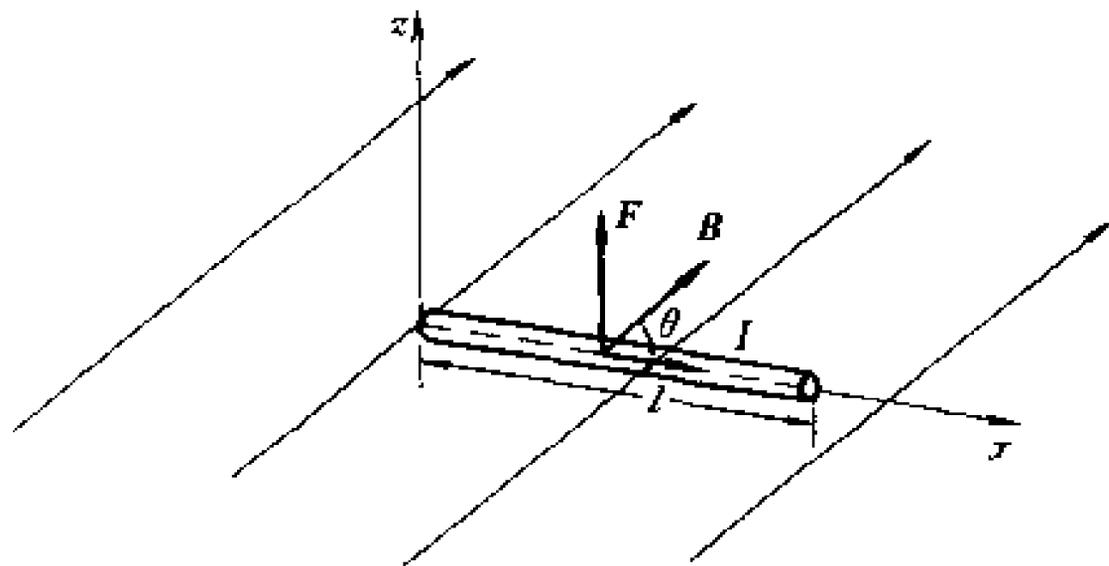


图11-38 一段长直载流导线在均匀磁场中所受安培力

合力作用在长直导线中点,方向沿 z 轴正向.

如果这段载流导线是在非均匀磁场中,则每一小段上所受的安培力 dF 的大小和方向都有所不同,这时,原则上可先把 dF 分解为 dF_x 、 dF_y 、 dF_z 三个分量,求出合力 F 的分量分别为

$$F_x = \int dF_x, \quad F_y = \int dF_y, \quad F_z = \int dF_z$$

分力的作用点(或作用线)按力学中计算平行力合力的方法一样处理.然后再由 F_x 、 F_y 、 F_z 求出合力 F .

例题11-6 测定磁感应强度常用的实验装置——磁秤如图11-39所示,它的一臂下面挂有一矩形线圈,宽为 b ,长为 l ,共有 N 匝,线圈的下端放在待测的均匀磁场中,其平面与磁感应强度 B 垂直.当线圈中通有电流 I 时,线圈受到一向上的作用力,使天平失去平衡,调节砝码 m 使两臂达到平衡.用上述数据求出待测磁场的磁感应强度.

解 由图可见,线圈的底边上受到安培力 F ,方向向上,大小为

$$F = NB Ib$$

作用在两侧直边上的力则大小相等,方向相反,它们相互抵消.

当天平恢复平衡时,这个向上的安培力恰与调整砝码的重量相等,由此可得

$$NBIb = mg$$

故待测磁场的磁感应强度

$$B = \frac{mg}{NIb}$$

如 $N = 9$ 匝, $b = 10.0 \text{ cm}$, $I = 0.10 \text{ A}$, 加砝码 $m = 4.40 \text{ g}$ 才能恢复平衡, 则代入上式得

$$B = \frac{4.40 \times 10^{-3} \times 9.80}{9 \times 0.10 \times 0.10} \text{ T} = 0.48 \text{ T}$$

例11-7 图11-40表示一段半圆形导线, 通有电流 I , 圆的半径为 R , 放在均匀磁场 B 中, 磁场与导线平面垂直, 求磁场作用在半圆形导线上的力.

解 取坐标系 xOy 如图, 这时各段电流元受到的安培力数值上都等于

$$dF = BIdl$$

但方向沿各自的半径离开圆心向外. 整段导线受力为各个电流元所受力的矢量和

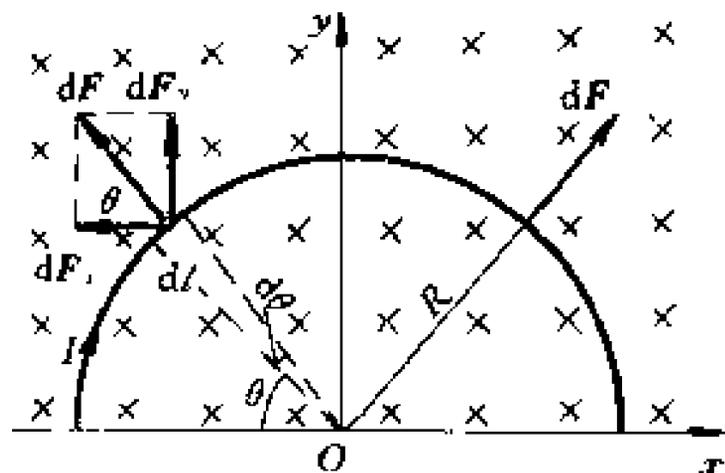


图11-40 均匀磁场中的一段半圆形导线

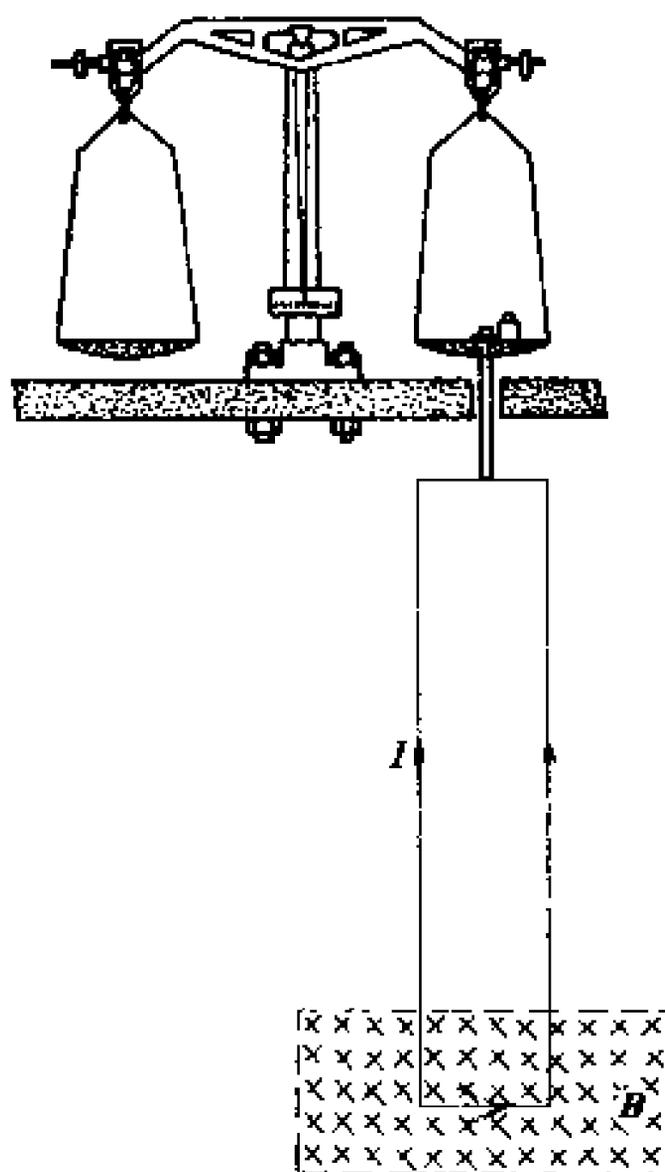


图11-39 磁秤测磁感应强度

$$F = \Sigma dF$$

在此,我们应将各个电流元所受力 dF 分解为 x 方向与 y 方向的分力 dF_x 和 dF_y . 由于电流分布的对称性,半圆形导线上各段电流元在 x 方向分力的总和为零,只有 y 方向分力对合力有贡献. 因为

$$dF_y = dF \sin \theta = B I dl \sin \theta$$

所以合力 F 在 y 方向,大小为

$$F = \int_L dF_y = \int_L B I dl \sin \theta$$

由于 $dl = R d\theta$, 所以

$$F = \int_L B I dl \sin \theta = \int_0^\pi B I \sin \theta R d\theta = \\ B I R \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2 B I R$$

显然,合力 F 作用在半圆弧中点,方向向上.

从本例题所得结果可以推断,一个任意弯曲的载流导线放在均匀磁场中所受到的磁场力,等效于弯曲导线起点到终端的矢量在磁场中所受的力.

2. 磁场对载流线圈的作用

如图11-41所示,在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,有一刚性的长方形平面载流线圈,边长分别为 l_1 和 l_2 , 电流为 I , 设线圈的平面与磁场的方向成任意角 θ , 对边 AB 、 CD 与磁场垂直. 根据安培定律,导线 BC 和 AD 所受的磁场力分别为

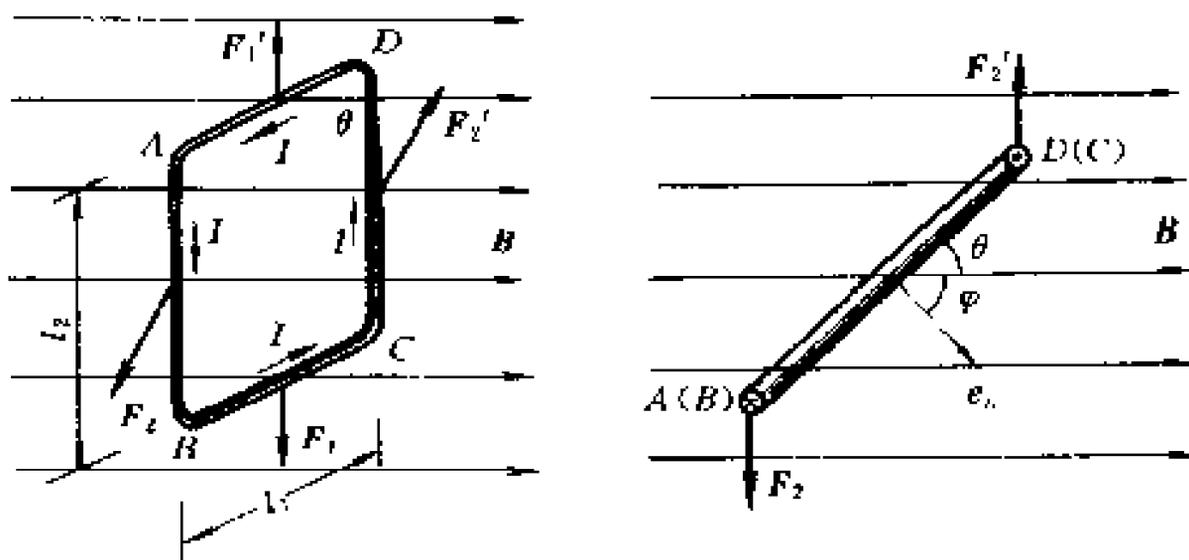
$$F_1 = B I l_1 \sin \theta$$

$$F'_1 = B I l_1 \sin(\pi - \theta) = B I l_1 \sin \theta$$

这两个力在同一直线上,大小相等而指向相反,相互抵消.

导线 AB 和 CD 所受的磁场力分别为 F_2 和 F'_2 ,

$$F_2 = F'_2 = B I l_2$$



(a) 立体图

(b) 俯视图

图11-41 平面载流线圈在匀强磁场中所受的力矩
(线圈的法线与磁场成 φ 角)

这两个力大小相等, 指向相反, 但力的作用线不在同一直线上, 因此形成一力偶, 力臂为 $l_1 \cos \theta$. 它们作用在线圈上的力偶矩为

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = B I l_1 l_2 \cos \theta = B I S \cos \theta$$

式中 $S = l_1 l_2$ 为线圈的面积.

如果用线圈平面的正法线方向和磁场方向的夹角 φ 来代替 θ , 由于 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以上式应为

$$M = B I S \sin \varphi$$

如果线圈有 N 匝, 那么线圈所受的力偶矩为

$$M = N B I S \sin \varphi = p_m B \sin \varphi \quad (11-41)$$

上式中的 $p_m = N I S$, 是线圈的磁矩, 磁矩是矢量, 用 p_m 表示, 磁矩的方向就是载流线圈平面法线的正方向, 所以式(11-41)也可写成矢量式

$$\vec{M} = p_m \times B \quad (11-42)$$

式(11-41)和式(11-42)不仅对长方形线圈成立, 对于在匀强磁场中任意形状的平面线圈也同样成立. 甚至对带电粒子沿闭合回路的运动以及带电粒子的自旋所具有的磁矩, 计算在磁场中所受的磁力矩作用时也都可用上述公式.

由式(11-41)可知,当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 亦即线圈平面与磁场方向相互平行时,线圈所受到的磁力矩为最大. 这一磁力矩有使 φ 减小的趋势. 当 $\varphi = 0$, 亦即线圈平面与磁场方向垂直时,线圈磁矩 p_m 的方向与磁场方向相同,线圈所受到的磁力矩为零,这是线圈稳定平衡的位置. 当 $\varphi = \pi$ 时,线圈平面虽然也与磁场方向垂直,但 p_m 的方向与磁场方向正相反,线圈所受到的力矩虽然也为零,但这一平衡位置是不稳定的,线圈稍受扰动,它就会在磁力矩的作用下离开这一位置,而转到 $\varphi = 0$ 处的稳定位置上. 由此可见,磁场对载流线圈所施的磁力矩,总是促使线圈转到其线圈磁矩的方向与外磁场方向相同的稳定平衡的位置处. 利用载流线圈在磁场中转动的这一特性可以用载流试探小线圈来检测磁场,由线圈在稳定平衡位置时磁矩 p_m 的指向确定外磁场 B 的方向,并由线圈所受的最大磁力矩 M_{\max} 确定外磁场的 B 值等于 $\frac{M_{\max}}{p_m}$ (即单位磁矩所受的最大磁力矩).

应用磁力矩公式时, B 的单位用 T, p_m 的单位用 $A \cdot m^2$, 力矩的单位用 $N \cdot m$.

平面载流线圈在均匀磁场中任意位置上所受的合力均为零,仅受力矩的作用. 因此在均匀磁场中的平面载流线圈只发生转动,不会发生整个线圈的平动.

磁场对载流线圈作用力矩的规律是制成各种电动机、动圈式电表和电流计等的基本原理.

如果平面载流线圈处在非均匀磁场中,由于线圈上各个电流元所在处的 B 在量值上和方向上都不相同,各个电流元所受到的作用力的大小和方向一般也都不可能相同. 因此,合力和合力矩一般也不会等于零,所以线圈除转动外还要平动. 为说明简单起见,在图11-42所示的辐射形磁场中,设线圈的磁矩 p_m 与线圈中心所在处的 B 同方向. 在线圈上任取一电流元 $I dl$, 把电流元所在处的 B 分解为两个分矢量:垂直于线圈平面的分矢量 B_{\perp} 和平行于线圈平面的分矢量 B_{\parallel} . 电流元 $I dl$ 受到 B_{\perp} 所作用的力为 dF_{\perp} (图中未

画出), 方向沿线圈的半径向外. 对整个线圈来说, 作用在各个电流元上的这些力, 只能使线圈发生形变, 而不能使线圈发生平动或转动. 但是电流元 Idl 还同时受到 B_{\parallel} 分矢量作用的力 dF_{\parallel} , 方向垂直于线圈平面, 指向下方. 对整个线圈来说, 各个电流元上的这些力方向都相同, 所以在合力的作用下, 线圈将向磁场较强处移动 (线圈下方磁感应线较密, 表示磁场较强). 若图中线圈中的电流反向, 则所受磁力将把线圈推离磁场较强的区域. 可以证明, 合力的大小与线圈的磁矩和磁感应强度的梯度成正比.

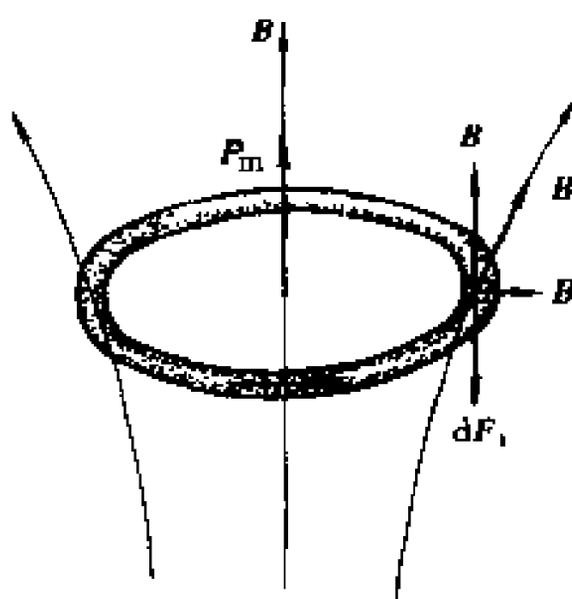


图11-42 非均匀强磁场中的载流线圈

3. 磁电式电流计

常用的安培计和伏特计大多是由磁电式电流计改装的, 它的结构如图11-43所示. 在永久磁铁的两极之间, 有一圆柱形的软铁芯, 用来增强磁极和铁芯间空气隙内的磁场, 并使磁场均匀地沿着径向分布. 在空气隙内放一可绕固定轴转动的线圈, 轴的两端各有一个游丝, 且在一端上固定一指针 (有些灵敏电流计中线圈常悬在悬丝上).

当电流通过线圈时, 线圈在磁场中受到磁力矩的作用而转动. 由于磁场是径向均匀的, 所以无论线圈转到什么位置, 线圈平面的法线方向总是和线圈所在处的磁场方向垂直, 因此, 线圈所受的磁力矩 M 的大小是不变的, 即

$$M = NBIS$$

当线圈转动时, 游丝就要被卷紧, 卷紧的游丝给线圈一个反方向的扭转力矩 M' . 根据实验测定, 游丝给线圈的扭转力矩与线圈转过的角度 θ 成正比, 即

$$M' = k\theta$$

式中 k 称为游丝的扭转常量, 对于一定的游丝来说 k 是恒量.

当线圈受到的磁力矩和游丝给线圈的扭转力矩相互平衡时, 线圈就稳定在这个位置, 这时

$$NBIS = k\theta$$

所以

$$I = \frac{k}{NBS}\theta = K\theta \quad (11-43)$$

式中 $K = \frac{k}{NBS}$ 是恒量, 通常称为电流计常量. 它表示电流计偏转单位角度时所需通过的电流. K 值越小, 电流计越灵敏. 因此, 线圈偏转的角度 θ 与通过线圈的电流 I 成正比关系, 这样就可以从指针所指的位置来测量电流, 这就是磁电式电流计的工作原理.

上面是电流计中通以恒定电流时的情况. 如果在这一电流计中通以一个短促的电流脉冲, 电流计的偏转将是怎样的呢?

在通电的极短时间 t_0 内, 电流计的线圈 (连同其它可转动的系统) 将受到一个冲量矩 $G = \int_0^{t_0} M dt$ 的作用, 而 $M = NBIS$, 所以

$$G = \int_0^{t_0} M dt = \int_0^{t_0} NBIS dt = NBS \int_0^{t_0} I dt = NBSq \quad (1)$$

式中的 $q = \int_0^{t_0} I dt$ 就是这脉冲电流通过时的总电荷量. 由于这个冲量矩的作用时间 t_0 极短, 在 t_0 时间内, 可认为线圈的位置没有显著的变动而仅是线圈很快地从静止变为以角速度 ω_0 起动. 按角动量原理, 应有

$$G = J\omega_0 \quad (2)$$

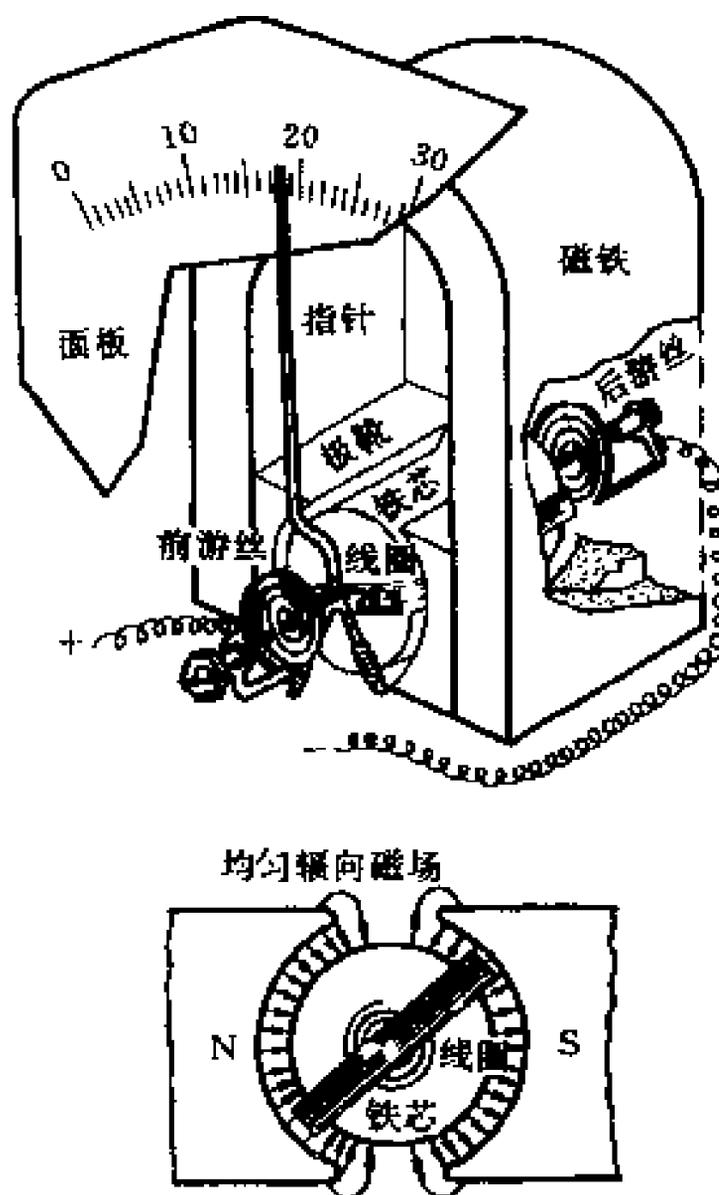


图11-43 磁电动圈式电流计

式中 J 是线圈(连同其它转动系统)的转动惯量. 线圈起动后, 受悬丝扭转力矩作用, 角速度减小, 直转至在最大偏转角 θ 位置上瞬时静止(以后线圈转回初位置, 并往返摆动). 从起动到偏转到最大偏转角 θ 位置的过程中机械能是守恒的, 线圈在最大偏转角 θ 时的弹性势能 $\frac{1}{2}k\theta^2$ 等于线圈起动时的初动能 $\frac{1}{2}J\omega_0^2$, 即

$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (3)$$

式中 k 为悬丝的扭转常量. 将(1)、(2)、(3)三式合并得到

$$q = \frac{\sqrt{kJ}}{NBS}\theta \quad (11-44)$$

式(11-44)表明, 从最大偏转角 θ 可以测定电流脉冲通过时(例如电容器放电时)的电荷量 q , 这就是冲击电流计的工作原理.

采用超导电磁力可以取代螺旋桨作为驱动船舶的动力, 其原理是: 安装在船底上的超导磁体在海水中激发强磁场, 再在与这强磁场垂直的方向通以电流, 海水便受到强大的安培力而被推开, 同时海水猛烈冲击推进器背部推动船舶前进, 如果改变电流方向和大小, 就可以改变船行方向和速度的大小, 超导船的优点有如下几点: 没有转动部件, 因而无振动、无噪声; 结构简单, 使用维修方便.

§ 11-9 平行载流导线间的相互作用力 电流单位 “安培”的定义

毕奥-萨伐尔定律描述电流元所激发的磁场, 安培定律描述电流元在磁场中所受的磁力, 根据这两个定律, 原则上可以计算任意形状的载流导线之间或载流线圈之间的相互作用.

计算载流导线所受磁力的步骤是: 首先计算导线上任一电流元 Idl 所受的力 $dF = Idl \times B$, 式中 B 为其他载流导线在 Idl 所在处所激发的总磁感应强度, B 需要按毕奥-萨伐尔定律来计算; 其次用积分法再求整个载流导线上各个电流元所受的力的矢量和.

但是,除了一些简单的例子以外,一般计算比较困难.

下面我们按上述步骤计算两条“无限长”的平行载流直导线之间的相互作用力.

设有两条平行的载流直导线 AB 和 CD , 两者的垂直距离为 d , 电流分别为 I_1 和 I_2 , 方向相同(图11-44), 距离 d 与导线的长度相比是很小的, 因此两导线可视为“无限长”导线.

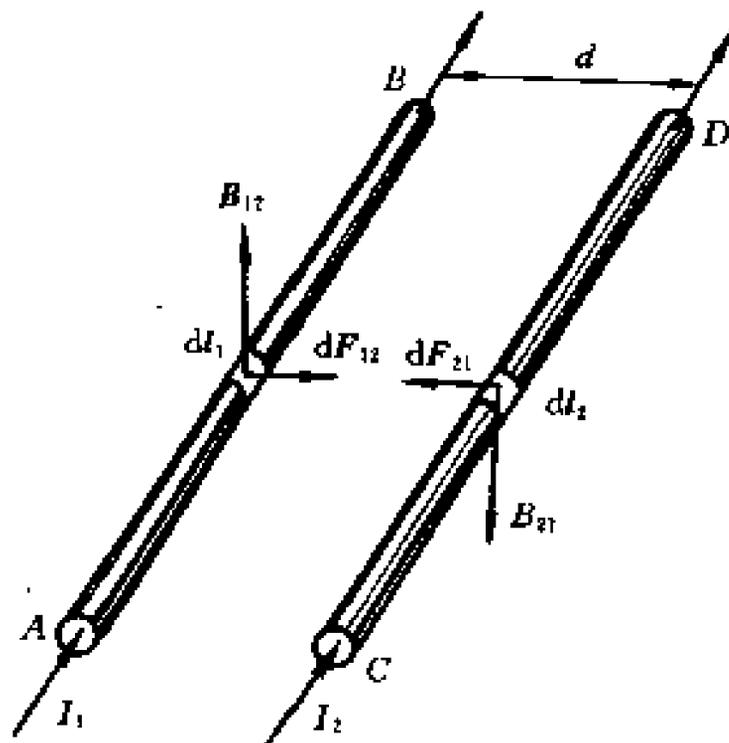


图11-44 平行载流直导线之间的相互作用力

首先计算载流导线 CD 所受的力. 在 CD 上任取一电流元 $I_2 dl_2$, 按安培定律, 该电流元所受的力 dF_{21} 的大小为

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 \sin \theta$$

式中 θ 为 $I_2 dl_2$ 与 B_{21} 间的夹角, 而 B_{21} 为载流导线 AB 在 $I_2 dl_2$ 处所激发的磁感应强度(注意 CD 上任何其他的电流元在 $I_2 dl_2$ 处所激发的磁感应强度为零). 根据“无限长”直导线产生的磁感应强度的公式(式11-11), 得

$$B_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$$

B_{21} 的方向如图所示, 垂直于电流元 $I_2 dl_2$, 所以 $\sin \theta = 1$, 因而

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_2$$

dF_{21} 的方向在两平行载流直导线所决定的平面内, 指向导线 AB .

显然, 载流导线 CD 上各个电流元所受的力方向都与上述方向相同, 所以导线 CD 单位长度所受的力为

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (11-45)$$

同理可以证明载流导线 AB 单位长度所受的力的大小也等于 $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$, 方向指向导线 CD . 这就是说, 两个同方向的平行载流直导线, 通过磁场的作用, 将互相吸引. 不难看出, 两个反向的平行载流直导线, 通过磁场的作用, 将互相排斥, 而每一导线单位长度所受的斥力的大小与这两电流同方向时的引力相等.

由于电流比电荷量容易测定, 在国际单位制中把安培定为基本单位. 安培的定义如下: 真空中相距 1 m 的无限长而圆截面极小的平行直导线中载有相等的电流时, 若每米长度导线上的相互作用力正好等于 $2 \times 10^{-7}\text{ N}$, 则导线中的电流定义为 1 A .

在国际单位制中, 真空磁导率 μ_0 是导出量. 根据安培的定律, 在式 (11-45) 中 $d=1\text{ m}$, $I_1=I_2=1\text{ A}$, $\frac{dF_{21}}{dl} = 2 \times 10^{-7}\text{ N/m}$, 从而可得

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ } \Omega \cdot \text{s/m} = 4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}$$

$\Omega \cdot \text{s}$ 是自感 L 的单位, 叫做亨利, 用符号 H 表示.

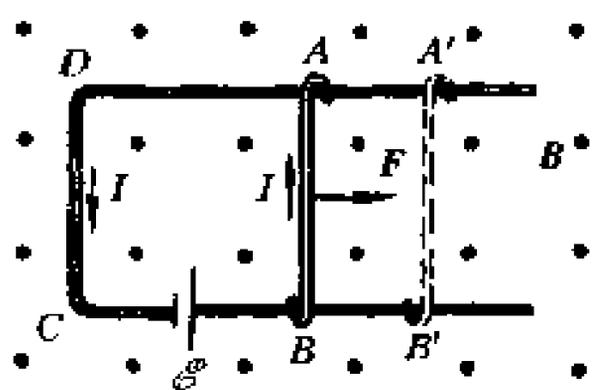
§ 11-10 磁力的功

载流导线或载流线圈在磁场内受到磁力(安培力)或磁力矩的作用, 因此, 当导线或线圈的位置与方位改变时, 磁力就作了功. 下面从一些特殊情况出发, 建立磁力做功的一般公式.

1. 载流导线在磁场中运动时磁力所作的功

设有一匀强磁场, 磁感应强度 B 的方向垂直于纸面向外, 如

图11-45所示. 磁场中有一载流的闭合电路 $ABCD$ (设在纸面上), 电路中的导线 AB 长度为 l , 可以沿着 DA 和 CB 滑动. 假定当 AB 滑动时, 电路中电流 I 保持不变, 按安培定律, 载流导线 AB 在磁场中所受的安培力 F 在纸面上, 指向如图所示. F 的大小



$$F = BIl$$

图11-45 磁力所作的功

在 F 力的作用下, AB 将从初始位置沿着 F 力的方向移动, 当移动到位置 $A'B'$ 时磁力 F 所作的功

$$A = F AA' = BIl AA'$$

当导线在初始位置 AB 和在终了位置 $A'B'$ 时, 通过回路的磁通量分别为

$$\Phi_0 = Bl DA, \quad \Phi_1 = Bl DA'$$

所以磁通量的增量为

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = Bl DA' - Bl DA = Bl AA'$$

可知在导线移动中, 磁力所作的功为

$$A = I\Delta\Phi \quad (11-46)$$

这一关系式说明当载流导线在磁场中运动时, 如果电流保持不变, 磁力所作的功等于电流乘以通过回路所环绕的面积内磁通量的增量, 也可以说磁力所作的功等于电流乘以载流导线在移动中所切割的磁感应线数.

2. 载流线圈在磁场内转动时磁力所作的功

设有一载流线圈在磁场内转动, 设法使线圈中的电流维持不变, 现在来计算线圈转动时磁力所作的功.

参看图11-46, 设线圈转过极小的角度 $d\varphi$, 使 e_n 与 B 之间的夹角从 φ 增为 $\varphi + d\varphi$. 按公式(11-41), 磁力矩 $M = BIS \sin \varphi$, 所以磁力矩所作的功

$$dA = -Md\varphi = -BIS\sin\varphi d\varphi = \\ BISd(\cos\varphi) = Id(BS\cos\varphi)$$

式中的负号表示磁力矩作正功时将使 φ 减小。因为 $BS\cos\varphi$ 表示通过线圈的磁通量，故 $d(BS\cos\varphi)$ 就表示线圈转过 $d\varphi$ 后磁通量的增量 $d\Phi$ 。所以上式也可写成

$$dA = Id\Phi \quad (11-47)$$

当上述载流线圈从 φ_1 转到 φ_2 时，按上式积分后得磁力矩所作的总功

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

$$(11-48)$$

式中的 Φ_1 和 Φ_2 分别表示线圈在 φ_1 和 φ_2 时通过线圈的磁通量。

可以证明，一个任意的闭合电流回路在磁场中改变位置或形状时，如果保持回路中电流不变，则磁力或磁力矩所作的功都可按 $A = I\Delta\Phi$ 计算，亦即磁力或磁力矩所作的功等于电流乘以通过载流线圈的磁通量的增量，这是磁力作功的一般表示。

最后必须指出，因为恒定磁场不是保守力场，磁力的功不等于磁场能的减少。但是归根到底，洛伦兹力是不作功的，磁力所作的功是消耗电源的能量来完成的，这个问题将在 § 13-2 中讨论。

例题 11-8 如图 11-47 所示，长方形线圈 $OABC$ 可绕 y 轴转动，边长 $l_1 = 6 \text{ cm}$ 、 $l_2 = 8 \text{ cm}$ 。线圈中的电流为 10 A ，方向沿 $OABCO$ ，线圈所在处的磁场是匀强的，磁感应强度为 0.02 T ，方向平行于 x 轴。

(1) 如果使线圈的平面与磁感应强度成 $\theta = 30^\circ$ 角，求此时线圈每边所受的安培力以及线圈所受的磁力矩；

(2) 当线圈由这个位置转至平衡位置时，求磁力的功。

解 (1) 根据式 (11-40) (设 β 为 Idl 与 B 之间的夹角)

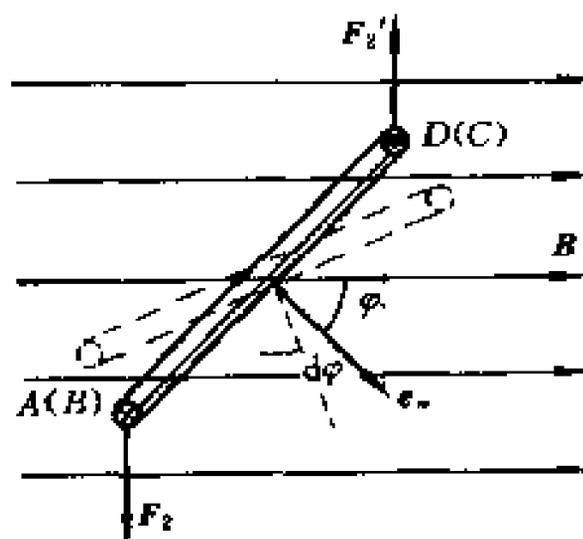


图 11-46 磁力矩所作的功

$$F = BIl \sin \beta$$

OA 所受的磁力(沿 $-z$ 方向):
 $0.02 \times 10 \times 0.08 \times \sin 90^\circ \text{ N} =$
 $1.6 \times 10^{-2} \text{ N}$

BC 所受的磁力(沿 $+z$ 方向):
 $0.02 \times 10 \times 0.08 \times \sin 90^\circ \text{ N} =$
 $1.6 \times 10^{-2} \text{ N}$

AB 所受的磁力(沿 $+y$ 方向):
 $0.02 \times 10 \times 0.06 \times \sin 30^\circ \text{ N} =$
 $0.6 \times 10^{-2} \text{ N}$

CO 所受的磁力(沿 $-y$ 方向):
 $0.02 \times 10 \times 0.06 \times \sin 150^\circ \text{ N} =$
 $0.6 \times 10^{-2} \text{ N}$

此时线圈所受的磁力矩为 OA 和 BC 两导线所受的磁力的力矩 $M = 1.6 \times 10^{-2} \times 0.06 \times \cos 30^\circ = 8.3 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$.

磁力矩也可按式(11-41)计算, $M = BIS \sin \varphi$, 所以

$$M = 0.02 \times 10 \times 0.06 \times 0.08 \times \sin 60^\circ \text{ N} \cdot \text{m} =$$

$$8.3 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

磁力矩使线圈顺时针转动(面对 y 轴方向看去).

(2) 线圈在 $\theta = 30^\circ$ 时, 通过线圈平面的磁通量

$$\Phi_1 = BS \cos \varphi = 0.02 \times 0.06 \times 0.08 \times \cos 60^\circ \text{ Wb} =$$

$$4.8 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

线圈转至平衡位置时 $\varphi = 0$, 通过线圈平面的磁通量

$$\Phi_2 = 0.02 \times 0.06 \times 0.08 \times \cos 0^\circ \text{ Wb} = 9.6 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

所以在这运动过程中磁力做功

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = 10(9.6 \times 10^{-5} - 4.8 \times 10^{-5}) \text{ J} =$$

$$4.8 \times 10^{-4} \text{ J}$$

磁力作正功.

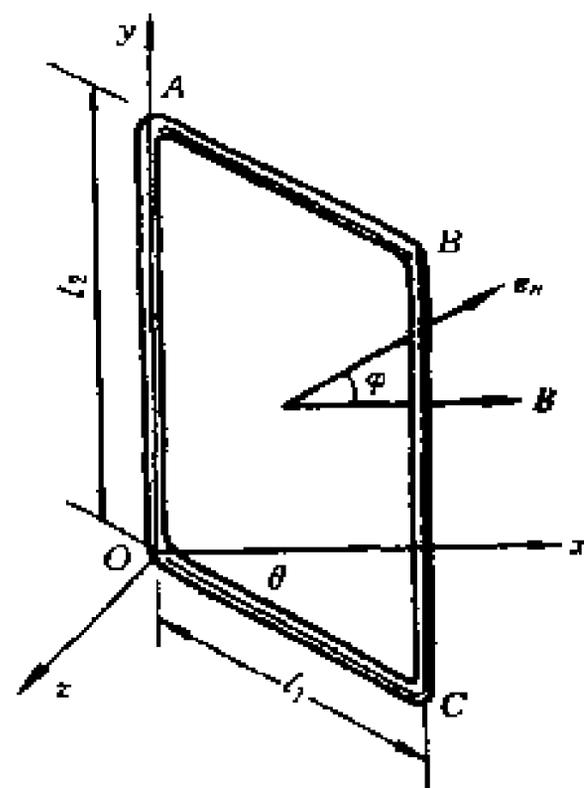


图11-47 例题11-8图

思考题

11-1 我们为什么不把作用于运动电荷的磁力方向定义为磁感应强度 B 的方向?

11-2 一正电荷在磁场中运动,已知其速度 v 沿着 x 轴方向,若它在磁场中所受力有下列几种情况,试指出各种情况下磁感应强度 B 的方向.

- (1) 电荷不受力;
- (2) F 的方向沿 z 轴方向,且此时磁力的值最大;
- (3) F 的方向沿 $-z$ 轴方向,且此时磁力的值是最大值的一半.

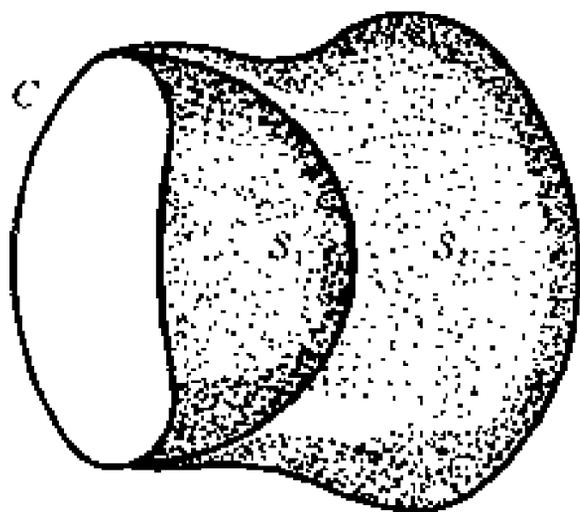
11-3 (1)一带电的质点以已知速度通过某磁场的空间,只用一次测量能否确定磁场?

(2) 如果同样的质点通过某电场的空间,只用一次测量能否确定电场?

11-4 如果一带电粒子作匀速直线运动通过某区域,是否能断定该区域的磁场为零?

11-5 为什么当磁铁靠近电视机的屏幕时会使图象变形?

11-6 证明穿过以闭合曲线 C 为边界的任意曲面 S_1 和 S_2 的磁通量相等.



思考题11-6图

11-7 在载有电流 I 的圆形回路中,回路平面内各点磁感应强度的方向是否相同?回路内各点的 B 是否均匀?

11-8 一个半径为 R 的假想球面中心有一运动电荷,问:

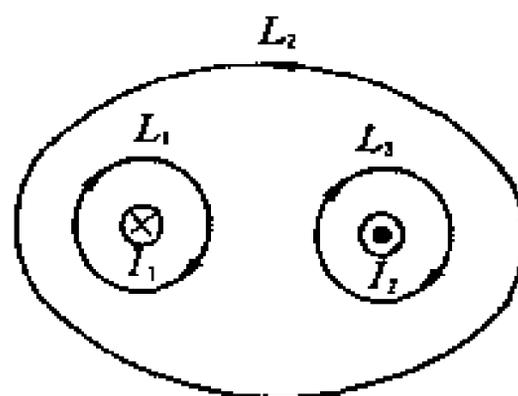
- (1) 在球面上哪些点的磁场最强?
- (2) 在球面上哪些点的磁场为零?
- (3) 穿过球面的磁通量是多少?

11-9 长螺线管中部的磁感应强度是 $\mu_0 n I$,边缘部分轴线上是 $\frac{\mu_0 n I}{2}$,这是不是说螺线管中部的磁感应线比边缘部分的磁感应线多?或说在螺线管内部某处有 $1/2$ 磁感应线突然中断了?

11-10 用安培环路定理能否求出有限长一段载流直导线周围的磁场?

11-11 为什么两根通有大小相等方向相反电流的导线扭在一起能减小杂散磁场?

11-12 设图中两导线中的电流 I_1 、 I_2 均为 8 A, 试分别求如图所示的三个闭合线 L_1 、 L_2 、 L_3 的环路积分 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 值, 并讨论:



(1) 在每个闭合线上各点的磁感应强度 B 是否相等?

(2) 在闭合线 L_2 上各点的 B 是否为零? 为什么?

思考题11-12图

11-13 一电荷 q 在均匀磁场中运动, 判断下列的说法是否正确, 并说明理由.

(1) 只要电荷速度的大小不变, 它朝任何方向运动时所受的洛伦兹力都相等;

(2) 在速度不变的前提下, 电荷量 q 改变为 $-q$, 它所受的力将反向, 而力的大小不变;

(3) 电荷量 q 改变为 $-q$, 同时其速度反向, 则它所受的力也反向, 而大小则不变;

(4) \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{F} 三个矢量, 已知任意两个矢量的大小和方向, 就能确定第三个矢量的大小和方向;

(5) 质量为 m 的运动带电粒子, 在磁场中受洛伦兹力后动能和动量不变.

11-14 一束质子发生了侧向偏转, 造成这个偏转的原因可否是(1)电场?(2)磁场?(3)若是电场或者是磁场在起作用, 如何判断是哪一种场?

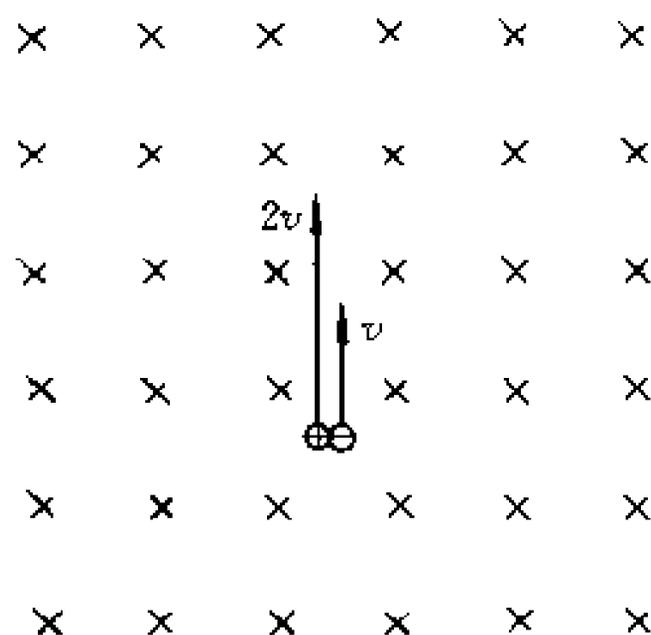
11-15 如图所示, 一对正、负电子同时在同一点射入一均匀磁场中, 已知它们的速率分别为 $2v$ 和 v , 都和磁场垂直, 指出它们的偏转方向; 经磁场偏转后, 哪个电子先回到出发点?

11-16 如图所示, 一载流圆形线圈放置在 x - y 平面内, 电流流向如图, 另一带正电荷的粒子以速度 \mathbf{v} 沿 z 轴方向通过线圈中心, 试讨论作用在粒子和载流线圈上的力.

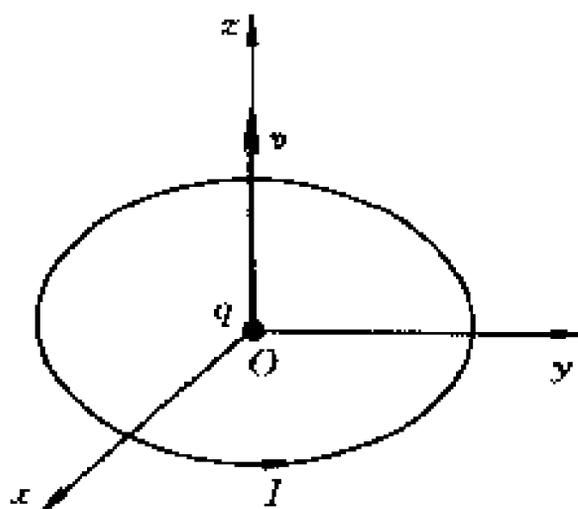
11-17 一个弯曲的载流导线在均匀磁场中应如何放置才不受磁力的作用?

11-18 在一均匀磁场中, 有两个面积相等、通有相同电流的线圈, 一个是三角形, 一个是圆形, 这两个线圈所受的磁力矩是否相等? 所受的最大磁力

矩是否相等?所受磁力的合力是否相等?两线圈的磁矩是否相等?当它们在磁场中处于稳定位置时,由线圈中电流所激发的磁场的方向与外磁场的方向是相同、相反还是相互垂直?



思考题11-15图



思考题11-16图

习 题

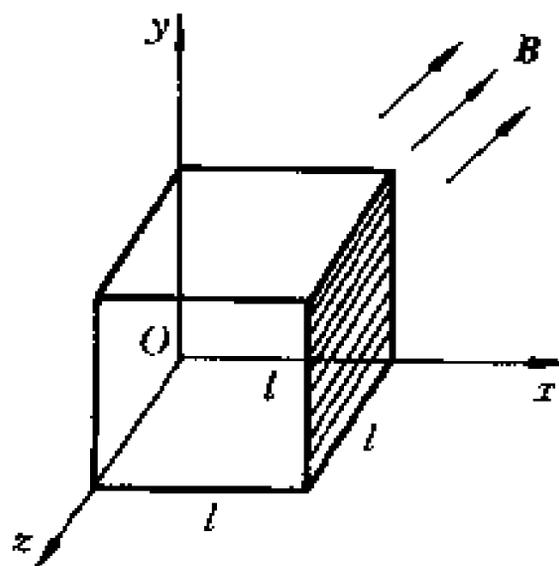
11-1 在地球北半球的某区域,磁感应强度的大小为 $4 \times 10^{-5} \text{ T}$,方向与铅直线成 60° 角.求(1)穿过面积为 1 m^2 的水平平面的磁通量;(2)穿过面积为 1 m^2 的竖直平面的磁通量的最大值和最小值.

11-2 设一均匀磁场沿 x 轴正方向,其磁感应强度值 $B=1 \text{ Wb/m}^2$.求在下列情况下,穿过面积为 2 m^2 的平面的磁通量.(1)面积和 $y-z$ 面平行;(2)面积与 $x-z$ 面平行;(3)面积与 y 轴平行又与 x 轴成 45° 角.

11-3 一边长为 $l=0.15 \text{ m}$ 的立方体如图放置,有一均匀磁场 $B=(6i+3j+1.5k) \text{ T}$ 通过立方体所在区域,计算

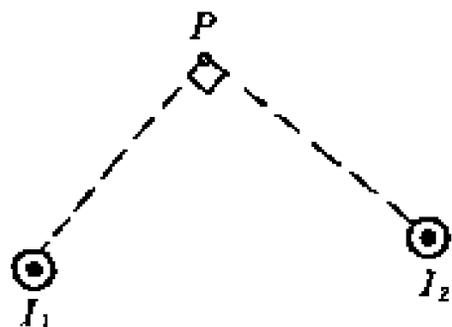
- (1) 通过立方体上阴影面积的磁通量;
- (2) 通过立方体六面的总磁通量.

11-4 两根长直导线互相平行地放置在真空中,如图所示,其中通以同向的电流 $I_1=I_2=10 \text{ A}$.试求 P 点的磁感应强度.已知 $PI_1=PI_2=0.5 \text{ m}$, PI_1 垂直于 PI_2 .

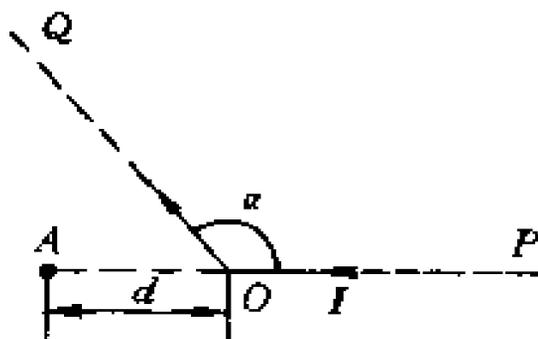


习题11-3图

11-5 如图所示的被折成钝角的长导线中通有20 A的电流. 求A点的磁感应强度. 设 $d=2\text{ cm}$, $\alpha=120^\circ$.



习题11-4图



习题11-5图

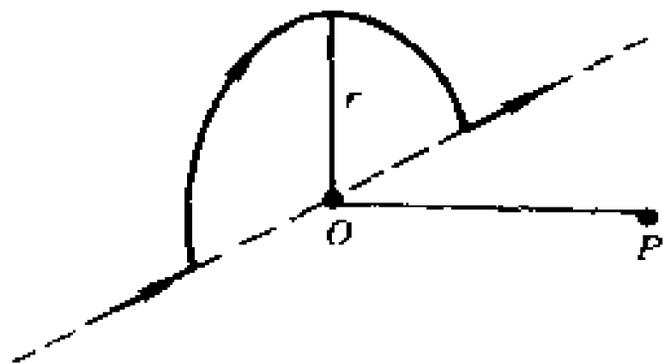
11-6 高为 h 的等边三角形的回路载有电流 I , 试求该三角形的中心处的磁感应强度.

11-7 一正方形线圈边长为 l , 载有电流 I .

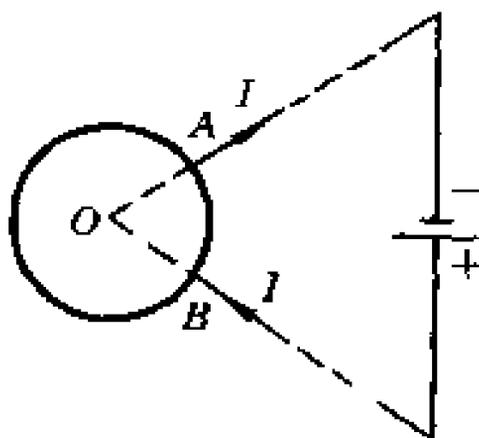
(1) 求线圈轴线上离线圈中心为 x 处的磁感应强度;

(2) 如果 $l=8.0\text{ cm}$, $I=5.0\text{ A}$, $x=10\text{ cm}$, 则 B 值是多少?

11-8 如图所示, 一无限长直导线, 其中部被弯成半圆环形状, 环的半径 $r=10\text{ cm}$, 当导线中通有电流4 A时, 求: (1) 环心 O 处的磁感应强度; (2) 垂直于环面的轴线上距 O 点为40 cm处 P 点的磁感应强度.



习题11-8图



习题11-9图

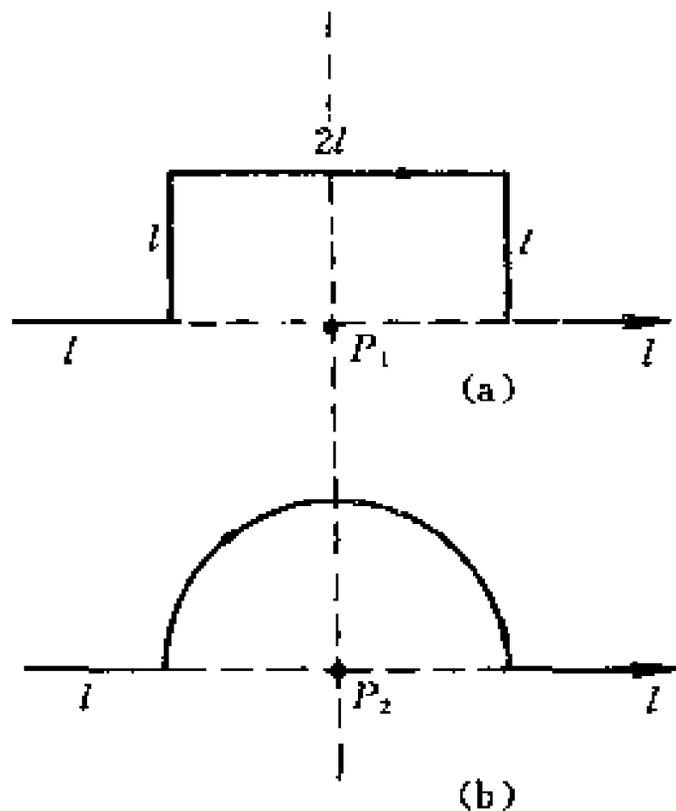
11-10 一段导线先弯成图(a)所示的形状, 然后将同样长的导线再弯成图(b)所示的形状. 当导线中通以电流 I 后, 求 P_1 和 P_2 两点磁感应强度之比 B_1/B_2 .

11-11 一密绕的圆形线圈, 直径是0.4 m, 线圈中通有电流2.5 A时, 在

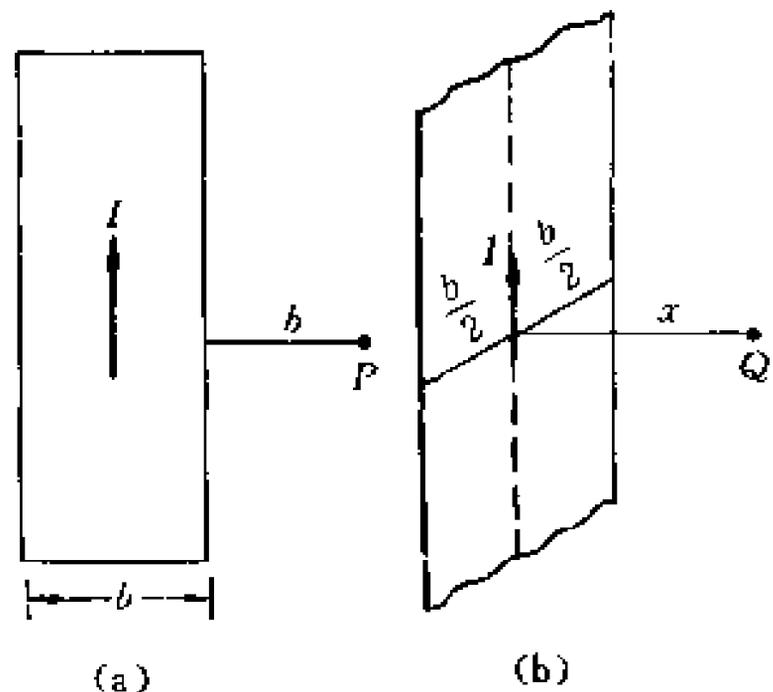
线圈中心处的 $B = 1.26 \times 10^{-4} \text{ T}$. 问线圈有多少匝?

11-12 A 和 B 为两个正交放置的圆形线圈, 其圆心相重合. A 线圈半径 $R_A = 0.2 \text{ m}$, $N_A = 10$ 匝, 通有电流 $I_A = 10 \text{ A}$. B 线圈半径为 $R_B = 0.1 \text{ m}$, $N_B = 20$ 匝, 通有电流 $I_B = 5 \text{ A}$. 求两线圈公共中心处的磁感应强度.

11-13 电流均匀地流过宽为 b 的无限长平面导体薄板, 电流为 I , 沿板长方向流动. 求



习题11-10图



习题11-13图

- (1) 在薄板平面内, 距板的一边为 b 的 P 点处的磁感应强度[图(a)];
- (2) 通过板的中线并与板面垂直的直线上一点 Q 处的磁感应强度, Q 点到板面的距离为 x [图(b)].

11-14 在半径 $R = 1 \text{ cm}$ 的“无限长”半圆柱形金属薄片, 有电流 $I = 5 \text{ A}$ 自下而上通过. 如图所示, 试求圆柱轴线上一点 P 的磁感应强度.

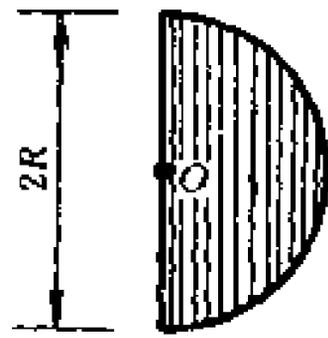
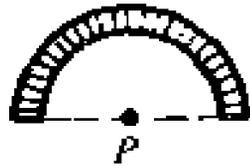
11-15 半径为 R 的木球上绕有细导线, 所绕线圈很紧密, 相邻的线圈彼此平行地靠着, 以单层盖住半个球面共有 N 匝, 如图所示. 设导线中通有电流 I , 求在球心 O 处的磁感应强度.

11-16 一个塑料圆盘, 半径为 R , 电荷 q 均匀分布于表面, 圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动, 角速度为 ω . 求圆盘中心处的磁感应强度.

11-17 两平行长直导线相距 $d = 40 \text{ cm}$, 每根导线载有电流 $I_1 = I_2 = 20 \text{ A}$, 电流流向如图所示. 求:



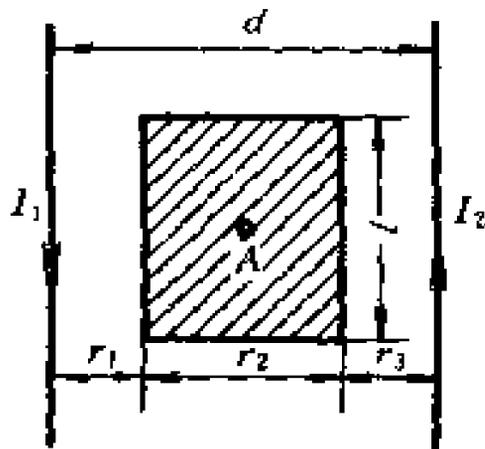
习题11-14图



习题11-15图

- (1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点 A 处的磁感应强度.
 (2) 通过图中斜线所示面积的磁通量 ($r_1 = r_3 = 10 \text{ cm}$, $l = 25 \text{ cm}$).

11-18 一根很长的铜导线, 载有电流 10 A , 在导线内部通过中心线作一平面 S , 如图所示. 试计算通过导线 1 m 长的 S 平面内的磁感应通量.



习题11-17图



习题11-18图

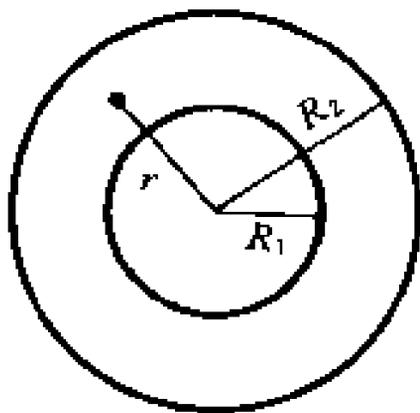
11-19 如图所示的空心柱形导体半径分别为 R_1 和 R_2 , 导体内载有电流 I , 设电流 I 均匀分布在导体的横截面上. 求证导体内部各点 ($R_1 < r < R_2$) 的磁感应强度 B 由下式给出

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}$$

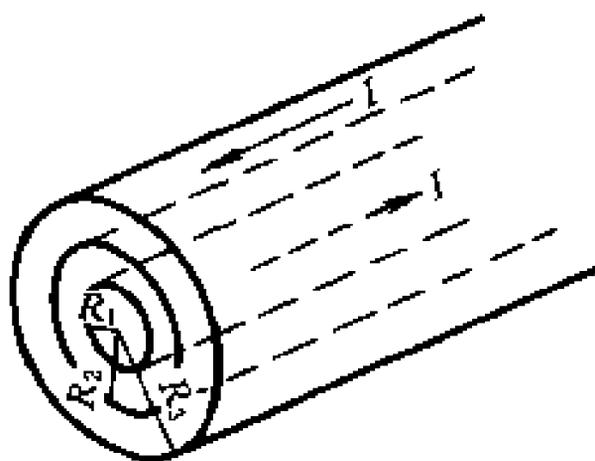
试以 $R_1 = 0$ 的极限情形来检验这个公式. $r = R_2$ 时又怎样?

11-20 有一根很长的同轴电缆, 由一圆柱形导体和一同轴圆筒状导体组成, 圆柱的半径为 R_1 , 圆筒的内外半径分别为 R_2 和 R_3 , 如图所示. 在这两导体中, 载有大小相等而方向相反的电流 I , 电流均匀分布在各导体的截面上. (1) 求圆柱导体内部各点 ($r < R_1$) 的磁感应强度 B ; (2) 求两导体之间 ($R_1 < r$

$<R_2$)的 B ; (3)求外圆筒导体内($R_2 < r < R_3$)的 B ; (4)求电缆外($r > R_3$)各点的 B .



习题11-19图



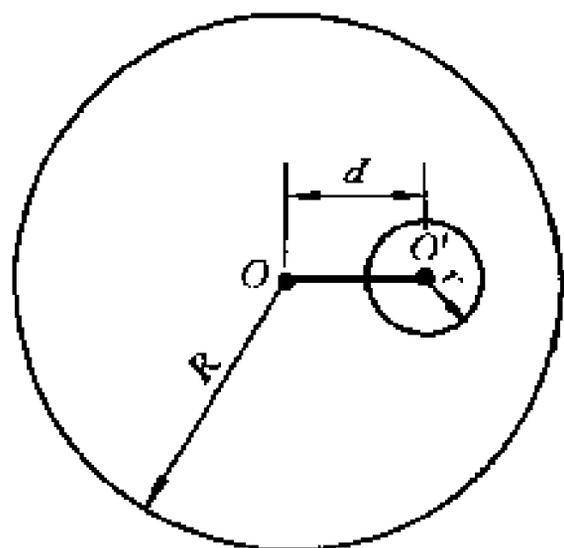
习题11-20图

11-21 在半径为 R 的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为 r 的无限长圆柱体,两柱体的轴线平行,相距为 d ,如图所示.今有电流沿空心柱体的轴线方向流动,电流 I 均匀分布在空心柱体的截面上.

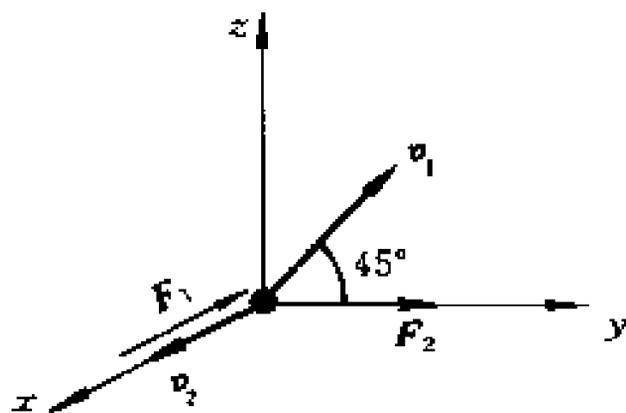
(1) 分别求圆柱轴线上和空心部分轴线上的磁感应强度的大小;

(2) 当 $R=1.0\text{ cm}$, $r=0.5\text{ mm}$, $d=5.0\text{ mm}$ 和 $I=31\text{ A}$ 时,计算上述两处磁感应强度的值.

11-22 一带有电荷量为 $4.0 \times 10^{-9}\text{ C}$ 的粒子,在 $y-z$ 平面内沿着和 y 轴成 45° 角的方向以速度 $v_1=3 \times 10^6\text{ m/s}$ 运动,它受到均匀磁场的作用力 F_1 逆 x 轴方向;当这个粒子沿 x 轴方向以速度 $v_2=2 \times 10^6\text{ m/s}$ 运动时,它受到沿 y 轴方向的作用力 $F_2=4 \times 10^2\text{ N}$. 求磁感应强度的大小和方向(见图).



习题11-21图



习题11-22图

11-23 一个电子射入 $B = (0.2i + 0.5j)$ T 的非均匀磁场中, 当电子速度为 $v = 5 \times 10^6 j$ m/s 时, 求电子所受的磁力.

11-24 在一个电视显象管的电子束中, 电子能量为 12 000 eV, 这个显象管的取向使电子水平地由南向北运动, 该处地球磁场的垂直分量向下, 大小为 $B = 5.5 \times 10^{-5}$ T. 问

- (1) 电子束受地磁场的影响将偏向什么方向?
- (2) 电子的加速度是多少?
- (3) 电子束在显象管内在南北方向上通过 20 cm 时将偏转多远?

11-25 一电子以 1.0×10^6 m/s 的速度进入一均匀磁场, 将速度方向与磁场方向垂直. 已知电子在磁场中作半径为 0.1 m 的圆周运动, 求磁感应强度的大小和电子的旋转角速度.

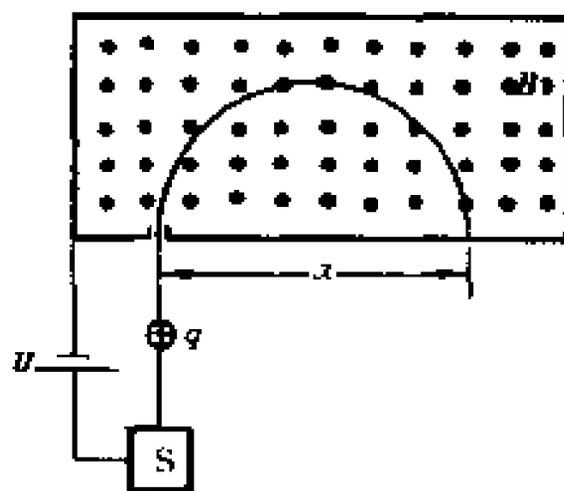
11-26 一质子以 1.0×10^7 m/s 的速度射入磁感应强度 $B = 1.5$ T 的均匀磁场中, 其速度方向与磁场方向成 30° 角. 计算

- (1) 质子作螺旋运动的半径;
- (2) 螺距;
- (3) 旋转频率.

11-27 一电子在 $B = 2.0 \times 10^{-3}$ T 的均匀磁场中作半径 $R = 20$ cm 的螺旋线运动, 螺距 $h = 50$ cm. 已知电子的比荷 $\frac{e}{m_e} = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg, 求这个电子的速度.

11-28 一束单价铜离子以 1.0×10^5 m/s 的速率进入质谱仪的均匀磁场, 转过 180° 后各离子打在照相底片上, 如磁感应强度为 0.50 T, 试计算质量为 63 u 和 65 u 的两同位素分开的距离 ($1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg).

11-29 图示为测定离子质量所用的装置. 离子源 S 产生一质量为 m 、电荷量为 $+q$ 的离子, 离子从源出来时的速度很小, 可以看作是静止的. 离子经电势差 U 加速后进入磁感应强度为 B 的均匀磁场, 在这磁场中, 离子沿半圆周运动后射到离入口缝隙 x 远处的感光底片上, 并予以记录. 试证明离子的质量 m 为 $m = \frac{B^2 q x^2}{8U}$.



习题 11-29 图

11-30 一回旋加速器 D 形电极圆壳的最

大半径为 $R = 60 \text{ cm}$, 用它来加速质量为 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、电荷量为 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 的质子, 要把它从静止加速到 4.0 MeV 的能量.

(1) 求所需的磁感应强度;

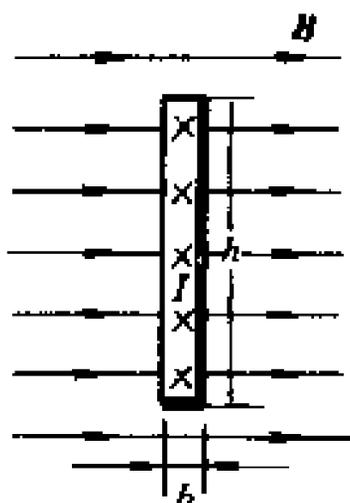
(2) 设两 D 形电极间的距离为 1.0 cm , 电压为 $2.0 \times 10^4 \text{ V}$, 极间的电场是均匀的, 求加速到上述能量所需的时间.

11-31 设电子质量为 m_e , 电荷量为 e , 以角速度 ω 绕带正电的质子作圆周运动, 当加上外磁场 B (B 的方向与电子轨道平面垂直) 时, 设电子轨道半径不变, 而角速度则变为 ω' . 证明: 电子角速度的变化近似等于

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \pm \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} B$$

11-32 在霍尔效应实验中, 宽 1.0 cm 、长 4.0 cm 、厚 $1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 的导体沿长度方向载有 3.0 A 的电流, 当磁感应强度 $B = 1.5 \text{ T}$ 的磁场垂直地通过该薄导体时, 产生 $1.0 \times 10^{-5} \text{ V}$ 的霍尔电压 (在宽度两端). 试由这些数据求: (1) 载流子的漂移速度; (2) 每立方厘米的载流子数; (3) 假设载流子是电子, 试就一给定的电流和磁场方向在图上画出霍尔电压的极性.

11-33 高 h 宽 b 的铜条内有电流 I (电流方向在图中以 \times 表示), 在这铜片的垂直方向上施加磁感应强度为 B 的均匀磁场. (1) 试计算铜片中电子的漂移速率 v_d . (2) 作用在电子上磁力 F 的大小和方向为何? (3) 为了抵消磁场的效应, 铜片中应加均匀电场 E 的大小和方向为何? (4) 为了产生此电场 E , 那铜片导体两侧之间电压应为多少? 电压应加于导体的哪两边? (5) 如果外界不施加电场, 则有些电子将被推到铜片的一边, 因而在铜片的高度方向上将产生一均匀电场 E_H , 直到这个静电场 E_H 的力与在 (2) 中磁力达到平衡为止, E_H 这个电场的大小和方向为何? 设单位体积内传导电子的数目 $n = 1.1 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $h = 0.02 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ cm}$, $I = 50 \text{ A}$, $B = 2 \text{ T}$.

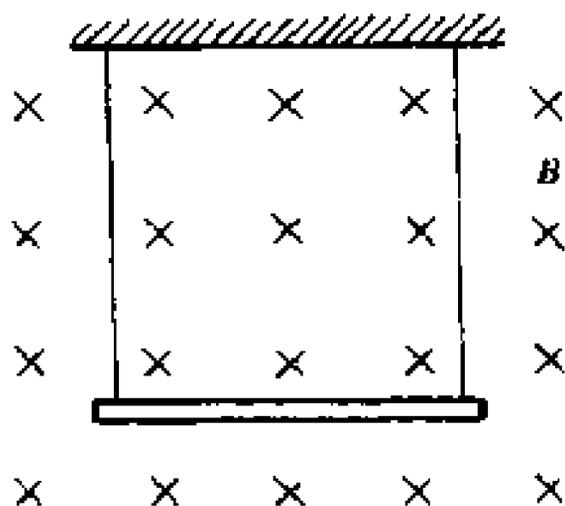


习题11-33图

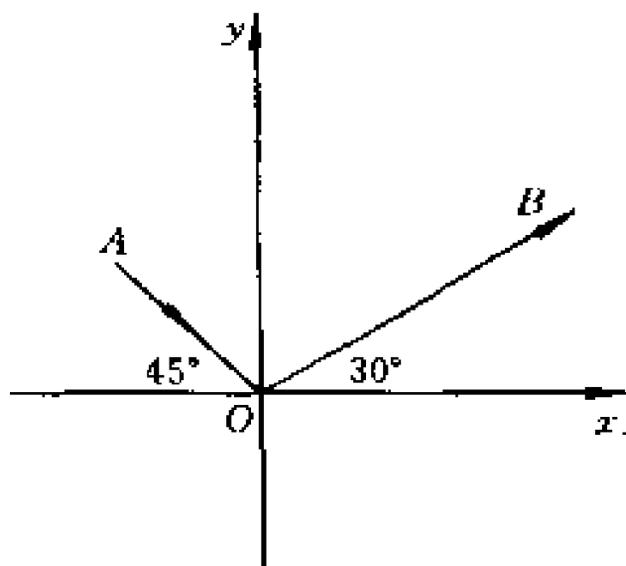
11-34 彼此相距 10 cm 的三根平行的长直导线中各通有 10 A 同方向的电流, 试求各导线上每 1 cm 上作用力的大小和方向.

11-35 有一根长为 50 cm , 质量为 10 g 的直导线, 用细线平挂在磁感应强度为 1 T 的均匀磁场中, 如图所示. 问在导线中通以多大的电流、流向如何才能使线中的张力为零?

11-36 如图,载流导线段 $AO=0.75\text{ m}$, $OB=1.5\text{ m}$,其中通有电流 $I=0.5\text{ A}$.已知导线段所在区域的均匀磁场为 $B=0.4\mathbf{i}\text{ T}$,求载流导线段所受的安培力.



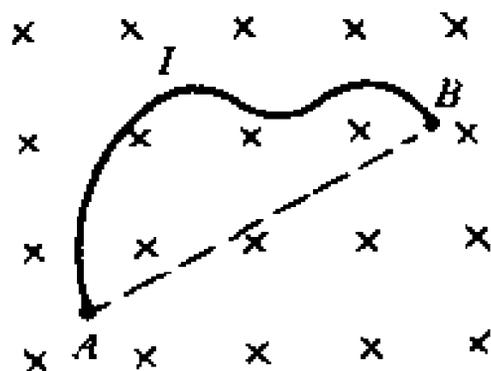
习题11-35图



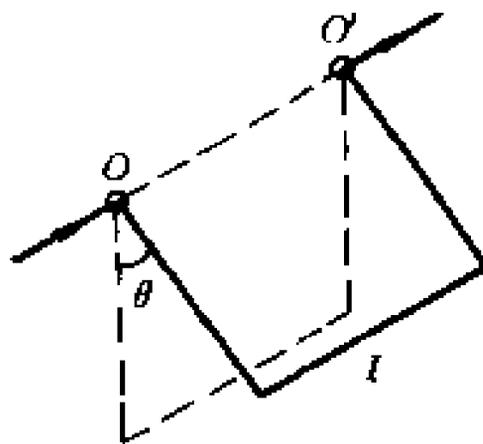
习题11-36图

11-37 任意形状的一段导线 AB 如图所示,其中通有电流 I ,导线放在和匀强磁场 B 垂直的平面内.试证明导线 AB 所受的力等于 A 到 B 间载有同样电流的直导线所受的力.

11-38 截面积为 S 、密度为 ρ 的铜导线被弯成正方形的三边,可以绕水平轴转动,如图所示.导线放在方向为竖直向上的匀强磁场中,当导线中的电流为 I 时,导线离开原来的竖直位置偏转一角度 θ 而平衡.求磁感应强度.如 $S=2\text{ mm}^2$, $\rho=8.9\text{ g/cm}^3$, $\theta=15^\circ$, $I=10\text{ A}$, B 应为多少?



习题11-37图



习题11-38图

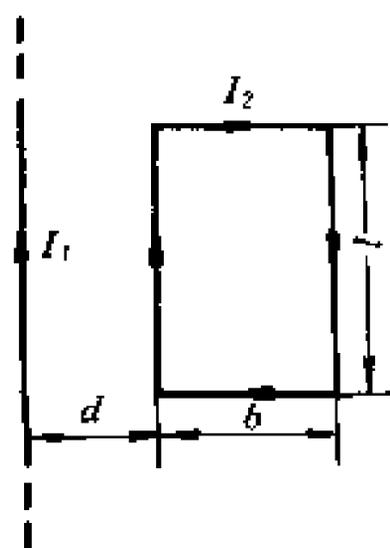
11-39 如图所示,在长直导线旁有一矩形线圈,导线中通有电流 $I_1=$

20 A, 线圈中通有电流 $I_2 = 10$ A. 已知 $d = 1$ cm, $b = 9$ cm, $l = 20$ cm, 求矩形线圈上受到的合力是多少?

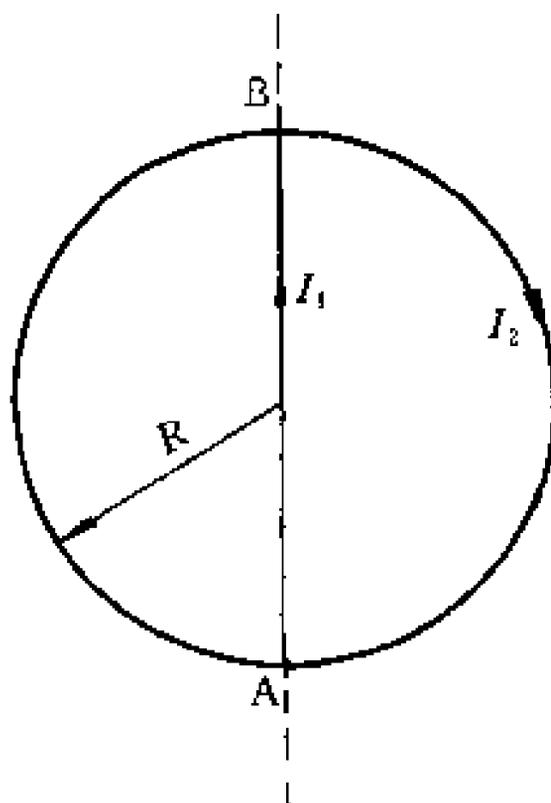
11-40 半径为 R 的平面圆形线圈中载有电流 I_2 , 另一无限长直导线 AB 中载有电流 I_1 .

(1) 设 AB 通过圆心, 并和圆形线圈在同一平面内(如图), 求圆形线圈所受的磁力;

(2) 若 AB 与圆心相距 d ($d > R$), 仍在同一平面内, 求圆形线圈所受的磁力.



习题11-39图



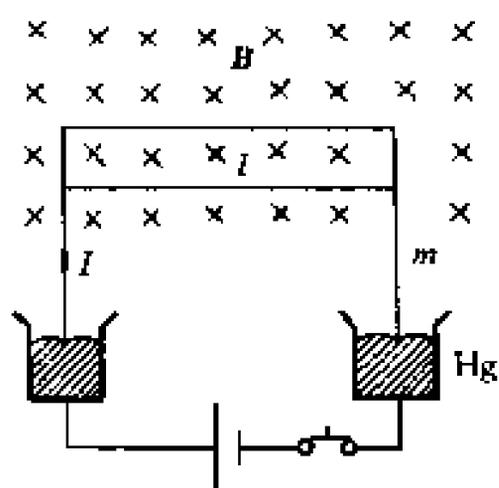
习题11-40图

11-41 有一根 U 形导线, 质量为 m , 两端浸没在水银槽中, 导线的上段长 l , 处在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 如图所示. 当接通电源时, 这导线就会从水银槽中跳起来. 假定电流脉冲的时间同导线上升时间相比非常小. (1) 试由导线跳起所达到的高度 h 计算电流脉冲的电荷量 q ; (2) 如 $B = 0.1$ T, $m = 10$ g, $l = 20$ cm, $h = 0.3$ m, 计算 q 的值. (提示: 利用动量原理, 找出 $\int I dt$ 与 $\int F dt$ 的关系.)

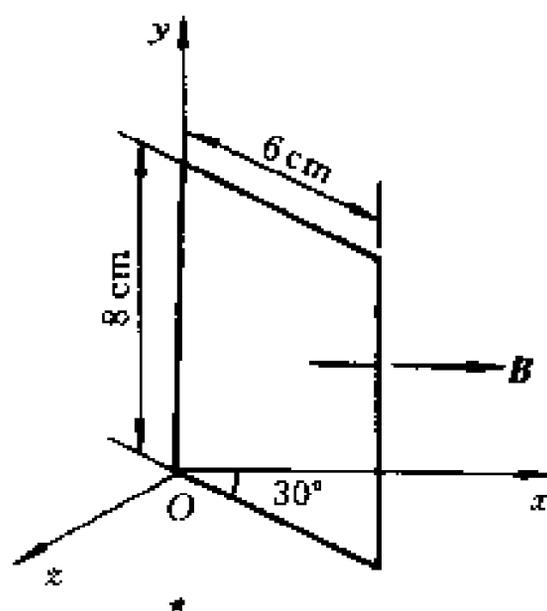
11-42 一永磁式电流中的线圈面积为 6.0 cm², 共 50 匝, 线圈摆动区域中的 B 值为 0.01 T, 并沿径向分布. 设游丝的扭转常量为 0.01×10^{-7} N·m/(°), 若线圈中通以 1 mA 的电流, 求线圈的偏转角.

11-43 如图所示, 一矩形线圈可绕 y 轴转动, 线圈中载有电流 0.10 A,

放在磁感应强度 $B=0.50\text{ T}$ 的均匀磁场中, B 的方向平行于 x 轴, 求维持线圈在图示位置时的力矩.



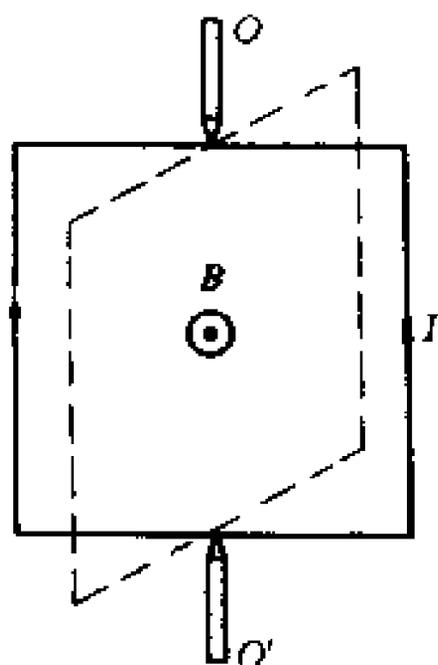
习题11-41图



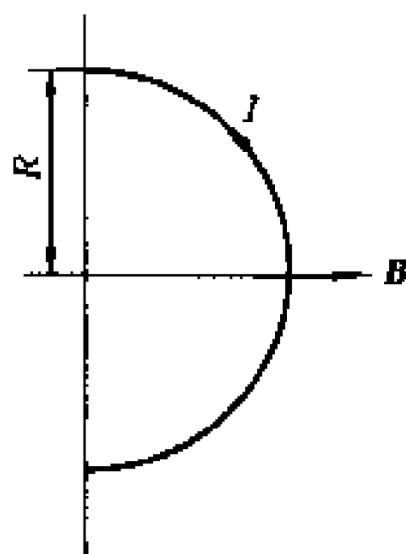
习题11-43图

11-44 一螺线管长为 30 cm , 直径为 15 mm , 由绝缘的细导线密绕而成, 每厘米绕有 100 匝, 当导线中通以 2.0 A 的电流后, 把这螺线管放到 $B=4.0\text{ T}$ 的均匀磁场中, 求(1)螺线管的磁矩;(2)螺线管所受力矩的最大值.

11-45 一边长为 l 的正方形线圈载有电流 I , 处在均匀外磁场 B 中, B 垂直图面向外, 线圈可以绕通中心的竖直轴 OO' 转动(见图), 其转动惯量为 J . 求线圈在平衡位置附近作微小摆动的周期 T .



习题11-45图



习题11-46图

11-46 --半径为 $R=0.1\text{ m}$ 的半圆形闭合线圈,载有电流 $I=10\text{ A}$,放在均匀磁场中,磁场方向与线圈面平行,如图所示.已知 $B=0.5\text{ T}$.求

- (1) 线圈所受力矩的大小和方向(以直径为转轴);
- (2) 若线圈受力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置,则力矩做功多少?

阅读材料 I

生物磁学

生物磁学是一门生物学与磁学相互渗透的边缘学科,它研究生物的磁性、生物磁现象和生命活动过程中结构功能的关系,以及外界的磁环境对生物体的影响.

生物磁效应的观察和应用开始很早,远在2 000多年前的战国时期,名医扁鹊就已利用磁石来给人治病,明代著名药物学家李时珍在他所著的《本草纲目》中列举了用磁石治肾虚、耳聋、眼花内障、小儿惊痛、大肠脱肛等病例.11世纪,古希腊和阿拉伯等国的名医也有利用磁石治疗腹泻、脾脏、肝病等的记载.近年来,在生物磁学的研究中,由于应用了现代科学知识和先进的技术,实现了测量人体和生物体的极微弱的磁场,发展了人体和生物体的核磁共振成像诊断技术,发现了生物体内的微量的强磁性物质,开展了生物磁性 with 生物结构和功能关系的研究,因此大大地丰富了现代生物磁学的内容和应用

1. 生物磁现象

生物磁的产生一般可能有两种来源:一种是由生物电流引起的电致内源生物磁;另一种是由于生物体内微量的强磁性物质(如 Fe_3O_4)磁化后产生的磁致内源或从体外进入的外源生物磁.人体内有各种生物电流通过,这是早已熟知的事.例如医生借以诊断病情的心电图、肌电图和脑电图就是人的心脏、肌肉和脑活动所产生的电流的记录.根据电流的磁效应,人和生物体内流动的电流就会

产生相应的生物磁场。生物磁场的强度很微弱，例如人体心脏在收缩和舒张时所产生的生物电流导致的心磁场约为 $10^{-11} \sim 10^{-10}$ T，人体脑神经活动产生的脑(神经)磁场约为 $10^{-13} \sim 10^{-12}$ T，人的肌肉收缩或松弛时所产生的肌肉磁场比心磁场弱些，但比人脑产生的磁场要强得多，人体肺部吸入强磁性微粒可产生约为 $10^{-9} \sim 10^{-8}$ T的肺磁场。人体各部分产生的磁场是十分微弱的，显然，一定要采用极灵敏的测量仪器和精密的测量方法，特别是需要排除地磁或各种人为磁场的干扰，才有可能对人体产生的微弱磁场进行精密而准确的测量。美国心脏学会的几位学者借助超导量子干涉仪，测出了人体心脏肌肉产生的磁场，并且他们发现，心脏磁场的产生和人的心理状态——喜、怒、哀、乐、激动、愤怒、抑郁等有密切关系。生物磁主要是由生物体内大分子活动期间生物电流引起的，因此这些磁场能真实反映大分子结构和功能的变化，检测这种磁场随时间变化的规律，无疑能为医生提供关于生物体内生理和病理状态的重要信息。生物磁随时间的变化称为生物磁图，如心磁图、脑磁图等，它已在基础研究和临床诊断上得到应用，因而开创了磁在探病、治病方面实际应用的新历史，过去许多难以捉摸的人体生理秘密有可能随着生物学的发展而逐步弄清楚。

2. 磁生物效应

人类应用指南针进行定向已有近1 000年的历史，但是许多动物利用自身的某种机制来识别地磁场从而确定方向之谜，直到近几年才被揭示。

鸽子飞行千里，仍能回归老巢，它是靠什么来定向的呢？近几年来经人们仔细地解剖和检验其体内的各部分器官和组织，终于发现在鸽子的头颅里存在着磁性细粒(磁性细胞)，正是这些磁性细粒起到了罗盘磁针的定向作用。同样，对季节性作长途往返迁徙而又从不迷途的候鸟——例如北极的燕鸥——进行解剖，发现原来象候鸟这类能作远航的鸟的大脑组织中也含有比鸽子更丰富磁性成分。鱼类中海豚具有导航定向的本领，近来科学家已在海豚体

内找到微小的磁性物质。另外象大马哈鱼、灰鲸、鲑鱼都有极强的长途环游本领，虽然在他们的体内尚未找到磁性微粒，但已足能证明这些鱼类是具有磁感的。除鸟类和鱼类外，象蜜蜂、苍蝇、白蚁等昆虫以及蚯蚓等软体动物也都有靠磁场识途或辨向的本领。

分子生物学的研究表明，生物体中大多数分子和原子是具有磁性的，因此外磁场必然会对生物起作用或影响，显然，不同类型、不同强度分布的外磁场对不同生物的影响程度也是不同的。例如，已完全习惯和适应于地磁环境下生活的老鼠，如果将它置于磁屏蔽中，它的寿命就大为缩短，若将它们置于人造的强磁场中，它们就会立刻死亡。又如，把果蝇饲养在 $0.01\sim 0.15\text{ T}$ 的恒定磁场中时，果蝇的形态并无明显的变化，但当把磁场增强到 $0.3\sim 0.4\text{ T}$ 时，其形态畸变就显著增大。科学家通过实验发现，在强磁场中，细菌的繁殖将受到抑制，蝌蚪的寿命会延长六天。研究人员指出，磁场会影响植物的生长，并影响原生质在细胞中的运动，通过对磁场强弱程度的调节，可以促进植物的生长，也可以抑制其发育。如强磁场会抑制植物根部的发育，而弱磁场则能刺激其根部的生长。

磁场对人体的作用和影响也是不能忽视的。磁场对人的健康以至生命究竟是利还是弊呢？这主要要看磁场的频率和强弱，特别是决定于磁场作用于人体的哪个部位和作用时间的长短。比如长期在高压输电线附近区域干活或居住的人，由于受输电线发出的低频电磁场的影响，这些人会出现情绪易于激动和容易疲劳、大脑工作效率降低等症状。在超高频电磁场——如微波辐射场中，外加微波场会使人体中的一些极性分子作剧烈的振荡而使组织发高热，这样会使人的体温失控而引发心血管反应、抽搐、呼吸障碍等一系列高温生理反应，严重地威胁着人的生命安全。微波辐射除对生物体产生上述的热效应外，也可产生非热效应，即生理效应，这一效应的存在与危害已有许多论证，但对于非热效应的存在目前国际上尚有分歧。总之，磁能治病，也能致病，这就需要人类运用自己的智慧对磁能做到“去弊取利”，以达到保护生活在各式电磁

场的汪洋大海中的人们们的生命安全。

3. 生物磁学的应用

生物磁学已在农业、畜牧业、医药、环境保护和生物工程等方面得到较广泛的应用。在农业、畜牧业上,利用磁场处理一些作物的种子和幼苗,施加少量的磁性肥料,或者利用经磁处理的水(用强度为 $10^{-2}\sim 10^{-1}$ T的磁场将水磁化——简称磁化水)浸种、育苗或浇灌,可以提高种子发芽率,苗粗根系发达,促进作物长势,收到增产的效果。另外,磁化水在提高农产品质量方面所显示的成績同样是诱人的,比如利用磁化水浸种后收获的大米,所含的粗蛋白和赖氨酸成分都有增高,应用磁化水浇灌的蔬菜品味甚佳,黄瓜香脆多水,西红柿甜嫩可口,青椒肉厚籽少。在畜牧业上,应用磁化水发酵饲料供牲畜食用,和以磁化水作为饮用水,猪、鸡、牛、羊等家畜少病、生长快,而且毛质提高。在医药上,磁石(Fe_3O_4)迄今仍是中医处方中的一味药;磁疗对于急性扭伤、肩周炎、腰肌劳损、神经性头痛等疾病的疗效是很显著的;用磁场镇痛——简称磁麻来替代药物麻醉已开始拔牙、切除阑尾以及结扎输卵管等手术中试验或应用;利用磁场作用原理已研制出血流计、磁药针、无触点心肌或神经刺激器、血球分离器等;磁水在治疗结石病上也有较好的疗效。在环保领域中,利用高梯磁分离和加磁性种子的磁分离法可以将煤中所含的硫除去,也能将城市的污水和各种工业废水中的油污、金属和非金属杂质等除净。

关于生物磁现象和磁生物效应的作用机理迄今仍是一个没有很好解决的问题,尽管人们已较广泛地采用磁疗来治疗病痛,但是对磁疗的机理几乎一无所知。这个问题既包括物理学范畴的内容,又涉及生命物质的结构和功能,尚有大量问题等待国内外科研人员去解决。

第十二章 磁介质中的磁场

在上一章中,我们已经讨论了电流和运动电荷在真空中激发的磁场,如果磁场中有实物物质存在,则由于磁场和实物之间的相互作用,使实物物质处于一种特殊状态,从而改变原来磁场的分布.这种在磁场作用下,其内部状态发生变化,并反过来影响磁场分布的物质,称为磁介质.磁介质在磁场作用下内部状态的变化叫做磁化,根据磁介质的磁化特性,可以把磁介质分为两大类:第一类叫顺磁质和抗磁质,它们磁化后产生的磁性都非常微弱,属弱磁性材料;第二类叫铁磁质,它磁化后能产生极强的磁性,是强磁性材料.本章将以实物物质的电结构为基础,简单说明第一类磁介质磁化的微观机制,我们用类似于讨论电介质极化的方法研究磁介质对磁场的影响,并介绍有磁介质时的磁场场量和场所遵循的普遍规律.由于铁磁质有其特殊性,它在工程技术上有广泛应用,我们将对铁磁材料的磁化的规律和机理作专门的介绍.最后将介绍磁路的概念和磁路的计算.

§ 12-1 磁介质 顺磁质和抗磁质的磁化

1. 磁介质

在第九章中我们已经说明了电场和电介质之间的相互作用,由于彼此影响,其结果是电介质在电场的作用下发生极化并激发附加电场,从而使电介质中的电场强度小于真空中的电场强度.与此相似,放在磁场中的磁介质也要和磁场发生相互作用,彼此影响而被磁化,处于磁化状态的磁介质也要激发一个附加磁场使磁介

质中的磁场不同于真空中的磁场。

设某一电流分布在真空中激发的磁感应强度为 B_0 ，那么在同一电流分布下，当磁场中放进了某种磁介质后，磁化了的磁介质激发附加磁感应强度 B' ，这时磁场中任一点的磁感应强度 B 等于 B_0 和 B' 的矢量和，即

$$B = B_0 + B' \quad (12-1)$$

由于磁介质有不同的磁化特性，它们磁化后所激发的附加磁场会有所不同。有一些磁介质磁化后使磁介质中的磁感应强度 B 稍大于 B_0 ，即 $B > B_0$ ，这类磁介质称为顺磁质，例如锰、铬、铂、氮等都属于顺磁性物质；另一些磁介质磁化后使磁介质中的磁感应强度 B 稍小于 B_0 ，即 $B < B_0$ ，这类磁介质称为抗磁质，例如水银、铜、铋、硫、氯、氢、银、金、锌、铅等都属于抗磁性物质。一切抗磁质以及大多数顺磁质有一个共同点，那就是它们所激发的附加磁场极其微弱， B 和 B_0 相差很小。此外还有另一类磁介质，它们磁化后所激发的附加磁感应强度 B' 远大于 B_0 ，使得 $B \gg B_0$ ，这类能显著地增强磁场的物质，称为铁磁质，例如铁、镍、钴、钆以及这些金属的合金，还有铁氧体等物质。

在一个极强的不均匀磁场中，可以观察上述三种磁性物质显示出的不同特性。图 12-1 为一小圆柱形磁介质试样，用细绳悬挂

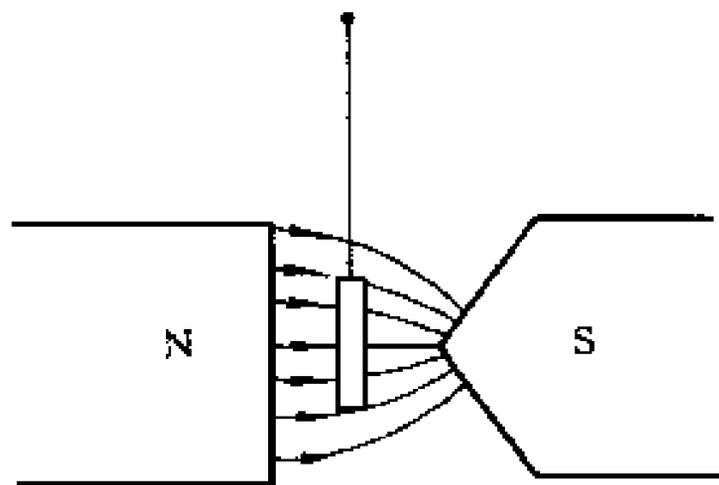


图 12-1 用不均匀磁场测试材料的磁性

在极强的不均匀磁场中, 如果样品是抗磁性材料(如铋), 则小圆柱体将被推离磁场强的区域; 如果是顺磁材料(如铅), 则小圆柱体将被吸向磁场强的区域. 但是, 由于这一类材料磁化后的磁性很微弱, 在实验时要用极灵敏的仪器才能测出其微小的移动. 对于铁磁性材料, 则将迅速地被吸向磁场强的区域, 现象很明显.

铁磁质的磁性起源和顺磁质、抗磁质不相同, 下面我们先讨论顺磁质和抗磁质磁性的微观本质, 有关铁磁质的特殊性质及其磁化机构在 § 12-5 中再作介绍.

2. 分子电流和分子磁矩

处在磁场中的不同磁介质为什么会呈现上述不同的磁性呢? 我们知道, 任何物体所表现的宏观特性, 都是物体内部大量原子或分子特性的平均效应, 因此, 我们应该从物质的微观结构入手去探讨磁性的根源.

根据物质电结构学说, 任何物质(实物)都是由分子、原子组成的, 而分子或原子中任何一个电子都不停地同时参与两种运动, 即环绕原子核的运动和电子本身的自旋. 这两种运动都等效于一个电流分布, 因而能产生磁效应. 把分子或原子看作一个整体, 分子或原子中各个电子对外界所产生磁效应的总和, 可用一个等效的圆电流表示, 统称为分子电流. 这种分子电流具有一定的磁矩, 称为分子磁矩, 用符号 p_m 表示.

原子核也具有磁矩, 它是质子在核内的轨道运动以及质子和中子的自旋运动所产生的磁效应. 但是, 它比电子的磁矩差不多要小三个数量级, 在计算分子或原子的总磁矩时, 核磁矩的影响可以忽略.

在外磁场 B_0 作用下, 分子或原子中和每个电子相联系的磁矩都受到磁力矩的作用, 由于分子或原子中的电子以一定的角动量作高速转动, 这时, 每个电子除了保持上述两种运动以外, 还要附加电子磁矩以外磁场方向为轴线的转动, 称为电子的进动. 这与力

学中所讲的高速旋转着的陀螺,在重力矩的作用下,以重力方向为轴线所作的进动十分相似(图 12-2).

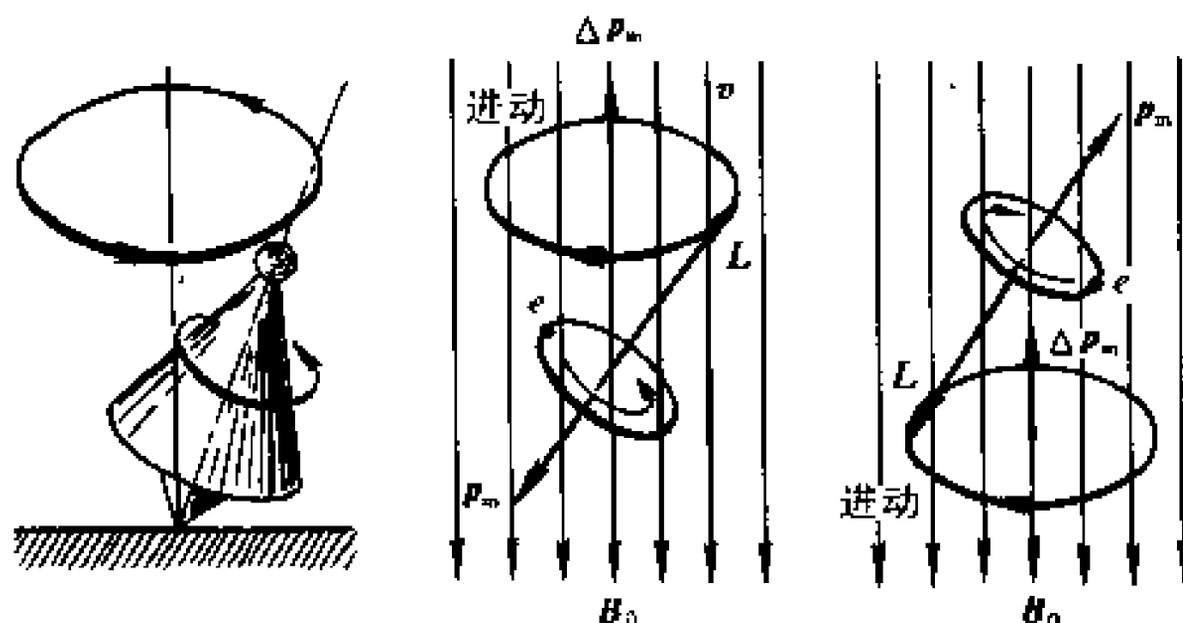


图 12-2 在外磁场中电子的进动和附加磁矩

可以证明:不论电子原来的磁矩与磁场方向之间的夹角是何值,在外磁场 B_0 中,电子角动量 L 进动的转向总是和 B_0 的方向构成右手螺旋关系(见图 12-2). 电子的进动也相当于一个圆电流,因为电子带负电,这种等效圆电流的磁矩的方向永远与 B_0 的方向相反. 原子或分子中各个电子因进动而产生的磁效应的总和也可用一个等效的分子电流的磁矩来表示,因进动而产生的等效电流的磁矩称为附加磁矩,用 Δp_m 表示.

顺磁质与抗磁质的区别在于两者的分子的电结构是不同的,凡是分子总磁矩等于零的原子或分子表现为抗磁性,总磁矩不等于零的原子或分子主要显示出顺磁性. 下面分别讨论抗磁质和顺磁质的磁化.

3. 抗磁质的磁化

在抗磁质中,每个原子或分子中所有电子的轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和等于零,在外磁场 B_0 中电子轨道运动的平面在磁场中会发生进动,而且其轨道角动量进动的方向在任何情况下都是沿着磁场的方向,和电子轨道运动的速度方向无关,并在同一外磁

场 B_0 中都以相同的角速度进动, 因此, 这时抗磁质中每个分子或原子中所有的电子形成一个整体绕外磁场进动, 从而产生一个附加磁矩 Δp_m , Δp_m 的方向与 B_0 的方向相反, 大小与 B_0 的大小成正比. 这样, 抗磁材料在外磁场的作用下, 磁体内任一体积元中大量分子或原子的附加磁矩的矢量和 $\Sigma \Delta p_m$ 有一定的量值, 结果在磁体内激发一个和外磁场方向相反的附加磁场, 这就是抗磁性的起源.

抗磁性既然起源于外磁场对电子轨道运动作用的结果, 应该在任何原子或分子的结构中都会产生, 因此它是一切磁介质所共有的性质.

4. 顺磁质的磁化

对顺磁质而言, 虽然每个原子或分子有一定的磁矩, 但由于分子的无规热运动, 各个分子磁矩排列的方向是十分纷乱的, 对顺磁质内任何一个体积元来说, 其中各分子的分子磁矩的矢量和 $\Sigma p_m = 0$, 因而对外界不显示磁效应. 在外磁场 B_0 的作用下, 分子磁矩 p_m 的大小不改变, 但是外磁场 B_0 要促使 p_m 绕磁场方向进动, 并具有一定的能量^①. 同时, 介质中存在着大量原子或分子, 由于这些原子或分子之间的相互作用和碰撞, 促使分子磁矩 p_m 改变方向, 从而改变 p_m 在外磁场中的能量状态. 一方面, 从能量的角度来看, 分子磁矩尽可能要处于低的能量状态, 即 p_m 与外磁场方向一致的状态; 另一方面, 分子热运动又是破坏分子磁矩沿磁场方向有序排列的因素, 使之不可能取向完全一致. 当达到热平衡时, 原子或分子的能量遵守玻耳兹曼分布律, 处在较低能量状态的原子数或分子数比高能量状态的要多, 亦即其分子磁矩 p_m 靠近外磁场方向的分子数较多. 显然, 磁场越强, 温度越低, 分子磁矩 p_m 排列

^① 固有磁矩 p_m 在外磁场中的能量为 $W_m = -p_m \cdot B$, 当 p_m 与 B 方向相同时能量最低.

也越整齐,这时,在顺磁体内任取一体积元 ΔV ,其中各分子磁矩的矢量和 Σp_m 将有一定的量值,因而在宏观上呈现出一个与外磁场同方向的附加磁场,这便是顺磁性的来源.

应当指出,顺磁质受到外磁场的作用后,其中的原子或分子也会产生抗磁性,但在通常情况下,多数顺磁质分子的附加磁矩 $\Sigma \Delta p_m$ 比 Σp_m 小很多,所以这些磁介质主要显示出顺磁性.

§ 12-2 磁化强度 磁化电流

1. 磁化强度

为了表征磁介质磁化的程度,仿照讨论电介质时定义极化强度一样引进一个宏观物理量,叫做磁化强度.在被磁化后的磁介质内,任取一体积元 ΔV ,这体积元虽小,但其中仍包含有许多原子或分子,在这体积元中所有分子固有磁矩的矢量和 Σp_m 加上附加磁矩的矢量和 $\Sigma \Delta p_m$ 与该体积元的比值,即单位体积内分子磁矩的矢量和称为磁化强度,用 M 表示.

$$M = \frac{\Sigma p_m + \Sigma \Delta p_m}{\Delta V} \quad (12-2)$$

对于顺磁质, $\Sigma \Delta p_m$ 可以忽略;对于抗磁质, $\Sigma p_m = 0$,对于真空, $M = 0$.

在磁介质被磁化后,介质内各点的 M 可以不同,这反映了不同点磁化程度的不同,如果在介质中各点的 M 相同,就称磁介质被均匀磁化.在国际单位制中, M 的单位是 A/m.

顺磁质经磁化后, M 的方向与该处的磁场 B 一致,它在磁介质内所激发的附加磁场 B' 的方向也与 B_0 的方向相同.由此可见,顺磁质的磁化和有极分子的电极化有部分类似之处,两者都是起源于分子固有磁矩或固有电矩在外磁场或外电场中的取向作用.但是,两者所产生的效果又有不同之处,顺磁质磁化后激发在顺磁

质内的附加磁场 B' 与外磁场 B_0 同向, 而电介质电极化后激发在电介质内的附加电场 E' 却总是与外电场 E_0 反向.

抗磁质经磁化后, M 的方向与该处磁场 B 相反, 它在磁介质内所激发的附加磁场 B' 的方向也与 B_0 的方向相反. 由此可见, 抗磁质的磁化与无极分子的电极化完全类似, 分子磁矩或分子电矩都是在外磁场或外电场中产生的, 在介质内部的附加磁场或附加电场的方向也都与外磁场或外电场的方向相反.

2. 磁化电流

在外磁场中, 磁化了的磁介质会激发附加磁场. 这附加磁场起源于磁化了的介质内所出现的磁化电流(实质上是分子电流的宏观表现). 这样, 一个磁介质的磁化情况, 可以用磁化强度 M 来描述, 也可以用磁化电流来反映, 两者之间必然存在一定的联系. 下面, 我们将用直观的方法找出能测定的宏观的磁化强度与磁化电流之间的关系.

为简单计, 我们选一特例来讨论. 设有一“无限长”的载流直螺线管, 管内充满均匀磁介质, 电流在螺线管内激发匀强磁场. 在此磁场中磁介质被均匀磁化, 这时磁介质中各个分子电流平面将转到与磁场的方向相垂直, 图 12-3 表示磁介质内任一截面上分子电流排列的情况. 从图 12-3(c)和(d)中可以看出, 在磁介质内部任意一点处, 总是有两个方向相反的分子电流通过, 结果相互抵消; 只有在截面边缘处, 分子电流未被抵消, 形成与截面边缘重合的圆电流. 对磁介质的整体来说, 未被抵消的分子电流是沿着柱面流动的, 称为安培表面电流(或叫磁化面电流). 对顺磁性物质, 安培表面电流和螺线管上导线中的电流 I 方向相同; 对抗磁性物质, 则两者方向相反. 图 12-3 所示是顺磁质的情况.

设 α_s 为圆柱形磁介质表面上“单位长度的磁化面电流”, S 为磁介质的截面积, l 为所选取的一段磁介质的长度. 在 l 长度上, 表面电流的总量值为 $I_s = l\alpha_s$, 因此在这段磁介质总体积 Sl 中的总磁

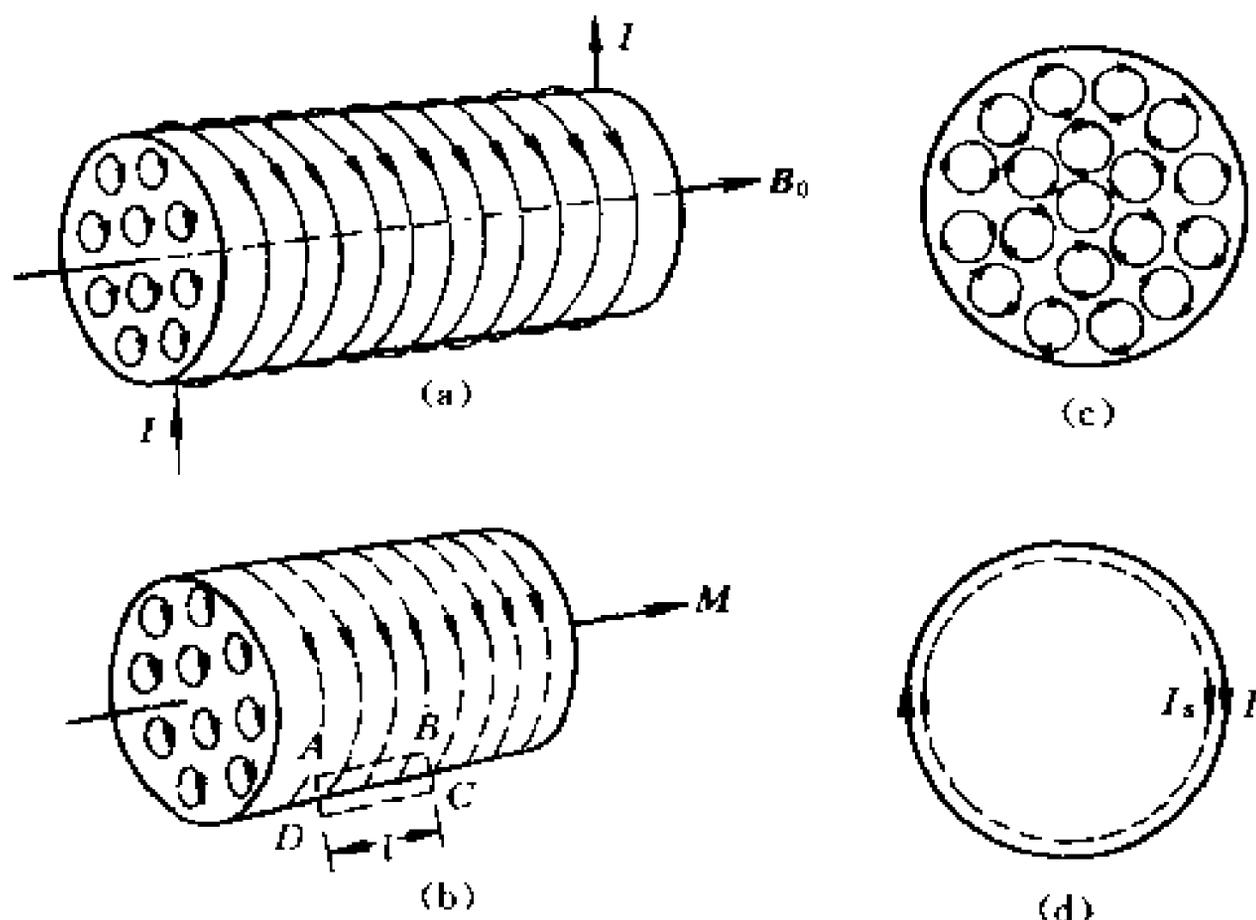


图 12-3 均匀磁化的磁介质中的分子电流

矩为

$$\Sigma p_m = I_s S = \alpha_s S l$$

按定义, M 为单位体积内的磁矩, 所以

$$M = \frac{\Sigma p_m}{V} = \frac{\alpha_s S l}{S l} = \alpha_s \quad (12-3)$$

即磁介质表面某处单位长度的磁化面电流的大小等于该处磁化强度的量值, 这和电介质中极化强度与极化面电荷的关系相似. 上述结果是从均匀磁介质被均匀磁化的特例导出的, 在一般情况下, 应该是磁介质表面上某处单位长度的磁化面电流 (即磁化面电流的线密度) 等于该处磁化强度的切线分量. 而且在不均匀磁介质内部, 由于排列着的分子电流未能相互抵消, 此时磁体内各点都有磁化电流.

式(12-3)表明了磁介质表面上某点的磁化面电流与该点处磁化强度的关系, 下面进一步讨论通过任一曲面的磁化电流与磁化强度的联系, 为此我们仍用前述特例计算磁化强度对闭合回路的

线积分

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

在图 12-3(b) 所示的圆柱形磁介质的边界附近, 取一长方形闭合回路 $ABCD$, AB 边在磁介质内部, 它平行于柱体轴线, 长度为 l , 而 BC 、 AD 两边则垂直于柱面. 在磁介质内部各点处, \mathbf{M} 都沿 AB 方向, 大小相等, 在柱外各点处 $\mathbf{M}=0$. 所以 \mathbf{M} 沿 BC 、 CD 、 DA 三边的积分为零, 因而 \mathbf{M} 对闭合回路 $ABCD$ 的积分等于 \mathbf{M} 沿 AB 边的积分, 即

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M AB = Ml$$

将式(12-3) $\mathbf{M}=\alpha_0 I_0$ 代入后得

$$\boxed{\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \alpha_0 l = I_0} \quad (12-4)$$

这里, $\alpha_0 l = I_0$ 就是通过以 闭合回路 $ABCD$ 为边界的任意曲面的总磁化电流, 所以式(12-4) 表明磁化强度对闭合回路的线积分等于通过回路所包围的面积内的总磁化电流. 式(12-4)虽是从均匀磁化介质及长方形闭合回路的简单特例导出的, 但却是在任何情况都普遍适用的关系式.

例题 12-1 试求磁矩为 $p_m = 1.4 \times 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 自旋角动量为 $L_p = 0.53 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 的质子, 在磁感应强度 B 为 0.50 T 的均匀磁场中的进动角速度.

解 质子带正电, 它的自旋磁矩 p_m 与自旋角动量 L_p 的方向相同, 如图 12-4 所示. 质子在磁场 B 中所受到的磁力矩为

$$M_p = p_m B \sin \theta$$

式中 θ 是质于自旋轴和磁场 B 的夹角. 在磁力矩的作用下, 质子以磁场为轴线作进

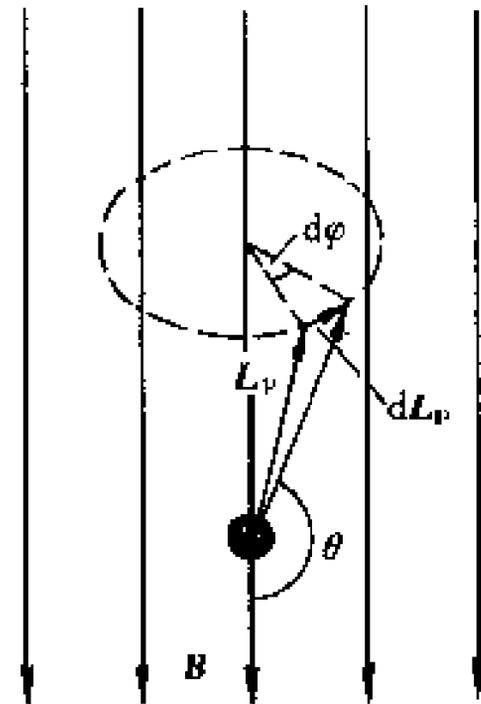


图 12-4 质子在磁场中的进动

动,在 dt 时间内转过角度 $d\varphi$,角动量的增量为 dL_p . 由图可知

$$dL_p = L_p \sin \theta d\varphi$$

又因角动量的时间变化率等于力矩,即 $M_p = \frac{dL_p}{dt}$ 或 $dL_p = M_p dt$, 所以

$$L_p \sin \theta d\varphi = p_m B \sin \theta dt$$

从而可求得质子在磁场中的进动角速度

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_m B \sin \theta}{L_p \sin \theta} = \frac{p_m B}{L_p}$$

把 p_m 和 L_p 的数值代入可算出

$$\omega_p = \frac{1.4 \times 10^{-26} \times 0.50}{0.53 \times 10^{-34}} \text{ rad/s} = 1.32 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

可以看出,不管 p_m 与磁场的夹角是大于 90° 还是小于 90° ,质子进动的方向和磁场的方向总是相反的,因此质子在磁场中进动时也产生一与磁场方向相反的附加磁矩.

§ 12-3 磁介质中的磁场 磁场强度

作用总是相互的,既然磁场对磁介质有磁化作用,那么被磁化后的磁介质反过来也将影响原来的磁场分布. 下面就进一步讨论磁化后的介质对磁场产生的影响,以及有磁介质时如何描述磁场的规律,并介绍场量和磁化强度的普遍关系式.

1. 有磁介质时的安培环路定理

前面已经说明,当电流的磁场中有磁介质存在时,空间任一点的磁感应强度 B 等于导线中传导电流所激发的磁场与磁介质磁化后磁化电流所激发的附加磁场的矢量和,这时安培环路定理应写成

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\Sigma I + I_s) \quad (12-5)$$

等式右边的两项电流是穿过以回路为边界的任一曲面的总电流, 即传导电流 ΣI 和磁化电流 I_s 的代数和. 一般说来, I 是可以测量的, 可认为它是已知的; 而 I_s 不能事先给定, 也无法直接测量, 它依赖于介质磁化的情况, 而介质的磁化情况又依赖于磁介质中的磁感应强度 B , 因此直接求解方程(12-5)很复杂. 为了解决这一困难, 我们利用关系式(12-4)将式(12-5)可改写成

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\Sigma I + \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

或
$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I$$

然后采取和电介质中引进 D 矢量相似的方法, 引进一个新的物理量, 称为磁场强度, 用符号 H 表示(通常称为 H 矢量), 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (12-6)$$

这样, 便有下列简单的形式

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I \quad (12-7)$$

式(12-7)称为有磁介质时的安培环路定理, 它表明 H 矢量的环流只和传导电流 I 有关, 而在形式上与磁介质的磁性无关. 这就是说, 当传导电流 I 给定以后, 不论磁场中放进什么样的磁介质或者同一块磁介质放在不同的地方, 虽然在不同情况下空间同一点的 H 矢量有所不同, 但 H 矢量的环流只和传导电流有关. 因此引入磁场强度 H 这个物理量以后, 在磁场分布具有高度对称性时, 能够使我们比较方便地处理有磁介质时的磁场问题, 就象引入电位移 D 后使我们能够比较方便地处理有电介质时的静电场问题一样. 安培环路定理[式(12-7)]和静磁场的另一普遍规律——磁场

中的高斯定理 $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 一起, 是处理静磁场问题的基本定理.

在国际单位制中, H 的单位是 A/m.

式(12-6)表示了磁介质中任一点处磁感应强度 B 、磁场强度 H 和磁化强度 M 之间的普遍关系,不论磁介质是否均匀,甚至对铁磁性物质都能适用,通常写成

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M \quad (12-6a)$$

显然,磁化强度 M 不仅和磁介质的性质有关,也和磁介质所在处的磁场有关,实验证明,对于各向同性的磁介质,在磁介质中任一点磁化强度 M 和磁场强度 H 成正比,即

$$M = \chi_m H \quad (12-8)$$

式中比例因数 χ_m 只与磁介质的性质有关,称为磁介质的磁化率。因为 M 和 H 所用的单位相同,所以磁化率 χ_m 是单位为 1 的量。如果磁介质是均匀的,则 χ_m 是常量;如果磁介质是不均匀的,则 χ_m 是空间位置的函数。对于顺磁质, $\chi_m > 0$, 磁化强度 M 和磁场强度 H 的方向相同;对于抗磁质, $\chi_m < 0$, 磁化强度 M 和磁场强度 H 的方向相反。把式(12-8)代入式(12-6a)中可得

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad (12-9)$$

通常令

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (12-10)$$

μ_r 称为该磁介质的相对磁导率。于是式(12-9)成为

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad (12-11)$$

式中 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 称为磁介质的磁导率。对于真空中的磁场来说,由于 $M = 0$, 从式(12-6a)得到 $B = \mu_0 H$, 这表明“真空”相当于 $\mu_r = 1$ 的“磁介质”。真空中各点处的磁场强度 H 等于该点磁感强度 B 的 $\frac{1}{\mu_0}$ 倍,即 $H = \frac{1}{\mu_0} B$ 。

对于各向同性的磁介质, χ_m 是常量, μ_r 也是常量,且单位都为 1, $\chi_m = \mu_r - 1$ 。磁介质的磁化率 χ_m 、相对磁导率 μ_r 、磁导率 μ 都是描述磁介质磁化特性的物理量,只要知道三个量中的任一个量,该

介质的磁性就完全清楚了。

所有顺磁性、抗磁性材料的磁化率的值都很小,其相对磁导率几乎等于 1,这说明它们对电流的磁场只产生微弱的影响.表 12-1 中列出了一部分顺磁物质和抗磁物质的磁化率.

表 12-1 顺磁性、抗磁性材料的磁化率

材 料	温度/K	$\chi_m/10^{-5}$
顺磁质		
明矾(含铁)	4	4 830
明矾(含铁)	90	213
氧(液态)	90	152
明矾(含铁)	293	66
铀	293	40
铂	293	26
铝	293	2.2
钠	293	0.72
氧气	293	0.19
抗磁质		
铋	293	-16.6
水银	293	-2.9
银	293	-2.6
碳(含铂)	293	-2.1
铅	293	-1.8
岩盐	293	-1.4
铜	293	-1.0

对于铁磁质来说,铁磁质中任一点处的 B 、 M 、 H 三矢量之间的普遍关系仍采用定义式(12-6a),但是,实验发现铁磁质中 B 与 H 以及 M 与 H 之间并没有线性的正比关系,甚至不存在单值关系,虽然在形式上仍引用式(12-8)和式(12-11),但式中铁磁质的磁导率 μ 、相对磁导率 μ_r 和磁化率 χ_m 都不是常量.在 § 12-5 中,将从实验出发讨论铁磁性物质的磁化特性,并介绍形成这种独特特性的内在机制.

最后,为了能形象地表示出磁场中 H 矢量的分布,类似于用

磁感应线描述磁场的方法,我们也可以引入 H 线来描述磁场, H 线与 H 矢量的关系规定如下: H 线上任一点的切线方向和该点 H 矢量的方向相同, H 线的密度(即在与 H 矢量垂直的单位面积上通过的 H 线数目)和该点 H 矢量的大小相等.从式(12-11)可见,在各向同性的均匀磁介质中,通过任何截面的磁感应线的数目是通过同一截面 H 线的 μ 倍.

例题 12-2 在均匀密绕的螺绕环内充满均匀的顺磁介质,已知螺绕环中的传导电流为 I ,单位长度内匝数为 n ,环的横截面半径比环的平均半径小得多,磁介质的相对磁导率和磁导率分别为 μ_r 和 μ .求环内的磁场强度和磁感应强度.

解 如图 12-5 所示,在环内任取一点,过该点作一和环同心、半径为 r 的圆形回路,磁场强度 H 沿此回路的线积分为

$$\oint H \cdot dl = NI$$

式中 N 是螺绕环上线圈的总匝数.由对称性可知,在所取圆形回路上各点的磁场强度的大小相等,方向都沿切线.于是

$$H2\pi r = NI$$

或
$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI$$

当环内是真空时,环内的磁感应强度为

$$B_0 = \mu_0 H$$

当环内充满均匀磁介质时,环内的磁感应强度为

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$

B 和 B_0 大小的比值为

$$\frac{B}{B_0} = \mu_r$$

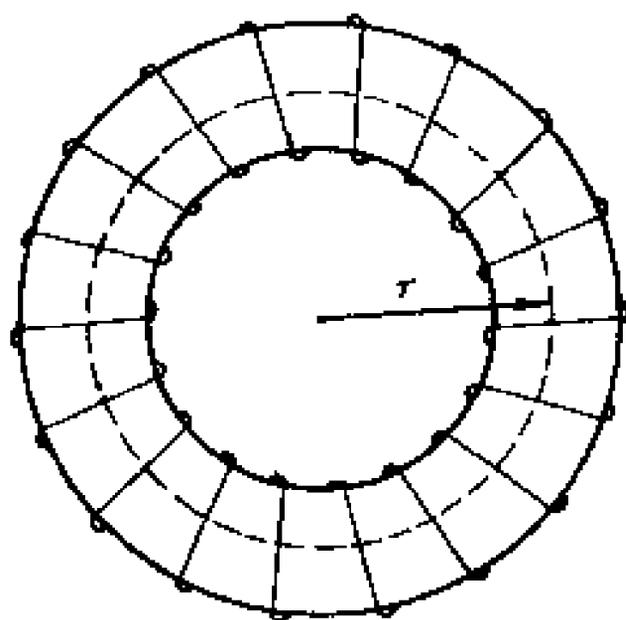


图 12-5 螺绕环内的磁场

由此可知,当环内充满均匀磁介质后,环内的磁感应强度改变到环内是真空时的 μ_r 倍,这同电容器中充满均匀电介质后极板间的场强减弱到无介质时的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 相对应. 上式也可作为磁介质相对磁导率的定义,并在实验中利用这个定义式来测定 μ_r 值. 在这里要特别指出,只有在均匀磁介质充满整个磁场时,才有 $\frac{B}{B_0} = \mu_r$ 的关系.

若本例中磁介质的磁导率 $\mu = 5.0 \times 10^{-4} \text{ Wb}/(\text{A} \cdot \text{m})$, 单位长度内的匝数 $n = 1000 \text{ 匝}/\text{m}$, 绕组中通有电流 $I = 2.0 \text{ A}$. 再计算环内的 (1) 磁场强度 H , (2) 磁感应强度 B , (3) 磁介质的磁化强度 M , (4) 磁化面电流线密度 α_s .

利用以上计算结果,可得

$$(1) H = nI = 1000 \times 2.0 \text{ A}/\text{m} = 2.0 \times 10^3 \text{ A}/\text{m}$$

(2) 根据 H 和 B 的关系式

$$\begin{aligned} B &= \mu H = \mu nI = \\ &5.0 \times 10^{-4} \times 2.0 \times 10^3 \text{ Wb}/\text{m}^2 = \\ &1 \text{ Wb}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

H 与 B 的方向与电流流向构成右手螺旋关系.

(3) 由 M 、 H 和 B 的普遍关系式

$$\begin{aligned} M &= \frac{B - \mu_0 H}{\mu_0} = \\ &\frac{1 - 4\pi \times 10^{-7} \times 2.0 \times 10^3}{4\pi \times 10^{-7}} \text{ A}/\text{m} = \\ &7.9 \times 10^5 \text{ A}/\text{m} \end{aligned}$$

(4) 因为 $M = \alpha_s$, 所以

$$\alpha_s = M = 7.9 \times 10^5 \text{ A}/\text{m}$$

例题 12-3 如图 12-6 所示,一半径为 R_1 的无限长圆柱体(导体, $\mu \approx \mu_0$) 中均匀地

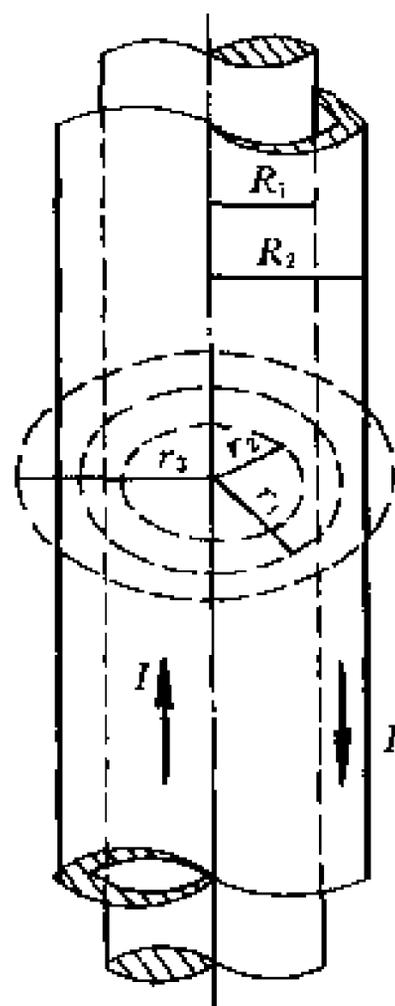


图 12-6 载流同轴圆柱体和圆柱面的磁场

通有电流 I , 在它外面有半径为 R_2 的无限长同轴圆柱面, 两者之间充满着磁导率为 μ 的均匀磁介质, 在圆柱面上通有相反方向的电流 I . 试求 (1) 圆柱体外圆柱面内一点的磁场; (2) 圆柱体内一点的磁场; (3) 圆柱面外一点的磁场.

解 (1) 当两个无限长的同轴圆柱体和圆柱面中有电流通过时, 它们所激发的磁场是轴对称分布的, 而磁介质亦呈相同的轴对称分布, 因而不会改变场的这种对称分布. 设圆柱体外圆柱面内一点到轴的垂直距离是 r_1 , 以 r_1 为半径作一圆, 取此圆为积分回路, 根据安培环路定理有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi r_1} dl = H 2\pi r_1 = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r_1}$$

由式(12-11)得

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r_1}$$

(2) 设在圆柱体内一点到轴的垂直距离为 r_2 , 则以 r_2 为半径作一圆, 应用安培环路定理得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi r_2} dl = H 2\pi r_2 = I \frac{\pi r_2^2}{\pi R_1^2} = I \frac{r_2^2}{R_1^2}$$

式中 $I \frac{\pi r_2^2}{\pi R_1^2}$ 是该环路所包围的电流部分, 由此得

$$H = \frac{I r_2}{2\pi R_1^2}$$

由 $B = \mu H$, 得

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I r_2}{R_1^2}$$

(3) 在圆柱面外取一点, 它到轴的垂直距离是 r_3 , 以 r_3 为半径作一个圆, 应用安培环路定律, 考虑到该环路中所包围的电流的代数和为零, 所以得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi r_3} dl = 0$$

即
或

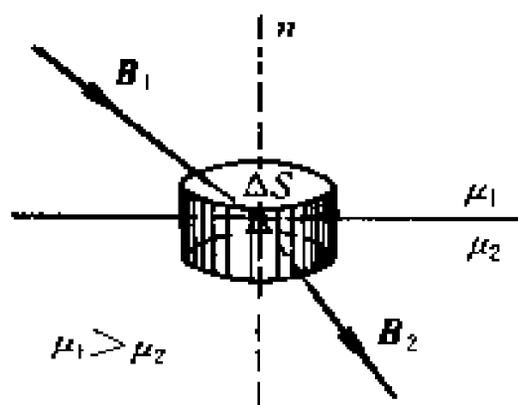
$$H = 0$$

$$B = 0$$

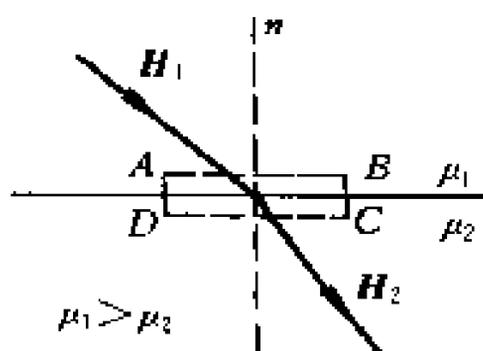
§ 12-4 * 磁场的边值关系

前节讨论了均匀磁介质中的磁场强度和磁感应强度,若我们把恒定磁场的基本方程应用于不同磁介质的分界面上,则可得出在两个不同的磁介质的边界面上 B 和 H 的变化情况. 如图 12-7 (a)所示,在磁导率分别为 μ_1 及 μ_2 的两个磁介质的分界面上取一面积元 ΔS ,并作如图所示的扁平圆柱,使圆柱的高比底面的直径短得很多. 设在分界面 ΔS 两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 ,根据高斯定理,通过闭合圆柱面的磁感应通量为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0$$



(a) B 的边值关系



(b) H 的边值关系

图 12-7

因为柱面积比底面积小得多,其上的通量可不计. 式中 B_{1n} 及 B_{2n} 分别是磁感应强度在界面两边的法向分量,因此

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \quad (12-12)$$

即从一种介质过渡到另一种介质的时候,磁感应强度的法向分量是连续的.

由关系式 $B = \mu H$, 并取法向分量, 则上式又可表为

$$\boxed{\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}} \quad (12-13)$$

即磁场强度的法向分量从一种介质过渡到另一种介质时是不连续的。

下面研究磁场强度沿边界面上切向分量的变化情况。我们在边界面邻近取一长方形的闭合回路 $ABCD$, 使 AB 和 CD 两边平行于边界面, BC 及 DA 两边垂直于边界面, 并无限短小, 如图 12-7(b)。设磁介质界面上没有传导电流, 对此闭合回路应用安培环路定律得

$$\oint H \cdot dl = H_{1t} AB - H_{2t} CD = 0$$

因为 BC 和 DA 边无限短小, 这部分对 H 环流的贡献忽略不计。式中 H_{1t} 及 H_{2t} 分别是磁场强度在界面两边的切向分量, 注意 $AB = CD$, 因此

$$\boxed{H_{1t} = H_{2t}} \quad (12-14)$$

即通过两种介质的分界面, 磁场强度的切向分量连续。根据关系式 $B = \mu H$, 并取切向分量, 则上式又可表为

$$\boxed{\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}} \quad (12-15)$$

式(12-15)表明, 在两磁介质的边界上, 磁感应强度的切向分量是不连续的。

式(12-12)、(12-13)、(12-14)、(12-15)就是磁场的边值关系, 它们决定了通过分界面时场量的变化。如果磁感应强度不与分界面垂直, 则和静电场中电位移线一样, 在通过分界面时磁感应线发生折射。设 θ_1 及 θ_2 分别表示两种磁介质中磁感应强度与边界面上法线所成的角度, 如图 12-8 所示。则

$$\tan \theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}, \tan \theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}$$

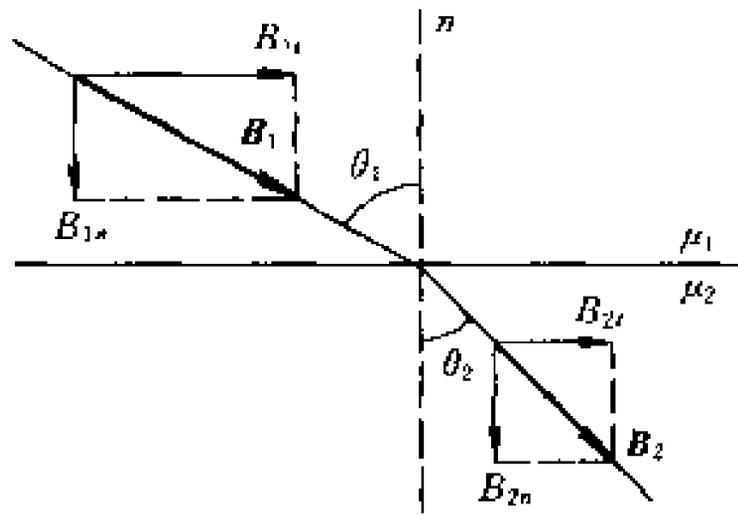


图 12-8 磁感应线的折射定律

合并两式,并利用式(12-12)和式(12-15)得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (12-16)$$

这就是磁感应线的折射定律. 由这个定律可见,如果磁感应线从磁导率较小的介质进入磁导率较大的介质时,磁感应线偏离法线;反之,如果磁感应线从磁导率较大的介质进入磁导率较小的介质,则磁感应线将偏向法线. 特别当磁感应线从空气进入铁磁性物质时,因为铁的磁导率比 μ_0 大几百倍甚至几千倍,所以磁感应线相对法线的偏离非常大,这时进入铁磁质的磁感应线近于与界面平行,不会再折入空气中,磁屏蔽就是根据这种现象作成的. 图 12-9 为用

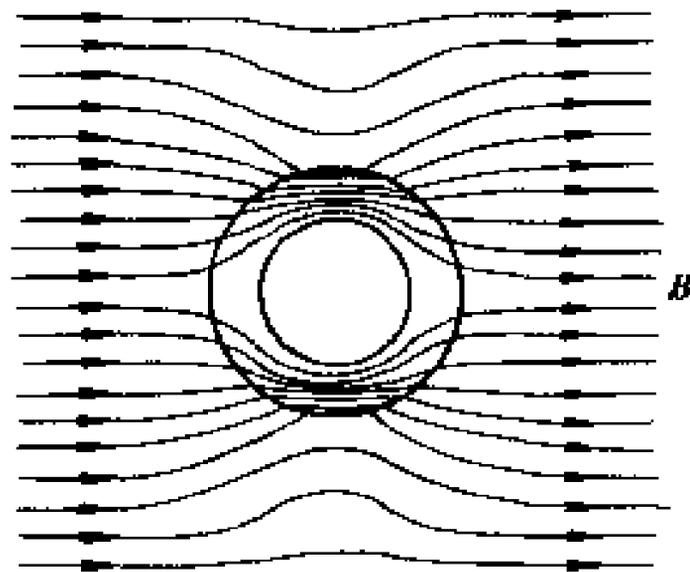


图 12-9 磁屏蔽

一磁导率很大的铁磁材料(例如坡莫合金或铁铝合金)做成的罩壳,把它放在磁场中,由于罩壳的 μ 比 μ_0 大很多,磁感应线绝大部分是从罩壳内通过,空腔内几乎没有磁感应线通过,即空腔内的磁场很弱,表明铁磁质能对所包围空腔起磁屏蔽的作用.所以,为了避免外磁场对示波管或显像管中电子束聚焦的影响,可用铁磁性材料把这些器件屏蔽起来.我国在明末清初刘猷廷的《广阳杂记》中就已有了磁屏蔽的记载,说明了铁的磁屏蔽作用,其发现是很早的.

§ 12-5 铁磁质

在各类磁介质中,应用最广泛的是铁磁性物质.在本世纪初期,铁磁性材料主要用在电机制造业和通讯器件中,而自50年代以来,随着电子计算机和信息科学的发展,应用铁磁性材料进行信息的储存和记录(例如,现已成为家喻户晓的磁带,它不仅可储存数字信息,也可以存储随时间变化的信息;不仅可用作计算机的存储器,而且可用于录音和录象),已发展成为引人注目的系列新技术,预计新的应用还将不断得到发展.因此,对铁磁材料磁化性能的研究,无论在理论上或实用上都有很重要的意义.铁磁质有下列一些特殊的磁性:

(1) 能产生特别强的附加磁场 B' ,使铁磁质中的 B 远大于 B_0 ,其 $\mu_r = \frac{B}{B_0}$ 值可达几百、甚至几千以上;

(2) 它们的磁化强度 M 和磁感应强度 B 的方向不总是平行的,大小也不是简单的正比关系,换句话说,铁磁质的磁导率 μ (以及磁化率 χ_m)不是常量,而是与磁场强度 H 有复杂的函数关系;

(3) 磁化强度随外磁场而变,它的变化落后于外磁场的变化,而且在外磁场停止作用后,铁磁质仍能保留部分磁性;

(4) 一定的铁磁材料存在一特定的临界温度,称为居里点,在

这温度时它们的磁性发生突变,当温度在居里点以上时,它们的磁导率(或磁化率)和磁场强度 H 无关,这时铁磁质转化为顺磁质(例如,铁的居里点是1 040 K,镍的是631 K,钴的是1 388 K).

下面先从实验出发,介绍铁磁质材料的磁化特性,然后简单介绍形成其特殊磁性的内在原因和铁磁材料的一些应用.

1. 磁化曲线

如图 12-10 所示,把待测的原来没有磁化过的铁磁质做成环形芯子,在铁芯外均匀地密绕 N 匝线圈.当线圈中通有电流 I 时,铁芯中的磁场强度为

$$H = nI$$

式中 n 为螺绕环单位长度的匝数.

为了测得铁磁质中的磁感应强度 B ,在环上再绕一个与冲击电流计 BG^① 相连接的探测线圈.测量方法是:先闭合图中的电键 K,使环外线圈中通有恒定的电流 I ,然后迅速打开 K 切断电源,这时环外线圈

中的电流在 Δt 时间内从 I 变为零,在探测线圈中将产生感应电动势,因而有相应的感应电荷量 q 通过冲击电流计.利用冲击电流计可测出电荷量 q ,再通过计算就可得到线圈中的电流为 I 时铁芯中的 B 值(参看 § 13-1).如应用公式

$$M = \frac{B - \mu_0 H}{\mu_0}$$

就可以计算出对应的 M 的值.根据实验结果画成的曲线如图 12-11和图 12-12 所示.

图 12-11 是铁磁性物质的典型磁化曲线 (M - H 曲线),它反映

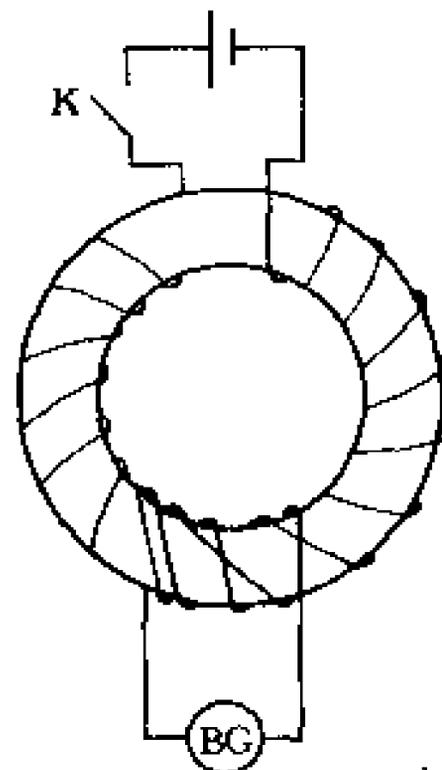


图 12-10 研究铁磁质磁化现象的装置

① 冲击电流计是一种可以测出通过线圈中电荷量的仪器,详见物理实验讲义.

了铁磁性物质的共同磁化特点. 具体地说, 这条曲线是非线性的, 在逐步增加磁场强度 H 的过程中, 磁化强度 M 也随着增加, 不过开始时 M 增加较慢, 接着便急剧地增大, 然后又缓慢下来, 最后从某一 H 值开始, M 不再增加, 这时铁磁物质的磁化已达到饱和状态, 饱和时的磁化强度叫做饱和磁化强度 M_s . 在图 12-11 中未达到饱和磁化状态的一段曲线, 叫做起始磁化曲线.

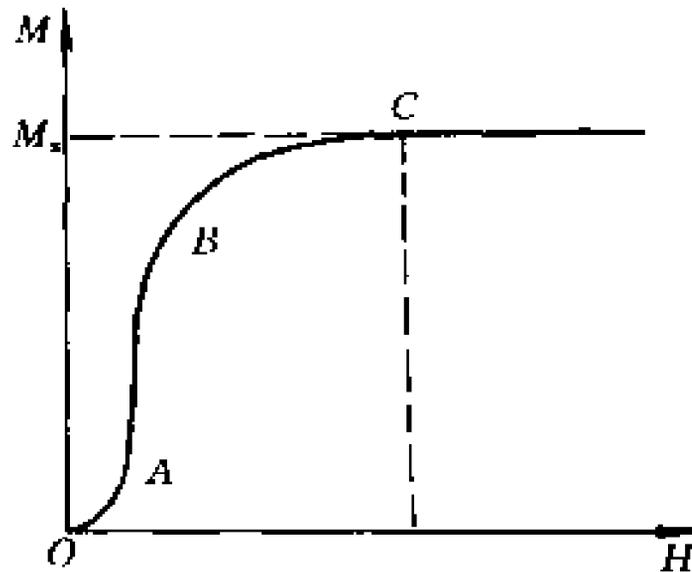


图 12-11 $M-H$ 曲线

图 12-12 中的实线表示磁感应强度与磁场强度的关系 ($B-H$ 曲线), 它的外形和 $M-H$ 曲线相似, 但无水平部分, 因为由式 $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ 可知, 当磁化达到饱和状态时, M 虽然保持不变, 但 B 仍将

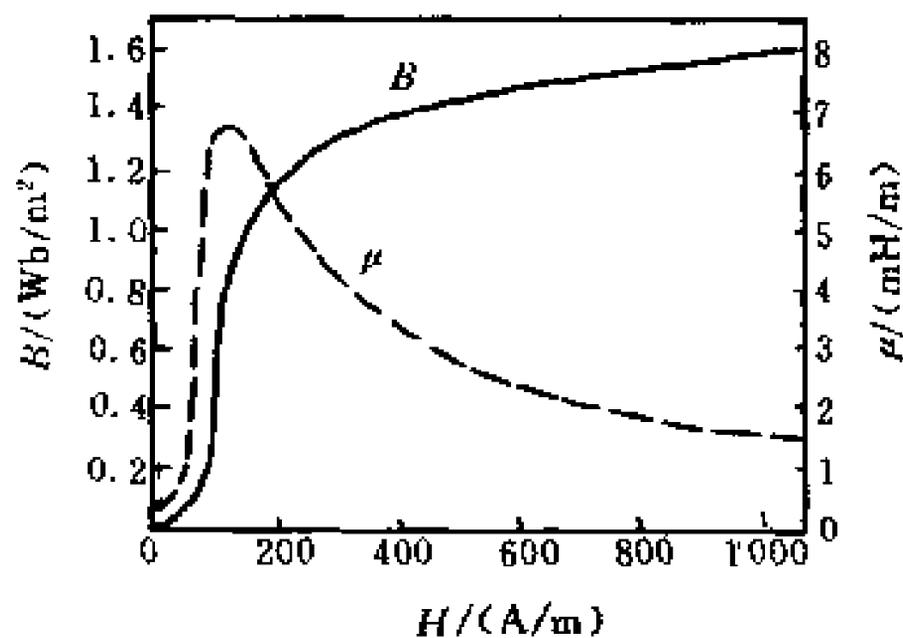


图 12-12 $B-H$ 曲线和 $\mu-H$ 曲线

随着 H 的增加而略有增大。

由于 B 与 H 的非线性关系,如果仍用式 $\frac{B}{H} = \mu$ 来定义铁磁性材料的磁导率的值,则对应于起始磁化曲线上每一个 H 值便有一个相应的 μ 值,即铁磁性物质的 μ 值不再是常量.在图 12-12 中的虚线是某铁磁性材料的 μ 与 H 的关系曲线,由图可知, μ 值先随 H 的增加迅速增大,达极大值后又逐渐减小,当 $H \rightarrow \infty$ 时趋近于 1.由 $B-H$ 曲线可知,铁磁质的 μ 值可远大于 μ_0 ,在实际应用中,我们可应用各种方法,如提纯、热处理或改变成分来尽量增大 μ 值,这样就可以不必提供很强的磁场 H 而仍可得到高值的 M 和 B .

2. 磁滞回线

上面所讨论的磁化曲线只是反映了铁磁性材料在磁场强度由零逐渐增强时的磁化特性,在这个过程中,磁感应强度 B (或 M) 由零增加到饱和值 B_s (或 M_s).但在实际应用中,铁磁性材料多是处在交变磁场中,这时 H 的大小和方向作周期性的变化,铁磁质的磁化特性又将如何变化呢? 下面就来讨论这个问题.

如图 12-13,设铁磁性材料已沿起始磁化曲线 OA 段磁化到饱和,磁化开始饱和时的磁感应强度值用 B_s 表示.如果在达到饱和状态之后使 H 减小,这时 B 的值也要减小,但不沿原来的曲线下降,而是沿着另一条曲线 AB 段下降,对应的 B 值比原先的值大,说明铁磁质磁化过程是不可逆的过程.当 $H=0$ 时,磁感应强度并不等于零,而保留一定的大小 B_r ,如图 12-13 的线段 OB ,这就是铁磁质的剩磁现象.为了消除剩磁,必须在线圈中

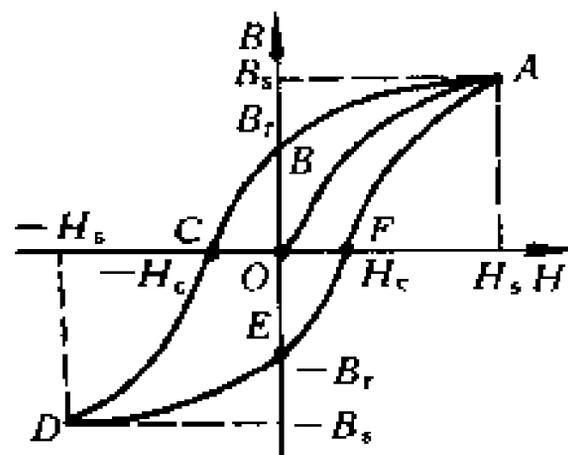


图 12-13 磁滞回线

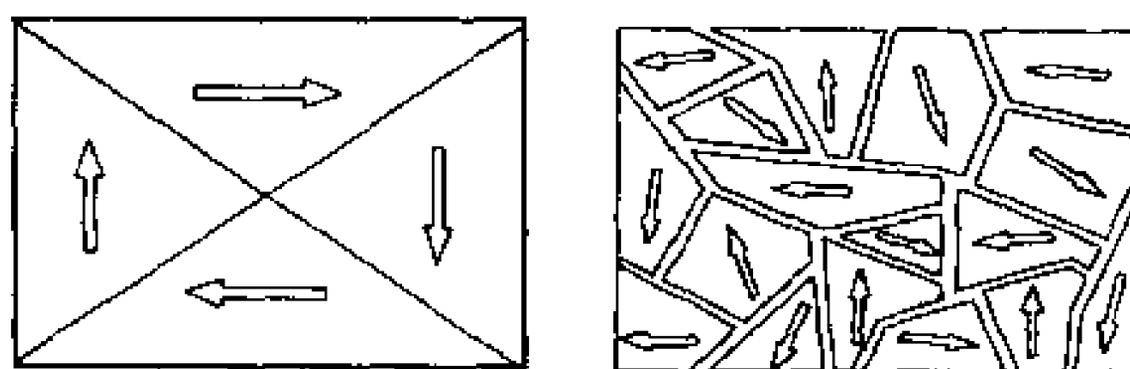
通入反向电流,即加上反方向的磁场.当反向磁场 H 等于某一定值 H_c 时,如图 12-13 中线段 OC , B 才等于零,这个 H_c 值称为材料的矫顽力.矫顽力 H_c 的大小反映了铁磁材料保存剩磁状态的能力.如再增强反方向的磁场,材料又可被反向磁化达到反方向的饱和状态,以后再逐渐减小反方向的磁场至零值时, B 和 H 的关系将沿 DE 线段变化.这时改变线圈中的电流方向,即又引入正向磁场,则形成图 12-13 所示的闭合回线.从图中可以看出,磁感应强度 B 值的变化总是落后于磁场强度 H 的变化,这种现象称为磁滞,是铁磁质的重要特性之一,因此上述闭合曲线常称为磁滞回线.研究铁磁质的磁性就必须知道它的磁滞回线,各种不同的铁磁性材料有不同的磁滞回线,主要是磁滞回线的宽、窄不同和矫顽力的大小有别.

实验指出,当铁磁性材料在交变磁场的作用下反复磁化时将会发热,因为铁磁体反复磁化时磁体内分子的状态不断改变,所以分子振动加剧,温度升高.使分子振动加剧的能量是由产生磁化场的电流的电源所供给的,这部分能量转变成热量而散失掉,这种在反复磁化过程中能量的损失叫做磁滞损耗.理论和实践证明,磁滞回线所包围的面积越大,磁滞损耗也越大.在电器设备中这种损耗是十分有害的,必须尽量使它减小.此外,铁磁体在交变磁化磁场的作用下,它的形状随之改变,称为磁致伸缩效应,这种特性在超声技术中常被用来作为电磁能和机械能的转换器件.

3. 磁畴

铁磁质的磁性不能用一般顺磁质的磁化理论来解释,因为铁磁性元素的单个原子并不具有任何特殊磁性.例如:铁原子与铬原子的结构大致相同,但铁是典型的铁磁质,而铬是普通的顺磁质;甚至还可用非铁磁性物质来制成铁磁性的合金.另一方面,还应注意铁磁质总是固相的.这些事实说明了铁磁性是一种与固体的结构状态有关的性质.

下面简单介绍铁磁质特殊磁性的现代理论. 在铁磁质中, 相邻铁原子中的电子间存在着非常强的交换耦合作用, 这个相互作用促使相邻原子中电子的自旋磁矩平行排列起来, 形成一个自发磁化达到饱和状态的微小区域, 这些自发磁化的微小区域称为磁畴. 在没有外磁场作用时, 在每个磁畴中原子的磁矩均取向同一方位, 但对不同的磁畴其磁矩的取向各不相同, 图 12-14 分别是单晶、多晶铁磁质磁畴结构示意图. 磁畴的这种排列方式使磁体能处于能量最小的稳定状态, 因此对整个磁体来说, 体内磁矩排列杂乱, 任意物理无限小体积内的平均磁矩为零, 在宏观上物体不显示磁性.



(a) 单晶磁畴结构示意图

(b) 多晶磁畴结构示意图

图 12-14 磁畴

在外磁场作用下, 磁矩与外磁场同方向排列时的磁能将低于磁矩与外磁场反向排列时的磁能, 结果是自发磁化磁矩和外磁场成小角度的磁畴处于有利地位, 这些磁畴体积逐渐扩大, 而自发磁化磁矩与外磁场成较大角度的磁畴体积逐渐缩小. 随着外磁场的不断增强, 取向与外磁场成较大角度的磁畴全部消失, 留存的磁畴将向外磁场的方向旋转, 以后再继续增加磁场, 所有磁畴都沿外磁场方向整齐排列, 这时磁化达到饱和. 图 12-15 是某单晶结构磁体磁化过程的示意图.

磁畴和外磁场方向成较小角度的磁畴体积扩张和磁畴区磁矩的转向并不是逐渐进行的, 而是在该磁畴处磁场达到一定强度 H 时突然地进行的, 这过程发生在图 12-11 所示磁化曲线的 AB 段

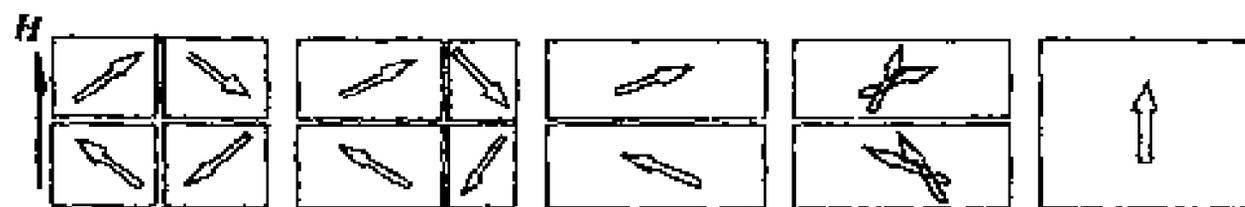


图 12-15 单晶结构铁磁体磁化过程示意图

上,它反映了这一段过程的不可逆性.其内因是:当外磁场逐渐减弱到零值时,已被磁化的铁磁体内的各个磁畴由于受到阻碍它们转向的摩擦阻力,使它们不能逆原来的磁化规律恢复到磁化前的状态,从而使磁体内留有部分磁性,表现为剩磁现象.

根据铁磁质中存在磁畴的观点,可解释高温和振动的去磁作用.磁畴的形成是原子中电子自旋磁矩的自发有序排列,而在高温情况下,铁磁体中分子的热运动则要瓦解磁畴内磁矩有规则的排列,当温度达到临界温度时,磁畴全部被破坏,铁磁体也就转为普通的顺磁性物质.

现在,磁畴的结构和形状已能在实验中观察到.在磨光的铁磁质表面上撒一层极细的铁粉,因为磁畴的边界处存在着不均匀的强磁场,它将把铁粉吸引到磁畴的边界上去,用金相显微镜可以直接观察到粉末沿着磁畴的边界积聚形成某种图形(图 12-16).根据观察,磁畴的体积约为 $10^{-8} \sim 10^{-10} \text{ m}^3$ 数量级,其中约有 $10^{21} \sim 10^{17}$ 个原子.

总之,铁磁质中磁畴的存在是铁磁体磁化特性的内在根据,利

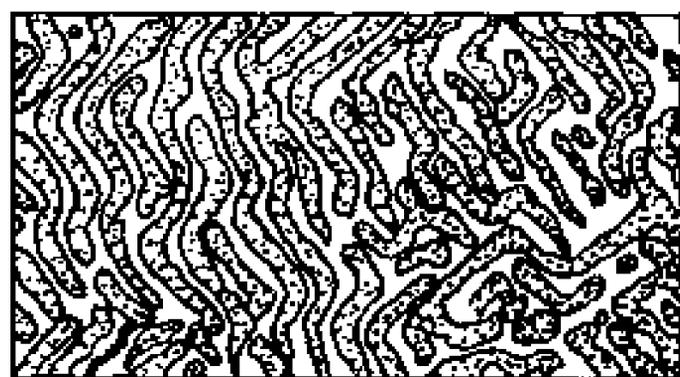


图 12-16 显示磁畴结构的铁粉图形

用这个观点能解释铁磁体磁化过程所有特性,这说明磁畴理论是目前较成熟的理论.

4. 软磁材料

铁磁性材料在工程技术上应用很广,但不同磁性材料的磁化性能各不相同,一种磁性材料是否适用于某种用途,工程上常常是依据它的磁滞回线来决定.根据磁滞回线的不同,可以将铁磁性材料区分为软磁材料和硬磁材料.

软磁材料的特点是:矫顽力小($H_c < 10^2$ A/m),磁滞损耗低.它的磁滞回线成细长条形状(图 12-17),磁滞特性不显著,可以近似地用它的起始磁化曲线来表示其磁化特性.这种材料容易磁化,也容易退磁,适用于交变磁场,可用来制造变压器、继电器、电磁铁、电机以及各种高频电磁元件的铁芯.表 12-2 列出几种常用的金属软磁材料性能参量.

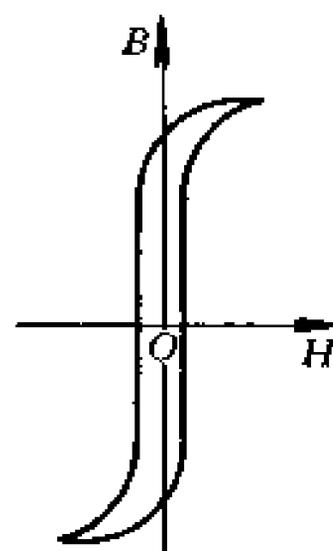


图 12-17 软磁材料磁滞回线

表 12-2 金属软磁材料

材料名称	成分	最大 μ_r	B_s/T	$H_c/(A/m)$	用途
工程纯铁	99.9%铁	5 000	2.15	100	直流继电器、电磁铁的铁芯
硅钢	96%铁, 4%硅	700	1.97	50	大型电磁铁和变压器
氢中处理的硅钢片	96.7%铁, 3.3%硅	40 000	2	10	大型电磁铁和变压器
坡莫合金	78%铁, 22%镍	100 000	1.07	5	强磁场线圈的铁芯
超坡莫合金	49%铁, 49%钴, 2%钒	66 000	2.4	26	小型电磁铁、继电器的铁芯

除上述金属软磁材料外,还有非金属软磁铁氧体,例如锰锌铁氧体、镍锌铁氧体等(参看表 12-3),它们分别由几种氧化物的粉末混合压制成型再烧结而成,加工方便,成本低廉,并且电阻率很高,所以目前已广泛用于电子技术中,例如半导体收音机中的磁棒和中周变压器里的磁芯就是用软磁铁氧体做的。

表 12-3 铁氧体软磁材料

材料名称	成分	μ	B_s/T	适用频率范围
锰锌铁氧体(MXO)	氧化锰、氧化锌、氧化铁	300~500	1 500~5 000	0.1 MHz 以上
镍锌铁氧体(NXO)	氧化镍、氧化锌、氧化铁	10~1 000	1 500~5 000	1 MHz 以上

5. 硬磁材料

硬磁材料的特点是:矫顽力大($H_c > 10^2$ A/m),剩磁 B_r 也大。这种材料的磁滞回线所包围的面积肥大,磁滞特性显著(图 12-18),因此硬磁材料经磁化后仍能保留很强的剩磁,并且这种剩磁不易消除。这种硬磁材料适合于制成永久磁铁,例如,磁电式电表、永磁扬声器、耳机、小型直流电机、以及雷达中的磁控管等用的永久磁铁都是由硬磁材料做成的。表 12-4 列出几种常见的金属硬磁材料。

表 12-4 金属硬磁材料

材料名称	成分	$H_c/(A/m)$	B_r/T
碳 钢	0.9%碳、99.1%铁	5 000	1
钨 钢	6%钨、0.7%碳、0.3%锰、93%铁	6 500	1.05
铝镍钴第五号	8%铝、14%镍、24%钴、3%铜、51%铁	60 000	1.27
铝 钢		20 000	0.25

现代电机中常用的一种铁氧体材料的磁滞回线差不多呈矩形(如图 12-19 所示),故称矩磁材料。其特点是:一经磁化,其剩磁感

应强度接近于非常稳定的饱和值 B_s , 矫顽力很小. 若矩磁材料在不同方向的磁场下磁化, 总是处于 B_s 或 $-B_s$ 两种不同的剩磁状态. 通常计算机中采用二进位制, 只有“0”和“1”两个数码, 因此可用这种材料的两种剩磁状态 ($+B_s$ 和 $-B_s$) 分别代表两个数码, 起到“记忆”的作用. 这种特性使矩磁材料可作为电子计算机、自动控制等新技术中制作存储、开关等元件之用. 目前广泛采用的矩磁材料是锰-镁和铈-锰铁氧体.

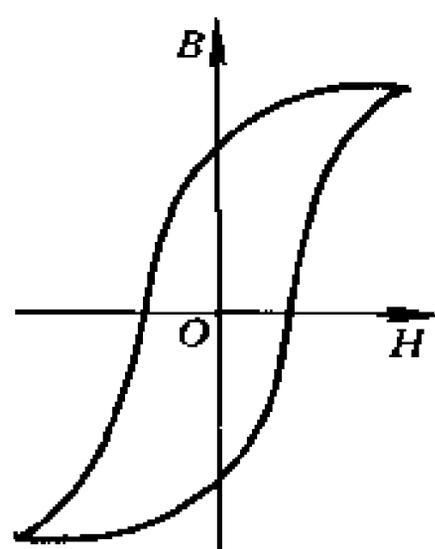


图 12-18 硬磁材料
磁滞回线

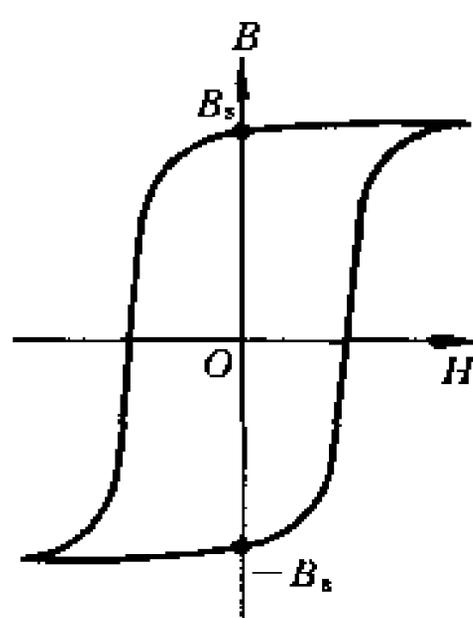


图 12-19 矩形磁滞回线

§ 12-6 * 磁路定理

1. 磁路的一般概念

我们知道, 恒定电流一定是闭合的, 而磁感应线也是闭合的, 于是正象电流通过的区域称为电路一样, 我们也可以把磁感应通量 (磁通) 通过的区域称为磁路. 但是, 电路和磁路只是形式上相当, 本质上是有区别的, 在电路中有真正的实物粒子 (带电粒子) 作定向运动, 而在磁路中却没有东西沿着闭合回路流动.

引入电路概念的可能性, 是因为客观上存在着电导率相差悬殊的一些物体——导体和绝缘体, 我们可把导体做成适当的形状,

而使电流限制在导体中流动,并把恒定电场的问题简化成电路的问题.可是客观上并不存在磁的导体和磁的绝缘体,磁路的概念并不如电路那样简明.不过由于铁磁性材料有很大的磁导率,我们也可以把铁磁体做成一定的形状,而使大部分磁感应通量集中在一定的回路中通过,所以有可能把磁场的问题简化成磁路问题来处理.

在生产实践中,根据工程上的需要,常常采用铁磁性材料做成各种形状的“铁芯”,如电机、变压器、电工仪表及继电器等设备的铁芯,使磁通量几乎全部局限在铁芯范围内通过,形成明显的闭合回路,所以磁路定理在电工技术中有广泛的应用.

图 12-20 表示几种典型的电工设备中的磁路系统.图(a)、(c)所示的磁路可看作是铁芯和空气的串联组合,图(b)、(d)中的磁

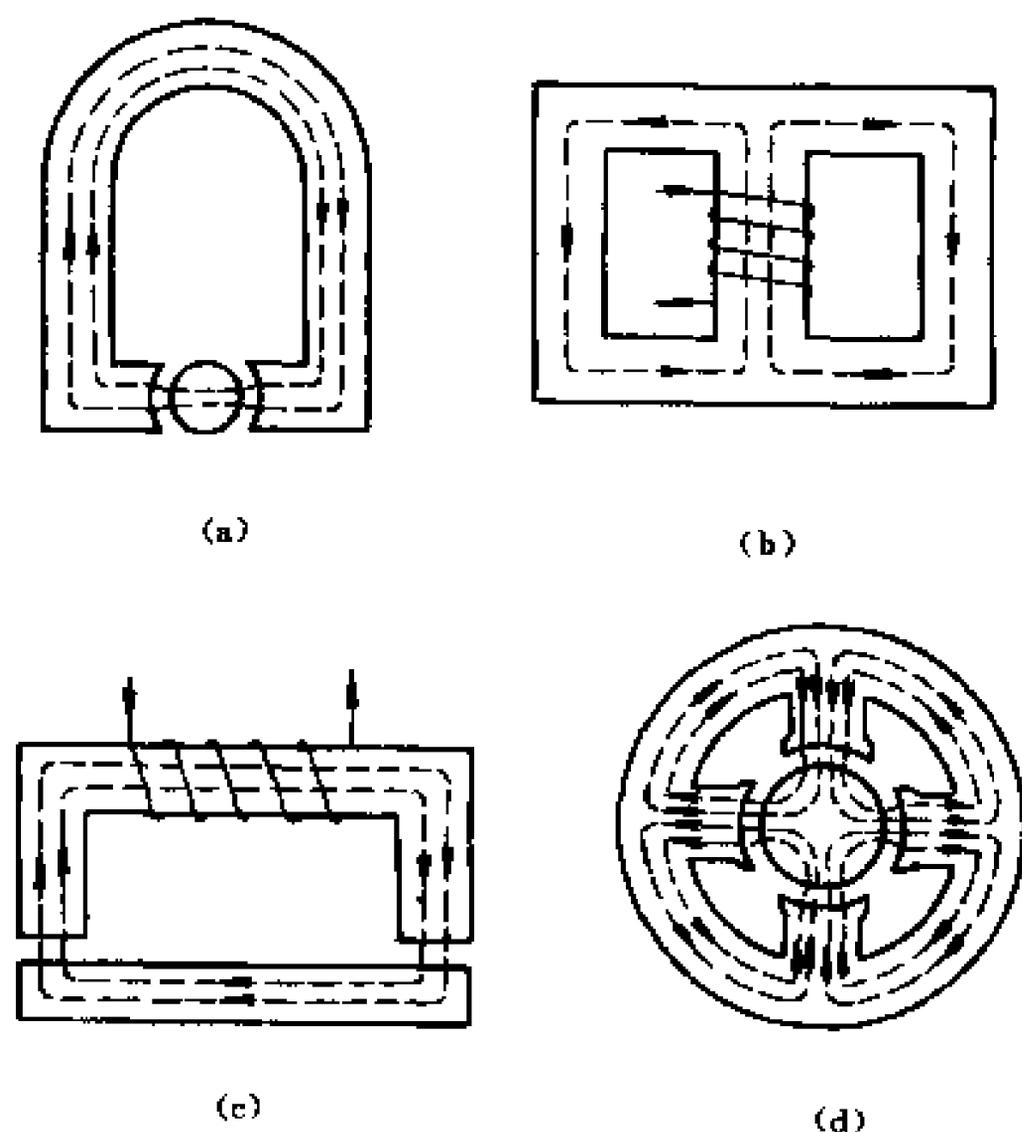


图 12-20 常用电工设备中的磁路图

路是并联组合。

2. 磁路定理

在截面积为 S 、长为 l 、磁导率为 μ 的铁环上，绕以紧密的线圈 N 匝，设线圈中通过的电流为 I (图 12-21)，根据安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I$$

把上式应用到环中任一磁感应线上得到

$$Hl = NI$$

通过任一截面的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu HS$$

因此

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}}$$

这个公式与简单回路的欧姆定律

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{l}{\gamma S}}$$

形式相似，如果称 NI 为磁路的磁通势 F_m ，而称 $\frac{l}{\mu S}$ 为闭合磁路的磁阻 R_m ，则磁通与电流相当，可记为

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} \quad (12-17)$$

上式称为磁路的欧姆定律。 F_m 的单位为 A， R_m 的单位为 A/Wb。

如果在上述铁环中留有空气隙，如图 12-22 所示，则根据安培环路定理，有

$$Hl + H_0 l_0 = NI$$

式中 H 、 H_0 分别代表铁环中和空气隙中的磁场强度， l 、 l_0 分别代表铁环和空气隙的长度， N 为线圈的匝数。因为铁环中和空气隙中的磁感应强度分别是 $B = \mu H$ 和 $B_0 = \mu_0 H_0$ ，磁通量为

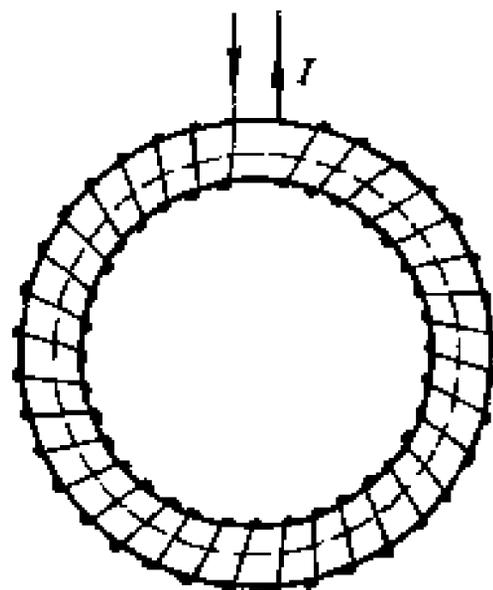


图 12-21 磁路定理
推导用图

$$\Phi = BS = B_0S$$

因此式 $Hl + H_0l_0 = NI$ 可化为

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}} = \frac{F_m}{R_{m\mu} + R_{m0}} = \frac{F_m}{R_m}$$

R_m 表示铁环的磁阻 $R_{m\mu}$ 和空气隙的磁阻 R_{m0} 之和. 上式表明, 与串联电路相似, 串联磁路的磁阻等于串联各部分磁阻之和.

再看磁路并联组合的情形. 图 12-23 是一个有分支的磁路, 设磁路中部的磁通量为 Φ , 在另外两个分支磁路中的磁通分别为 Φ_1 和 Φ_2 . 根据磁通量的连续性, 有

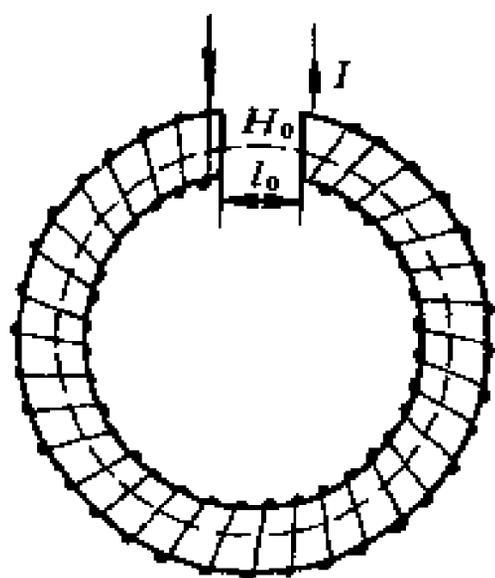


图 12-22 串联磁路

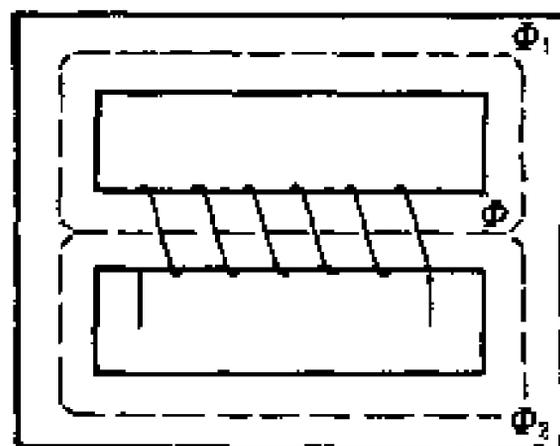


图 12-23 并联磁路

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

图中两个分支磁路并联后还与中部绕有线圈的一段磁路串联, 故对每个分支磁路由安培环路定理可得

$$F_m = NI = \Phi R_{m\phi} + \Phi_1 R_{m1}$$

$$F_m = NI = \Phi R_{m\phi} + \Phi_2 R_{m2}$$

式中 R_{m1} 、 R_{m2} 和 $R_{m\phi}$ 分别是每个分支磁路及中部磁路的磁阻, 由以上三式可求得

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m + R_{m\phi}}$$

式中

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}}$$

与并联电路相似, 并联磁阻的倒数等于分支磁路磁阻倒数之和.

在设计中, 有关磁路计算的问题可分为两类: 一是已知铁框上绕组的匝数和绕组中的电流求磁通(即磁感应强度); 二是已知磁路中所需的磁通(即铁芯中或气隙中的磁感应强度)求铁框上绕组的匝数和电流(即磁通势). 下面就这两类问题分别举例说明.

例题 12-4 设环式线圈铁芯的长度 $l = 60 \text{ cm}$, 缝隙的宽度 $l_0 = 0.1 \text{ cm}$, 环式线圈的横截面积 $S = 12 \text{ cm}^2$, 总匝数 $N = 1\,000$, 电流为 1 A , 铁芯的相对磁导率 $\mu_r = 600$, 试求缝隙内的磁场强度 H_0 .

解 环式线圈内的磁通量为

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}}$$

缝隙内的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{NI}{\frac{l}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}}$$

所以

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{NI}{\frac{l}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}} = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_r} + l_0} = \frac{1\,000 \times 1}{\frac{0.6}{600} + 0.001} \text{ A/m} = 5 \times 10^5 \text{ A/m}$$

例题 12-5 设螺绕环的平均长度为 50 cm , 它的截面积是 4 cm^2 , 用磁导率为 $65 \times 10^{-4} \text{ Wb}/(\text{A} \cdot \text{m})$ 的材料做成, 若环上绕线圈 200 匝. 试计算产生 $4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ 的磁通量需要的电流. 若将环切去 1 mm , 即留一空气隙, 欲维持同样的磁通, 则需要电流

若干?

解 磁阻

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{0.5}{65 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-4}} \text{ A/Wb} = 1.92 \times 10^5 \text{ A/Wb}$$

磁通势

$$F_m = \Phi R_m = 4 \times 10^{-1} \times 1.92 \times 10^5 \text{ A} = 77 \text{ A}$$

因 $F_m = NI$, 所以 $I = 0.385 \text{ A}$

当有空气隙时, 空气隙的磁阻为

$$R'_m = \frac{l'}{\mu_0 S} = \frac{10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} \text{ A/Wb} = 20 \times 10^5 \text{ A/Wb}$$

环长度的微小变化可略而不计, 它的磁阻与先前相同, 即 $1.92 \times 10^5 \text{ A/Wb}$. 那么空气隙虽然只长 1 mm , 它的磁阻却比铁环大近 10 倍, 这时全部磁路的磁阻为

$$R_m + R'_m = (20 \times 10^5 + 1.92 \times 10^5) \text{ A/Wb} \approx 22 \times 10^5 \text{ A/Wb}$$

欲维持同样的磁通所需的磁通势(安匝数)为

$$F'_m = \Phi(R_m + R'_m) = 880 \text{ A}$$

所需电流为 $I' = \frac{F'_m}{N} = 4.4 \text{ A}$

通过这个例子, 我们可以看到空气隙对于磁路的影响. 由于空气的磁导率(近似等于 μ_0)比铁磁质的磁导率 μ 要小得多, 所以空气隙的长度虽短, 它的磁阻却有可能比铁芯大得多, 所需线圈的安匝数也很大. 可见, 磁路中有空气隙时, 维持相同的磁通所需线圈的安匝数大大地增加, 这是在设计电磁铁和制造电机时必须重视的问题.

另外必须指出, 在以上两个例子里, 磁导率都是事先给定的, 这是不合实际的. 因为铁磁质的磁导率随 H (也即 B)、随 Φ 而变,

它不是一个常量,也不会是已知的,必须从相应材料的磁化曲线上查出其值.所以,磁化曲线是磁路设计中的重要依据.

例题 12-6 图 12-24 所示为一个以铸钢为铁芯的磁路,各部分尺寸列于下表中,空气隙 BC 的截面已考虑了磁感应线向外部散放的边缘效应.如果线圈中的励磁电流为 1 A ,要使空气隙中的磁通量为 $2.0 \times 10^{-3}\text{ Wb}$,试求应绕的线圈匝数.

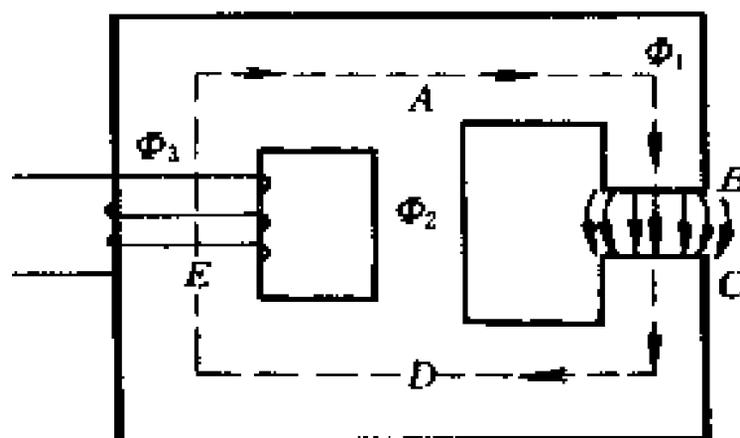


图 12 24 例题 12-6 图

	AB	BC	CD	AD	DEA
平均长度/ 10^{-2} m	25	0.025	25	20	37.5
截面积/ 10^{-4} m^2	25	25.25	25	12.5	37.5

解 已知 $\Phi_1 = 2 \times 10^{-3}\text{ Wb}$,则铁芯中的磁感应强度为

$$B_{AB} = B_{CD} = \frac{\Phi_1}{S_{AB}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-4}}\text{ T} = 0.8\text{ T}$$

从图 12-25 的磁化曲线查得相应的磁场强度为

$$H_{AB} = H_{CD} = 390\text{ A/m}$$

空气隙中的磁感应强度为

$$B_{BC} = \frac{\Phi_1}{S_{BC}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{25.25}\text{ T} = 0.79\text{ T}$$

于是

$$H_{BC} = \frac{B_{BC}}{\mu_0} = \frac{0.79}{4\pi \times 10^{-7}}\text{ A/m} = 6.32 \times 10^5\text{ A/m}$$

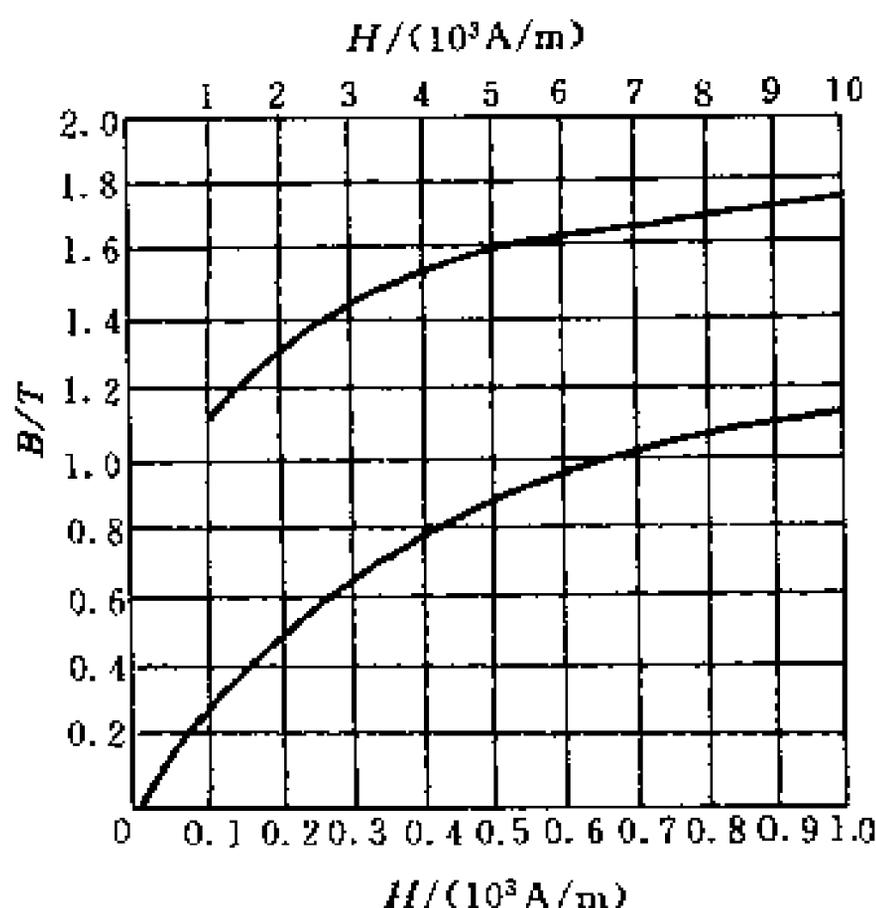


图 12-25 铸钢的磁化曲线

对回路 $ABCD$ 运用安培环路定理得

$$H_{AB}l_{AB} + H_{BC}l_{BC} + H_{CD}l_{CD} - H_{AD}l_{AD} = 0$$

因此

$$H_{AD}l_{AD} = (390 \times 25 \times 10^{-2} + 6.32 \times 10^5 \times 0.025 \times 10^{-2} + 390 \times 25 \times 10^{-2}) \text{ A} = 353 \text{ A}$$

由此可得

$$H_{AD} = \frac{353}{20 \times 10^{-2}} \text{ A/m} = 1765 \text{ A/m}$$

从图 12-25 的磁化曲线查得相应的磁感应强度为

$$B_{AD} = 1.3 \text{ T}$$

于是

$$\Phi_2 = B_{AD}S_{AD} = 1.3 \times 12.5 \times 10^{-4} \text{ Wb} = 1.625 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

根据磁通量的连续性可得

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = (2.0 \times 10^{-3} + 1.625 \times 10^{-3}) \text{ Wb} = 3.625 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

则 DEA 铁芯中的磁感应强度为

$$B_{DEA} = \frac{\Phi_3}{S_{DEA}} = \frac{3.625 \times 10^{-3}}{37.5 \times 10^{-4}} \text{ T} = 0.964 \text{ T}$$

从图 12-25 的磁化曲线查得相应的磁场强度为

$$H_{DEA} = 575 \text{ A/m}$$

根据安培环路定律得

$$\begin{aligned} IN &= H_{DEA}l_{DEA} + H_{AD}l_{AD} = \\ &= (575 \times 37.5 \times 10^{-2} + 353) \text{ A} = 569 \text{ A} \end{aligned}$$

于是求得线圈的匝数为

$$N = \frac{IN}{I} = \frac{569}{1} \text{ 匝} = 569 \text{ 匝}$$

思考题

12-1 有两根铁棒,其外形完全相同,其中一根为磁铁,而另一根则不是,你怎样辨别它们?不准将任一根棒作为磁针而悬挂起来,亦不准使用其它的仪器.

12-2 试解释为什么磁铁能吸引如铁钉之类的铁制物体?

12-3 试说明 B 与 H 的联系和区别.

12-4 下面的几种说法是否正确,试说明理由.

(1) 若闭合曲线内不包围传导电流,则曲线上各点的 H 必为零;

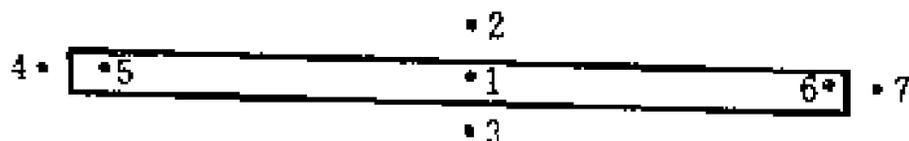
(2) 若闭合曲线上各点的 H 为零,则该曲线所包围的传导电流的代数和为零;

(3) 不论抗磁质与顺磁质, B 总是和 H 同方向;

(4) 通过以闭合回路 L 为边界的任意曲面的 B 通量均相等;

(5) 通过以闭合回路 L 为边界的任意曲面的 H 通量均相等.

12-5 一细长磁棒沿轴向均匀磁化,磁化强度为 M ,如图所示.分别求图



思考题 12-5 图

中所标各点的磁场强度 H 和磁感应强度 B .

12-6 如果一闭合曲面包围条形磁棒的一个磁极,问通过该闭合曲面的磁通量是多少?

12-7 为什么蹄形磁铁比条形磁铁产生的磁场强?

12-8 在空气和铁磁质的边界面上,为什么在空气一侧的磁感应线一般近似垂直于边界面.

12-9 在强磁铁附近的光滑桌面上的一枚铁钉由静止释放,铁钉被磁铁吸引,试问当铁钉撞击磁铁时,其动能从何而来?

12-10 试比较并说明顺磁质与铁磁质的磁化曲线.

习 题

12-1 一均匀磁化的介质棒,其直径为 1 cm,长为 20 cm,磁化强度为 1 000 A/m,求磁棒的磁矩.

12-2 一均匀磁化棒,直径为 2 cm,长为 50 cm,它的磁矩为 $10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. 求棒表面上磁化面电流线密度.

12-3 根据测量,地球的磁矩为 $8.0 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

(1) 如果在地球赤道上绕一单匝导线的线圈,则导线上需通多大的电流才能产生如此大的磁矩?

(2) 此装置能否用来正好抵消地面上空各点处的地磁场?

(3) 能否抵消地球表面处的磁场?

12-4 一罗盘针长 2.0 cm,其形状似均匀的细棒,驱动轴过中点,可以在水平面内自由转动.罗盘针的质量为 0.12 g,磁矩为 $3.2 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.如果罗盘针处在方向指北、水平分量为 $2.9 \times 10^{-5} \text{ T}$ 的地磁场中相对正北方向作小角摆动,求其摆动频率.

12-5 一未知元素做成的样品,已知其密度为 4.15 g/cm^3 ,饱和磁化强度为 $7.6 \times 10^4 \text{ A/m}$,并测得其原子磁矩为 $1.2\mu_B$ (玻尔磁子),由这些数据确定该元素的相对原子质量.

12-6 铁棒中一个铁原子的磁矩是 $1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$,设长 5 cm,截面积为 1 cm^2 的铁棒中所有铁原子的磁矩都整齐排列,则

(1) 铁棒的磁矩为多大?

(2) 如果要使这磁棒与磁感应强度为 1.5 T 的外磁场正交,需用多大的力矩? 设铁的密度为 7.8 g/cm^3 ,铁的相对原子质量是 55.85.

12-7 氢原子中的电子以速率 $2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ 绕原子核作半径为 $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的圆周运动,如果该氢原子处在 0.50 T 的磁场中,磁场的方向与电子轨道角动量同方向.

- (1) 求电子转动频率的改变值;
- (2) 设电子半径不变,求电子速率的改变值;
- (3) 电子能量的变化.

12-8 一电子在半径为 $r = 6 \times 10^{-11} \text{ m}$ 的圆形轨道上运动,外磁场垂直轨道平面使电子在半径不变的情况下速率改变 6.3 m/s . 求所加磁场的磁感应强度.

12-9 一均匀磁化棒的体积为 1000 cm^3 ,其磁矩为 $800 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. 如棒内的磁感应强度为 0.1 Wb/m^2 ,求棒内磁场强度的值.

12-10 螺绕环中心周长 $l = 10 \text{ cm}$,环上均匀密绕线圈 $N = 200$ 匝,线圈中通有电流 $I = 100 \text{ mA}$.

- (1) 求管内的磁感应强度 B_0 和磁场强度 H_0 ;
- (2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁性物质,则管内的 B 和 H 是多少?
- (3) 磁性物质内由导线中电流产生的 B_0 和由磁化电流产生的 B' 各是多少?

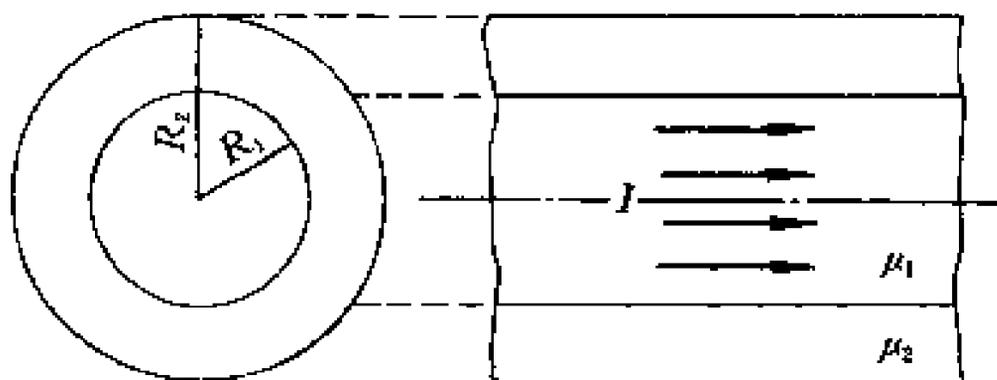
12-11 一铁制的螺绕环平均圆周长 30 cm ,截面积为 1 cm^2 ,在环上均匀绕以 300 匝导线,当绕组内的电流为 0.032 A 时,环内的磁通量为 $2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$,试计算

- (1) 环内的磁通量密度;
- (2) 磁场强度;
- (3) 磁化面电流;
- (4) 环内材料的磁导率、相对磁导率及磁化率;
- (5) 环芯内的磁化强度.

12-12 在螺绕环上密绕线圈共 400 匝,环的平均周长是 40 cm ,当导线内通有电流 20 A 时,利用冲击电流计测得环内磁感应强度是 1.0 T ,计算

- (1) 磁场强度;
- (2) 磁化强度;
- (3) 磁化率;
- (4) 磁化面电流和相对磁导率.

12-13 一磁导率为 μ_1 的无限长圆柱形直导线, 半径为 R_1 , 其中均匀地通有电流 I . 在导线外包一层磁导率为 μ_2 的圆柱形不导电的磁介质, 其外半径为 R_2 , 如图所示. 试求



习题 12-13 图

- (1) 磁场强度和磁感应强度的分布;
- (2) 半径为 R_1 和 R_2 处表面上磁化面电流线密度.

12-14 在最大磁化状态下, 由钴材料做成的样品中单位体积的磁矩为 $1.5 \times 10^5 \text{ A/m}$. 假定磁化全是因为电子自旋磁矩(其值为 $1\mu_B$)的有序排列, 问单位体积中有多少有序排列的电子? 每个原子中有多少有序排列的电子? 已知钴的密度为 $8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 摩尔质量为 58.9 g/mol .

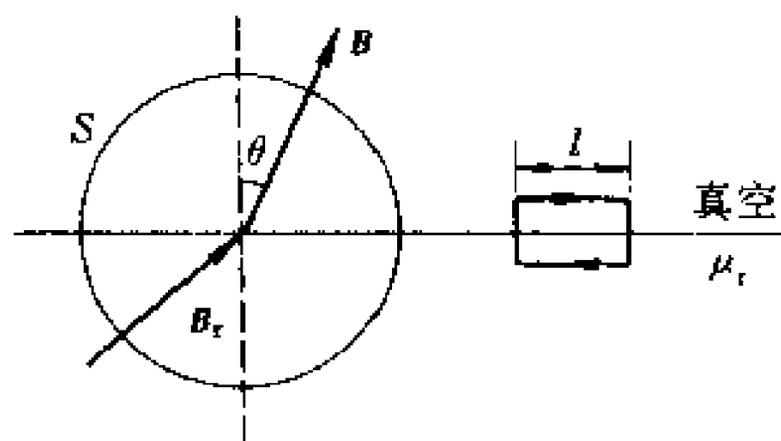
12-15 铁环的平均直径为 15 cm , 截面积为 7 cm^2 , 在环上均匀地密绕线圈 500 匝.

- (1) 当线圈中电流为 0.6 A , 铁的相对磁导率 $\mu_r = 800$ 时, 铁芯中的磁通量是多少?
- (2) 当铁中的磁通量等于 $4.8 \times 10^{-4} \text{ Wb}$, $\mu_r = 1200$ 时, 线圈中通有多大的电流?

12-16 在空气($\mu_r = 1$)和软铁($\mu_r = 7000$)的交界面上, 已知在空气一侧的磁感应强度与面法线间的夹角为 5.6° . 求在软铁中磁感应强度与交界面法线间的夹角.

12-17 如图所示, 在相对磁导率为 μ_r 的磁介质和真空交界面的真空一侧的磁场是均匀的, 其磁感应强度 B 的方向与交界面法线间的夹角为 θ . 若在界面上以某点为中心作一半径为 R 的球面 S , 通过球面上的 H 通量是多少? 并求磁感应强度 B 沿着如图所示矩形回路的 $\oint B \cdot dl$ 值.

12-18 在平均半径为 0.1 m , 横截面积为 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 的铸钢圆环上均匀地密绕 200 匝线圈. 当线圈中通有电流 0.63 A 时, 钢环中的磁通量为



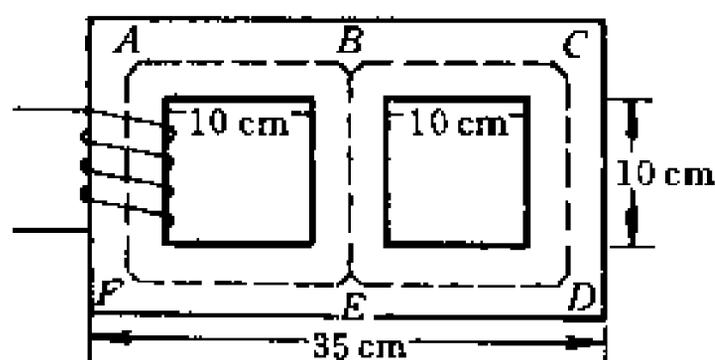
习题 12-17 图

$3.24 \times 10^{-4} \text{ Wb}$, 当电流增大到 4.7 A 时, 磁通量为 $6.18 \times 10^{-4} \text{ Wb}$. 求两种情况下钢环的磁导率.

12-19 一变压器铁芯是由硅钢片制成的, 它的截面积为 8 cm^2 , 磁路的平均长度为 31.4 cm , 硅钢片铁芯的 μ_r 值为 3000 , 初级线圈通有电流, 磁通势为 100 A . 试求通过变压器铁芯截面的磁通是多大.

12-20 某电钟里有一铁芯线圈, 已知铁芯磁路长 14.4 cm , 空气隙长 2.0 mm , 铁芯的截面积是 0.60 cm^2 , 铁芯的相对磁导率是 1600 . 若要使通过气隙的磁通为 $4.8 \times 10^{-6} \text{ Wb}$, 试求线圈的安匝数. 若线圈两端的电压为 220 V , 消耗功率为 2 W , 求线圈的匝数.

12-21 如图所示, 磁路由硅钢片叠成, 各段有效截面积均为 $S = 5 \times 5 \text{ cm}^2$, 线圈的匝数为 1000 , 已知 CD 柱中的磁通量 $\Phi = 3.75 \times 10^{-4} \text{ Wb}$, 试决



习题 12-21 图

定线圈中的电流. 硅钢片的部分磁化曲线数据列表如下.

$H/(\text{A/m})$	0	10	20	40	50	60	80	90	100
B/T	0	0.05	0.15	0.43	0.54	0.62	0.74	0.77	0.83

地球的磁场

远在距今 1900 多年前,在我国历史上就已有“磁勺柄指南”的记载,到了公元 11 世纪,我国宋代的航海家已使用指南针——罗盘来导航.但是长久以来,人们一直不明白,磁针静止时为什么总是指向南北方向,在观察了小磁针在一根条形磁铁近旁的指向后,人们才猜想地球本身应该具有磁性.

一个用细线悬挂在水平位置的小磁针,在四周没有磁性物体和电流的影响时,小磁针的静止方位指向接近地理南、北极方向,这好象小磁针被一块磁铁紧紧吸引住那样,由此人们更确信地球是一个大磁体,上述现象是地球表面处的磁场对小磁针的作用所致.地球自转轴与地面的两个交点,分别称为地理的南、北两极,而地球内部的磁化强度(猜测的)的方向与地球的自转轴的交角约为 15° ,所以地球两个磁极中心位于地理南、北极的附近.上述小磁针在静止时,磁针北端的磁极称为“指北极”,简称北极;南端的磁极称为“指南极”,简称南极.按此,则在地理北极附近的地磁极是磁南极 S_m ;而在地理南极附近的地磁极是磁北极 N_m (见图 J-1).根据近代的正确测量,地磁的 S_m 极在北半球加拿大北海岸以北北纬 $70^\circ 50'$ 和西经 90° 的地方,而地磁的 N_m 极则处于南半球罗斯海西部南纬 $70^\circ 10'$ 和东经 $150^\circ 45'$ 的地方.

地球是一个大磁体,因此在它的周围存在着磁场,我们称地球周围的磁场为地球磁场或地磁场,简称地磁.在离地球约 5 倍地球半径空间处,地球的磁场分布近似一个均匀磁化了的球产生的磁场.在不同的地点,磁场强度是不同的,而且除在磁赤道处,地磁场都不是水平的,因此,地面上任一点磁场可分为水平分量 B_θ (θ 为

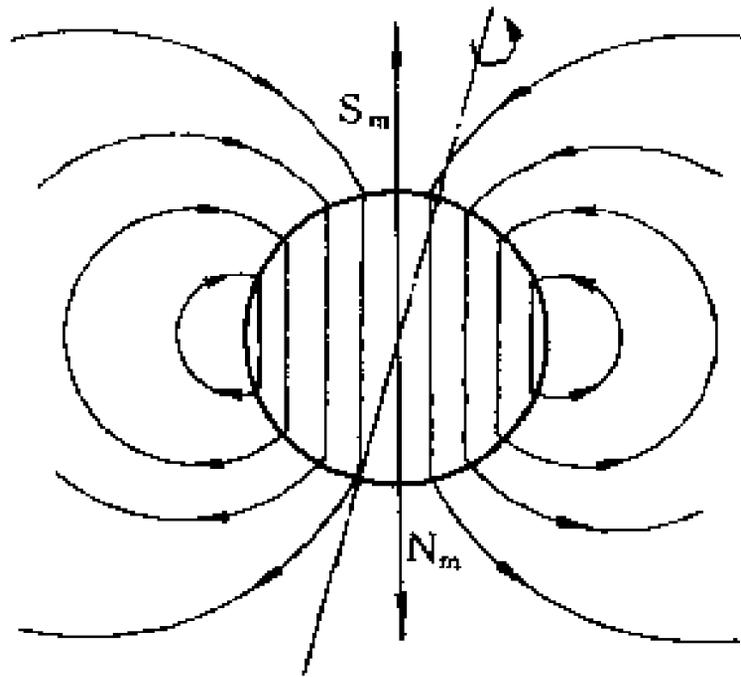


图 J-1 地球的磁场

磁纬度)和径向分量 B_r . 小磁针静止时所在的直立平面称为地磁子午面,这个平面与地球的地理子午面间的夹角称为磁偏角,根据测定发现地面上不同地点的磁偏角是不相同的,在赤道地区较小,但在高纬度区可以很大.小磁针静止时与水平面间的夹角称为磁倾角,在地磁赤道上,磁倾角为零;在磁南极和磁北极处的磁倾角为 90° . 磁场强度的水平分量、磁偏角和磁倾角三个量通常称为地磁的三个要素,地球磁场的研究必须先从这三个要素的测定入手.在北京地区,地磁场 $B = 0.548 \times 10^{-4} \text{ T}$,磁偏角为 -6° (偏东为正,偏西为负),磁倾角为 $57^\circ 1'$.

根据测量发现,在地面不同点地磁的三个要素是不同的,如在地图上将要素相同的点连成曲线可得出—张地磁图.早在 1581 年,英国的诺尔曼绘制了第一张世界地磁图,在图上标明世界各地罗盘指针所指示的实际方向,无疑此图对航行和探险事业中的导向以及发现地磁异常等方面有很大的参考价值.例如,当发现某一地区的地磁显著偏离地磁图上标明的数据资料时,也就是出现地磁异常时,这往往是该地区即将出现地震或气象突变的预兆;或者当从地磁图上发现某一地区的地磁数据与相邻地区相差悬殊时,

则可能表明该地区地下深处蕴藏着丰富的磁铁矿(“磁法探矿”)。我国已于1950年、1960年和1970年先后发表了由地面测量得到的不同比例尺的全国地磁图。1960年10月,国际上采用了一个“国际参考地磁场”,以此作为计算全球性地磁异常的参考。

人们还发现,地磁场的强度和方向已经过多次的循环变化:其强度由强变弱,以至消失变为零,然后地磁方向倒转,强度再由弱变至反方向的最大值,地壳中的火山岩石清楚地保留了地磁变化的资料。自从地球形成以来,自远古至今,地球上各处频频出现火山的爆发,每一次爆发时从地球内部喷射出大量的岩浆。在这些岩浆逐渐冷却凝固过程中,它里面的结晶体便会顺着当时地磁场方向有序地排列起来,采用现代检测手段,人们很容易推断出熔岩凝固的年代,从而可推知不同历史时期地磁场的方向和强度。根据对这些火山岩的精确测定,已知在过去4 000 000年内,地球磁场的方向倒转——即地磁的 N_m 极和 S_m 极南北移位——已经有9次,而在近3 000 000年内,地球磁极也曾3次南北移位。

最近几个世纪以来,科学家们连续测量和记载了地磁场强度的数据,发现地磁强度一直在不断地减弱。大约在10年前,美国通过所发射的地磁卫星对地磁进行了长时间的精密测量和仔细研究,得出了一个精确的地磁减弱速度,由此推算到公元32世纪(即1 200年后)来临之前,地磁将消失殆尽。根据以往地磁变化、南北移位的历史,在32世纪开始时,是否会象过去那样出现地磁方向的转向呢?到那时人们又将怎样来适应这样的地磁变化呢?在漫长的历史时期中,多次地磁转向时我们的祖先并没有留下真实情况及人们感受的记录,那么我们期望下一次地磁倒转历史能被我们的子孙描绘得一清二楚。至于是什么原因引起地磁场的循环变化,直到现在仍懵然无知。另外,昼、夜和季节更换也会引起地磁场有规律的变化,这种变化一般很小,在几十年中并不明显。

地磁场除了上述有规律的变化之外,还会突然出现不规则的变化,这种变化称为磁暴。产生磁暴的主要原因是:当太阳活动时,

在太阳黑子区域有一股连续发出的带电粒子流射向地球,由这些粒子流所形成的电流产生一个附加磁场,这附加磁场强烈地干扰地磁场而产生了磁暴.有时磁暴非常强烈,它能使指南针失效,它还会在地面上的输电线、电话线、输油管道和一切细长的金属导体中产生感应电流而引起破坏作用.磁暴和北极光往往同时发生.

有关地磁的起源一直是科学家们力图探明的一个基本课题.自从1819年奥斯特发现电流的磁效应,1820年安培提出物质的磁性来源于分子电流的假设后,科学家们很自然地想到地磁场应和地球内部的电流源相联系着.按现代的观点,地磁场来源于磁流体力学机制:地球炽热核心内的导电流体的运动和磁场的存在形成一个自行维持着的巨大直流发电机,使在地球核心内导电流体形成一个巨大的环形电流,从而使地球产生如图J-1所示的磁场.但是内部的环形电流又是怎样形成的呢?因为地磁方向每倒转一次,表明产生地磁的环形电流也已反向,又是什么机制促使如此巨大的环形电流周期性地变换方向的呢?这些都是科学家们正在努力探索的课题.

所有生物,包括人类在内,都已完全适应和习惯于在地磁环境下生活和繁衍,可以认为,地磁一方面对地球上的生命起着保护作用,一方面也为他们的生存创造了条件.根据人造卫星的探测,地面周围的磁场并不延伸到很遥远的区域,这是因为从太阳发射出来的等离子体阻止了地磁场的向外延伸,因此,地磁场局限在地球周围的有限区域之内,这个区域称为磁层或地磁层,它随地球一起运动,就是这个磁层挡住了由宇宙空间射来的、足以使生物致命的高能粒子流,使所有生物得以安全地栖息在地球上.还有人类和生物赖以生存的水,也是依靠地磁场将大量的氢离子吸引到地球表面,从而使它和空气中的氧化合而形成水滴和雨降落到地面的.所以也可以这样说,地球上的生命是伴随着地磁场的形成并增强到足以对生命起保护作用时才出现的,即生命与地磁两者是紧紧地联系在一起.

第十三章 电磁感应和暂态过程

在前几章中,我们研究了静电场和恒定磁场的基本规律,在表达这些规律的公式中,电场和磁场是各自独立、互不相关的.然而,激发电场和磁场的源——电荷和电流却是相互关联的,这就提醒我们:电场和磁场之间也必然存在着相互联系、制约的关系.1819年奥斯特发现了电流的磁效应后,这种想法引起不少人从事其逆现象的研究,尤其是英国物理学家法拉第(M. Faraday),对实验进行了系统研究,终于在1831年发现了电磁感应现象,并总结出电磁感应定律.

电磁感应现象的发现,不仅阐明了变化磁场能够激发电场这一关系,还进一步揭示了电与磁之间的内在联系,促进了电磁理论的发展,从而奠定了现代电工技术的基础,为人们广泛利用电能开辟了道路.

本章主要讨论电磁感应现象及其基本规律.在这个基础上,分别对电磁感应的几种类型,包括自感和互感进行讨论.最后介绍 RL 、 RC 电路的暂态过程和磁场的能量等内容.

§ 13-1 电磁感应定律

1. 电磁感应现象

电磁感应定律是建立在广泛的实验基础上的,因此,在讨论定律之前,我们首先用几个典型的电磁感应演示实验来说明什么是电磁感应现象,以及产生电磁感应的条件.

如图13-1所示,一个线圈与电流计的两端接成闭合回路,因

为这个电路中没有电源,所以电流计指针不会发生偏转.可是,当用一条形磁铁棒的 N 极(或 S 极)插入线圈时,可以观察到电流计指针发生偏转,表明线圈中有电流通过,这种电流称为感应电流.当磁铁棒与线圈相对静止,电流计指针不动.如果把这磁铁棒从线圈中抽出时,电流计指针又发生偏转,但这时电流计指针偏转的方向与磁铁棒插入线圈时的相反,这表明线圈中的感应电流与磁铁棒插入线圈时的流向相反.如果我们固定磁铁棒,而把线圈推向或拉离磁铁棒,可以观察与上面一样的现象.实验表明:只有当磁铁棒与线圈间有相对运动时,线圈中才会出现感应电流,相对运动的速度越大,感应电流也越大.

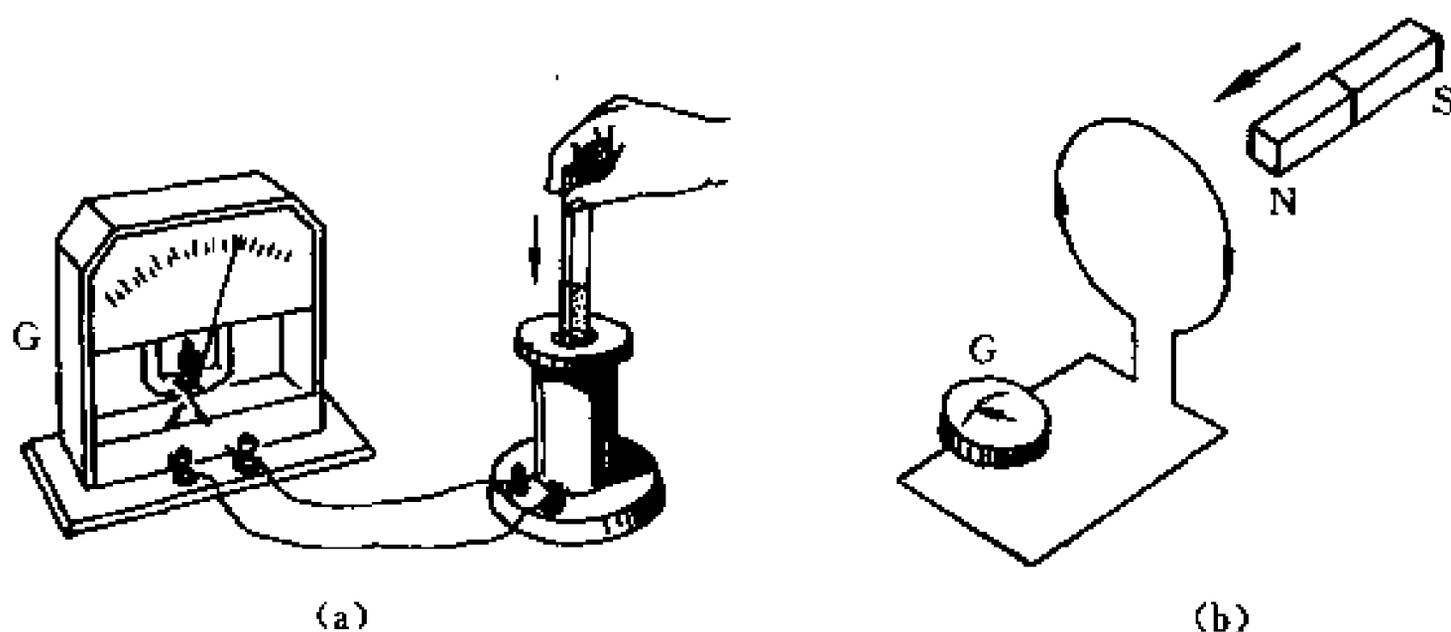


图 13-1 磁铁棒与线圈有相对运动时的电磁感应现象

又如图 13-2 所示,两个彼此靠得较近但相对静止的线圈,线圈 1 与电流计相连接,线圈 2 与一个电源和变阻器 R 相连接.当线圈 2 中的电路接通、断开的瞬间或改变电阻器 R 时,可以观察到电流计指针发生偏转,即在线圈 1 中出现感应电流.实验表明:只有在线圈 2 中的电流发生变化时,才能在线圈 1 中出现感应电流.

如果在图 13-2 的线圈 2 中加一铁磁性材料做芯子,重复上述实验过程,将会发现线圈 1 中的电流大大增加,说明上述现象还受到介质的影响.

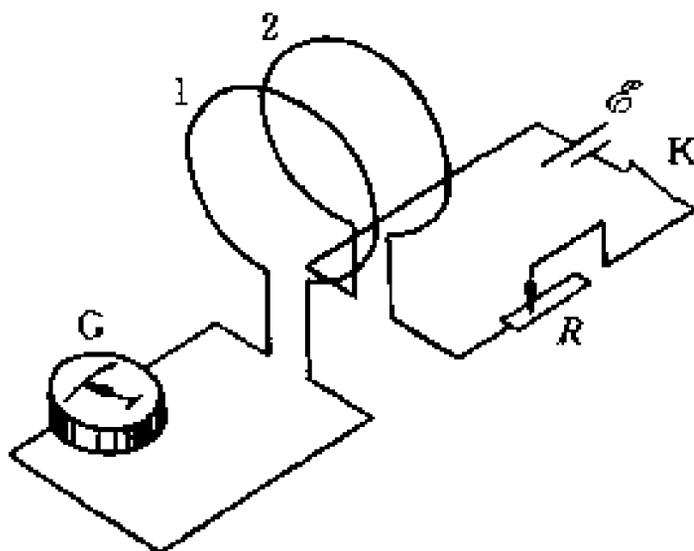


图 13-2 线圈中电流改变时的电磁感应现象

再观察一个演示实验,如图 13-3 所示,将一根与电流计连成闭合回路的金属棒 AB 放置在磁铁的两极之间,实验表明,当 AB 棒在两极之间的磁场中垂直于磁场和棒长的方向运动时,电流计

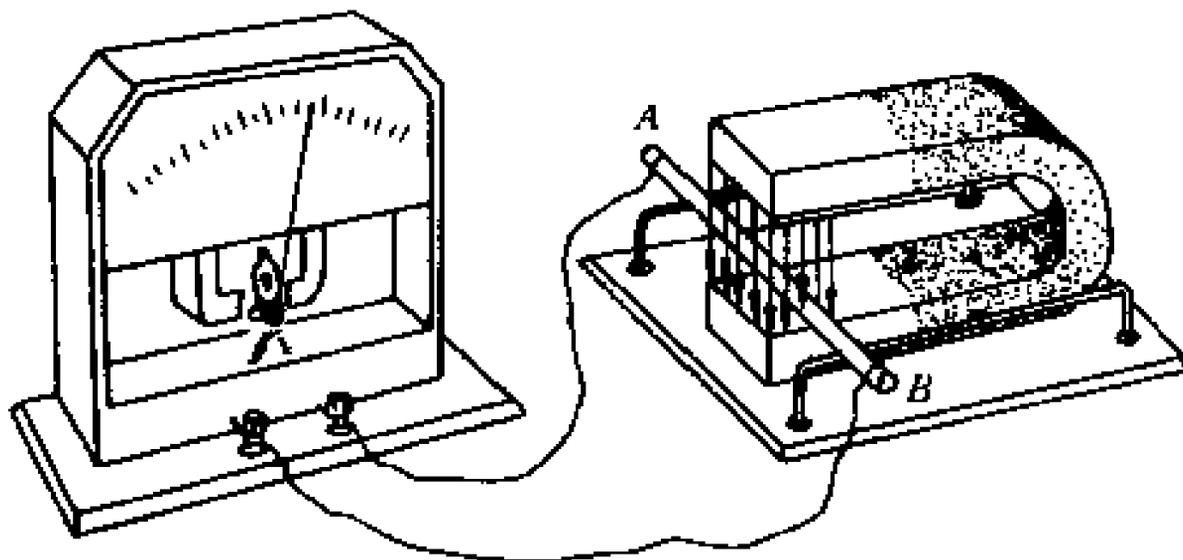


图 13-3 金属棒在磁场中运动时的电磁感应现象

的指针就会发生偏转,即在回路中出现感应电流. AB 棒运动得越快,电流计指针的偏转角也越大;当 AB 棒停止运动,电流计的指针也停止偏转,回路中没有感应电流.

在实验 1 和 2 中,不管是磁铁棒与线圈作相对运动,还是相对静止的两个线圈中一个电流发生变化,它们的共同点是:产生感应电流的线圈所在处的磁场发生了变化.但是,在实验 3 中,磁场是静止的,且在棒运动的范围内均匀分布,运动棒 AB 所在处的磁场

并没有变化, AB 棒的运动只是使它和电流计连成的回路面积有了变化, 结果在回路中同样能产生感应电流. 仔细分析以上的三个实验, 可概括出一个能反映其本质的共同因素, 那就是: 它们都使穿过回路所围面积内的磁通量发生了变化. 由此可得如下结论: 当穿过一个闭合导体回路所包围的面积内的磁通量发生变化时, 不管这种变化是由什么原因引起的, 在导体回路中就会产生感应电流. 这种现象称为电磁感应现象. 必须注意, 由于在线圈中插入铁芯后, 线圈中的感应电流大大增加, 这又说明感应电流的产生是因为磁感应强度 B 通量的变化, 而不是由于磁场强度 H 通量的变化.

2. 楞次定律

1833年, 楞次(Lenz)在进一步概括了大量实验结果的基础上, 得出了确定感应电流方向的法则, 称为楞次定律. 这就是: 闭合回路中产生的感应电流具有确定的方向, 它总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量, 去补偿或者反抗引起感应电流的磁通量的变化.

在上述实验 1 中, 当磁铁棒以 N 极插向线圈或线圈向磁棒的 N 极运动时, 通过线圈的磁通量增加, 感应电流所激发的磁场方向则要使通过线圈面积的磁通量反抗线圈内磁通量的增加, 所以线圈中感应电流所产生的磁感应线的方向与磁棒的磁感应线的方向相反[图 13-4(a)中的虚线]. 再根据右手螺旋定则, 可确定线圈中感应电流的方向如图中的箭头所示. 当磁铁棒拉离线圈或线圈背离 N 极运动时, 通过线圈面积的磁通量减少, 感应电流的磁场则要使通过线圈面积的磁通量去补偿线圈内磁通量的减少, 因而, 它所产生的磁感应线的方向与磁棒的磁感应线的方向相同[图 13-4(b)中的虚线], 感应电流的方向与上面相反, 如图中箭头所示.

其它两个演示实验也可以用同样的分析方法来确定感应电流的方向, 读者可自行分析.

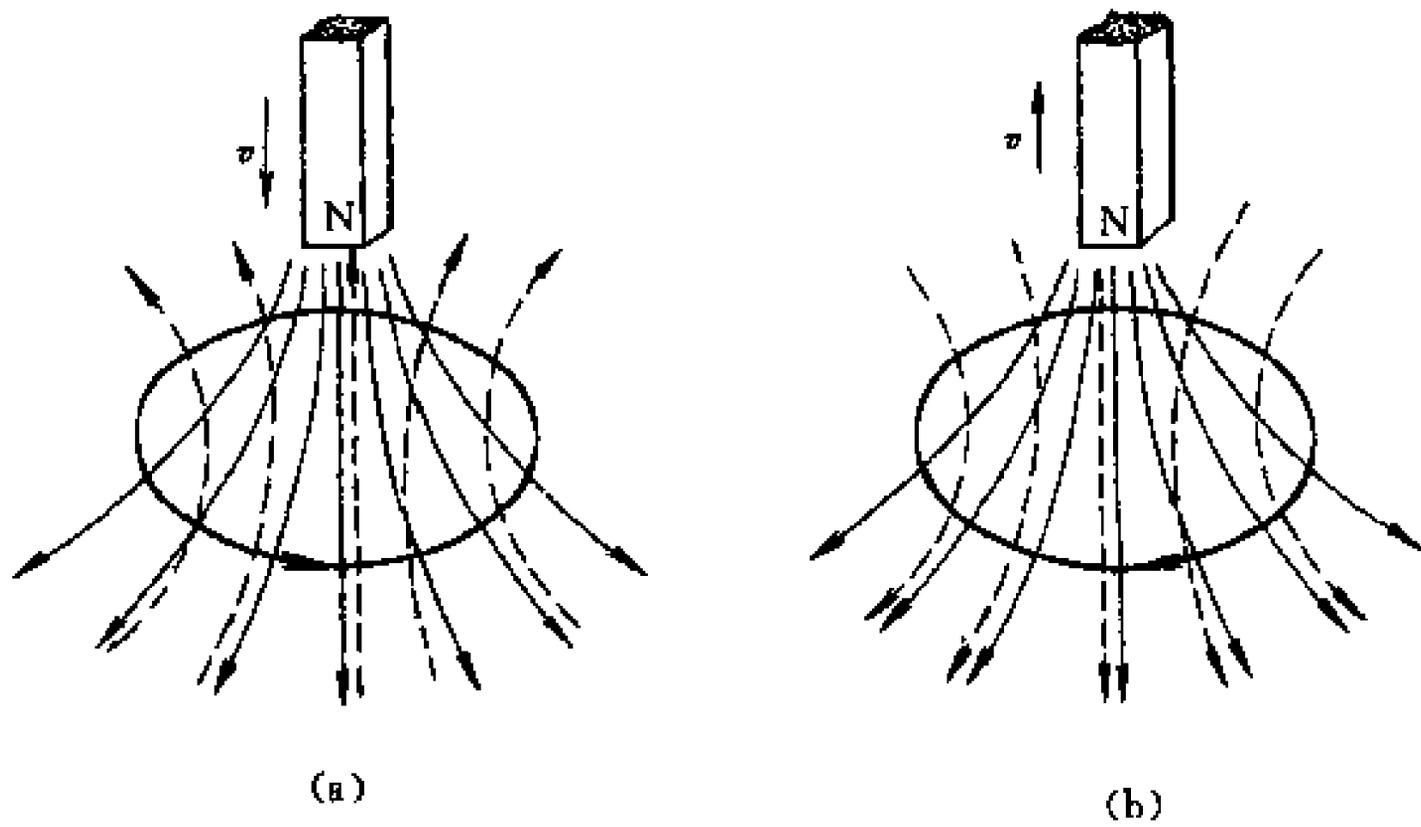


图 13-4 感应电流的方向

楞次定律实质上是能量守恒定律的一种体现. 在上述例子中可以看到, 当磁铁棒的 N 极向线圈运动时, 线圈中感应电流所激发的磁场分布相当于在线圈朝向磁铁棒一面出现 N 极 (图 13-5 中所画的线圈是它的剖面图), 它阻碍磁铁棒作相对运动. 因此, 在

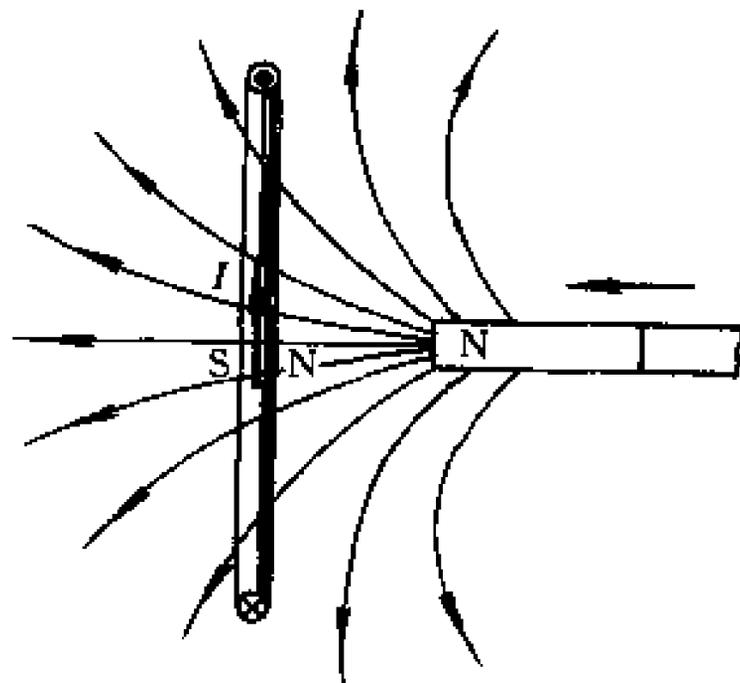


图 13-5 感应电流激发反抗磁铁棒运动的磁场

磁铁棒向前运动过程中, 外力必须克服斥力而做功; 当磁铁棒背离线圈运动时, 则外力必须克服引力而做功. 这时, 给出的能量转化

为线圈中感应电流的电能,并转化为电路中的焦耳-楞次热.反之,如果设想感应电流的方向不是这样,它的出现不是阻止磁铁棒的运动而是使它加速运动,那么只要我们把磁铁棒稍稍推动一下,线圈中出现的感应电流将使它动得更快,于是又增长了感应电流,这个增长又促进相对运动更快,如此不断地相互反复加强,所以只要在最初使磁铁棒作微小移动中作出微小的功,就能获得极大的机械能和电能,这显然是违背能量守恒定律的.所以,感应电流的方向遵从楞次定律的事实表明楞次定律本质上就是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现.

3. 法拉第电磁感应定律

法拉第对电磁感应现象作了定量的研究,总结得出了电磁感应的基本定律.其实,感应电流只是回路中存在感应电动势的对外表现,由闭合回路中磁通量的变化直接产生的结果应是感应电动势.所以法拉第用感应电动势来表述电磁感应定律,叙述如下:

通过回路所包围面积的磁通量发生变化时,回路中产生的感应电动势 \mathcal{E}_i 与磁通量对时间的变化率成正比.如果采用国际单位制,则此定律可表示为

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (13-1)$$

在约定的正负符号规则下,式中的负号反映了感应电动势的方向,它是楞次定律的数学表现.

由式(13-1)确定感应电动势 \mathcal{E}_i 的方向的符号规则如下:在回路上先任意选定一个转向作为回路的绕行正方向,再用右手螺旋法则确定此回路所围面积的正法线单位矢量 e_n 的方向,如图 13-6 所示;然后确定通过回路面积的磁通量的正、负,凡穿过回路面积的 B 的方向与正法线方向相同者为正,相反者为负;最后再考虑 Φ 的变化,从式(13-1)来看,感应电动势 \mathcal{E}_i 的正、负只由 $\frac{d\Phi}{dt}$ 决定.在

图 13-6 中, (a)、(c) 图中 B 值在增大, (b)(d) 中 B 值在减小, 这样对图 (a)、(b), $\Phi > 0$, 其中图 (a) $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 则 $\mathcal{E}_i < 0$, 表示感应电动势的方向和回路上所选定的正方向相反; 在图 (b) 中, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 则 $\mathcal{E}_i > 0$, 表示 \mathcal{E}_i 和回路正方向相同. 对于图 (c)、(d) $\Phi < 0$ 的情况可作同样的讨论. 用这种方法确定感应电动势方向的方法和用楞次定律确定的方向完全一致, 但在实际问题中用楞次定律来确定感应电动势的方向比较简便.

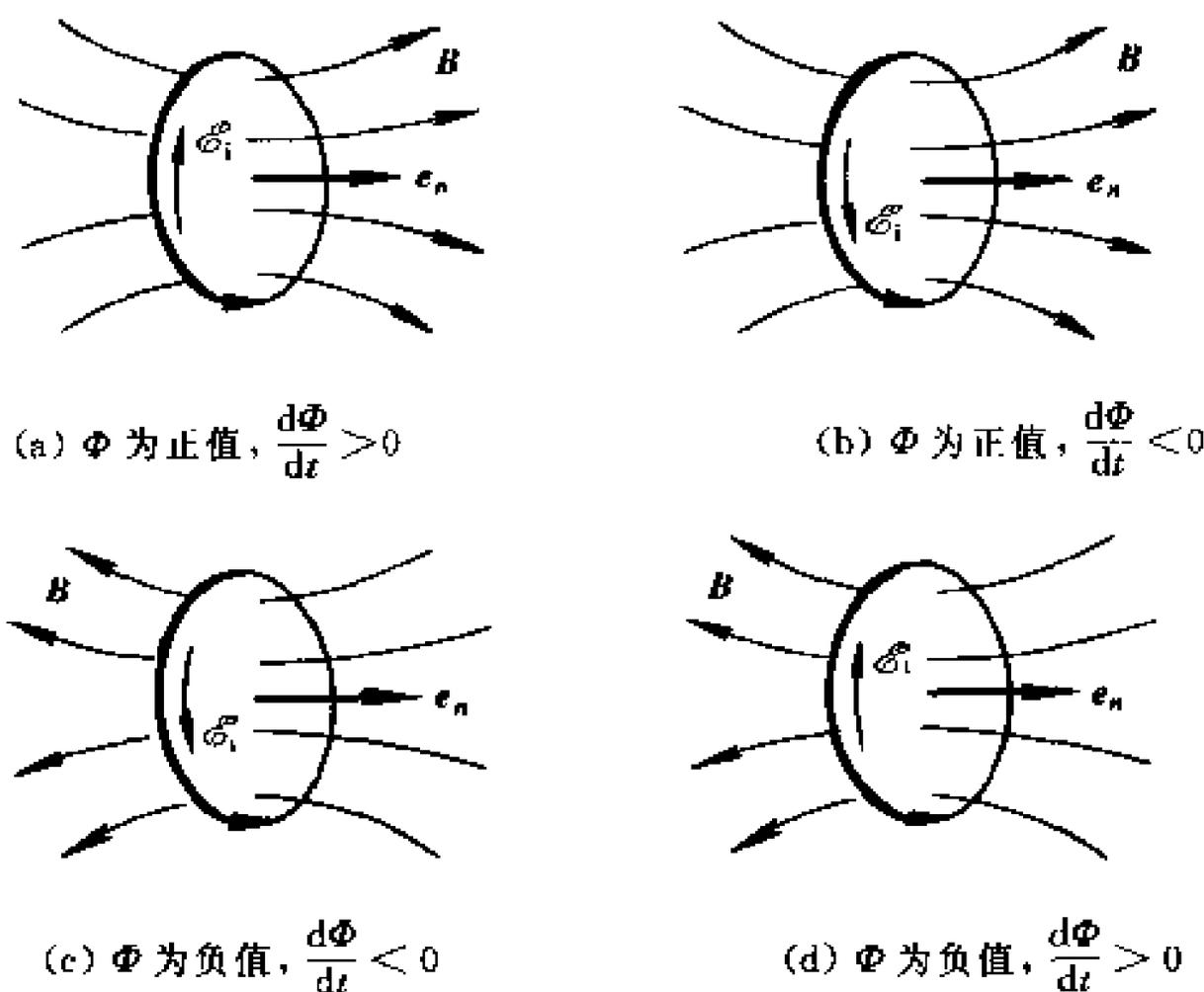


图 13-6 感应电动势的方向与 Φ 的变化之间的关系

应该指出, 以上所讨论的都是由导线组成的单匝回路, 如果回路是由 N 匝导线串联而成, 那么在磁通量变化时, 每匝中都将产生感应电动势. 如果每匝中通过的磁通量都是相同的, 则 N 匝线圈中的总电动势应为各匝中电动势的总和, 即

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} \quad (13-2)$$

习惯上,把 $N\Phi$ 称为线圈的磁通量匝数或磁链数. 如果每匝中的磁通量不同,就应该用各圈中磁通量的总和 $\Sigma\Phi$ 来代替 $N\Phi$.

如果闭合回路的电阻为 R ,则在回路中的感应电流为

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \quad (13-3)$$

利用式 $I = \frac{dq}{dt}$,可算出在 t_1 到 t_2 这段时间内通过导线的任一截面的感生电荷量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_1 dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (13-4)$$

式中 Φ_1 、 Φ_2 分别是 t_1 、 t_2 时刻通过导线回路所包围面积的磁通量. 式(13-4)表明,在一段时间内通过导线截面的电荷量与这段时间内导线回路所包围的磁通量的变化值成正比,而与磁通量变化的快慢无关. 如果测出感生电荷量,而回路的电阻又为已知时,就可以计算磁通量的变化量. 常用的磁通计就是根据这个原理而设计的.

最后,根据电动势的概念可知,当通过闭合回路的磁通量变化时,在回路中出现某种非静电性力,感应电动势就等于移动单位正电荷沿闭合回路一周这种非静电力所作的功. 如果用 E_k 表示等效的非静电性场强,则感应电动势 \mathcal{E}_1 可表为

$$\mathcal{E}_1 = \oint E_k \cdot dl$$

又因通过闭合回路所围面积的磁通量为 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 于是法拉第电磁感应定律又可表为积分形式

$$\oint E_k \cdot dl = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (13-5)$$

式中积分面 S 是以闭合回路为边界的任意曲面.

例题 13-1 有一长直螺线管,在管的中部放置一个与它同轴

线、面积 $S = 6 \text{ cm}^2$ 、共绕有 $N = 10$ 匝、总电阻 $R = 2 \Omega$ 的小线圈 [图 13-7(a)]. 开始时螺线管内的恒定磁场为 $B_0 = 0.05 \text{ T}$, 切断电源后管内磁场按指数规律 $B = B_0 e^{-t/\tau}$ 下降到零, 式中 $\tau = 0.01 \text{ s}$. 求在小线圈内产生的最大感应电动势 \mathcal{E}_{max} 及通过小线圈截面的感生电荷量 q .

解 通过单匝小线圈的磁通量为

$$\Phi = B \cdot S = B_0 S e^{-t/\tau}$$

因此, 在小线圈中产生的总感应电动势为

$$\mathcal{E}_i = \left| N \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{NB_0 S}{\tau} e^{-t/\tau}$$

由于通过小线圈面积的磁通量按指数规律变化, 小线圈中的感应电动势也按指数规律下降 [图 13-7(b)], 在 $t=0$ 的瞬时感应电动势最大, 把已知量代入得

$$\mathcal{E}_{\text{max}} = \frac{NB_0 S}{\tau} = \frac{10 \times 0.05 \times 6 \times 10^{-4}}{0.01} \text{ V} = 0.03 \text{ V}$$

在 $t=0$ 到 $t=\infty$ 这段时间内, 通过小线圈截面的感生电荷量为

$$q = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = \frac{N}{R} \int \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| dt = \frac{N}{R} \int_{\Phi_0}^0 |d\Phi| = \frac{N}{R} \Phi_0 = \frac{N}{R} B_0 S = \frac{10 \times 0.05 \times 6 \times 10^{-4}}{2} \text{ C} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ C}$$

例题 13-2 一长直导线中通有交变电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 式中 I 表示瞬时电流, I_0 是电流振幅, ω 是角频率, I_0 和 ω 都是常量. 在长直导线旁平行放置一矩形线圈, 线圈面积与直导线在同一平面内.

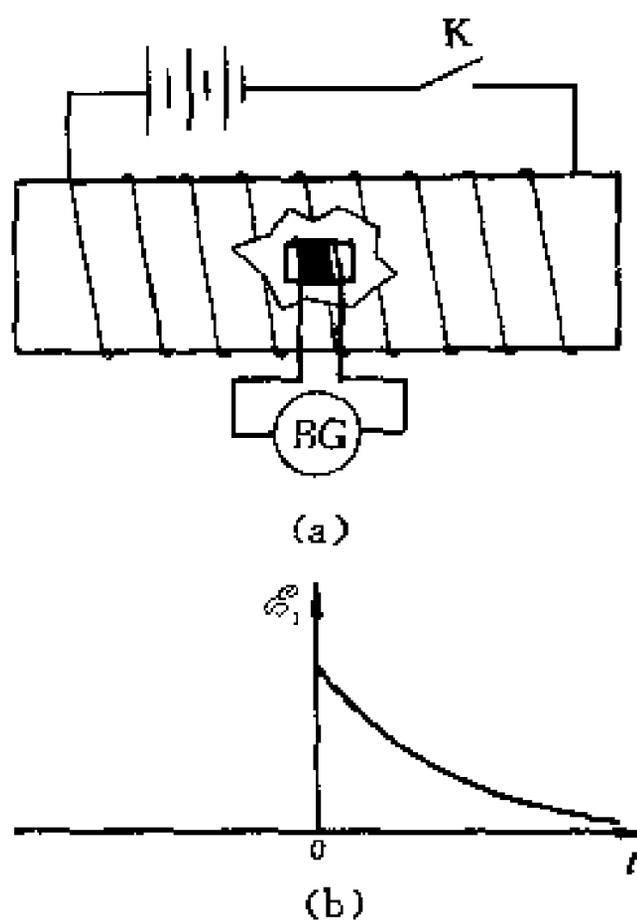


图 13-7 电磁感应举例

已知线圈长为 l , 宽为 b , 线圈近直线的一边离直导线的距离为 d (图 13-8). 求任一瞬时线圈中的感应电动势.

解 在某一瞬时, 距直导线为 x 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$$

选顺时针的转向作为矩形线圈的绕行正方向, 则通过图中阴影面积 $dS = ldx$ 的磁通量为

$$d\Phi = B \cos 0^\circ dS = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} l dx$$

在该瞬时 t , 通过整个线圈所围面积的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} l dx = \frac{\mu_0 l I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right)$$

由于电流随时间变化, 通过线圈面积的磁通量也随时间变化, 故线圈内的感应电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 l I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \frac{d}{dt} (\sin \omega t) = \\ &= - \frac{\mu_0 l I_0 \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

从上式可知, 线圈内的感应电动势随时间按余弦规律变化, 其方向也随余弦值的正负作逆时针、顺时针转向的变化.

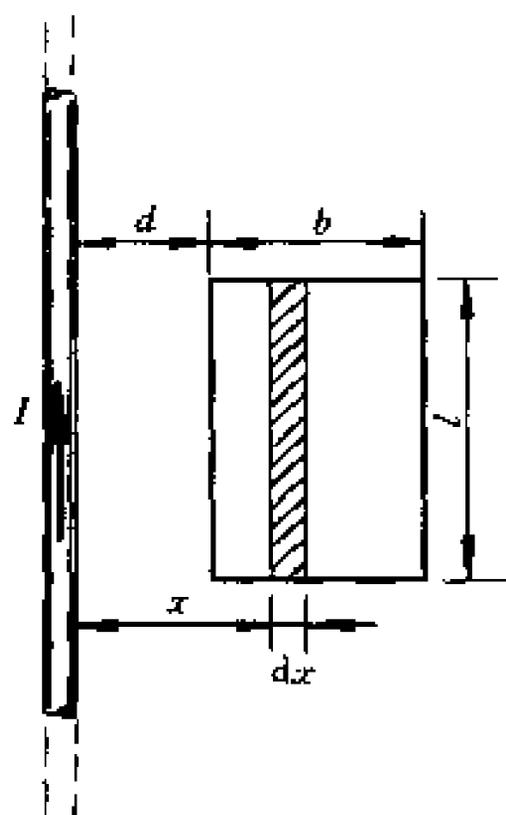


图 13-8 电磁感应举例

§ 13-2 动生电动势

法拉第电磁感应定律告诉我们, 只要通过回路所围面积中的磁通量发生变化, 回路中就会产生感应电动势. 由式 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

可知,使磁通量发生变化的方法是多种多样的,但从本质上讲,可归纳为两类:一类是磁场保持不变,导体回路或导体在磁场中运动;另一类是导体回路不动,磁场发生变化.从本节起,我们将分别讨论上述两类情况下感应电动势的本质以及电磁感应定律在各种特殊情形中的应用.

1. 在磁场中运动的导线内的感应电动势

首先讨论磁场不变、导体在磁场中运动或回路的形状和位置变动而产生的电磁感应现象,这种由于导体运动而产生的感应电动势,习惯上称为动生电动势.下面先讨论两个简单的例子.

如图 13-9 所示,一个由导线做成的回路 $ABCD$,其中长度为 l 的导线段 AB 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中以速度 v 向右作匀速直线运动,为简单计,假定 AB 、 v 和 B 三者互相垂直.若在

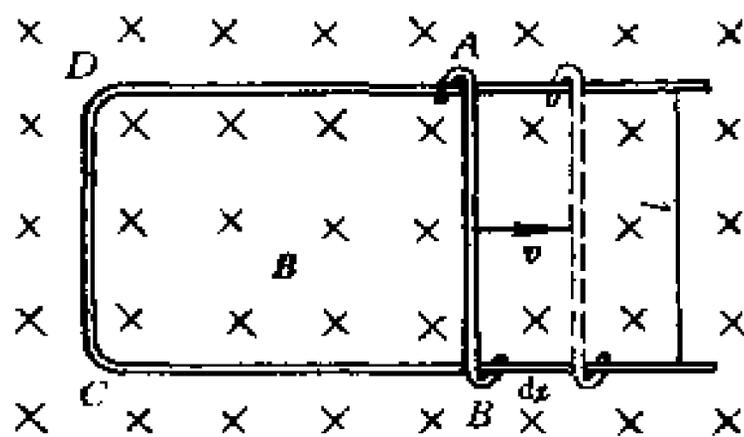


图 13-9 动生电动势

dt 时间内,导线 AB 移动的距离为 dx ,则在这段时间内回路面积的增量为 $dS = ldx$.如果选取回路面积矢量的方向垂直纸面向里,通过回路所围面积磁通量的增量为

$$d\Phi = B \cdot dS = Bldx$$

根据法拉第电磁感应定律,在运动导线 AB 段上产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - Bl \frac{dx}{dt} = - Blv \quad (13-6)$$

这里,通过回路面积磁通量的增量也就是导线在运动过程中

所切割的磁感应线数,所以动生电动势在量值上等于在单位时间内导线所切割的磁感应线数.

由式中的负号或楞次定律,可以确定动生电动势的方向是从 B 指向 A 的.这时要注意,电动势是导线运动产生的,这个电动势只存在于导线 AB 段内,即运动着的导线 AB 相当于一个电源,在电源内部,电动势方向是由低电势指向高电势的.因此 A 点的电势比 B 点的高.这就是说, A 端相当于电源的正极, B 端相当于负极,这同过去在中学里用右手法则来确定动生电动势的方向所得出的结果是一致的.

导体在磁场中运动切割磁感应线而产生的电动势,可用金属电子理论来解释,式(13-6)可以从理论上导出.当导线 AB 以速度 v 向右运动时,导线内每个自由电子也就获得向右的定向速度 v ,由于导线处在磁场中,自由电子受到的洛伦兹力 F 为

$$F = -ev \times B$$

式中 e 为电子电荷量的绝对值, F 的方向沿导线从 A 指向 B ,电子在力 F 作用下,将沿导线从 A 端向 B 端运动,结果在回路中出现逆时针方向的感应电流.非静电性力就是洛伦兹力 F ,它可以看作等效于一个非静电性场强 E_k 对电子的作用,即

$$-eE_k = -ev \times B$$

或

$$\boxed{E_k = v \times B} \quad (13-7)$$

由于回路的 BC 、 CD 和 DA 段相对磁场静止,其中非静电性场强 $E_k = 0$,只有 AB 段中的 $E_k \neq 0$,由矢量积关系可知, AB 段中的 E_k 平行于 l ,所以在回路 $ABCD A$ 中的感应电动势 \mathcal{E}_i 为

$$\mathcal{E}_i = \oint E_k \cdot dl = \int_A^B E_k \cdot dl = \int_A^B v \times B \cdot dl = lvB$$

这结果与式(13-6)完全一致.这表明形成动生电动势的实质是运动电荷受洛伦兹力的结果.

在一般情况下,磁场可以不均匀,导线在磁场中运动时各部分的速度也可以不同, v 、 B 和 l 也可以不相互垂直,这时运动导线内

总的动生电动势可用式

$$\mathcal{E}_i = \int_L \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (13-8)$$

来计算. 这里线元矢量 $d\mathbf{l}$ 的方向是任意选定的, 当 $d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 间呈锐角时, \mathcal{E}_i 为正, 表示 \mathcal{E}_i 顺着 $d\mathbf{l}$ 方向; 呈钝角时, \mathcal{E}_i 为负, 表示 \mathcal{E}_i 逆着 $d\mathbf{l}$ 方向.

在回路中(图 13-9)建立起感应电流后, 载流导线 AB 段在外磁场中又要受到安培力 F 的作用, 其大小为

$$F = BI l$$

方向在纸面内垂直于导线向左(图 13-10). 所以, 如要维持 AB 向右作匀速运动, 使在 AB 段导线中产生恒定的电动势, 从而在回路中建立起恒定的感应电流 I_i , 就必须在 AB 段上施加一同样大小方向向右的外力 F' (回路的另外三段边框固定, 受力情况不讨论). 因此, 在维持 AB 段导线作匀速运动过程中, 外力 F' 必须克服安培力 F 而做功, 它所消耗的恒定功率为

$$P = F' v = BI_l v$$

又如上所述, 运动导线 AB 相当于一个电源, 其动生电动势 $\mathcal{E}_i = Blv$, 它向回路中供应的电功率为

$$P_e = \mathcal{E}_i I_i = BI_l v$$

可以看到, P_e 正好等于 P . 这一关系从能量的转换来说就是: 电源(即“运动导线 AB ”)向回路中供应的电能来源于外界供给的机械能.

实质上, 我们这里所讨论的就是发电机的工作原理, 也就是动生电动势的一个实际应用. 发电机是把机械能转化为电能的装置, 从力学方面来说, 外力 F' 作功表示外界向发电机供给了机械能,

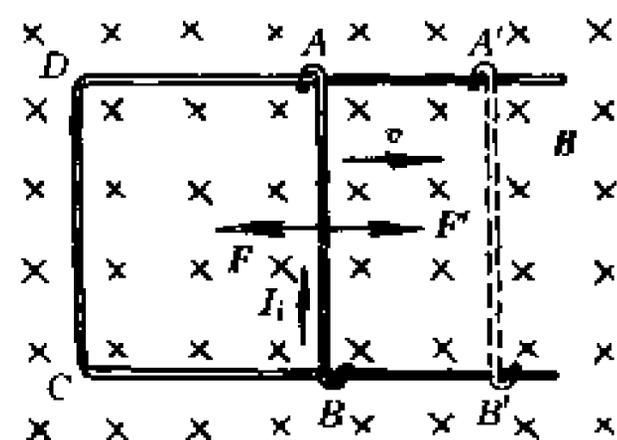


图 13-10 导线在磁场中运动时的能量关系

磁场力 F 作负功表示发电机接受了此能量. 在电路方面来说, 电源(即“运动导线 AB ”)的电动势为 \mathcal{E}_i , 电源向电路中供应出电能, 其电功率为 $\mathcal{E}_i I_i$. 由此可见, “磁场力 F 作负功, 接受了机械能”和“电源向电路中供应出电能”就是“机械能向电能转化”同一事实的两个侧面. 所以, 要使发电机不断地工作, 就得用水轮机、汽轮机或其他动力机械带动导线运动, 把机械能不断地转化为电能.

例题 13-3 如图 13-11 所示, 铜棒 OA 长 $L=50\text{ cm}$, 在方向垂直纸面向内的匀强磁场 ($B=0.01\text{ T}$) 中, 沿反时针方向绕 O 轴转动, 角速度 $\omega=100\pi\text{ rad/s}$, 求铜棒中动生电动势的大小和指向. 如果是半径为 50 cm 的铜盘以上述角速度转动, 求盘中心和边缘之间的电势差.

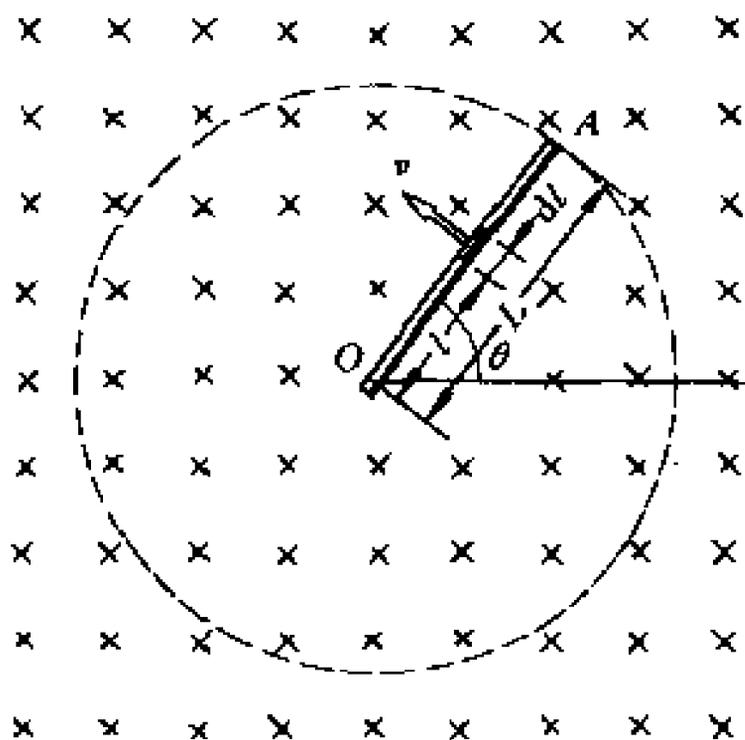


图 13-11 铜棒中动生电动势的计算

解 当铜棒作匀速转动时, 铜棒上各点的速度不相同, 因此必须划分小段来考虑. 在铜棒上距 O 点为 l 处取长度元 dl , 其速度 $v=\omega l$. 根据直导线中动生电动势的公式(13-8)可知 dl 上的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_i = Bvdl = B\omega l dl$$

各小段上的 $d\mathcal{E}_i$ 的指向相同, 所以铜棒中总的动生电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \int_0^L B\omega dl = \frac{B\omega L^2}{2} = \\ &= \frac{0.01 \times 100\pi \times (0.5)^2}{2} \text{ V} = 0.39 \text{ V}\end{aligned}$$

由图可知, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 的方向由 A 指向 O , 故 \mathcal{E}_i 的指向从 A 到 O . O 点与 A 点之间的电势差为

$$V_O - V_A = 0.39 \text{ V}$$

此题还有另一解法. 设铜棒在 Δt 时间内所转过的角度为 $\Delta\theta$, 则在这段时间内铜棒所切割的磁感应线数等于它所扫过的扇形面积内所通过的磁通量, 即

$$\Delta\Phi = B \frac{1}{2} L L \Delta\theta = \frac{1}{2} B L^2 \Delta\theta$$

所以铜棒中的动生电动势

$$\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} B L^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} B L^2 \omega$$

结果与上一解法完全一致.

如果是铜盘转动, 可以把铜盘想象成由无数根并联的铜棒组合而成, 每根铜棒都类似于 OA , 因这些铜棒是并联的, 所以铜盘中心与边缘之间的电势差仍等于每根铜棒的电势差

$$V_O - V_A = 0.39 \text{ V}$$

如果把 O 点和 A 点与外电路接通, 则在磁场中转动的铜棒就能对外供应电流, 这就是一种简易发电机的模型.

例题 13-4 如图 13-12 所示, 一长直导线中通有电流 $I=10 \text{ A}$, 在其附近有一长 $l=0.2 \text{ m}$ 的金属棒 AB , 以 $v=2 \text{ m/s}$ 的速度平行于长直导线作匀速运动, 如棒的近导线的一端距离导线 $d=0.1 \text{ m}$, 求金属棒中的动生电动势.

解 由于金属棒处在通电导线的非均匀磁场中, 因此必须将金属棒分成很多长度元 dx , 这样在每一个 dx 处的磁场可以看作是均匀的, 其磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

式中 x 为长度元 dx 与长直导线之间的距离. 根据动生电动势的公式, 可知 dx 小段上的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_i = Bvdx = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} vdx$$

由于所有长度元上产生的动生电动势的方向都是相同的, 所以金属棒中的总电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \int d\mathcal{E}_i = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} vdx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(\frac{d+l}{d}\right) = \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi} \times 2 \times \ln 3 \text{ V} = \\ &= 4.4 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

\mathcal{E}_i 的指向是从 B 到 A 的, 也就是 A 点的电势比 B 点高.

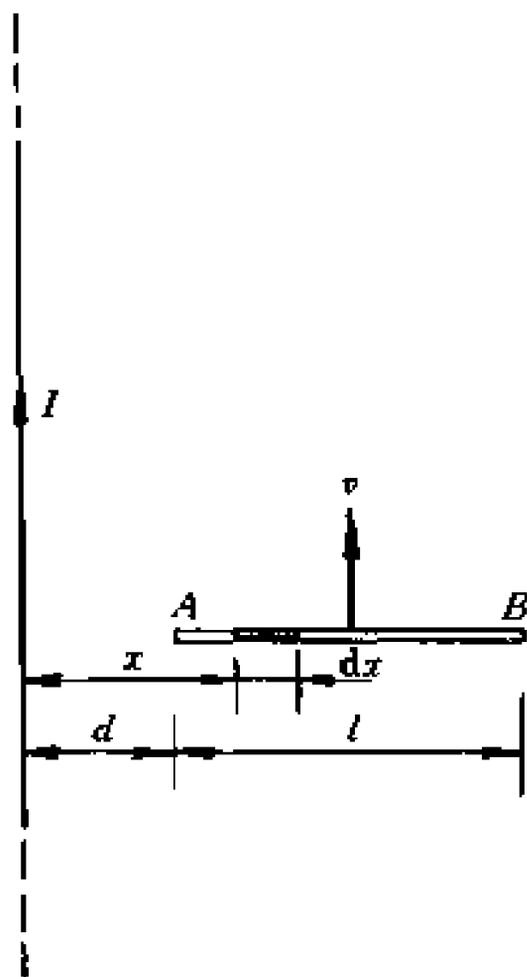


图 13-12

2. 在磁场中转动的线圈内的感应电动势

作为第二个例子, 我们讨论一个在均匀磁场中作匀速转动的矩形线圈. 设矩形线圈 $ABCD$ 的匝数为 N , 面积为 S , 使这线圈在匀强磁场中绕固定的轴线 OO' 转动, 磁感应强度 B 与 OO' 轴垂直 (图 13-13). 当 $t=0$ 时, 线圈平面的法线单位矢量 e_n 与磁感应强度 B 之间的夹角为零, 经过时间 t , 线圈平面的法线单位矢量 e_n 与 B 之夹角为 θ , 这时通过每匝线圈平面的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \theta$$

当线圈以 OO' 为轴转动时, 夹角 θ 随时间改变, 所以 Φ 也随时间改变. 根据法拉第电磁感应定律, N 匝线圈中所产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

式中 $\frac{d\theta}{dt}$ 是线圈转动时的角速度 ω . 如果 ω 是常量, 那么在 t 时, $\theta = \omega t$, 代入上式即得

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega \sin \omega t$$

令 $NBS\omega = \mathcal{E}_0$, 表示当线圈平面平行于磁场方向的瞬时的动生电动势, 也就是线圈中最大动生电动势的量值, 这样

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (13-9)$$

式(13-9)也可用洛伦兹力的观点导出. 当线圈平面法线单位矢量 e_n 与 B 之间的夹角为 $\theta = \omega t$ 时, AB 段上各点都以速度 v 运动, 按式(13-7), AB 段中的等效非静电性场强为 $E_k = v \times B$, 方向由 A 指向 B (图13-13), 其大小为 $E_k = vB \sin \theta$; 同样, 在 CD 段中, E_k 的方向由 C 指向 D , 大小和 AB 段中的相等; 在 BC 和 DA 段中, E_k 的方向都垂直于线段. 如设 $AB = CD = l_1$, $BC = CA = l_2$. 则 E_k 沿 $ABCD$ 的线积分, 即在线圈中的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = N \oint E_k \cdot dl = 2Nl_1 E_k = 2Nl_1 v B \sin \theta$$

线圈绕 OO' 轴转动时, 从图中可知, AB 和 CD 段的速度 v 与角速度 ω 的关系为 $v = \frac{1}{2} l_2 \omega$, 代入上式则有

$$\mathcal{E}_i = Nl_1 l_2 \omega B \sin \omega t = N S B \omega \sin \omega t$$

式中 $S = l_1 l_2$ 是矩形线圈的面积, 结果和式(13-9)相同.

由上式可见, 在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的, 周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$. 在两个相邻的半周期中, 电动势的方向相反 (图 13-14), 这种电动势叫做 交变电动势. 在交变电

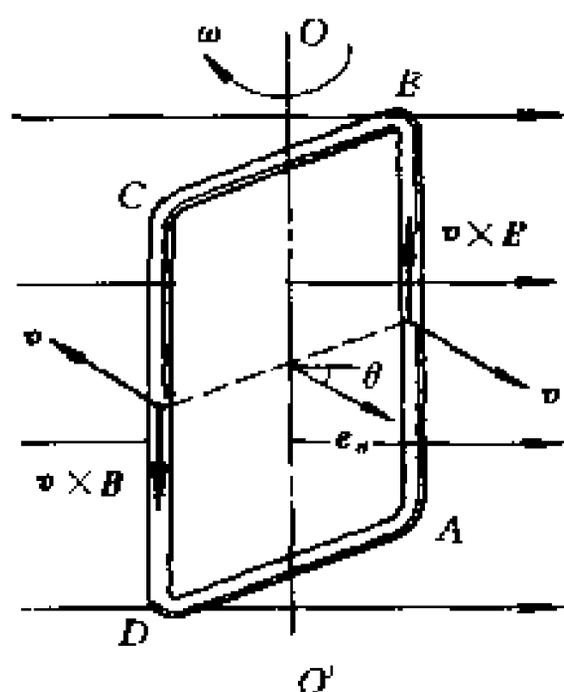


图 13-13 在磁场中转动的线圈中的感应电动势和电流

动势的作用下,线圈中的电流也是交变的(图 13-14),叫做交变电流或交流.由于线圈内自感应的存在(见 § 13-5),交变电流的变化要比交变电动势的变化滞后一些,所以线圈中的电流一般可以写成

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (13-10)$$

图 13-14 是线圈中交变电动势 \mathcal{E} 和交变电流 I 随时间 t 的变化曲线.以上所述,就是发电机的基本原理.

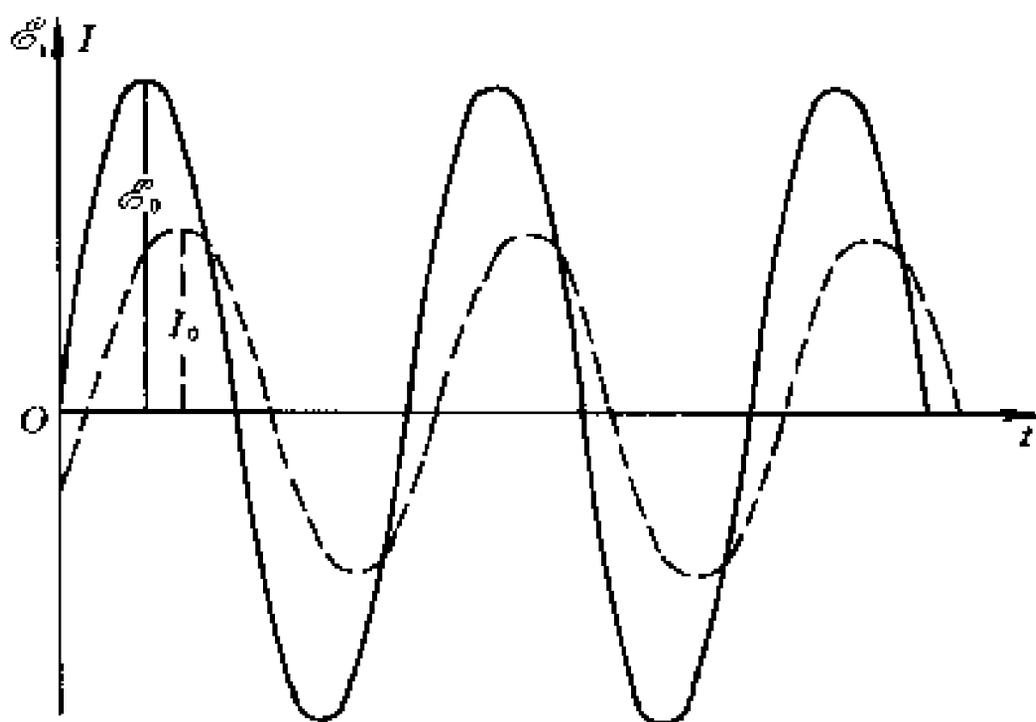


图 13-14 交变电动势与交变电流

为了对动生电动势有更深刻的理解,我们再从安培力作功、电路的欧姆定律及能量守恒的观点来分析下面的例子.

在图 13-15 的电路中,由一个电动势为 \mathcal{E} 的电源在电路中产生电流 I .垂直纸面向里的磁场 B ,对长为 l 的载流导线 AB 段施以安培力 $F = IlB$,使 AB 段导线无摩擦地向右滑动.在 F 的作用下,在 dt 时间内,导线沿力 F 的方向移动 $dx = BB'$ 距离至 $A'B'$ 位置,故在 dt 时间内,安培力 F 对载流导线 AB 所作的功为

$$dA = F \cdot dx = IlBdx = IBdS = Id\Phi$$

式中 $dS = ldx$ 是导线 AB 移动过程中所扫过的面积元, $d\Phi$ 是通过该面积元的磁通量.在 dt 时间内,电源输出的电能为 $\mathcal{E}Idt$,这能量的一部分转变成电路中产生的焦耳-楞次热 I^2Rdt ,一部分供安

培力做功 $Id\Phi$. 根据能量守恒定律得

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi$$

用 Idt 除上式, 经移项得

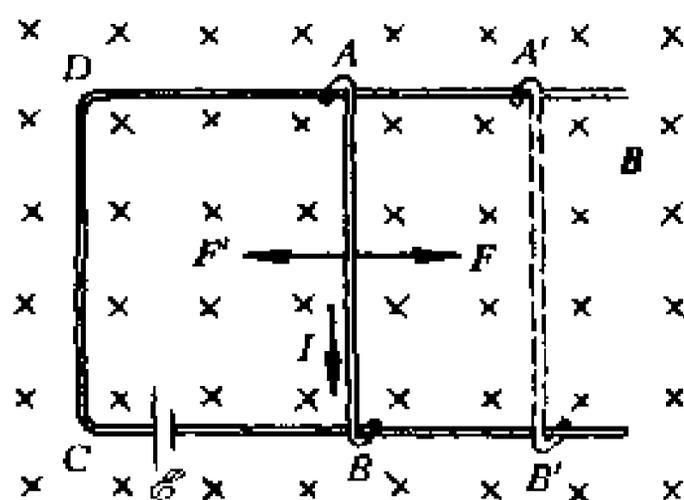


图 13-15 通电导线在磁场中运动时的能量转换

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}$$

从全电路欧姆定律的观点来看, $-\frac{d\Phi}{dt}$ 在电路中的作用和电源电动势处于同等级地位, 它就是由磁通量变化所引起的感应电动势, 即法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

这样, 就由能量守恒定律导出了电磁感应定律, 说明磁力做功是和电磁感应有内在联系的. 在这里, \mathcal{E}_i 是导线 AB 以速度 v 向右运动的同时在导线中产生的动生电动势, 其大小 $\mathcal{E}_i = Blv$, 指向从 B 向 A . 在电路中, 这个动生电动势 \mathcal{E}_i 与电源的电动势 \mathcal{E} 有相反的指向, 这时电源处于供应电能的地位, “运动导线 AB ” 反而处于接受电能的地位, 所以通常把 \mathcal{E}_i 称为反电动势. 我们在习惯上常说, 电源 \mathcal{E} 要克服反电动势 \mathcal{E}_i 而做功.

通过计算我们可以看到, 电源为克服反电动势而用去的电能等于

$$dW = \mathcal{E}_i Idt = Blv Idt = Id\Phi$$

这正好和磁力所作的功 dA 相等. 实质上我们这里讨论的就是电动机的工作原理, 电动机输出的机械能就是来自电能的转化, 我们所说的“克服反电动势而消耗了电能”和“磁力作正功而输出机械能”就是电动机中“电能向机械能转化”同一事实的两种不同的表述.

最后, 对于电动机中反电动势的问题再指出一点, 电动机在工作时, 电枢线圈两端就产生反电动势. 在启动时, 由于电枢转动较慢, 反电动势较小, 线圈中就有很大的启动电流. 当电动机的转速增加时, 由于反电动势增加, 电流就减小. 所以在直流电动机启动时, 常用电阻和电枢线圈串联或用其他方法以限制启动电流, 当转速增加到一定大小时, 反电动势已足够大, 这时再撤去电阻.

在这里我们提出一个需要回答的问题: 第十一章中曾讲过, 洛伦兹力恒与运动电荷的速度相垂直, 因此它对运动电荷永不做功, 又讲过安培力是洛伦兹力的宏观表现, 但安培力在使导线运动时却可能做功; 在本节中又说明与动生电动势相应的非静电力是洛伦兹力, 而电动势的定义却是移动单位电荷非静电力的功. 这两个问题好象都和洛伦兹力不作功有矛盾, 而矛盾的焦点集中表现在: 洛伦兹力到底做功不做功? 为了得到清楚的答案, 下面对图 13-15 中导线 AB 内的电子所受的洛伦兹力作全面的分析. 当导线 AB 中通有电流时, 其中电子沿导线向上作定向漂移运动, 其漂移速度为 v_1 , 此时导线因受安培力的作用向右运动, 电子又有一个随导线一起运动的速度 v_2 . 电子的合速度为 $v_1 + v_2$, 它受到的洛伦兹力为(见图 13-16)

$$F = -e(v_1 + v_2) \times B$$

此力可分为两部分: $F_1 = -ev_1 \times B$ 垂直导线与导线的运动方向相同, 对电子做功; $F_2 = -ev_2 \times B$ 沿导线与 v_1 相反, 对电子作负功. 可以证明, 两分力对电子所做的总功为

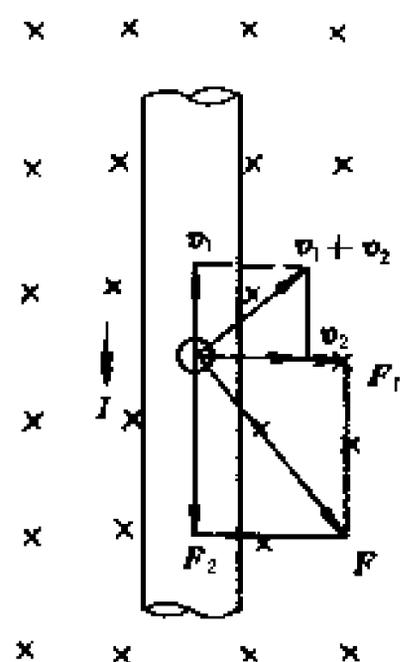


图 13-16 洛伦兹力不作功

零,这就是说,洛伦兹力总的来说是不做功的.但是,从宏观上看, F 的两个分力却起着不同的作用, F_1 在宏观上表现为导线 AB 受到的安培力; F_2 表现为产生动生电动势的非静电性力,它恒与电源电动势的方向相反,即上面所说的反电动势.

综上所述,“安培力(磁力)的作功”和“动生电动势的存在”是一对共存的矛盾,两者之间的联系与能量守恒定律紧密地结合着.在发电机中,动生电动势处于对外表现的主要地位(供应电能),但它与“磁力作负功,向外界索取机械能”紧密地关联着.在电动机中,磁力作功处于主要地位(供应机械能),但它与“动生电动势的存在,向电源索取电能”分不开.对电磁现象之间的矛盾关系,要善于分析和掌握,并加以利用.

例题 13-5 边长为 $l=5\text{ cm}$ 的正方形线圈,在磁感应强度 $B=0.84\text{ T}$ 的磁场中绕轴转动(图 13-17).已知线圈的铜线的电阻率为 $\rho=1.7\times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$,截面积 $S'=0.5\text{ mm}^2$,共 10 匝.线圈的转速 $n=10\text{ r/s}$,转轴与磁场方向垂直.求:(1)由图示的位置(即线圈平面与磁场垂直)转过 30° 时线圈内的动生电动势;(2)线圈转动时的最大电动势,及该时刻线圈的位置;(3)由图示的位置开始转过 1 s 时线圈内的动生电动势;(4)转过 180° 时通过铜线任一截面的感生电荷量.

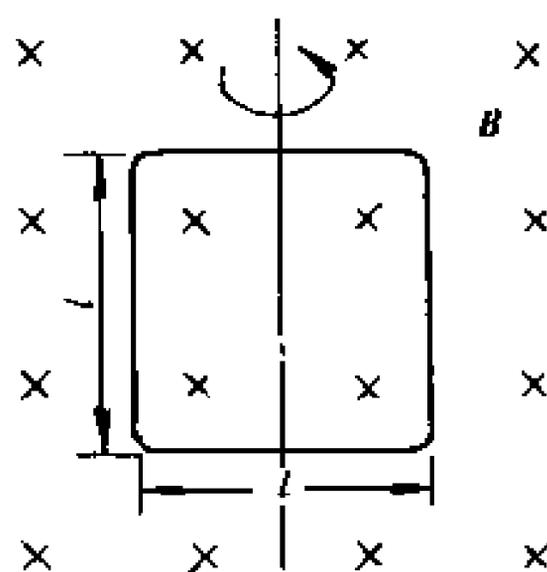


图 13-17

解 取逆时针的绕行方向作为正方向,并取图示位置作为计时的起点($t=0$),则当线圈转过 θ 角时,通过单匝线圈面积的磁通量

$$\Phi = BS\cos\theta = Bl^2\cos\theta$$

设线圈转动的角速度为 ω ,于是 $\omega=2\pi n$, $\theta=\omega t=2\pi nt$,根据法拉第电磁感应定律得到

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt}(Bl^2 \cos 2\pi nt) = \\ NBl^2 2\pi n \sin 2\pi nt$$

(1) 当 $\theta = 30^\circ$ 时,

$$\mathcal{E}_i = NBl^2 2\pi n \sin 30^\circ = \\ 10 \times 0.84 \times (0.05)^2 \times 2\pi \times 10 \times \frac{1}{2} \text{ V} = \\ 0.66 \text{ V}$$

(2) 当 $|\sin \theta| = 1$ 时, 即 $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ 等位置时, \mathcal{E}_i 为最大,

$$\mathcal{E}_{\max} = NBl^2 2\pi n = \\ 10 \times 0.84 \times (0.05)^2 \times 2\pi \times 10 \text{ V} = 1.32 \text{ V}$$

(3) 当 $t = 1 \text{ s}$ 时,

$$\mathcal{E}_i = NBl^2 2\pi n \sin 2\pi n = 0$$

(4) 通过铜线截面的电荷量

$$q = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \left(-N \frac{d\Phi}{dt} \right) dt = \\ -\frac{N}{R} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

当转过 180° 时, $\Phi_2 = -\Phi_1$.

线圈铜线的电阻

$$R = \rho \frac{N4l}{S'}$$

所以

$$q = \frac{2\Phi_1 N}{R} = \frac{2NBl^2}{\rho \frac{N4l}{S'}} = \frac{BlS'}{2\rho} = \\ \frac{0.84 \times 0.05 \times 0.5 \times (10^{-3})^2}{2 \times 1.7 \times 10^{-8}} \text{ C} = 0.62 \text{ C}$$

§ 13-3 感生电动势 有旋电场

1. 感生电场

上面我们已讨论了导线或线圈在磁场中运动时所产生的感应电动势,其非静电性力起源于洛伦兹力.电磁感应现象又表明:当导线回路固定不动,而磁通量的变化完全由磁场的变化所引起时,导线回路内也将产生感应电动势.这种由于磁场变化引起的感应电动势,称为感生电动势.产生感生电动势的非静电性力,我们不能用洛伦兹力来解释.麦克斯韦(J. C. Maxwell)分析了这个事实后提出了他的看法,他认为:变化的磁场在其周围激发了一种电场,这种电场称为感生电场.当闭合导线处在变化的磁场中时,就是由这种电场作用于导体中的自由电荷,从而在导线中引起感生电动势和感应电流的出现.如用 E 表示感生电场的场强,则当回路固定不动,回路中磁通量的变化全是由磁场的变化所引起时,法拉第电磁感应定律可表为

$$\oint_L E \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (13-11)$$

式(13-11)明确反映出变化的磁场能激发电场.

再从场的观点来看,场的存在并不取决于空间有无导体回路存在,变化的磁场总是在空间激发电场.因此,式(13-11)不管闭合回路是否是由导体构成,也不管闭合回路是处在真空或介质中都是适用的.也就是说:如果有导体回路存在时,感生电场的作用便驱使导体中的自由电荷作定向运动,从而显示出感应电流;如果不存在导体回路,就没有感应电流,但是变化的磁场所激发的电场还是客观存在的.这个假说现已被近代的科学实验所证实,例如,电子感应加速器的基本原理就是用变化的磁场所激发的电场来加速电子的,它的出现无疑是为感生电场的客观存在提供了一个令人

信服的证据. 从理论上来说, 麦克斯韦的这个“感生电场”的假说和另一个关于位移电流(即变化的电场激发感生磁场)的假说(参看第十四章), 都是奠定电磁场理论、预言电磁波存在的理论基础.

这样, 在自然界中存在着两种以不同方式激发的电场, 所激发电场的性质也截然不同. 由静止电荷所激发的电场是保守力场(无旋场), 在该场中电场强度沿任一闭合回路的线积分恒等于零, 即

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

电场线永远不会形成闭合线. 但变化磁场所激发的电场的感生电场沿任一闭合回路的线积分一般不等于零, 而是满足式(13-11), 也就是说, 感生电场不是保守力场, 其电场线既无起点也无终点, 永远是闭合的, 象旋涡一样. 因此, 通常把感生电场称为有旋电场. 因为式(13-11)中规定面元 $d\mathbf{S}$ 的法向与回路绕行方向成右手螺旋关系, 所以式中的负号给出 \mathbf{E} 线的绕行方向和所围的 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的方向成左螺旋关系, 参看图 13-18.

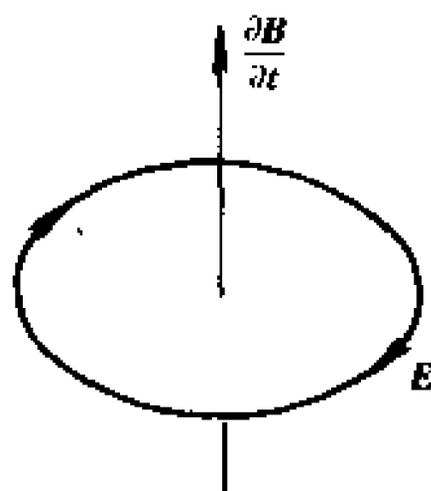


图 13-18 \mathbf{E} 线和 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 成左旋系统

例题 13-6 在半径为 R 的无限长螺线管内部的磁场 \mathbf{B} 随时间作线性变化

$\left(\frac{dB}{dt} = \text{常量} \right)$ 时, 求管内外的感生电场 \mathbf{E} .

解 由场的对称性, 变化磁场所激发的感生电场的电场线在管内外都是与螺线管同轴的同心圆, \mathbf{E} 处处与圆线相切[图 13-19(a)], 且在同一条电场线上 \mathbf{E} 的大小处处相等. 任取一电场线作为闭合回路, 则由式(13-11)可求出离轴线为 r 处的感生电场 \mathbf{E} 的大小为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L E dl = 2\pi r E = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

或
$$E = - \frac{1}{2\pi r} \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

式中的 S 是以所取回路为边线的任一曲面。

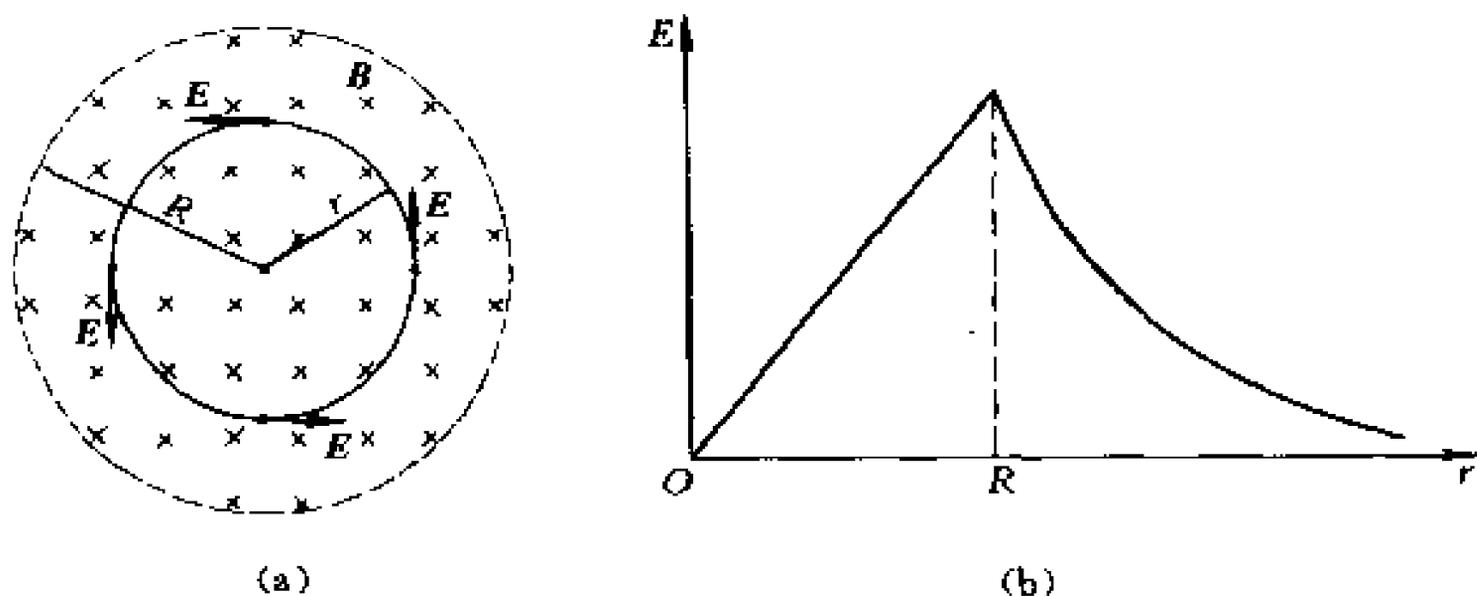


图 13-19 螺线管内外的感生电场

(1) 当 $r < R$, 即所考察的场点在螺线管内时, 我们选回路所围的圆面积作为积分面, 在这个面上各点的 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 相等且和面法线的方向平行, 故上式右边的面积分为

$$\iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} dS = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

由此可得 $r < R$ 处的感生电场为

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

E 的方向沿圆周切线, 指向与圆周内的 $\frac{dB}{dt}$ 成左旋关系. 图 13-19

(a) 所示 E 的方向相应于 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的情况.

(2) 当 $r > R$, 即所考察的场点在螺旋管外时, 右边的面积分包容螺线管的整个截面, 因只有管内的 $\frac{dB}{dt}$ 不为零, 显然

$$\iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

于是可得管外各点的感生电场为

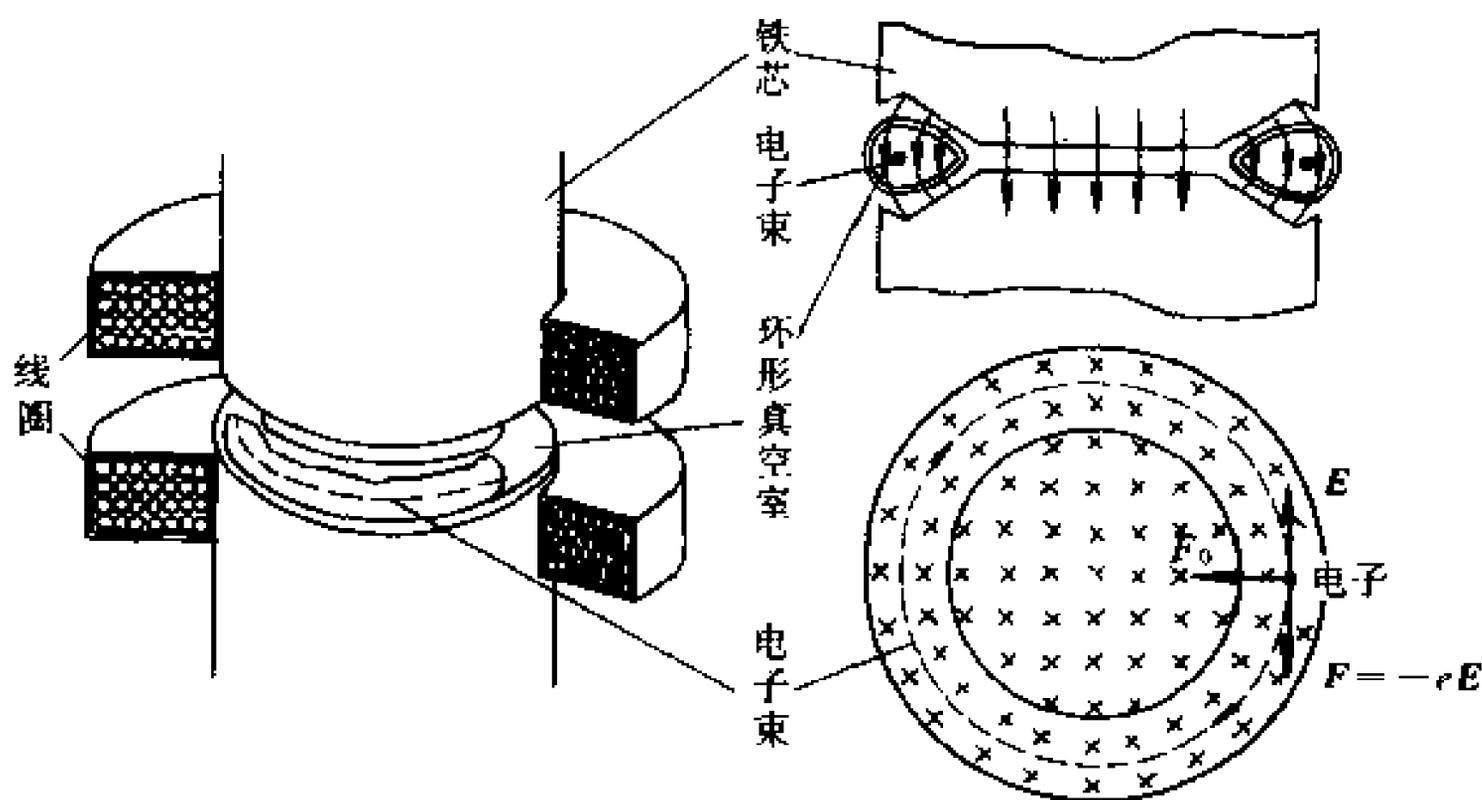
$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

图 13-19(b)画出了螺线管内外感生电场 E 随离轴线距离 r 的变化曲线.

2. 电子感应加速器

电子感应加速器是利用感生电场来加速电子的一种装置,图 13-20 是加速器的结构原理图. 在电磁铁的两极间有一环形真空室,电磁铁受交变电流激发,在两极间产生一个由中心向外逐渐减弱,并具有对称分布的交变磁场,这个交变磁场又在真空室内激发感生电场,其电场线是一系列绕磁感应线的同心圆[图 13-20(b)中的虚线]. 这时,若用电子枪把电子沿切线方向射入环形真空室,电子将受到环形真空室中的感生电场 $E = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$ 的作用而被加速,同时,电子还受到真空室所在处磁场的洛伦兹力 $Bev = m \frac{v^2}{R}$ 的作用,使电子在半径为 R 的圆形轨道上运动.

为了使电子在环形真空室中按一定的轨道运动,电磁铁在真



(a) 结构示意图

(b) 磁极及真空室中电子的轨道

图 13-20 电子感应加速器结构原理图

空室处的磁场的 B 值必须满足

$$R = \frac{mv}{eB} = \text{常量}$$

由上式可以看出,要使电子沿一定半径的轨道运动,要求在真空室处的磁感应强度 B 也要随着电子动量 mv 的增加而成正比地增加,也就是说,对磁场的设计有一定的要求.下面我们作简单的计算说明这一问题.

将上式两边对 t 进行微分,得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{eR} \frac{d}{dt}(mv)$$

因为电子动量大小的时间变化率 $\frac{d}{dt}(mv)$ 等于作用在电子上的电场力 eE ,所以上式又可写成

$$\frac{dB}{dt} = \frac{E}{R}$$

将 $E = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$ 代入得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{d\Phi}{dt}$$

通过电子圆形轨道所围面积的磁感应通量为 $\Phi = \pi R^2 \bar{B}$,此处 \bar{B} 是整个圆面区域内的平均磁感应强度.代入前式得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

上式说明 \bar{B} 和 B 都在改变,但应一直保持

$$B = \frac{1}{2} \bar{B}$$

的关系,这是使电子维持在恒定的圆形轨道上加速时磁场必须满足的条件.在电子感应加速器的设计中,两极间的空隙从中心向外逐渐增大,就是为了使磁场的分布能满足这一要求.

电子感应加速器是在磁场随时间作正弦变化的条件下进行工

作的,由交变磁场所激发的感生电场的方向也随时间而变,图13-21标出了一个周期内感生电场方向的变化情况,仔细分析很容

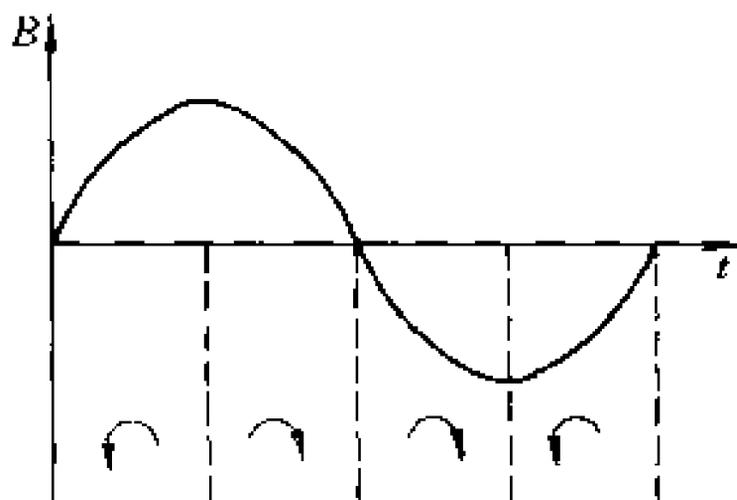


图 13-21 一个周期内感生电场的方向

易看出,只有在第一和第四两个 $\frac{1}{4}$ 周期中电子才可能被加速,但是,在第四个 $\frac{1}{4}$ 周期中作为向心力的洛伦兹力由于 B 的变向而背离圆心,这样就不能维持电子在恒定轨道上作圆周运动,因此,只有在第一个 $\frac{1}{4}$ 周期中,才能实现对电子的加速,由于从电子枪入射的电子速率很大,实际上在第一个 $\frac{1}{4}$ 周期的短时间内电子已绕行了几十万圈而获得相当高的能量,所以在第一个 $\frac{1}{4}$ 周期末,就可利用特殊的装置使电子脱离轨道射向靶子,以作为科研、工业探伤或医疗之用,目前,利用电子感应加速器可以把电子的能量加速到几十兆伏,最高可达几百兆伏.

§ 13-4 涡 电 流

前面讨论感应电动势和感应电流时都是考虑由导线组成的闭合回路,但是在一些电器设备中常常遇到大块的金属体在磁场中运动,或者处在变化着的磁场中,此时在金属体内部也会产生感应

电流,这种电流在金属体内部自成闭合回路,称为涡电流。

如图 13-22 所示,当绕在一圆柱形铁芯上的线圈中通有交变电流时,铁芯内变化的磁感应强度 B 在铁芯内激发感生电场,结果在垂直于磁场的平面内产生绕轴流动的环形感应电流,即涡电流。

由于大块铁芯的电阻很小,涡电流可以很大,在铁芯内将放出大量的焦耳-楞次热来,这就是感应加热的原理。因为感生电动势与磁通量的变化率成正比,而磁通量的变化率与外加交变电流的频率成正比,所以涡电流 I' 应与外加交变电流的频率成正比,涡电流 I' 所产生的焦耳-楞次热是与 I'^2 成正比的,因此涡电流产生的焦耳-楞次热将与外加交变电流的频率的平方成正比。当我们使用频率高达几百赫甚至几千赫的交变电流时,铁芯内由于涡电流将放出巨大的热量,

可以利用它来冶炼金属。例如,在冶金工业中,熔化容易氧化的或难熔的金属(如钛、钽、铌、钼等),以及冶炼特种合金材料,常常采用这种感应加热的方法。又如,现代厨房电器之一——电磁灶的加热原理也是利用感应电流在铁锅底部形成交变磁场,使在铁锅底部产生涡电流而发热,再使热量由食物的表面传到食物内部,从而达到煮熟食物的目的。电磁灶所用频率仅为 30 kHz,与普通广播频率差不多,对人体不会有任何危害。

在真空技术上,也利用感应加热的方法,隔着管子的玻璃加热被抽空的仪器(如电子管、示波管、显象管等)的金属部分,使其温度升高,放出吸附在金属表面上的少许气体,由抽气机抽出。

涡电流产生的热效应虽然有着广泛的应用,但是在有些情况下也有很大的弊害。例如,变压器或其他电机的铁芯常常因涡电流

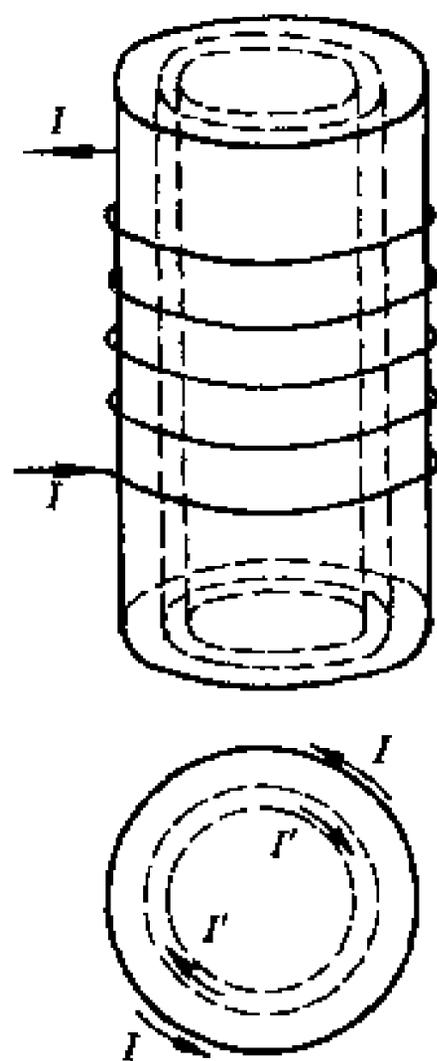


图 13-22 涡电流

产生无用的热量,不仅消耗了部分电能,降低了电机的效率,而且会因铁芯严重发热而不能正常工作.为了减小涡流损耗,一般变压器、电机及其他交流仪器的铁芯不采用整块材料,而是用互相绝缘的薄片(如硅钢片)或细条叠合而成,使涡流受绝缘的限制,只能在薄片范围内流动,于是增大了电阻,减小了涡电流,使损耗降低(图 13-23).

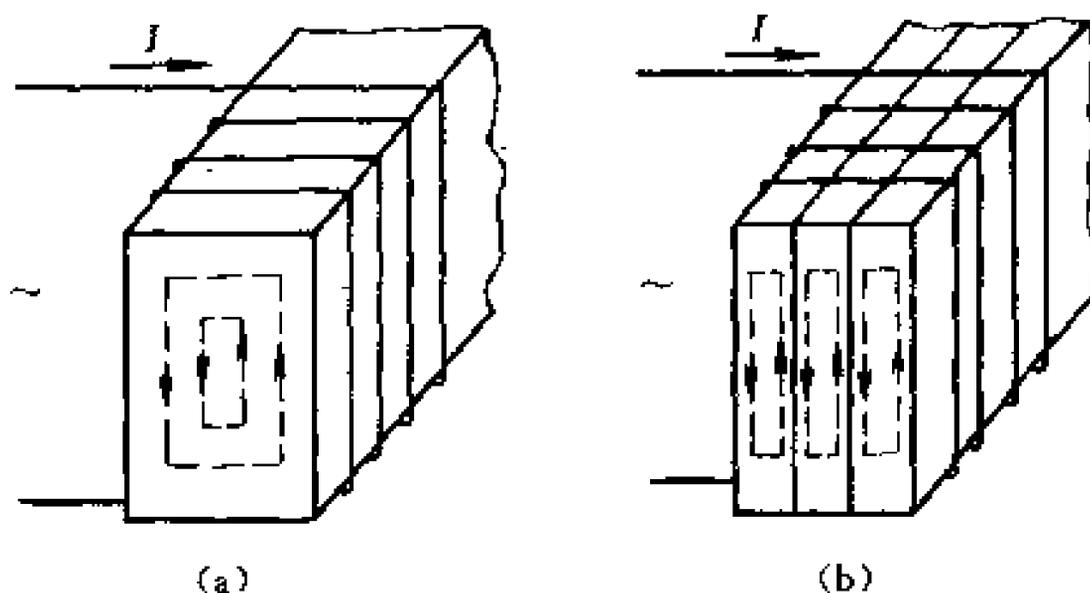


图 13-23 变压器铁芯中的涡电流

在另一些场合,可利用涡电流产生阻尼作用.为了说明这一点,我们进行下列实验,设有一金属片做成的摆,悬挂于电磁铁的两极之间,使它能在两极之间摆动,如图 13-24 所示.如果电磁铁的线圈中不通电,则两极间无磁场,金属摆在摆动过程中只受到空气的阻尼和转轴处的摩擦力作用,摆动不会马上停止.当电磁铁的线圈中通有电流时两极间便有强大的磁场,当金属摆在磁场中摆动时产生了涡电流,根据楞次定律,磁场对涡电流的作用要阻碍摆和磁场的相对运动,因此金属摆受到一个阻尼力的作用,就象在粘性介质中摆动一样,会很快地停止下来.这种阻尼起源于电磁感应,称为电磁阻尼,在各式仪表中电磁阻尼已被广泛应用.例如,在很多电表中常常把线圈绕在一闭合的铝框上,当线圈在磁场中摆动时,在这闭合铝框中就产生涡电流,框架便受到磁场的阻尼作用,使线圈就能很快地稳定在平衡位置上.

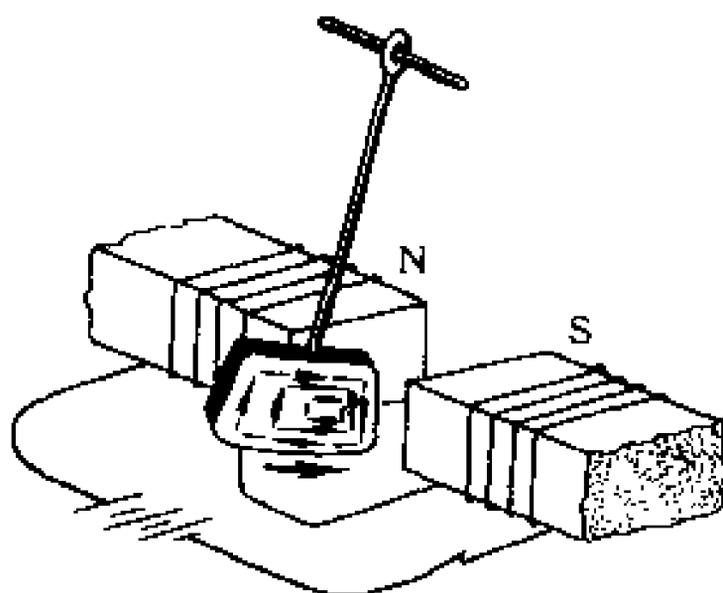


图 13-24 阻尼摆

§ 13-5 自感和互感

作为法拉第电磁感应定律的特例,下面将讨论两个在电工、无线电技术中有着广泛应用的电磁感应现象——自感和互感。

1. 自感应

我们知道,当回路中通有电流时,就有这一电流所产生的磁通量通过这回路本身,如果回路中的电流、或回路的形状、或回路周围的磁介质发生变化时,通过自己回路面积的磁通量也将发生变化,相应地,在自己回路中也将激起感应电动势,这种由于回路中电流产生的磁通量发生变化,而在自己回路中激起感应电动势的现象,称为自感现象,相应的电动势称为自感电动势。

下面用一个简单的例子讨论自感电动势的大小与哪些因素有关。设有一无铁芯的长直螺线管,长为 l , 截面半径为 R , 管上绕组的总匝数为 N , 其中通有电流 I 。对于一根密绕线圈的细长的螺线管,可以忽略漏磁和管两端磁场的非均匀性,把磁场近似地看作在管内均匀分布,此时线圈内各点的磁感应强度是

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

用 S 表示螺线管的截面积, 则穿过每匝线圈的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 NI}{l} \pi R^2$$

穿过 N 匝线圈的磁链数为

$$\Phi_N = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} \pi R^2$$

当线圈中的电流 I 变化时, 在 N 匝线圈中产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_N}{dt} = - \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{l} \frac{dI}{dt}$$

将上式改写成下列形式

$$\boxed{\mathcal{E}_L = - L \frac{dI}{dt}} \quad (13-12)$$

式(13-12)反映了自感电动势与电流变化率之间的关系, 其中的负号表明: 当线圈回路中的 $\frac{dI}{dt} > 0$ 时, $\mathcal{E}_L < 0$, 即自感电动势与电流方向相反; 反之, 当 $\frac{dI}{dt} < 0$ 时, $\mathcal{E}_L > 0$, 即自感电动势与电流方向相同.

而式中的 $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2$ 则体现回路产生自感电动势来反抗电流改变的能力, 它称为该回路的 自感系数, 简称 自感. L 的大小与回路的几何形状、匝数等因素有关, 所以如同电阻和电容一样, 自感也是一个电路参数.

而式中的 $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2$ 则体现回路产生自感电动势来反抗电流改变的能力, 它称为该回路的 自感系数, 简称 自感. L 的大小与回路的几何形状、匝数等因素有关, 所以如同电阻和电容一样, 自感也是一个电路参数.

现在再考虑一般的情况. 对于一个任意形状的回路, 回路中由于电流变化引起通过回路本身磁链数的变化而出现的感应电动势为

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_N}{dt} = - \frac{d\Phi_N}{dI} \frac{dI}{dt} = - L \frac{dI}{dt}$$

式中
$$L = \frac{d\Phi_N}{dI} \quad (13-13)$$

便定义为回路的自感. 它等于 回路中的电流变化为单位值时, 在回路本身所围面积内引起磁链数的改变值. 如果回路的几何形状保

持不变,而且在它的周围空间没有铁磁性物质,那么根据毕奥-萨伐尔定律,空间任一点的磁场 B 与回路中的电流 I 成正比,通过回路所围面积的磁链数 Φ_N 也与 I 成正比,这时式(13-13)可写成

$$L = \frac{\Phi_N}{I} \quad (13-14)$$

式(13-14)可作为不存在铁磁性物质时回路自感的定义,即回路自感的大小等于回路中的电流为单位值时通过这回路所围面积的磁链数,它仅与回路本身的几何结构及周围介质分布等因素有关,而和回路中的电流无关.如果回路周围有铁磁性物质存在,则通过回路所围面积的磁链数和回路中的电流 I 不呈线性关系,在这种情况下,从自感的一般定义式(13-13)可知,回路的自感 L 与电流 I 有关,也不是常量.

在国际单位制中,自感的单位为亨利,用符号 H 表示.由式(13-13)可知, $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$.由于亨利的单位比较大,实用上常用毫亨(mH)与微亨(μH)作为自感的单位.

在日光灯上装置的镇流器和无线电技术、电工中使用的扼流圈是利用自感效应的常见实例.

例题 13-7 如图 13-25 所示,由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆,其间充满磁导率为 μ 的磁介质,电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反.设内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2 ,求电缆单位长度的自感.

解 应用安培环路定理,可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零.在内外两圆筒之间,离开轴线距离为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

在内外圆筒之间,取如图中所示的截面,通过长为 l 的面积元 ldr 的磁通量为

$$d\Phi = Bldr = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

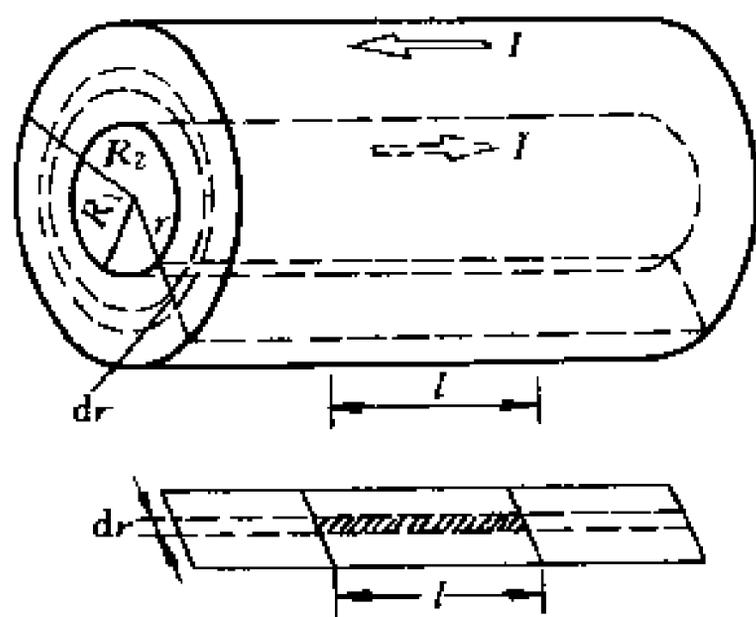


图 13-25 电缆的自感

通过两圆筒之间 l 长的截面的总磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于 $\Phi = LI$, 可知单位长度电缆的自感为

$$L = \frac{\Phi}{I l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2. 互感应

设有两个邻近的回路, 其中分别通有电流, 则任一回路中电流所产生的磁感应线将有一部分通过另一个回路所包围的面积. 当其中任意一个回路中的电流发生变化时, 通过另一个回路所围面积的磁通量也随之变化, 因而在回路中产生感应电动势. 这种由于一个回路中的电流变化而在邻近另一个回路中产生感应电动势的现象, 称为互感现象. 互感现象与自感现象一样, 都是由电流变化而引起的电磁感应现象, 所以可用讨论自感现象类似的方法来进行研究.

图 13-26 所示是绕有 C_1 和 C_2 两层线圈的长直螺线管, 长度均为 l , 截面的半径都是 r . C_1 线圈共有 N_1 匝, 当其中通有电流 I_1

时,由 I_1 所激发的磁场通过 C_2 每匝线圈的磁通量为 $\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \pi r^2$, 所以通过 C_2 线圈 N_2 匝的磁链数为

$$\Phi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} I_1 \pi r^2$$

当 C_1 中的电流 I_1 变化时,在 C_2 线圈回路中将产生互感电动势

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

将上式改写成下列形式

$$\mathcal{E}_{21} = - M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (13-15)$$

式中 $M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$.

同样,当 C_2 线圈中所通有的电流 I_2 变化时,在 C_1 线圈回路中也将产生互感电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12} &= - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_2}{dt} = \\ &= - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (13-16)$$

式(13-15)和式(13-16)是互感电动势与电流变化率之间的关系,而且 $M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$. 可以证明,对于任意形状的两个回路,总是有 $M_{21} = M_{12}$ 的关系,因此统一用符号 M 来表示,它反映了两个相邻回路各在另一回路中产生互感电动势的能力,称为两个回路的互感系数,简称互感。

如果两个回路的相对位置固定不变,而且在其周围没有铁磁性物质,则两个回路的互感等于其中一个回路中单位电流激发的磁场通过另一回路所围面积的磁链数,即

$$\boxed{M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}} \quad \boxed{M = \frac{\Phi_{12}}{I_2}} \quad (13-17)$$

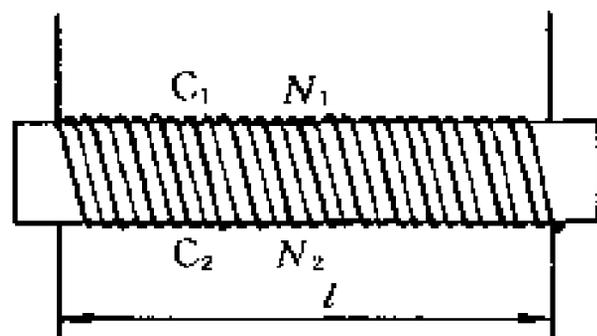


图 13-26 两个共轴螺线管的互感

在这种情况下,互感和自感一样只和两个回路的形状、相对位置及周围介质的磁导率有关,而与电流无关.

如果回路周围有铁磁性物质存在,那么通过其中任一回路的磁链数(Φ_{21} 或 Φ_{12})和另一个回路中的电流(I_1 或 I_2)没有简单的线性正比关系,这时互感电动势为

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} \quad (13-18a)$$

或

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} \quad (13-18b)$$

式中 $M = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1}$ 就作为互感的定义,它等于一回路中的电流改变单位值时,在另一回路所围面积中引起磁链数的改变值.这时,互感的值除和两个回路的形状、相对位置有关外,还和电流有关,也不再是常量.

互感的单位和自感的相同,都是亨利.

下面仍以图 13-26 的两层螺线管为例,说明两个回路各自的自感和互感的关系.由前面的讨论可知原线圈的自感

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r^2$$

同理,副线圈的自感系数

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi r^2$$

由此可见

$$M^2 = L_1 L_2, \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

必须指出,只有这样耦合的线圈(即一个回路中电流所产生的磁感应线全部穿过另一回路)才有 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 的关系,一般情形时 $M = k \sqrt{L_1 L_2}$, 而 $0 \leq k \leq 1$, k 称为耦合因数, k 值视两个回路之间磁耦合的情况而定.

互感现象是在一些电器及电子线路中时常遇到的现象,有些电器利用互感现象把电能从一个回路输送到另一个回路中去,例如变压器及感应圈等.有时互感现象也会带来不利的一面,例如收音机各回路之间、电话线与电力输送线之间会因互感现象产生有害的干扰,了解了互感现象的物理本质,就可以设法改变电器间的布置,以尽量减小回路间相互磁耦合的影响.

形状不规则的回路系,互感一般不易计算,通常用实验方法来测定,但对于一些形状规则的回路系,仍能计算求得.

例题 13-8 一密绕的螺绕环,单位长度的匝数为 $n=2\ 000\ \text{m}^{-1}$,环的横截面积为 $S=10\ \text{cm}^2$,另一个 $N=10$ 匝的小线圈套绕在环上,如图 13-27 所示.

(1) 求两个线圈间的互感;

(2) 当螺绕环中的电流变化率为 $\frac{dI}{dt}=10\ \text{A/s}$ 时,求在小线圈中产生的互感电动势的大小.

解 (1) 要求互感,可以先设想小线圈中通有电流,再计算小线圈中的电流在螺绕环中产生的磁链数;或者相反,先假定螺绕环中通有电流,然后算出该电流在小线圈中产生的磁链数.在本例中,由于小线圈通电流后所激发的磁场难以计算,通过螺绕环中各匝线圈的磁通量也无法算出,所以只能采用第二种设想来计算.设螺绕环中通有电流 I ,由 § 11-6 节中知螺绕环中磁感应强度的大小为 $B=\mu_0 nI$,通过螺绕环上各匝线圈的磁通量等于通过小线圈各匝的磁通量,所以通过 N 匝小线圈的磁链数为

$$\Phi_N = N\Phi = N\mu_0 nIS$$

根据互感的定义可得螺绕环与小线圈间的互感为

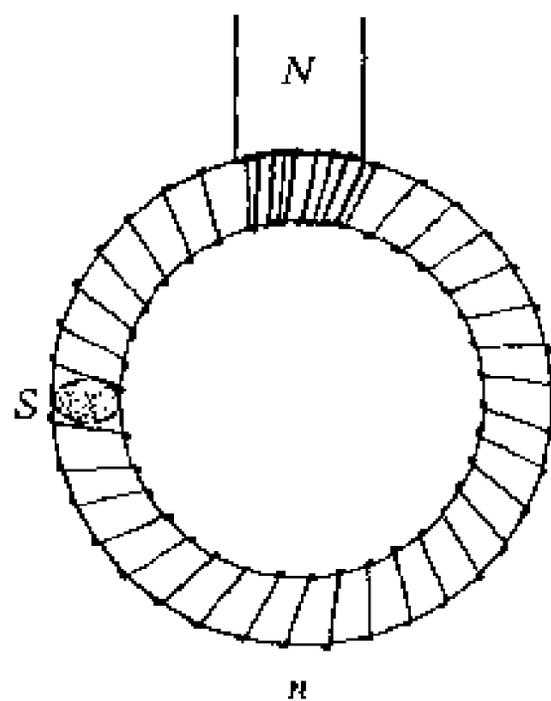


图 13-27 螺绕环与小线圈间的互感

$$M = \frac{\Phi_N}{I} = \mu_0 n N S =$$

$$4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 10 \times 10 \times 10^{-4} \text{ H} \approx$$

$$2.5 \times 10^{-5} \text{ H} = 25 \mu\text{H}$$

(2) 由式(13-18)知在小线圈中产生的互感电动势的大小

$$\mathcal{E}_{21} = \left| -M \frac{dI_1}{dt} \right| = 2.5 \times 10^{-5} \times 10 \mu\text{V} = 250 \mu\text{V}$$

§ 13-6 电感和电容电路的暂态过程

1. RL 电路的暂态过程

如前所述,由于线圈自感的存在,当电路中的电流改变时,在电路中产生自感电动势.根据楞次定律,自感电动势的出现总是要反抗电路中电流的变化,当电流增大时,自感电动势与原来电流方向相反;当电流减小时,自感电动势与原来电流方向相同.回路的自感 L 越大,自感应的作用也越大,即改变电路中的电流越不容易.换句话说,自感现象具有使电路中保持原有电流不变的特性,它使电路在接通及断开后,电路中的电流要经历一个短暂的过程才能达到稳定值,这个过程称为 RL 电路的暂态过程.

下面研究 RL 电路与直流电源接通及断开后,电路中电流增长和衰减的情况.

图 13-28 所示是一个含有自感 L 和电阻 R 的简单电路.如电键 K_1 接通而 K_2 断开时, RL 电路接上电源,由于自感应的作用,在电流增长过程中电路中出现自感电动势 \mathcal{E}_L ,它与电源的电动势 \mathcal{E} 共同决定电路中电流的大小.设某瞬时电路中的电流为 I ,则由欧姆定律得

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

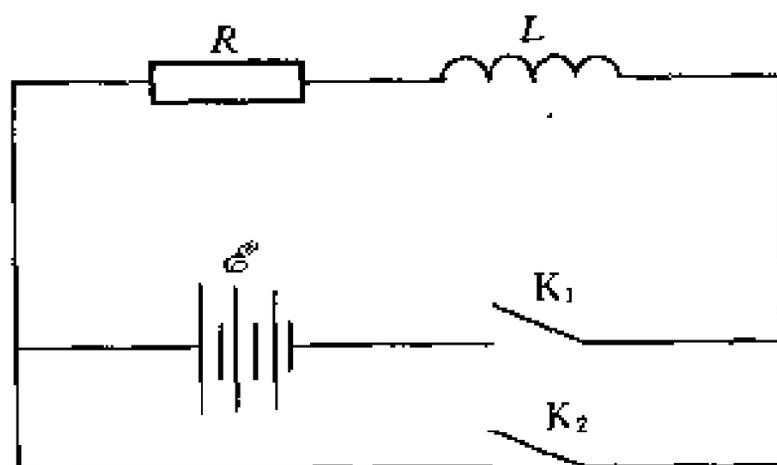


图 13 28 RL 电路

上式可写作

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}$$

这是含有变量 I 及其一阶导数 $\frac{dI}{dt}$ 的微分方程, 可以通过分离变量积分求解. 把上式改写为

$$\frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$$

分离变量后得

$$\frac{dI}{\frac{\mathcal{E}}{R} - I} = \frac{R}{L} dt$$

对上式两边进行积分, 并注意到起始条件: $t=0$ 时, $I=0$, 于是有

$$\int_0^I \frac{dI}{\frac{\mathcal{E}}{R} - I} = \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

积分并整理后可得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (13-19)$$

式(13-19)就是 RL 电路接通电源后电路中电流 I 的增长规律, 可用图 13-29 来表示. 它说明了在接通电源后, 由于自感的存在, 电路中的电流不是立刻达到无自感时的电流稳定值 $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$,

而是由零逐渐增大到这一最大值 I_{\max} 的, 与无自感时的情况比较,

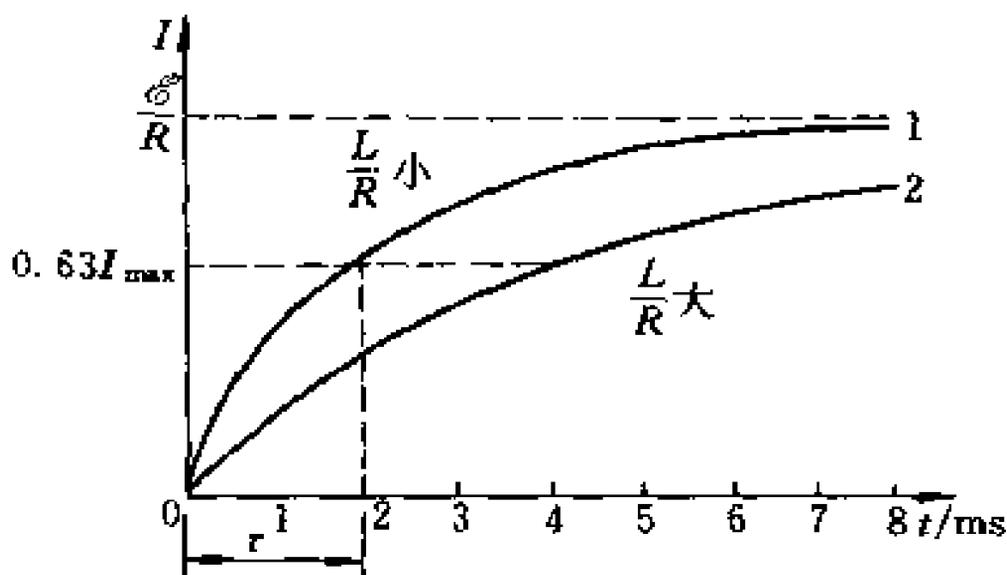


图 13-29 RL 电路中电流的增长和不同时间常数电流增长快慢的比较

(图中曲线 1 取 $L=0.2\text{ H}$, $R=100\ \Omega$, $\tau=2\text{ ms}$)

这里有一个时间的延迟, 从式(13-19)看到, 当 $t=\tau=\frac{L}{R}$ 时,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0.63 \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.63 I_{\max}$$

即电路中的电流达到稳定值的 $\left(1 - \frac{1}{e} \right)$ 倍(约 63%), 通常就用这一时间 $\tau = \frac{L}{R}$ 来衡量自感电路中电流增长的快慢程度, 称为回路的时间常数或弛豫时间。

当上述电路中的电流达到稳定值 $I=I_0=\mathcal{E}/R$ 后, 在迅速使电键 K_2 接通的同时断开电键 K_1 , 这时电路中虽然没有外电源, 但由于线圈中自感电动势的出现, 电路中的电流要经历一个衰变过程才会降到零. 设电键 K_2 接通后某一瞬时电路中的电流为 I , 线圈中的自感电动势为 $-L \frac{dI}{dt}$, 根据欧姆定律得

$$-L \frac{dI}{dt} = IR$$

仍用分离变量法, 并注意到 $t=0$ 时, $I=\frac{\mathcal{E}}{R}=I_0$. 积分并整理后可解得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (13-20)$$

式(13-20)是 RL 电路切断电源后电路中电流的衰变规律, 见图 13-30. 它说明了撤去电源后, 由于自感的存在, 电流并不立即降为零, 而是逐渐减小, 经过一段弛豫时间 $\left(t = \tau = \frac{L}{R} \right)$, 电流降低为原稳定值的 $\frac{1}{e}$ 倍(约 37%).

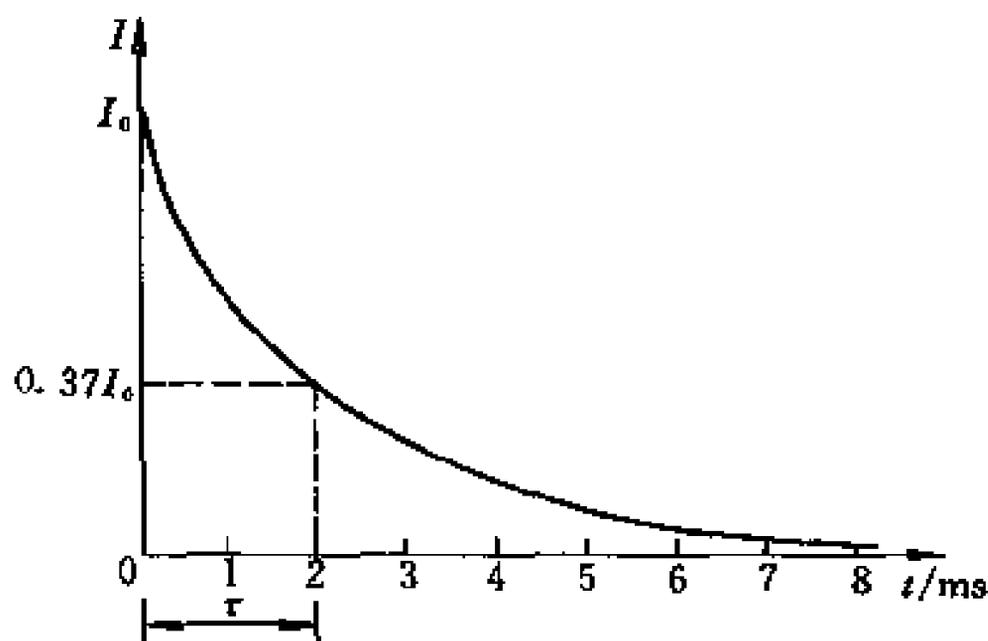


图 13-30 RL 电路中电流的衰减

应当说明, 当图 13-28 所示的电路在断开电源时, 如不接通 K_2 , 这时在 K_1 两端之间的空气隙具有很大的电阻, 电路中电流将由 I_0 骤然下降为零, $\frac{dI}{dt}$ 的量值很大, 在 L 中将产生很大的自感电动势, 常使电键两端之间发生火花, 甚至发生电弧, 这种现象在原通有强大电流的电路中或在含有铁磁性物质的电路中尤为显著. 这时, 虽然电路中电源的电动势只有几伏, 却可能产生几千伏的自感电动势, 为了避免由此造成的事故, 通常可用逐渐增加电阻的方法来断开电路

2. RC 电路的暂态过程

RC 电路的暂态过程就是电容器通过电阻的充放电过程, 它

是各种电子线路中经常利用的现象. 下面讨论的问题是电容器在充放电过程中, 电容器极板上的电荷量和电路中电流的增长及衰变的规律.

如图 13-31 所示, 电容器 C 、电阻 R 和电动势为 \mathcal{E} 的直流电源构成一简单电路. 设电容器在充电前极板上的电荷量为零, 两极板

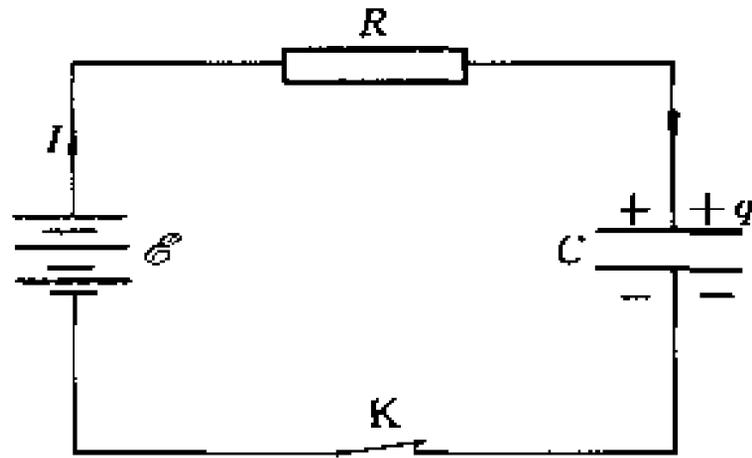


图 13-31 RC 充电电路

间的电势差也为零. 在闭合电键 K 使电路接通的瞬时, 极板上的电荷量仍为零, 随着时间的增长, 电荷逐渐在极板上积累起来, 两极板间的电势差也逐渐增大. 设某瞬时电路中的电流为 I , 极板上的电荷量为 q , 由欧姆定律得

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}$$

利用关系式 $I = \frac{dq}{dt}$, 上式可写成

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

分离变量后得

$$\frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = \frac{dt}{RC}$$

对上式两边进行积分, 并利用 $t=0$ 时, $q=0$ 的初始条件有

$$\int_0^q \frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = \frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

积分整理后得

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (13-21)$$

及电路中的电流
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13-22)$$

以上两式表明,电容器在充电过程中,电容器极板上电荷量和电路中电流的变化都和时间的指数函数 $e^{-\frac{t}{RC}}$ 有关. 式(13-21)和(13-22)可用图线表示,如图 13-32 所示. 从这两条图线不难看出,当电容器在开始充电时(即 $t=0$)极板上的 $q=0$,电容器内的电场尚未建立起来,此时电源的端电压全部加在电阻 R 上,电路中的电流有最大值 $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$. 此后,电容器极板上的电荷逐渐增加,电

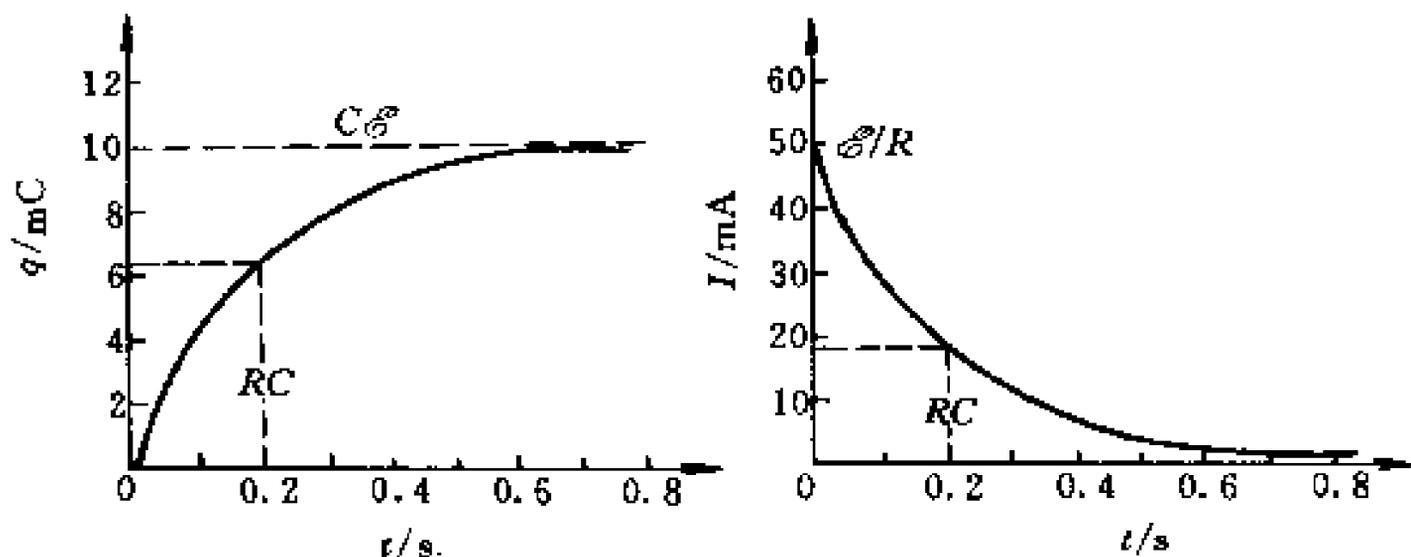


图 13-32 电容器在充电过程中 q 和 I 随 t 而变化的曲线
(此图取 $R=2\ 000\ \Omega, C=100\ \mu\text{F}, \mathcal{E}=100\ \text{V}$ 画出)

容器中的电场逐渐加强,极板间的电势差也逐渐升高,而加在电阻 R 上的电势差随之减小,所以电路中的电流强度逐渐减小. 从理论上讲,只有当 $t=\infty$ 时,即充电时间无限长时方能使极板上的电荷量增大到最大值 $q=q_{\max}=C\mathcal{E}$ 和电路中的电流 $I=0$,实际上当 q 非常接近于最大值 $C\mathcal{E}$ 时电容器充电过程就告结束.

从式(13-21)和(13-22)可知,充电过程的快慢取决于乘积 RC ,它具有时间的量纲,叫做 RC 电路的时间常数. 其物理意义和 RL 电路中的 $\frac{L}{R}$ 类似,在这里不再赘述.

现在再讨论带电电容器的放电过程. 如图 13-33 所示, 设在电键 K 没有接通前, 电容器极板上的电荷量已充电到最大值 q_{\max} , 当

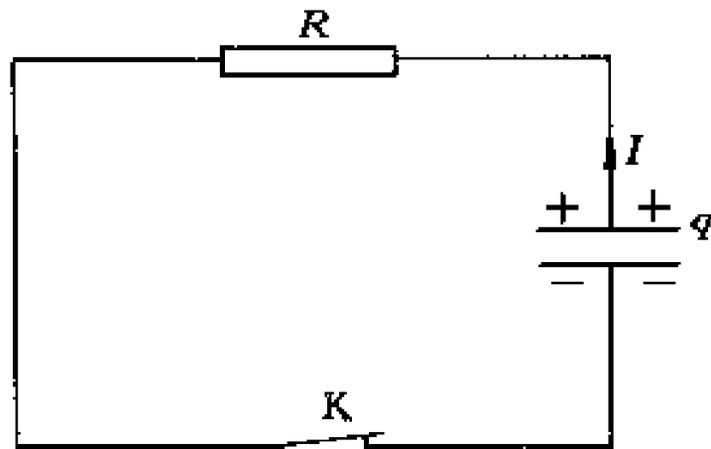


图 13-33 RC 放电电路

电键 K 闭合时, 电容器通过电阻 R 放电, 极板上的电荷量 q 随着时间的增长而减小, 电路中出现暂态电流. 设某瞬时电路中的电流为 I , 极板上的电荷量为 q , 由欧姆定律得

$$IR - \frac{q}{C} = 0$$

因为极板上的电荷量在减少, 所以 $I = -\frac{dq}{dt}$, 代入上式得

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$$

对上式先进行分离变量后积分, 并将 $t=0$ 时, $q=q_{\max}$ 代入得

$$q = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13-23)$$

再由 $I = -\frac{dq}{dt}$ 得

$$I = \frac{q_{\max}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13-24)$$

图 13-34 中分别画出了电容器在放电过程中极板上电荷量 q 与电路中的电流 I 随时间 t 的变化曲线, 它们都从各自的最大值按指数的规律衰减到零, 放电的快慢也由时间常数 RC 决定.

例题 13-9 在图 13-31 电容器充电的电路中, 如果 $R=2\ 000$

$\Omega, C=100 \mu\text{F}, \mathcal{E}=100 \text{ V}$. 求(1)充电开始时的电流(最大值);(2)充电完毕后电容器两极板间的最大电势差;(3)当 $t=0.1, 0.2,$

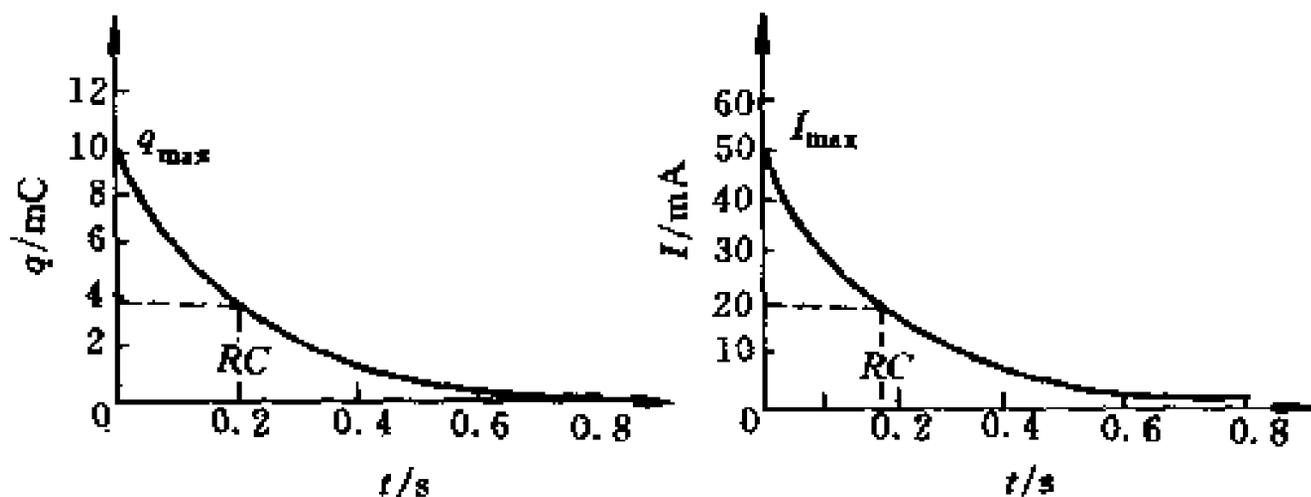


图 13-34 电容器在放电过程中 q 和 I 随 t 而变化的曲线

(此图取 $R=2\ 000 \Omega, C=100 \mu\text{F}, q_{\text{max}}=10 \text{ mC}$ 画出)

$0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 \text{ s}$ 时, 电容器两极板之间的电势差及电路中的电流.

解 (1) 充电开始时, 电容器两极板之间的电势差为零, 电源的端电压(其量值等于电动势 \mathcal{E})全部加在电阻 R 上, 所以电路中的电流最大,

$$I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{100}{2\ 000} \text{ A} = 0.05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

(2) 充电完毕时, 电容器上的电势差等于电源的端电压, 即

$$U_c = \mathcal{E} = 100 \text{ V}$$

(3) 电路的时间常数为

$$RC = 2\ 000 \times 100 \times 10^{-6} \text{ s} = 0.2 \text{ s}$$

当 $t=0.1 \text{ s}$ 时, 电容器两极板间的电势差及电路中的电流分别为

$$U_c = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = 100 \times (1 - e^{-0.1/0.2}) \text{ V} =$$

$$100 \times (1 - e^{-0.5}) = 100 \times (1 - 0.606) = 39.4 \text{ V}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} = \frac{100}{2\ 000} e^{-0.5} \text{ A} = 0.05 \times 0.606 =$$

$$0.0303 \text{ A} = 30.3 \text{ mA}$$

用同样方法可以求得其他各时刻的 U_c 和 I , 下表就是计算结果.

t/s	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
U_c/V	39.4	63.2	86.5	95.0	98.2	99.3	99.8
I/mA	30.3	18.4	6.77	2.49	0.916	0.337	0.124

可见, 当 $t > 5RC$ 时, 电容器两极板间的电势差已达最大值的 99% 以上, 电路中的电流已降到只有最大值的 0.67% 以下, 我们可以近似地认为这时电容器的充电已经完成.

§ 13-7 磁场的能量

在第九章中我们讨论过, 在形成带电系统的过程中, 外力必须克服静电力而作功, 根据功能原理, 外界作功所消耗的能量最后转化为电荷系统或电场的能量, 电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$$

同样, 在回路系统中通以电流时, 由于各回路的自感和回路之间互感的作用, 回路中的电流要经历一个从零到稳定值的暂态过程, 在这个过程中, 电源必须提供能量用来克服自感电动势及互感电动势而作功, 这功最后转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能, 也就是磁场的能量.

下面仍以图 13-28 所示的简单回路为例, 讨论回路中电流增长过程中能量的转化情况. 设电路接通后回路中某瞬时的电流为 I , 自感电动势为 $-L \frac{dI}{dt}$, 由欧姆定律得

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI$$

如果从 $t=0$ 开始, 经一足够长的时间 t , 可以认为回路中的电流已从零增长到稳定值 I_0 , 则在这段时间内电源电动势所作的功为

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \int_0^{I_0} L I dI + \int_0^t R I^2 dt$$

在自感 L 和电流无关的情况下,上式化为

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \frac{1}{2} L I_0^2 + \int_0^t R I^2 dt$$

式中 $\int_0^t R I^2 dt$ 是 t 时间内电源提供的部分能量转化为消耗在电阻 R 上的焦耳-楞次热; $\frac{1}{2} L I_0^2$ 项是回路中建立电流的暂态过程中电源电动势克服自感电动势所作的功,这部分功转化为载流回路的能量. 由于在回路中形成电流的同时,在回路周围空间也建立了磁场,显然,这部分能量也就是储存在磁场中的能量. 当回路中的电流达到稳定值 I_0 后,断开 K_1 ,并同时接通 K_2 ,这时回路中的电流按指数规律 $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ 衰减,此电流通过 R 时,放出的焦耳-楞次热为

$$Q = \int_0^{\infty} R I^2 dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

这表明随着电流衰减引起的磁场消失,原来储存在磁场中的能量又反馈到回路中以热的形式全部释放出来,这也说明了磁场具有能量 $\frac{1}{2} L I_0^2$ 的推断是正确的. 因此可知,一个自感为 L 的回路,当其中通有电流 I_0 时,其周围空间磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (13-25)$$

式中 L 的单位用 H, I_0 的单位用 A, 则 W_m 的单位为 J.

式(13-25)是用线圈的自感及其中电流表示的磁能,经过变换,磁能也可用描述磁场本身的量 B 、 H 来表示.

为了简单起见,考虑一个很长的直螺线管,管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质. 当螺线管通有电流 I 时,管中磁场近似看作均匀,而且把磁场看作全部集中在管内. 由前几章中知螺线管内的磁

感应强度 $B = \mu n I$, 它的自感 $L = \mu n^2 V$, 式中 n 为螺线管单位长度的匝数, V 为螺线管内磁场空间的体积. 把 L 及 $I = \frac{B}{\mu n}$ 代入式(13-25), 得到磁能的另一表示式

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} B H V$$

而磁场能量密度是

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H \quad (13-26)$$

上述磁场能密度的公式虽是从螺线管中均匀磁场的特例导出的, 但它是适用于各种类型磁场的普遍公式. 公式说明, 在任何磁场中, 某一点的磁场能量密度, 只与该点的磁感应强度 B 及介质的性质有关, 这也说明了磁能是定域在磁场中的这个客观事实.

如果知道磁场能量密度及均匀磁场所占的空间, 可用上式计算出磁场的总磁能. 倘若磁场是不均匀的, 那么可以把磁场划分为无数体积元 dV , 在每个小体积内, 磁场可以看成是均匀的, 因此式(13-26)就能表示这些体积元内的磁场能量密度, 于是体积为 dV 的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} B H dV \quad (13-27)$$

对整个磁场不为零的空间积分, 即得磁场的总能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint B H dV \quad (13-28)$$

因为式(13-25)和式(13-28)是相等的, 所以

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \iiint B H dV$$

如果能求出电流回路的磁场能量, 根据此式就可求出回路的自感 L .

例题 13-10 一根很长的同轴电缆(图 13-35)由半径为 R_1 的圆柱体与内半径为 R_2 的同心圆柱壳组成, 电缆中央的导体上载有

稳定电流 I , 再经外层导体返回形成闭合回路. 试计算: (1) 长为 l 的一段电缆内的磁场中所储藏的能量; (2) 该段电缆的自感.

解 由安培环路定理可知, 在内外导体间的区域内离轴线距离为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在电缆外面, $B=0$, 在内外导体的内部也都存在磁场, 同样可由安培环路定理求得. 适当选择电缆尺寸, 使绝大部分磁能储藏在这两个导体之间的空间内, 则此空间中离轴线距离为 r 的磁能密度为

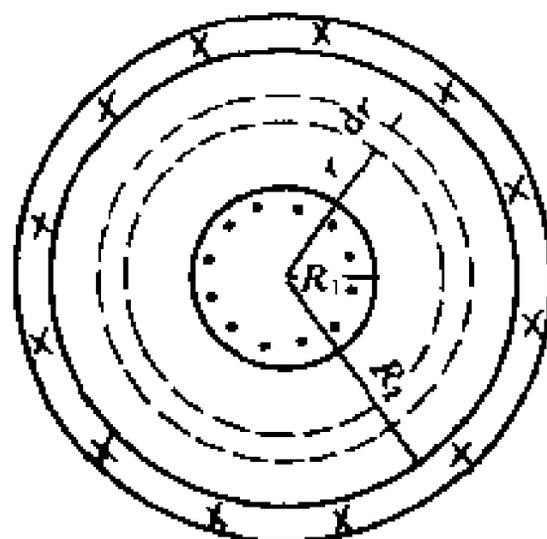


图 13-35 同轴电缆的横截面

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在半径为 r 与 $r+dr$, 长 l 的圆柱壳空间之内的磁能

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

对上式积分可得储藏在内导体间空间内的总磁能

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由磁能公式 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 可求出长为 l 的同轴电缆的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所得的结果和例题 13-7 的完全相同.

例题 13-11 用在两个线圈中建立电流的过程计算储存在线圈周围空间磁场能量的方法, 证明两个线圈的互感相等, 即 $M_{12} = M_{21}$.

解 设两线圈在开始时都是断路的(图 13-36), 先接通线圈

1,使其中的电流由零增加到 I_{10} ,因此线圈 1 中的磁能为 $\frac{1}{2}L_1I_{10}^2$, L_1 为线圈 1 的自感. 在线圈 1 接通后,再接通线圈 2,使线圈 2 中的电流也从零增加到 I_{20} ,因此线圈 2 中的磁能为 $\frac{1}{2}L_2I_{20}^2$, L_2 是线圈 2 的自感. 由于在线圈 2 接通并增强电流的同时在线圈 1 中有互感电动势产生,为了保持线圈 1 中的电流 I_{10} 不变,在线圈 1 电路中的电源必须克服互感电动势而做功,因而出现附

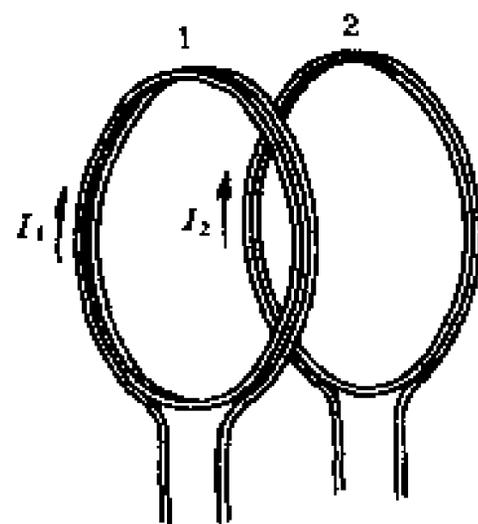


图 13.36 两线圈互感相等的理论证明

加磁能. 因为互感电动势的量值为 $\mathcal{E}_{12} = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$, M_{12} 是线圈 2 对线圈 1 的互感,所以附加的磁能为

$$\int_0^{I_{10}} \mathcal{E}_{12} I_{10} dt = \int_0^{I_{20}} M_{12} \frac{dI_2}{dt} I_{10} dt = M_{12} I_{10} \int_0^{I_{20}} dI_2 = M_{12} I_{10} I_{20}$$

因此在两线圈组成的系统中,当线圈 1 的电流为 I_{10} ,线圈 2 中的电流为 I_{20} 时,这系统所具有的磁能应为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_{10}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{20}^2 + M_{12} I_{10} I_{20}$$

同理,我们也可以先在线圈 2 中建立电流 I_{20} ,然后在线圈 1 中建立电流 I_{10} ,重作上述的讨论,可以得到相应的关系式

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1 I_{10}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{20}^2 + M_{21} I_{10} I_{20}$$

M_{21} 是线圈 1 对线圈 2 的互感系数,因为系统的能量不应该与电流建立的先后次序有关,所以 $W_m = W'_m$. 由此得出

$$M_{12} = M_{21}$$

令 $M = M_{12} = M_{21}$,则两个载流线圈总磁能的公式可表为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_{10}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_{20}^2 + MI_{10}I_{20}$$

因为附加磁能可能为负值,故两个载流线圈总磁能的一般公式应写成

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_{10}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_{20}^2 \pm MI_{10}I_{20}$$

例题 13-12 设电子是一个半径为 R 的小球,并假定电荷均匀分布于其表面.当电子以速度 v ($v \ll c$) 运动时,在电子周围无限大空间内建立电磁场.试计算电磁场中的总磁能.

解 因为 $v \ll c$,所以离电子瞬时位置 r 处的磁感应强度仍是

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin(\pi - \theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin \theta}{r^2}$$

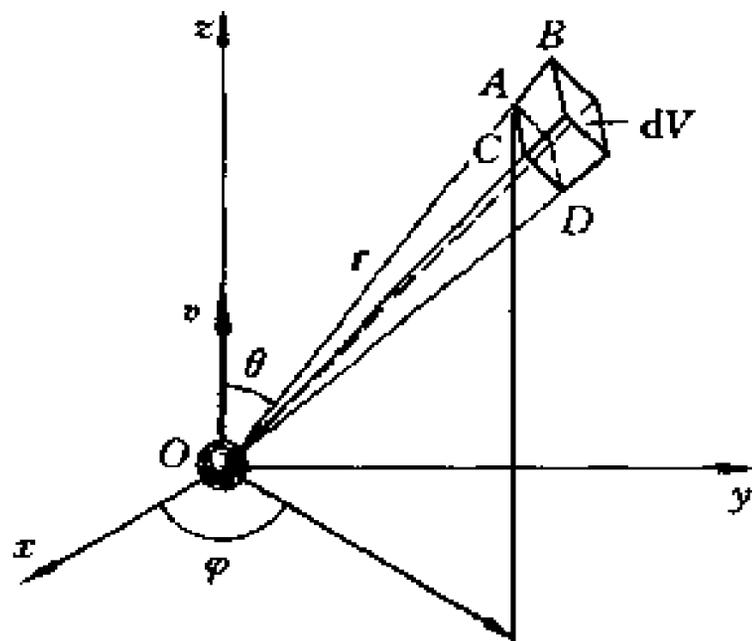


图 13-37 运动电子的磁场能量

设电子沿 z 轴运动,为简便计,改用如图 13-37 所示的球面坐标.则离电子瞬时位置 r 处的体积元 dV 为

$$dV = AC \ AD \ AB = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

由图可知,式中

$$AC = r d\theta; \ AD = r \sin \theta d\varphi; \ AB = dr.$$

在该体积元中的磁能为

$$dw_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

对上式除电子本身体积外的全部空间积分,便可求得运动电子周围空间的总磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \iiint_V BH dV = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \iiint_V \left(\frac{ev \sin \theta}{4\pi r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} e^2 v^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} e^2 v^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \left[-\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \right]_0^\pi [2\pi] = \\ &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} e^2 v^2 \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{4}{3} \right] [2\pi] = \\ &= \frac{\mu_0}{12\pi} \frac{e^2}{R} v^2 \end{aligned}$$

利用相似的步骤也可求出运动电子周围空间的总电场能,由于 $v \ll c$, 电场能要比磁场能大得多(见 § 9-8).

思考题

13-1 在下列各情况下,线圈中是否会产生感应电动势?何故?若产生感应电动势,其方向如何确定?

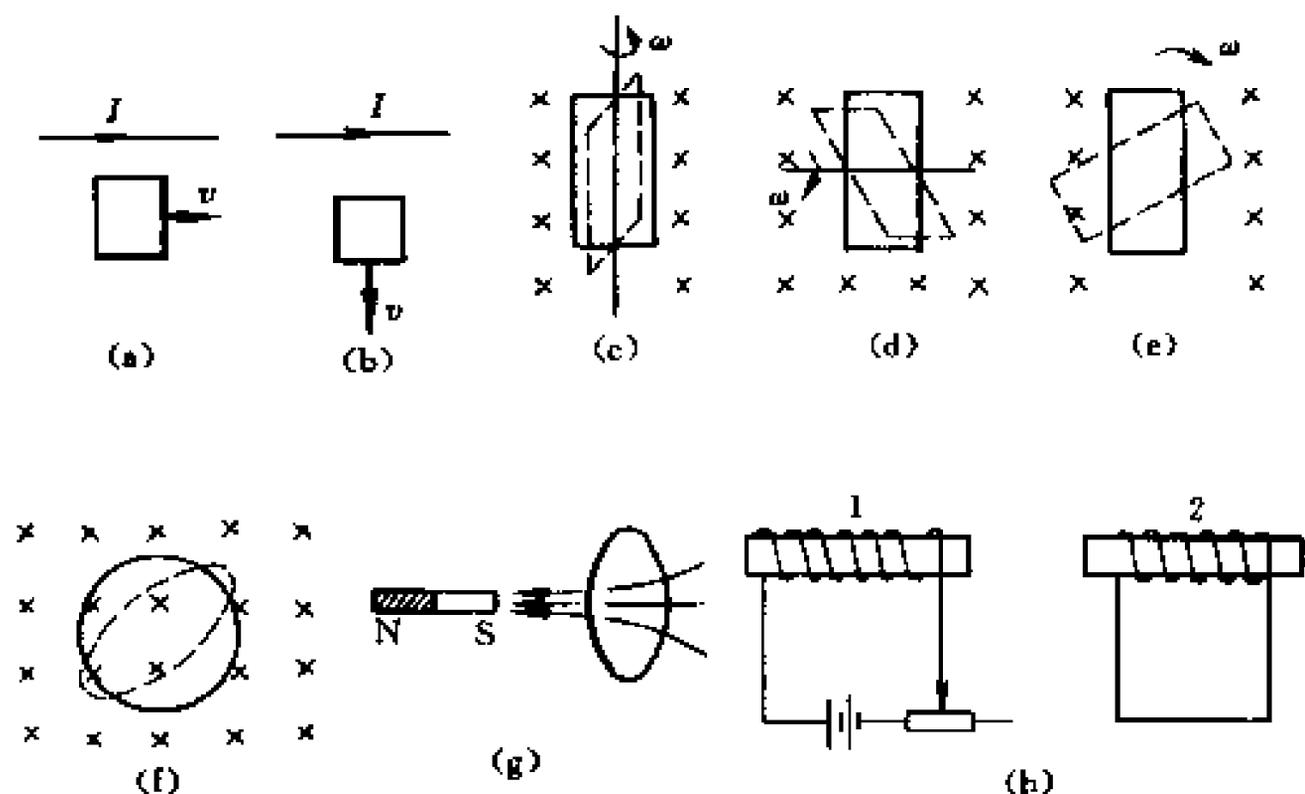
(1) 线圈在载流长直导线激发的磁场中平动,图(a)、(b);

(2) 线圈在均匀磁场中旋转,图(c)、(d)、(e);

(3) 在均匀磁场中线圈变形,图(f),从圆形变成椭圆形;

(4) 在磁铁产生的磁场中线圈向右移动,图(g);

(5) 两个相邻近的螺线管 1 与 2,当 1 中电流改变时,试分别讨论在增加与减少的情况下,2 中的感应电动势,图(h).



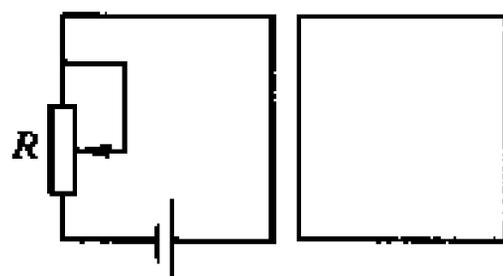
思考题 13-1 图

13-2 将一磁铁插入一个由导线组成的闭合电路线圈中，一次迅速插入，另一次缓慢地插入，问

- (1) 两次插入时在线圈中的感生电荷量是否相同？
- (2) 两次手推磁铁的力所作的功是否相同？
- (3) 若将磁铁插入一不闭合的金属环中，在环中将发生什么变化？

13-3 让一块很小的磁铁在一根很长的竖直铜管内下落，若不计空气阻力，试定性说明磁铁进入铜管上部、中部和下部的运动情况，并说明理由。

13-4 如果我们使图中左边电路中的电阻 R 增加，则在右边电路中感应电流的方向如何？



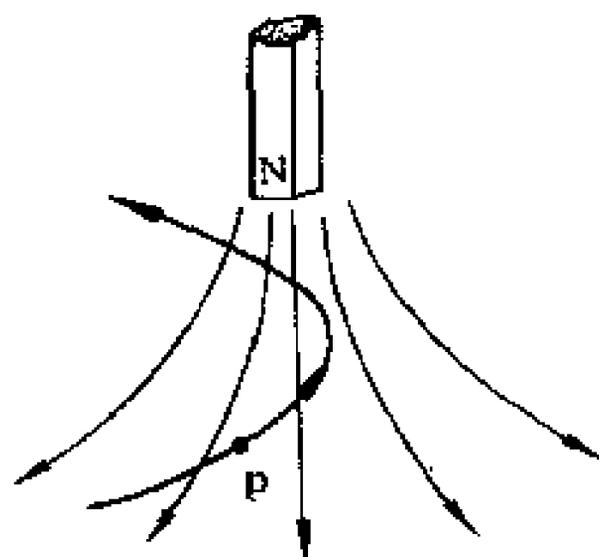
思考题 13-4 图

13-5 将尺寸完全相同的铜环和木环适当放置，使通过两环内的磁感应通量变化量相等。问这两个环中的感生电动势及感生电场是否相等？

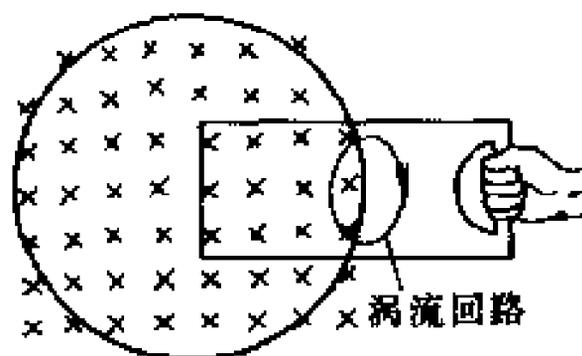
13-6 如图所示，一质子通过磁铁附近发生偏转，如果磁铁静止，质子的动能保持不变，为什么？如果磁铁运动，质子的动能将增加或减小，试说明理由。

13-7 铜片放在磁场中，如图所示。若将铜片从磁场中拉出或推进，则受

到一阻力的作用,试解释这个阻力的来源.

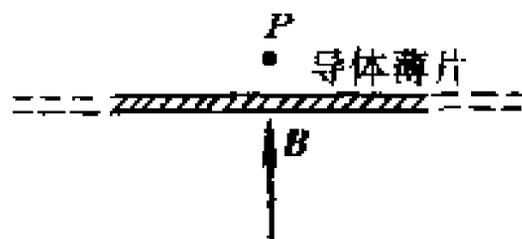


思考题 13-6 图

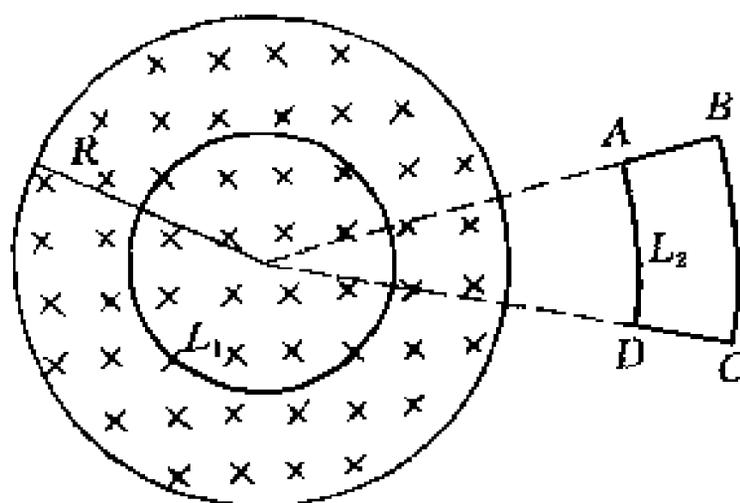


思考题 13-7 图

13-8 有一导体薄片位于与磁场 B 垂直的平面内,如图所示.如果 B 突然变化,在 P 点附近 B 的变化不能立即检查出来,试解释之.



思考题 13-8 图



思考题 13-9 图

13-9 如图所示,一均匀磁场被限制在半径为 R 的圆柱面内,磁场随时间作线性变化.问图中所示闭合回路 L_1 和 L_2 上每一点的 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 是否为零? 感生电场 E 是否为零? $\oint_{L_1} E \cdot dl$ 和 $\oint_{L_2} E \cdot dl$ 是否为零? 若回路是导线环,问环中是否有感应电流? L_1 环上任意两点的电势差是多大? L_2 环上 A 、 B 、 C 和 D 点的电势是否相等?

13-10 如图所示,当导体棒在均匀磁场中运动时,棒中出现稳定的电场 $E = vB$,这是否和导体中 $E = 0$ 的静电平衡的条件相矛盾? 为什么? 是否需要外力来维持棒在磁场中作匀速运动?

13-11 用电阻丝绕成的标准电阻要求没有自感,问怎样绕制方能使线圈的自感为零,试说明其理由.

13-12 两螺线管 A、B,其长度与直径都相同,都只有一层绕组,相邻各匝紧密相靠,绝缘层厚度可忽略.螺线管 A 由细导线绕成,螺线管 B 则由粗导线绕成.问

- (1) 哪个螺线管的自感较大?
- (2) 哪个螺线管的时间常数较大?

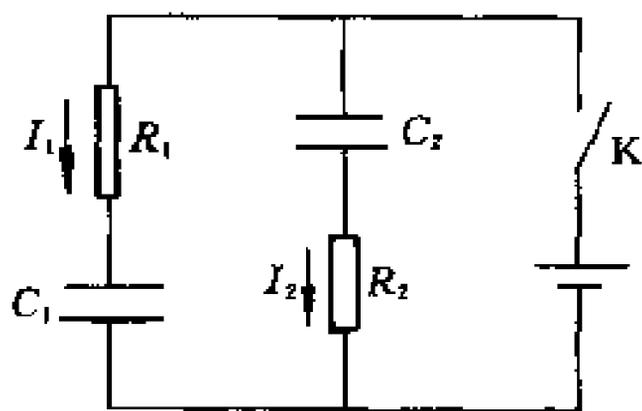
13-13 在一个线圈(自感为 L ,电阻为 R)和电动势为 \mathcal{E} 的电源的串联电路中,当开关接通的那个时刻,线圈中还没有电流,自感电动势怎么会最大?

13-14 自感电动势能不能大于电源的电动势?暂态电流可否大于稳定时的电流值?

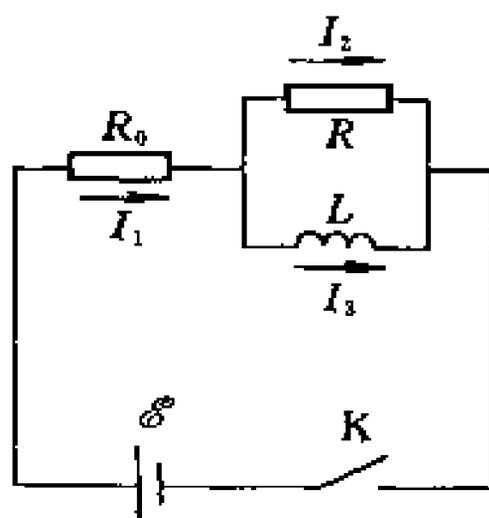
13-15 有两个半径相接近的线圈,问如何放置方可使其互感最小?如何放置可使其互感最大?

13-16 两个螺线管串联相接,两管中任何时候通有相同的恒定电流,试问两螺线管之间有没有互感存在?解释之.

13-17 如图所示,设 C_1 和 C_2 上的初始电压为零.问当电键 K 闭合瞬间及到达稳定时,电容器 C_1 和 C_2 上的电压 U_1 与 U_2 各等于多少?在两种情况下,两支路上的电流 I_1 和 I_2 各等于多少?

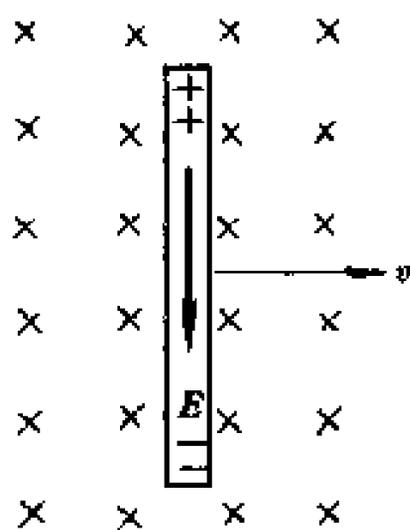


思考题 13-17 图



思考题 13-18 图

13-18 如图所示电路中,已知 $\mathcal{E}=10\text{ V}$, $R_0=10\ \Omega$, $R=40\ \Omega$, $L=20\text{ H}$.求在下列情况时,电路中的 I_1 、 I_2 和 I_3 各等于多少.



思考题 13-10 图

- (1) 当电键 K 刚接通;
- (2) K 接通后很长时间;
- (3) 电流达稳定值后,再断开 K 时和断开后很长时间.

13-19 在螺绕环中,磁能密度较大的地方是在内半径附近,还是在外半径附近?

13-20 磁能的两种表式

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

和

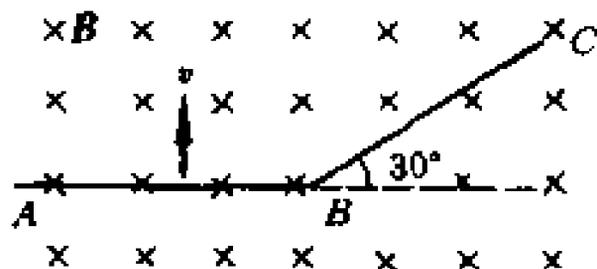
$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$$

的物理意义有何不同? 式中 V 是均匀磁场所占体积.

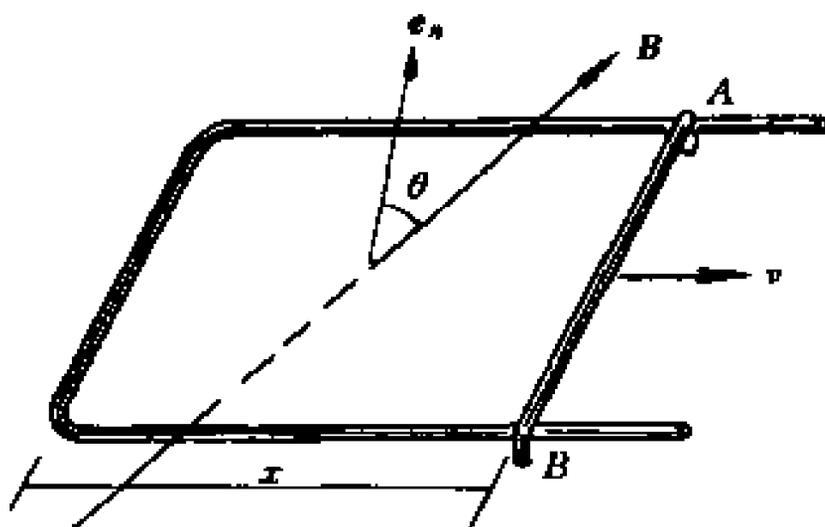
习 题

13-1 AB 和 BC 两段导线,其长均为 10 cm ,在 B 处相接成 30° 角,若使导线在均匀磁场中以速度 $v=1.5\text{ m/s}$ 运动,方向如图,磁场方向垂直纸面向内,磁感应强度为 $B=2.5 \times 10^{-2}\text{ T}$. 问 A 、 C 两端之间的电势差为多少? 哪一端电势高?

13-2 一均匀磁场与矩形导体回路面法线单位矢量 e_n 间的夹角为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ (如图),已知磁感应强度 B 随时间线性增加,即 $B=kt(k>0)$,回路的 AB 边长为 l ,以速度 v 向右运动,设 $t=0$ 时, AB 边在 $x=0$ 处. 求任意时刻回路中感应电动势的大小和方向.



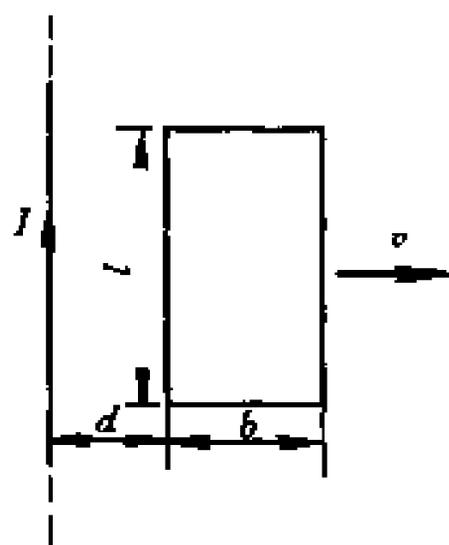
习题 13-1 图



习题 13-2 图

13-3 如图所示,一长直导线通有电流 $I=0.5\text{ A}$,在与其相距 $d=5.0$

cm 处放有一矩形线圈, 共 1 000 匝. 线圈以速度 $v = 3.0 \text{ m/s}$ 沿垂直于长导线的方向向右运动时, 线圈中的动生电动势是多少? (设线圈长 $l = 4.0 \text{ cm}$, 宽 $b = 2.0 \text{ cm}$.)

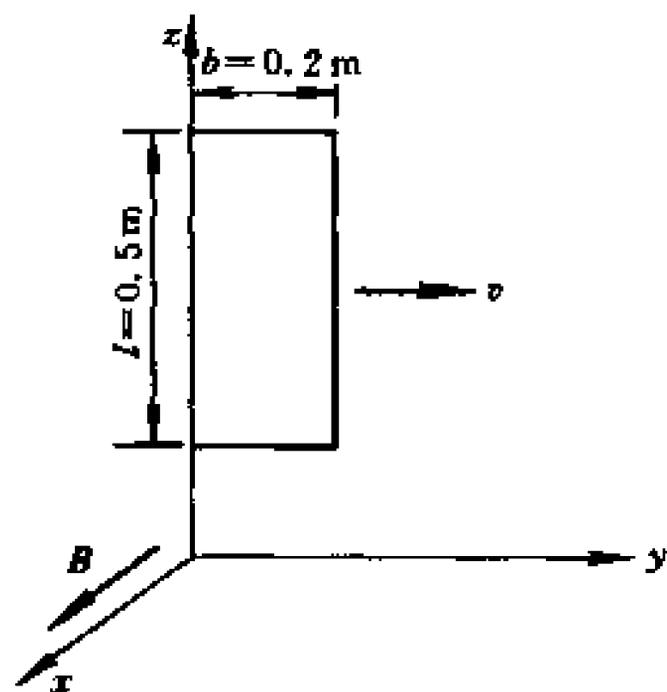


习题 13-3 图

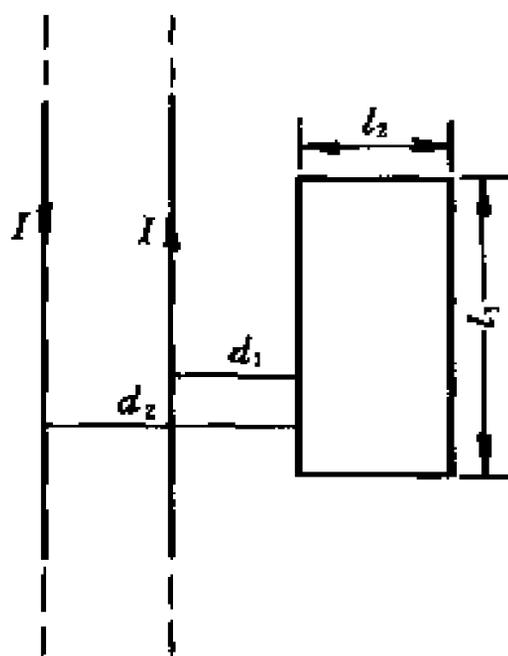
13-4 一矩形回路在磁场中运动, 已知磁感应强度 $B_y = B_z = 0, \{B_x\}_T = 6 - \{y\}_m$. 当 $t = 0$ 时, 回路的一边与 z 轴重合 (如图). 求下列情况时, 回路中感应电动势随时间变化的规律.

- (1) 回路以速度 $v = 2 \text{ m/s}$ 沿 y 轴正方向运动;
- (2) 回路从静止开始, 以加速度 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 沿 y 轴正方向运动;
- (3) 如果回路沿 z 轴方向运动, 重复 (1)、(2);
- (4) 如果回路的电阻 $R = 2 \Omega$, 求 (1)、(2) 回路中的感应电流.

13-5 在两平行导线的平面内, 有一矩形线圈, 如图所示. 如导线中电流 I 随时间变化, 试计算线圈中的感生电动势.



习题 13-4 图



习题 13-5 图

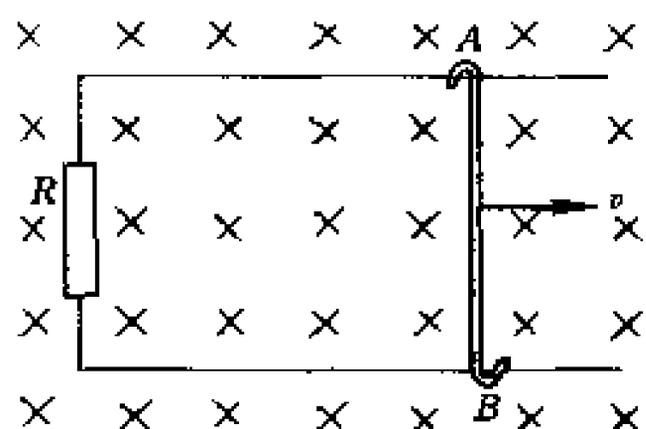
13-6 如图所示, 导线 AB 在导线架上以速度 v 向右滑动. 已知导线 AB 的长为 50 cm , $v = 4.0 \text{ m/s}$, $R = 0.20 \Omega$, 磁感应强度 $B = 0.50 \text{ T}$, 方向垂直回路平面. 试求

- (1) AB 运动时所产生的动生电动势;
- (2) 电阻 R 上所消耗的功率;

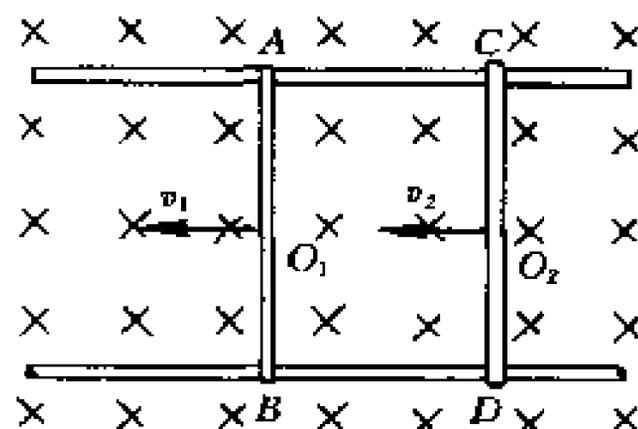
(3) 磁场作用在 AB 上的力.

13-7 如图所示, AB 和 CD 为两根金属棒, 各长 1 m , 电阻都是 $R=4\ \Omega$, 放置在均匀磁场中, 已知 $B=2\text{ T}$, 方向垂直纸面向里. 当两根金属棒在导轨上, 分别以 $v_1=4\text{ m/s}$ 和 $v_2=2\text{ m/s}$ 的速度向左运动时, 忽略导轨的电阻. 试求

- (1) 在两棒中动生电动势的大小和方向, 并在图上标出;
- (2) 金属棒两端的电势差 U_{AB} 和 U_{CD} ;
- (3) 两金属棒中点 O_1 和 O_2 之间的电势差.

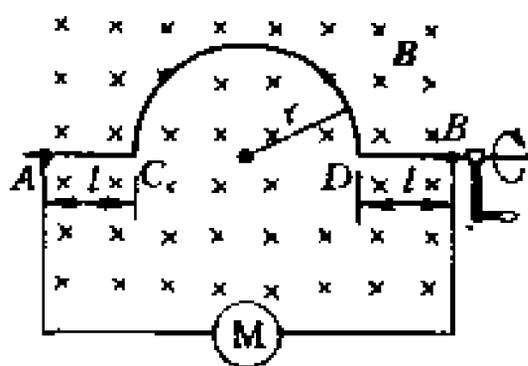


习题 13-6 图



习题 13-7 图

13-8 一导线 AB 弯成如图的形状(其中 CD 是半圆, 半径 $r=0.10\text{ cm}$, AC 和 DB 段的长度均为 $l=0.10\text{ m}$), 在均匀磁场 ($B=0.50\text{ T}$) 中绕轴线 AB 转动, 转速 $n=3\ 600\text{ r/min}$. 设电路的总电阻(包括电表 M 的内阻)为 $1\ 000\ \Omega$, 求导线中的动生电动势和感应电流的频率以及它们的最大值各是多少.



习题 13-8 图

13-9 有一螺线管, 每米有 800 匝. 在管内中心放置一绕有 30 圈的半径为 1 cm 的圆形小回路, 在 $1/100\text{ s}$ 时间内, 螺线管中产生 5 A 的电流. 问小回路中感应产生的感生电动势为多少?

13-10 如图所示, 通过回路的磁通量与线圈平面垂直, 且指向图面, 设磁通量依如下关系变化

$$\Phi = 6t^2 + 7t + 1$$

式中 Φ 的单位为 mWb , t 的单位为 s . 求 $t=2$ 时, 在回路中的感生电动势的量和方向.

13-11 一横截面为 3.0 cm^2 的铁芯螺绕环, 环上每厘米绕有线圈 40

匝,铁芯的磁导率 $\mu=2\,000\mu_0$,在环上绕有 2 匝次线圈.求初级绕组中电流在 0.1 s 内由 5 A 降到 0 时,在次级绕组中产生的平均感生电动势.

13-12 如图,具有相同轴线的两个导线回路,小的回路在大的回路上面距离 y 处, y 远大于回路的半径 R ,因此当大回路中有电流 I 按图示方向流过时,小回路所围面积 πr^2 之内的磁场几乎是均匀的.现假定 y 以匀速 $v=dy/dt$ 而变化.

(1) 试确定穿过小回路的磁通量 Φ 和 y 之间的关系;

(2) 当 $y=NR$ 时(N 为整数),小回路内产生的感生电动势;

(3) 若 $v>0$,确定小回路内感应电流的方向.

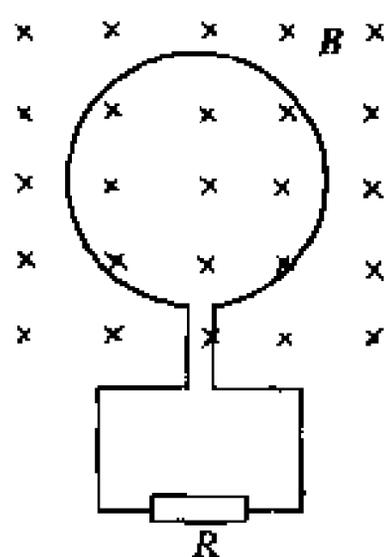
13-13 电子感应加速器中的磁场在直径为 0.50 m 的圆柱形区域内是匀强的,若磁场的变化率为 1.0×10^{-2} T/s.试计算离开中心距离为 0.10 m、0.50 m、1.0 m 处各点的感生场强.

13-14 如图表示一个限定在半径为 R 的圆柱体内的均匀磁场 B , B 以 10^{-2} T/s 的恒定变化率减少,电子在磁场中 A 、 O 、 C 各点处时,它所获得的瞬时加速度(大小和方向)各为若干? 设 $r=5.0$ cm.

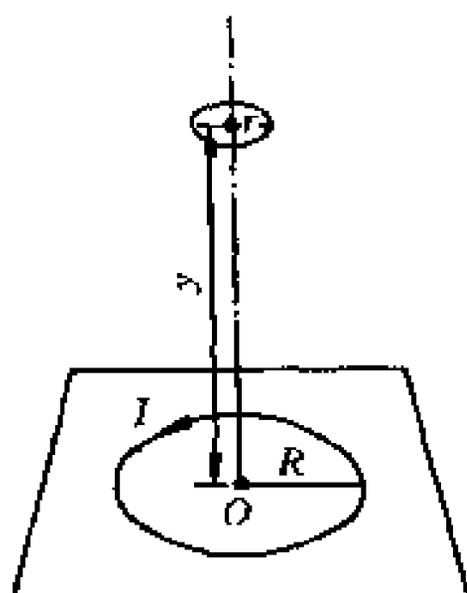
13-15 一电子在电子感应加速器中沿半径为 1.0 m 的轨道上作圆周运动,如它每转一周动能增加 700 eV,试计算电子轨道内磁通量的平均变化率.

13-16 在半径为 R 的圆柱形体积内充满磁感应强度为 B 的均匀磁场,有一长为 l 的金属棒放在磁场中,如图所示.设 $\frac{dB}{dt}$ 为已知,求棒两端的电势差.

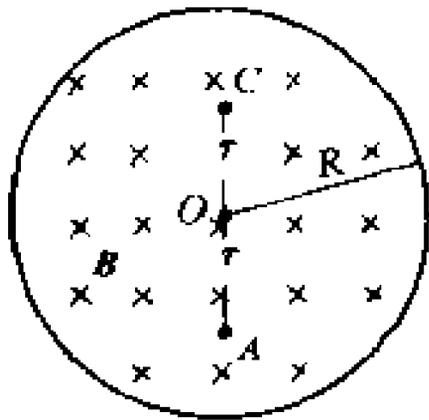
13-17 边长为 20 cm 的正方形导体回路,放置在圆柱形空间的均匀磁场中,已知磁感应强度的量值为 0.5 T,方向垂直于导体回路所围平面(如图所示),若磁场以 0.1 T/s 的变化率减小,AC 边沿圆柱体直径, B 点在磁场的



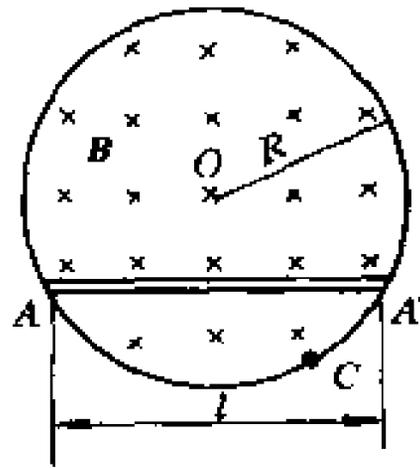
习题 13-10 图



习题 13-12 图



习题 13-14 图



习题 13-16 图

中心。

(1) 用矢量标出图中 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 各点处感生电场 E 的方向和大小；

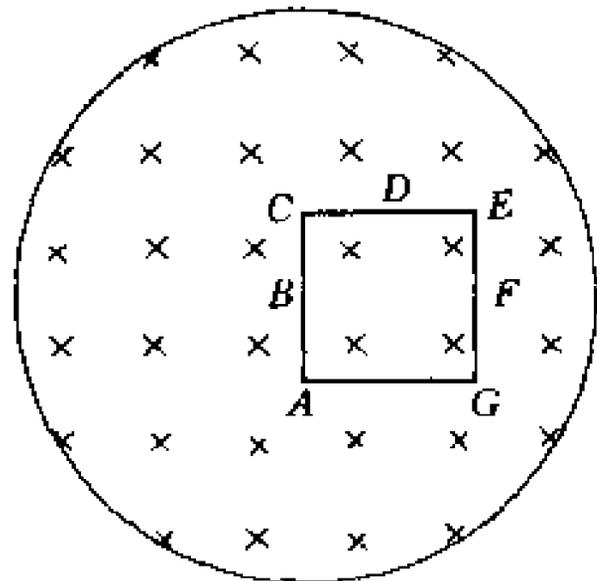
(2) AC 边内的感生电动势有多大？

(3) 回路内的感生电动势有多大？

(4) 如果回路的电阻为 $2\ \Omega$ ，回路中的感应电流多大？

(5) A 和 C 两点间的电势差为多少？哪一点的电势高。

13-18 电磁“涡流”制动器由一电导率为 γ 和厚度为 d 的圆盘组成，此盘绕通过其中心的轴旋转，且有一覆盖面积为 l^2 的磁场 B 垂直于圆盘，如图所示，若面积 l^2 在高轴 r 处，当圆盘角速度为 ω 时，试说明使圆盘慢下来的道理。



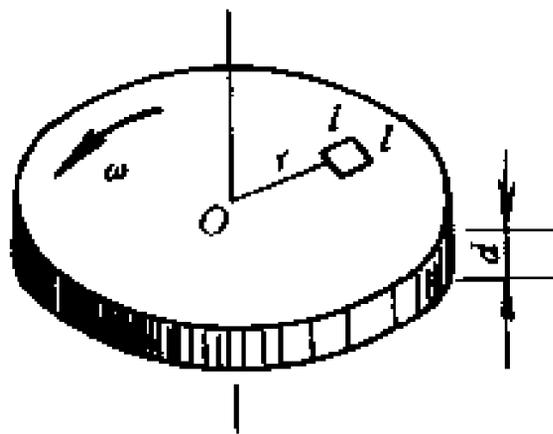
习题 13-17 图

13-19 要从真空仪器的金属部件上清除出气体，可以利用感应加热的方法，如图所示，设线圈长 $l=20\text{ cm}$ ，匝数 $N=30$ 匝（把线圈近似看作是无量长密绕的），线圈中的高频电流为 $I=I_0 \sin 2\pi ft$ ，其中 $I_0=25\text{ A}$ ，频率 $f=10^5\text{ Hz}$ ，被加热的是电子管阳极，它是半径 $r=4\text{ mm}$ 而管壁极薄的空圆筒，高度 $h \ll l$ ，其电阻 $R=5 \times 10^{-3}\ \Omega$ ，求

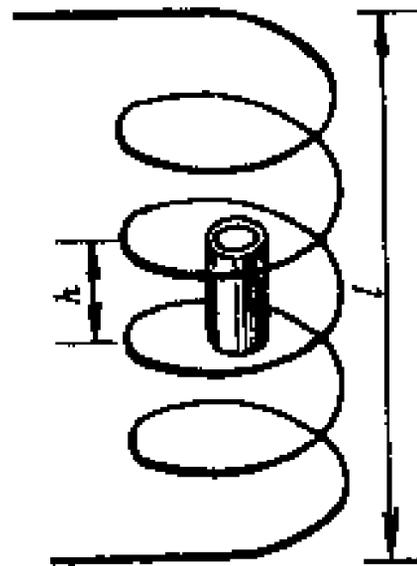
(1) 阳极中的感应电流最大值；

(2) 阳极内每秒产生的热量；

(3) 当频率 f 增加 1 倍时，热量增至几倍？

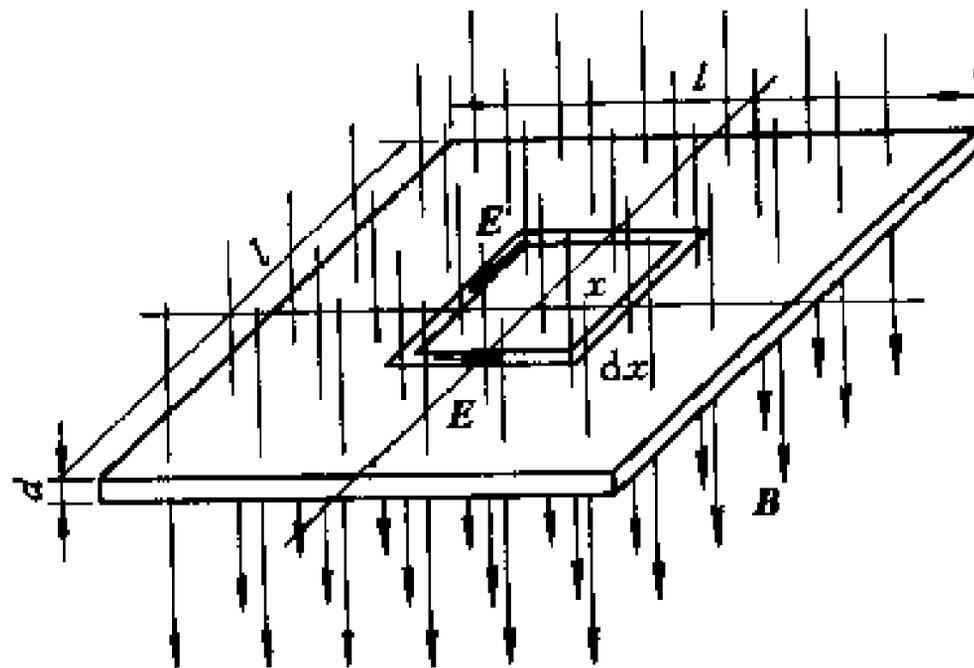


习题 13-18 图



习题 13-19 图

13-20 如图所示,一块金属板的尺寸为 $l \times l \times d$, 一均匀磁场垂直于板面. 当磁感应强度的大小按 $B = B_0 \sin \omega t$ 变化时, 证明由于在金属板内产生涡



习题 13-20 图

电流而消耗的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{64} \gamma \omega^2 B_0^2 d l^4$$

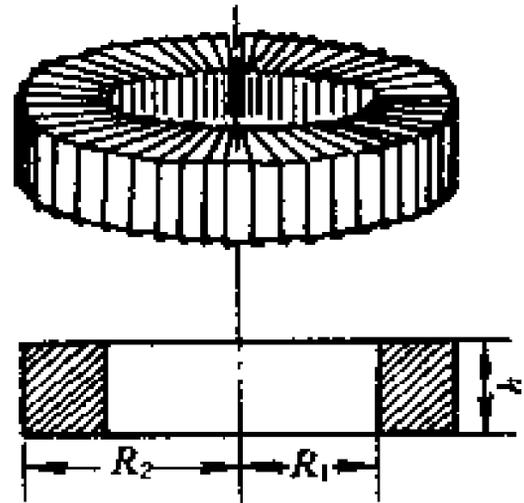
式中 γ 是金属板的电导率.

13-21 在长为 60 cm、直径为 5.0 cm 的空心纸筒上绕多少匝线圈才能得到自感为 6.0×10^{-3} H 的线圈?

13-22 一线圈的自感 $L = 0.05$ mH, 通过线圈的电流为 $I = 0.8$ A, 当电源切断后, 电流实际上是在 $120 \mu\text{s}$ 内下降到零. 求线圈中自感电动势的平均值.

13-23 已知一个空心密绕的螺绕环,其平均半径为 0.10 m ,横截面积为 6 cm^2 ,环上共有线圈 250 匝,求螺绕环的自感.又若线圈中通有电流 3 A 时,再求线圈中的磁通量及磁链数.

13-24 一截面为长方形的螺绕管,其尺寸如图所示,共有 N 匝,求此螺绕管的自感.



习题 13-24 图

13-25 一圆形线圈 A 由 50 匝细线绕成,其面积为 4 cm^2 ,放在另一个匝数等于 100 匝,半径为 20 cm 的圆形线圈 B 的中心,两线圈同轴.设线圈 B 中的电流在线圈 A 所在处所激发的磁场可看作是均匀的.求

- (1) 两线圈的互感;
- (2) 当线圈 B 中的电流以 50 A/s 的变化率减小时,线圈 A 内磁通量的变化率;
- (3) 线圈 A 中的感生电动势.

13-26 两个共轴圆线圈,半径分别为 R 及 r ,匝数分别为 N_1 和 N_2 ,相距为 d .设 r 很小,则小线圈所在处的磁场可以视为均匀的.求两线圈的互感系数.

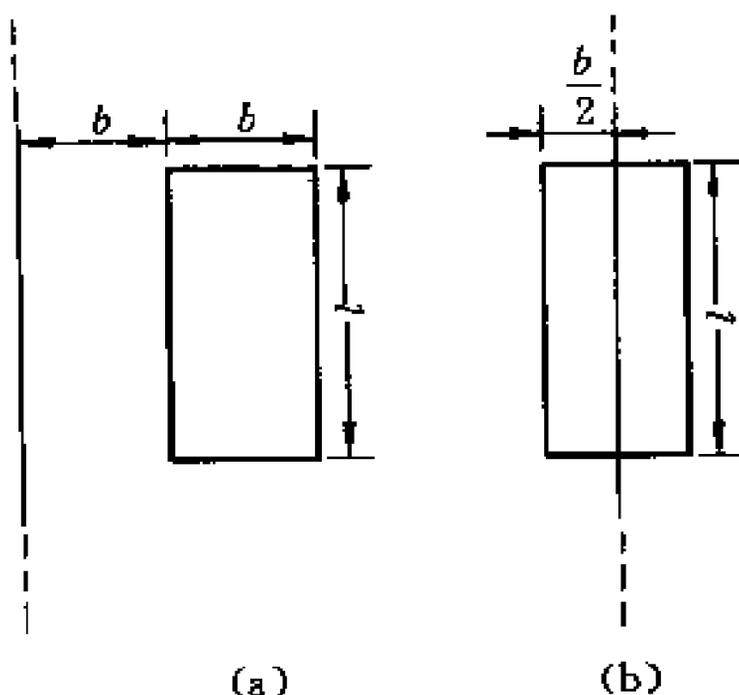
13-27 一矩形线圈长 $l=20\text{ cm}$,宽 $b=10\text{ cm}$,由 100 匝表面绝缘的导线绕成,放置在一根长直导线的旁边,并和直导线在同一平面内,该直导线是一个闭合回路的一部分,其余部分离线圈很远,其影响可略去不计.求图(a)、(b)两种情况下,线圈与长直导线间的互感.

13-28 有一个平绕于圆筒上的螺旋线圈,长 10 cm ,直径 1 cm ,共有线圈 1000 匝,用 32 号漆包线绕制,漆包线的电阻是 $247\text{ }\Omega/\text{km}(20\text{ }^\circ\text{C})$.若把这线圈接在电动势为 2 V 的蓄电池上.问:

- (1) 线圈的自感和电阻各是多少? 电路的时间常数是多少?
- (2) 线圈中通电开始时的电流增长率是多少?
- (3) 线圈中的电流达到稳定后,恒定电流是多少?
- (4) 在稳定后线圈中所储存的磁能及磁能密度各是多少?

13-29 一个自感为 0.5 mH 、电阻为 $0.01\text{ }\Omega$ 的线圈串接到内阻可以忽略、电动势为 12 V 的电源上.问电流在电键接通多长时间达到稳定值的 90% ? 这时,在线圈中储存了多少磁能? 到此时电源共消耗了多少能量?

13-30 在一 LR 串联电路中,电流在 5.0 s 内达到它的稳定值的 $1/3$.求



习题 13-27 图

此电路的时间常数, 要使这电路中的电流达到与稳定值差 0.1% 时, 需经过几个“时间常数”的时间?

13-31 自感为 2.0 H 、电阻为 10Ω 的线圈, 突然连接到电动势 $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ 、内阻不计的电池组上, 在接通后 0.1 s 时, 试求

- (1) 磁场中储存能量的增加率;
- (2) 线圈中产生的焦耳热功率;
- (3) 电池组放出的电功率.

13-32 红宝石激光器中脉冲氙灯, 常用 $2000 \mu\text{F}$ 电容器充电到 4000 V 后放电时的瞬时大电流来使之发光, 如电源给电容器充电时的最大输出电流为 1 A , 求此充电电路的最小时间常数. 脉冲氙灯放电时, 其灯管内阻近似为 0.5Ω , 求最大放电电流及放电电路的时间常数.

13-33 一个 $10 \mu\text{F}$ 的电容器充电到 100 V 后, 通过电阻 $R = 10 \text{ k}\Omega$ 放电, 试求

- (1) 刚开始时的电流;
- (2) 电荷量减少一半所需的时间;
- (3) 能量减少一半所需的时间.

13-34 电阻为 $3.0 \times 10^6 \Omega$ 的电阻器、电容为 $1.0 \mu\text{F}$ 的电容器以及电动势为 4.0 V 的电源串联成一电路, 试求在这电路接通后 1.0 s 时下列各量:

- (1) 电容器上电荷量增加的速率;
- (2) 电容器内贮藏能量的速率;

(3) 电阻器上产生焦耳热的功率;

(4) 电源所供给的功率.

13-35 一个螺线管的自感为 10 mH, 通过线圈的电流为 4 A, 求它所储存的磁能.

13-36 有一段 10 号铜线, 直径为 2.54 mm, 单位长度的电阻为 $3.28 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$, 在这铜线上载有 10 A 的电流, 试计算:

(1) 铜线表面处的磁能密度有多大?

(2) 该处的电能密度是多少?

13-37 一根长直导线, 其 $\mu \approx \mu_0$, 载有电流 I , 已知电流均匀分布在导线的横截面上. 试证: 单位长度导线内所储存的磁能为 $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$.

13-38 假定从地面到海拔 $6 \times 10^6 \text{ m}$ 的范围内, 地磁场为 $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, 试粗略计算在这区域内地磁场的总磁能.

阅读材料 K

磁效应及其应用

物质所呈现的宏观物性(力、声、热、光、电和磁等)都和物质内原子和电子所处的状态以及它们之间的相互作用有关, 因此这些物性相互联系、相互影响. 例如, 物质磁状态的变化会引起其他各种物性的变化; 反之, 力、声、热、光和电等的作用也会引起物质磁性的变化, 这种与磁性有关的相互影响的变化统称为磁效应. 显然, 物质的磁效应能提供物质内部结构、物质内部各种相互作用以及由此引起的各种物理性能相互联系的信息. 目前磁效应技术已在各领域获得重要应用, 下面分别介绍几种磁效应及其简单应用.

1. 磁致伸缩效应

在由强磁材料制成的棒上绕以线圈, 然后在线圈中通以电流, 使磁棒处在恒定磁场中. 实验发现, 磁棒在磁化状态下, 其长度和体积均发生变化, 这种现象称为磁致伸缩, 它是由磁体内磁畴的变

化和相应的磁畴自发形变所造成的。

对大多数铁磁体来说,磁致伸缩所引起的长度变化相对是很小的,大约只有 $1/100\ 000$ 。

磁致伸缩的逆效应为应力和应变对磁体磁化的影响,它们统称为磁弹效应。

在机械制造工业上,可用磁致伸缩现象来检测微小的机械振动;应用到超声换能器上,则可以产生超声波。对强磁体的磁致伸缩效应进行研究,能帮助我们了解体内各种相互作用及磁化过程。

2. 磁声效应

如果上述处在恒定磁场中的磁棒再受到交变磁场的作用,则磁棒会发生相应的机械振动,其逆效应为在恒定磁场中强磁体的磁化状态随声振动而变化。这种强磁体中磁化状态与声振动之间的相互影响、相互转换的效应,称为磁声效应。

磁声效应可以作如下解释:磁弹效应使自旋波(磁振子)和点阵的振动(声子)发生耦合,当自旋波与声波的频率和波长均相等时,两者将发生强烈的耦合并相互转换,这时产生两种波耦合的磁弹波,从而使引起此效应的声波出现强烈的衰减。

磁声效应除用于超声换能器中外,还可以用来研究磁体的微观特性。

3. 磁热效应

铁磁质或顺磁质在绝热下磁化时,磁体的温度随磁场强度的变化而改变的现象,称为磁热效应。

由热力学理论可知,在绝热过程(等熵)中,铁磁体或顺磁体的温度随磁场变化的关系为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S > 0$$

其中 H 是磁场强度, S 是磁介质的熵, T 为热力学温度,并设磁介质遵守居里定律。

从以上关系可知,绝热地增强磁场时,磁介质的温度将升高;

绝热地减小磁场时,磁介质的温度将降低.利用绝热退磁法获得低温,就是依据这一效应.

磁热效应可以用原子的磁矩理论来解释.在没有磁场时,磁介质中各原子磁矩(或磁畴)的取向是混乱的,这使分子的摩尔熵除了点阵振动所贡献的一部分外,又增加了这些无序运动的一部分.若将磁介质在保持一定温度的条件下放入强磁场中,外磁场将使磁介质中的原子磁矩(或磁畴)均取能量较小的方向,即沿磁场的方向作有序排列,因而使系统的熵减小.由式 $\Delta Q = \frac{\Delta S}{T}$ 可知,这时将有一部分热量从磁介质流出.若这时再绝热地慢慢减小磁场,则磁介质中的原子磁矩(或磁畴)又将偏离磁场方向,磁矩系统的熵增加,由于绝热,系统的总熵应保持不变,所以与点阵振动相关的熵必然减小,结果导致磁介质被冷却,它是现代获得低温的有效方法之一,利用这种方法可以得到约为 10^{-3} K 的低温.

4. 磁电效应

磁电效应有下列几种情况.

(1) 磁致电阻效应

通有电流的物体,在外磁场中会引起物质电阻率的变化,这种现象为磁致电阻效应.

对非铁磁性物质,外加磁场使它的电阻率增加,尤其当所加磁场的方向与电流方向垂直时或处在低温和强磁场中时,其电阻率的增加更为明显.

如果是单晶物体,电流和磁场相对于单晶轴的取向不同时,其电阻率的改变也不同,即磁致电阻效应是各向异性的.

铁磁体在居里温度以下并在弱磁场中时,其电阻率的相对变化 $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ 随电流和磁场方向平行或垂直分别取不同的正值和负值,且电阻率的相对变化较大.铁磁单晶的磁致电阻效应也是各向异性的,对于顺磁性物质,其 $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ 则随真实磁化强度的增加而减小.

在低温物理中,磁致电阻效应可用来研究金属的费米面,从而确定金属的低温特性.

(2) 霍耳效应

霍耳效应是磁场对通有电流的物体的另一种电效应,详见 § 11-7. 在这里只指出下列几点:对铁磁质,霍耳电场由样品的磁化强度决定;铁磁质的霍耳系数一般比非铁磁质的霍耳系数大,除此以外,铁磁质的霍耳系数与温度的关系显示很多反常现象.

(3) 狭义的磁电效应

在外加电场或外加磁场中,一些磁性物质内可能产生与外电场成正比的磁化强度或与外磁场成正比的电极化强度,这种现象统称为磁电效应,前者称为电致磁电效应,后者称为磁致磁电效应.

当外加电场 E 和磁场 H 同时存在时,则处在电场、磁场中物体的磁化强度 M 、电极化强度 P 和 E 、 H 二者的关系为

$$M = \chi_m H + \alpha_{mc} E$$

$$P = \alpha_{cm} H + \chi_e E$$

式中 χ_m 、 χ_e 分别为材料的磁化率和电极化率, α_{mc} 、 α_{cm} 分别为材料的磁致磁电化率和电致磁电化率,它们都是张量.

1960 年和 1961 年已在自旋有序的反铁磁体 Cr_2O_3 单晶中观察到电致、磁致磁电效应,之后,人们又在很多具有一定晶体对称性的反铁磁物质内观察到这种效应. 实验还发现,当温度升高到磁有序温度以上时, Cr_2O_3 晶体由反铁磁性转变为顺磁性,狭义磁电效应也随之消失.

5. 磁光效应

磁光效应是指光与磁场中的物质、或与具有自发磁化强度的物质之间的相互作用所产生的各种现象,主要有以下几种.

(1) 法拉第效应

在处于磁场中的均匀各向同性介质内,一束线偏振光沿磁场方向传播时,光的偏振面发生旋转的现象,称为法拉第效应,也称

磁致旋光. 对于一般材料, 偏振面旋转角 θ 与光在介质中经过的长度 l 和磁感应强度 B 之间有以下关系

$$\theta = VBl$$

V 是与物质性质、温度以及光的频率有关的常量, 称为费尔德常量.

因为在磁场中电子总是要附加一个绕磁场作进动的运动, 其进动方向和磁场方向无关, 所以在一定的介质中, 不论光是沿磁场方向或逆磁场方向传播, 偏振面的转向都一样, 这就是说, 当光来回传播同样距离后, 其偏振面的转角等于单程转角的两倍. 这是磁致旋光与天然旋光的区别.

法拉第效应可用于混合碳水化合物成分分析和分子结构的研究. 在激光技术中, 这一效应被用来制作光隔离器和红外调制器.

(2) 塞曼效应

当光源处在足够强的磁场中时, 所发射的光谱线会分裂成几条, 而且每条谱线的光是偏振的, 谱线分裂为二条(顺磁场方向观察)或三条(垂直于磁场方向观察)的叫正常塞曼效应, 谱线分裂三条以上的叫反常塞曼效应.

塞曼效应是由于磁矩不等于零的原子处在磁场中时产生一个附加能量, 从而使原子能级在磁场中分裂成数层才产生的.

塞曼效应反映原子所处的状态, 从实验数据可推断原子能级的分裂情况, 由此可获得原子态的重要资料, 它是研究原子结构重要方法之一.

(3) 克尔磁光效应

法拉第效应发现后, 克尔于 1876 年发现: 线偏振光入射到磁化介质表面时, 反射光的偏振面发生旋转, 这一现象叫做克尔磁光效应. 产生克尔磁光效应的物理基础和理论处理与法拉第效应相同, 只是前者发生在物质表面, 且只发生在自发磁化的物质上, 而后者发生在物质体内, 在一般顺磁介质中也可观察到.

克尔磁光效应最重要的应用就是观察铁磁材料中难以捉摸的

磁畴,若再配用现代技术进行静态观察或动态研究,就能对磁畴、磁学参量作有效测量。

6. 磁共振效应

在固体所在的恒定磁场区域,又叠加一个和恒定磁场相垂直的交变磁场(实际用的是超高频电磁波),当恒定磁场的强度与高频磁场的频率满足一定条件时,探测器显示交变电磁场强度骤降,这就是固体对高频电磁场的共振吸收现象。

磁共振现象的理论可简述如下:原子中电子的轨道磁矩和自旋磁矩合成原子总磁矩(原子核的磁矩较小可暂不考虑),它与相应的原子总角动量之比称为磁旋比 γ 。在外磁场 B 中,原子总磁矩 M 受磁力矩 $M \times B$ 的作用,使原子绕磁场方向进动,其进动角频率 $\omega_L = \gamma B$,称为拉莫尔进动角频率。原子受恒定外磁场 B 作用而进动引起的附加能量使原子的基态能级劈裂几层,当超高频电磁波的频率 ν 调整到一个量子的能量 $h\nu$ 刚等于原子在磁场中的相邻能级差时,电磁波能量便被强烈吸收,这就是磁共振现象。

当 M 是顺磁体中的原子磁矩时,这种共振就叫做顺磁共振,顺磁共振所用的超高频电磁波波段在微波波段(厘米波)。当 M 是铁磁体中的磁化强度时,这种共振称为铁磁共振。当 M 是核磁矩时,就称核磁共振,因为核磁矩只有原子磁矩的 $1/1000$,所用电磁波的频率比上述顺磁体所用电磁波的频率也要小 $1/1000$ 的数量级。

顺磁共振技术已较广泛地用来研究离子晶体的能级、晶体结构的各种缺陷等。在生物学和化学上,可以利用顺磁共振效应进行结构分析。微波固体量子放大器也是在晶体顺磁共振的基础上发展起来的。

铁磁共振效应是研究铁磁体内部结构和测量磁性参量的方法之一,也是微波磁器件(如铁氧体的隔离器、相移器)的物理基础。

核磁共振效应广泛地应用在科学技术的各个领域里,利用核磁共振效应制成的各种测试设备,已成为进行物理、化学及其他科

学研究的标准实验方法之一。核磁共振技术是直接测定原子核磁矩和研究固体结构的重要方法,通过对固体样品核磁共振谱线的研究,可以深入了解物质的结构,从而为新材料的开发提供实验依据。

第十四章 麦克斯韦方程组 电磁场

到现在为止,我们分别介绍了静止电荷分布所激发的静电场和运动电荷及恒定电流所激发的磁场.因为静止和运动是相对于某一参考系而说的,所以电场和磁场其实是统一的电磁场在给定参考系中显示出来的特例.当参考系变换时,它们之间可以相互转化,这反映电场、磁场是同一物质——电磁场的两个方面.上章介绍的法拉第电磁感应定律涉及到变化的磁场能激发电场,麦克斯韦在研究了安培环路定理运用于随时间变化的电路电流间的矛盾之后,提出了变化的电场激发磁场的概念,从而进一步揭示了电场和磁场的内在联系及依存关系,在此基础上,麦克斯韦把特殊条件下总结出来的电磁现象的实验规律归纳成体系完整的普遍的电磁场理论——麦克斯韦方程组.电磁场理论的一个重要成就是预言了电磁波的存在——即变化的电场和变化的磁场相互激发,形成变化的电磁场在空间传播,并算出其传播速度等于光速.1887年赫兹(H. Hertz)首先用实验证实了电磁波的存在,这不但从一个方面证明了麦克斯韦电磁场理论的正确性,也揭示了光的电磁本质.

在这一章中,我们首先把特殊条件下的电磁规律通过科学的假说建立成普遍的电磁规律,然后对电磁场的物质性及电磁场的统一性和相对性作简单的论述.

§ 14-1 位移电流

在上一章中,我们讨论过变化磁场激发电场的问题,进一步我们要问,变化的电场能否激发磁场?在确切地回答这个问题之前,

我们再来分析一下恒定电流的特点及它所激发磁场的规律.

由前章知道,恒定电流和它所激发的磁场之间遵守安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \iint_S \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} \quad (14-1)$$

式中 I 是穿过以闭合曲线 L 为边线的任意曲面 S 的传导电流, $\boldsymbol{\delta}$ 是传导电流密度. 由图 14-1 可知, 一个以确定的闭合曲线 L 为边

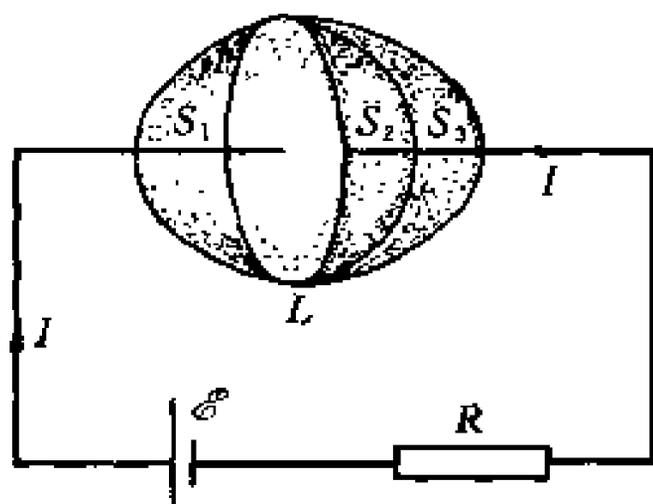


图 14-1 穿过以 L 边线的曲面 S_1 、 S_2 和 S_3 的恒定电流相等

线的曲面 S 有无限多个. 在恒定电流的情况下, 电流恒是闭合的, 即

$$\oint_S \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这样, 穿过同一个闭合曲线 L 为边线的不同曲面 S_1 、 S_2 和 S_3 的电流都等于 I , 式 (14-1) 在理论上没有矛盾, 它正确地描述了恒定电流激发磁场的规律.

在电路中电流变化的情况下, 例如, 图 14-2(a)(b) 分别表示的一个平板电容器充电和放电时的电路, 不论充电或放电, 在同一时刻通过电路中导体上任何截面的电流都相等. 但是这种在金属导体中的传导电流不能在电容器的两极板之间的真空或电介质中流动, 因而对整个电路说来, 传导电流是不连续的、在传导电流不

连续的情况下,将安培环路定理应用同一个闭合回路 L 为边线的

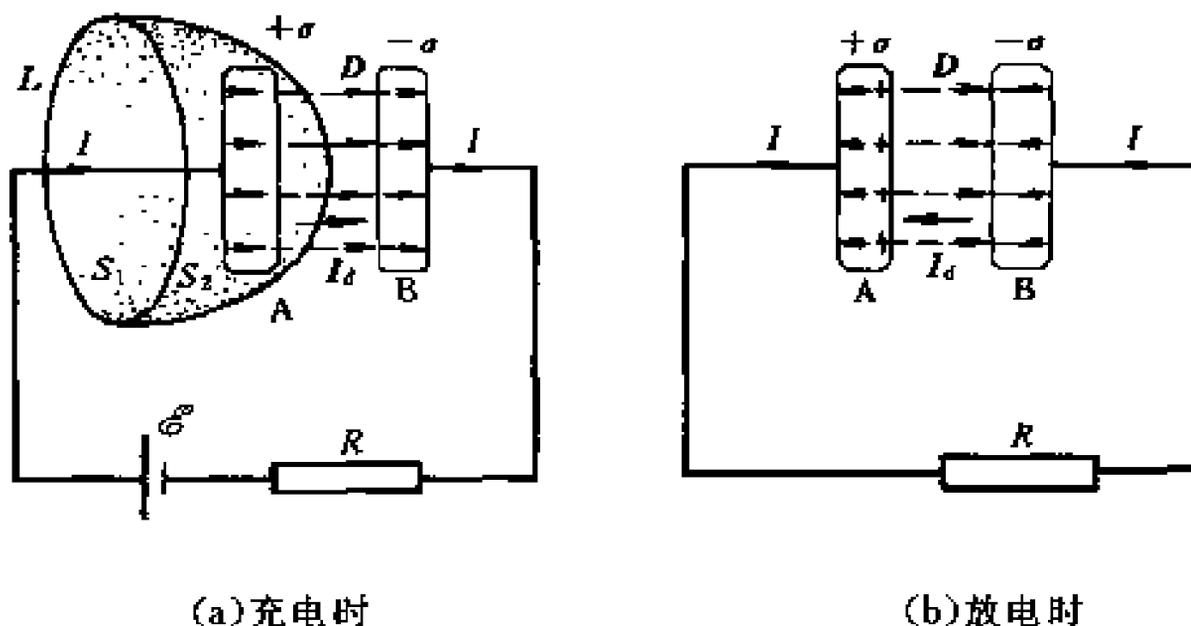


图 14-2 位移电流

不同曲面时,对 S_1 面就得到

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

如果取 S_2 面则得到

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

显然,这两个式子是相互矛盾的,即在稳定情况下正确的安培环路定理,在不稳定情况下就不正确了.问题的关键是,在不稳定时,传导电流不再连续,因而式(14-1)与电荷守恒定律相矛盾.鉴于电荷守恒定律是精确的普适定律,而式(14-1)仅仅是在稳定条件下从实验结果建立起来的特殊规律,显然在两者之间出现矛盾时理应修正式(14-1),使之能符合普适的电荷守恒定律.

我们再仔细分析一下图 14-2 所示的电路,当电容器充电或放电时,导线中的电流 I 在电容器极板处被截断了.但是,电容器两极板上的电荷量 q 和电荷面密度 σ 都随时间而变化(充电时增加,放电时减少),与此同时,在电容器两极板之间虽然没有自由电荷、传导电流,但其间的电位移 D 和通过整个截面的电位移通量 $\Psi = SD$ 也都随时间而变化.这就是说,导线中的传导电流、电容器极

板上电荷量的变化、电容器极板间的变化电场存在依次相联的关系,下面就定量计算这种相联关系.

设平行板电容器极板的面积为 S ,极板上的电荷面密度为 σ .在充电或放电过程中的任一瞬间,按照电荷守恒定律,导线中的电流应等于极板上电荷量的变化率,即

$$I = S \frac{d\sigma}{dt}$$

同时,两极板间的电场 E (或 D)也随时间发生变化.设极板上该时刻的电荷面密度为 σ ,则 $D = \sigma$,代入上式得

$$I = S \frac{d\sigma}{dt} = S \frac{dD}{dt} \quad (14-2)$$

公式表明:导线中的电流 I 等于极板上的 $S \frac{d\sigma}{dt}$,又等于极板间的 $S \frac{dD}{dt}$.在方向上,当充电时,电场增加, $\frac{dD}{dt}$ 的方向与场的方向一致,也与导线中电流方向一致[参看图 14-2(a)];当放电时,电场减少, $\frac{dD}{dt}$ 的方向与场的方向相反,但仍与导线中电流方向一致[参看图 14-2(b)].可见,极板上电荷量的变化联结了导线中的电流,而极板间变化的电场又联结了极板上电荷量的变化,从而使电路中的电流借助于电容器内的电场变化仍可视为连续的.麦克斯韦智慧地提出一个假说:变化的电场也是一种电流,并令

$$\delta_d = \frac{dD}{dt} \quad (14-3)$$

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (14-3')$$

δ_d 和 I_d 分别称为位移电流密度和位移电流.上述定义说明,电场中某点的位移电流密度等于该点电位移的时间变化率,通过电场中某截面的位移电流等于通过该截面电位移通量的时间变化率.

引进了位移电流的概念,则在图 14-2 所示电路的充放电过程

中,传导电流 I (或 δ) 虽不连续,但若令传导电流和位移电流 I_d (或 δ_d) 相加的合电流 $I_r = I + I_d$, 叫做全电流, 则全电流却总是连续的, 可证明如下.

首先假定把静电场的高斯定理直接推广到普遍情况也能适用, 这意味着尽管库仑定律在普遍情况下不再成立, 但由它推导出来的高斯定理仍然是正确的, 所以推广后的高斯定理仍是

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

将式两边对时间 t 求导

$$\frac{d}{dt} \oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt}$$

再把此式代入电荷守恒定律得

$$\oiint \delta \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dq}{dt} = - \oiint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

或

$$\oiint \left(\delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这就证明了全电流恒是连续的.

位移电流 I_d 的引入不仅使全电流成为连续的, 而且麦克斯韦还假设它在磁效应方面也和传导电流等效, 即它们都按同一规律在周围空间激发涡旋磁场, 麦克斯韦运用这种思想把从恒定电流总结出来的磁场规律推广到一般情况, 即既包括传导电流也包括位移电流所激发的磁场. 他指出: 在磁场中沿任一闭合回路 H 的线积分在数值上等于穿过以该闭合回路为边线的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和, 即

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I + I_d) = \iint \delta \cdot d\mathbf{S} + \iint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

(14-4)

这个方程称为全电流定律. 当我们把上式用到图 14-2(a) 取 S_2 面的情况中得到

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_d = \frac{d\Psi}{dt}$$

如前所述, $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dq}{dt} = I$, 因而这个结果和取 S_1 面情况的结果

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

就一致了, 这不仅解决了前述的矛盾, 而且式(14-4)必然与电荷守恒定律相吻合. 若 $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$, 则回到稳定时的环路定理.

由此可见, 位移电流的引入深刻揭露了电场和磁场的内在联系和依存关系, 反映了自然现象的对称性. 法拉第电磁感应定律说明变化的磁场能激发涡旋电场, 位移电流的论点说明变化的电场能激发涡旋磁场, 两种变化的场永远互相联系着, 形成了统一的电磁场. 麦克斯韦提出的位移电流的概念, 已为无线电波的发现和它在实际中广泛的应用所证实, 它和变化磁场激发电场的概念都是麦克斯韦电磁场理论中很重要的基本概念.

根据位移电流的定义, 在电场中每一点只要有电位移的变化, 就有相应的位移电流密度存在, 因此不仅在电介质中, 就是在导体中, 甚至在真空中也可以产生位移电流. 但在通常情况下, 电介质中的电流主要是位移电流, 传导电流可以忽略不计; 而在导体中的电流, 主要是传导电流, 位移电流可以忽略不计. 至于在高频电流的场合, 导体内的位移电流和传导电流同样起作用, 这时就不可忽略其中任何一个了.

应该指出, 传导电流和位移电流毕竟是两个截然不同的概念, 它们只有在激发磁场方面是等效的, 因此都称为电流, 但在其他方面存在根本的区别. 首先, 传导电流和自由电荷的宏观定向运动有关; 而位移电流在电介质中, 由关系式 $D = \epsilon_0 E + P$ 可知它由两部分组成, 即

$$\delta_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

其中第一项是和电荷运动无关的纯位移电流, 第二项也只和电介

质极化时极化电荷的微观运动有关. 其次, 传导电流通过导体时要产生焦耳热; 而在位移电流中, 第一项只与电场的变化率有关, 不会产生热效应, 第二项 $\frac{\partial P}{\partial t}$ 对于由有极分子组成的电介质产生较大的热量(变化的电磁场迫使有极分子反复极化, 从而使分子热运动加剧), 但它和传导电流放出的焦耳热不同, 它遵从完全不同的规律. 现代家庭新颖烹饪电器之一微波炉就是位移电流产生热量的一个实际应用, 它是通过磁控管产生频率为几吉赫的微波, 经密封的波导管进入炉腔并作用于食物上, 食物在吸收微波过程中使其分子作与微波同频率的极高频振动, 引起快速摩擦而产生热量, 达到加热、煮熟食物的目的. 由于微波对人体是有害的, 制造微波炉时, 应有专门装置以防止过量的微波从炉门缝隙处外泄.

例题 14-1 半径 $R=0.1 \text{ m}$ 的两块圆板构成平板电容器, 由圆板中心处引入二根长直导线给电容器匀速充电使电容器两板间电场的变化率为 $\frac{dE}{dt}=10^{13} \text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s})$ (图 14-3). 求电容器两板间的位移电流, 并计算电容器内离两板中心连线 $r (< R)$ 处的磁感应强度 B_r , 和 R 处的 B_R .

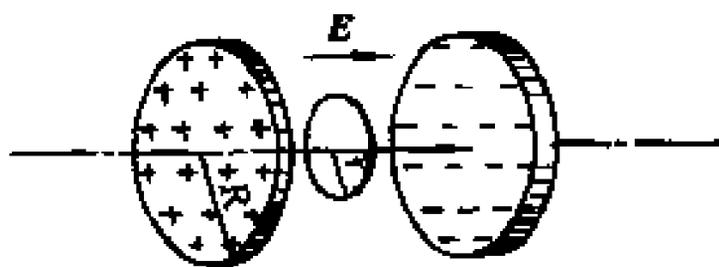


图 14-3 电容器两板间的磁场计算

解 电容器两板间的位移电流为

$$I_d = \frac{d\psi}{dt} = S \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} =$$

$$3.14 \times (0.1)^2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{13} \text{ A} = 2.8 \text{ A}$$

对这个正在充电的电容器来说, 两板之外有传导电流, 两板之间有位移电流, 所产生的磁场对于两板中心连线具有对称性, 可认为电容器内离两板中心连线为 $r (< R)$ 处的各点在同一磁感应线上, 磁感应线回转方向和电流方向之间的关系按右手规则确定, 在这些点上磁感应强度的大小都为 B_r , 取该磁感应线为积分回路, 应用全电流定律得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} B_r 2\pi r = \iint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2$$

所以

$$B_r = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

当 $r=R$ 时

$$B_R = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} R \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.1 \times 10^{13} \text{ T} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

应该指出,虽然在上述计算中只用到了极板间的位移电流,然而它是导线中传导电流的延续,板外导线中的传导电流和极板之间的位移电流所构成的连续的全电流,相当于一个长直电流激发一轴对称分布的磁场,故所得的 B 实际上就是这样的全电流激发的总磁场,并不是单由极板之间的位移电流所激发的.

§ 14-2 麦克斯韦方程组

在以前几章中,我们从实验出发,分别研究了静电场和恒定电流的磁场的基本性质以及它们所遵循的规律,也研究过电磁感应的宏观表现.但是,这些规律只反映了电磁场在特定条件时的特性,要把这些带有局限性的规律上升到具有普适意义的电磁场理论,必须从理论上进行概括、总结和推广.在 19 世纪中期,麦克斯韦在这些已有定律的基础上,提出了几个基本概念,确立了电荷、电流和电场、磁场之间的普遍关系,建立了统一的电磁场理论,为完整的电磁场理论奠定了基础.

麦克斯韦电磁场理论的基本概念(正如上节及第十三章中已

经指出的)包括两个主要内容,即(1)除静止电荷激发无旋电场外,变化的磁场还将激发涡旋电场;(2)变化的电场和传导电流一样激发涡旋磁场.这就是说,变化的电场和磁场不是彼此孤立的,它们相互联系、相互激发组成一个统一的电磁场.下面我们根据麦克斯韦的这些基本概念,首先介绍由他总结出来的麦克斯韦电磁场方程组的积分形式.

1. 电场的性质

自由电荷激发的电场和变化磁场激发的电场性质并不相同.在前节中,我们已假定高斯定理在普遍情况下也适用,也就是说,它不仅适用于静电场也适用于运动电荷的电场,即在自由电荷所激发的电场中,通过任何封闭曲面的电位移通量等于它包围的自由电荷量的代数和.变化磁场激发的电场是涡旋场,它的电位移线是闭合的,所以对封闭曲面的通量无贡献.

在一般情况下,电场可以由自由电荷和变化磁场共同激发,如用 D 表示总电位移,根据以上的论述,不难得出介质中电场的高斯定理为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q = \iiint_V \rho dV \quad (14-5)$$

上式告诉我们:在任何电场中,通过任何封闭曲面的电位移通量等于这封闭面内自由电荷量的代数和.

2. 磁场的性质

磁场可以由传导电流激发,也可以由变化电场激发,激发的方式虽然不同,但它们所激发的磁场都是涡旋场,磁感应线都是闭合线.因此,在任何磁场中,通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零.故磁场的高斯定理是

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14-6)$$

3. 变化电场和磁场的联系

经修正后的安培环路定理为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d = \iint_S \boldsymbol{\delta} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14-7)$$

上式揭示了变化电场激发磁场的规律,并能把恒定的磁场包括在内.它表明在任何磁场中,磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以这闭合曲线为边线的任意曲面的全电流.

4. 变化磁场和电场的联系

在第十三章讲到的法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14-8)$$

就反映了变化磁场和电场的联系,它不但揭示了变化磁场激发电场的规律,而且表示出在稳定时 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$,式(14-8)仍能将自由电荷的静电场包括在内.因此在一般情况中,电场可以由自由电荷和变化磁场共同激发,这时式(14-8)的 \mathbf{E} 便是它们的合场强.这就是说,在任何电场中,电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过这曲线所包围面积的磁通量的时间变化率的负值.

式(14-5)、(14-6)、(14-7)和(14-8)就是麦克斯韦将特殊条件下适用的规律,经过推广、综合成的系统完整能描述电磁场普遍规律的方程组,称为麦克斯韦方程组的积分形式.

上述麦克斯韦方程组描述的是在某有限区域内(例如一个闭合曲线或一个封闭曲面所围区域)以积分形式联系各点的电磁场量(\mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{H})和电荷、电流之间的依存关系,而不能直接表示某一点上各电磁场量和该点电荷、电流之间的相互联系.但在实际应

用中,更重要的是要知道场中某些点的场量.例如,已给定初始时刻的电荷分布、电流分布或电荷的运动情况,要求知道以后时刻的电磁场量的强弱和变化,这就要求知道在电磁场中逐点的电荷、电流和电场、磁场场量之间的相互依存关系.从数学上说,实现这种描述方法首先要把积分形式的方程组变换为相应的微分形式的方程组.利用数学方法(参看附录 1 矢量)可将上述麦克斯韦方程组转换为如下的微分形式:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (14-9)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (14-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \delta_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \delta_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (14-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (14-12)$$

引进哈密顿算符

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

就可将以上麦克斯韦方程组的微分形式简化成下列形式

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{\delta} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (14-13)$$

在应用麦克斯韦方程去解决实际问题时,常常要涉及到电磁场和物质的相互作用,为此要考虑到介质对电磁场的影响,这种影响使电磁场量和表征介质电磁特性的量 ϵ 、 μ 、 γ 发生联系,即

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \delta = \gamma \mathbf{E}$$

在非均匀介质中,还要考虑电磁场量在界面上的边值关系,以及具体问题中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的初始值条件,即它们在 $t=0$ 时的值,这样,通过解方程组,可以求得任一时刻的 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和 $\mathbf{B}(x, y, z)$,也就确定了任一时刻的电磁场.

由宏观电磁现象总结出来的麦克斯韦方程组是宏观电磁场理论的基础,它经受了实践的检验,并在许多工程实践中发挥指导作用,成为现代电工学、无线电电子学的不可缺少的理论基础. 麦克斯韦电磁场理论最卓越的成就就是预言了变化的电磁场以波的形式按一定速度在空间传播,理论表明,光波也是电磁波,从而把电磁现象和光现象联系起来,使波动光学成为电磁场理论的一个分支.

最后必须指出,麦克斯韦的电磁场理论是从宏观的电磁现象总结出来的经验定律,它和牛顿经典力学一样,只在宏观实验所能达到的范围内适用. 麦克斯韦理论的进一步发展有两点,一是把麦克斯韦方程推广到高速领域,另一是把它推广到分子和原子内部的微观领域中去. 电磁现象的一个主要特点是电磁波(包括光波)以极高的速度传播,这是人们首先接触的高速现象. 在 19 世纪末期,就是通过对电磁现象(包括光波)的研究,才导致了相对论时空观的建立. 因此,麦克斯韦方程在高速领域中理应是正确的,仍可用它来研究高速运动电荷所产生的电磁场及一般辐射问题. 但当洛伦兹把麦克斯韦方程推广到分子和原子的微观区域,创立电子论,对电磁现象作了微观解释时,虽取得了一些成就,却也遇到了不可克服的困难,这说明宏观电磁理论在微观区域里并不完全适用,因而又发展了更普遍的量子电动力学. 宏观电磁理论可以看作量子电动力学在某些特殊条件下的近似规律,正象牛顿经典力学

是相对论力学在低速情况下的近似规律一样,两者都是在一定条件下的相对真理.

§ 14-3 电磁场的物质性

电磁场是独立于人们意识之外的客观存在,这已为大量实验事实所证实.在前面讨论静电场和恒定电流的磁场时,总是把电磁场和场源(电荷和电流)合在一起研究,因为在这些情况中电磁场和场源是有机地联系着的,没有场源时电磁场也就不存在.但在场随时间变化的情况中,电磁场一经产生,即使场源消失,它还可以继续存在.这时变化的电场和变化的磁场相互转化,并以一定的速度按照一定的规律在空间传播,说明电磁场具有完全独立存在的性质,反映了电磁场为物质存在的一种形态.

现代的实验也证实了电磁场具有一切物质所具有的基本特性,如能量、质量和动量等.

我们在第九章和第十三章中已分别介绍电场的能量密度 $\frac{1}{2}DE$ 和磁场的能量密度 $\frac{1}{2}BH$,对于一般情况下的电磁场来说,既有电场能量,又有磁场能量,其电磁能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(DE + BH) \quad (14-14)$$

根据相对论的质能关系式,在电磁场不为零的空间,单位体积的场的质量是

$$m = \frac{w}{c^2} = \frac{1}{2c^2}(DE + BH) \quad (14-15)$$

1920年列别捷夫(П. Н. Лебедев)用实验证实了变化的电磁场对实物施加压力,这个实验不仅说明电磁场和实物之间有动量传递,它们满足动量守恒定律,并且还以无可辩驳的事实证明了场的物质性.对于平面电磁波,单位体积的电磁场的动量 p 和能量密

度 w 间的关系是

$$p = \frac{w}{c} \quad (14-16)$$

上面的讨论说明电磁场和实物物质一样,都具有能量、质量和动量,因此我们确认电磁场是另一种形式的物质,场物质不同于通常由电子、质子、中子等基本粒子所构成的实物物质.电磁场以波的形式在空间传播,而以粒子的形式和实物相互作用,参与作用的“粒子”就是光子.光子没有静止质量,而电子、质子、中子等基本粒子却具有静止质量.实物可以以任意的速度(但不大于光速)在空间运动,其速度相对于不同的参考系也不同.但电磁场在真空中运动的速度永远是 3×10^8 m/s,并且其传播速度在任何参考系中都相同.一个实物的微粒所占据的空间不能同时为另一个微粒所占据,但几个电磁场可以互相叠加,可以同时占据同一空间.实物和场虽有以上的区别,但在某些情况下它们之间可以发生相互转化.例如一个带负电的电子和一个带正电的正电子可以转化为光子,即电磁场,而光子也可以转化为一对电子和正电子.按照现代的观点,粒子(实物)和场都是物质存在的形式,它们分别从不同方面反映了客观真实.同一事物可以反映出场和粒子两个方面的特性,在现代量子理论中,场和粒子在反映同一事物的两个方面得到了辩证统一的认识.

§ 14-4 电磁场的统一性 电磁场量的相对性

1. 运动的相对性和电磁场的统一性

我们在前面多次提到电场和磁场是一个统一的整体,而静止电荷的静电场和恒定电流的磁场不过是电磁场的两种特例.就人类对自然现象的认识过程而言,总是从特殊到一般,从片面到全面.对于电磁现象,我们最初是从电场这个侧面来认识电磁场的,

接着又从磁场这个侧面来认识电磁场,最后才从两者的相互联系进一步认识到统一的电磁场的存在.

为了更清楚地说明电磁场的统一性,我们可以从运动的相对性进行考察.如果在某参考系中有一静止电荷,那么相对于这个参考系静止的观察者通过实验考察,将发现在电荷周围只存在静电场.但是对于相对于上述参考系作匀速运动的观察者来说,这个静止在上述参考系中的电荷对他来说不再是静止的了,这电荷相对于他正在作匀速运动,从而形成了电流,因此这个观察者将发现在电荷周围既有电场又有磁场.也许大家要奇怪地问:在电荷周围究竟存在着什么?回答是肯定的,即存在着电磁场.至于有些人观测到的只是电场,而有些人则观测到电场和磁场都存在,那是由于电荷相对人们的相对运动情况不同,因此认识的侧面也就不同,但正是这些不同的侧面反映了电磁场的统一性和相对性.

2. 电磁场量的相对性

上述事实告诉我们,电场和磁场本身是一个相对的概念,所以为了描述电磁运动,首先要选定参考系.事实上,前面各章所讨论的电磁运动,都应理解为是在某确定的参考系内观察和研究的.在上册第五章中我们曾讲过,物理定律只有在惯性系内才有最简单的形式,而且根据相对性原理,在任何惯性系内,一切物理规律是等同的,这表明电磁场理论的基本方程——麦克斯韦方程组从一个惯性系 K 变换到另一个以速度 v 相对于 K 作匀速直线运动的惯性系 K' 时,必须在洛伦兹变换下保持不变.设在惯性系 K 内,自由空间($\rho=0, \delta=0$)任一点 $P(x, y, z)$ 的场量 E 和 B 满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

或写成分量形式如下

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\
 \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\
 \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
 \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}
 \end{array}$$

那么在相对于 K 以速度 v 沿 x 方向运动的惯性系 K' 中,同一点 $P(x', y', z')$ 的场强 E' 和 B' 同样满足麦克斯韦方程组

$$\begin{array}{l}
 \nabla' \cdot \mathbf{E}' = 0, \quad \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \\
 \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0, \quad \nabla' \times \mathbf{B}' = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'}
 \end{array}$$

与它相应的分量形式为

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = 0 & \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \\
 \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} & \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\
 \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E'_y}{\partial t'} & \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\
 \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E'_z}{\partial t'} & \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_z}{\partial t'}
 \end{array}$$

不同的只是各自采用自己所在系统的时间、空间及场量来描述电磁现象,这正反映了电磁规律的绝对性.

电磁规律是绝对的,但是描述电磁现象的场量在不同惯性系内则可以有不同的量值,即电磁场量是相对的,当参考系变换时,它们之间有确定的变换关系.为了导出不同参考系中电磁场量的变换关系,下面我们用洛伦兹变换关系式将在 K 惯性系中的场方

程用 K' 惯性系中的时间、空间坐标来表示, 为此, 首先必然把对 x, y, z 和 t 的偏导数用对 x', y', z' 和 t' 的偏导数来代换. 由复合函数的链式法则可知

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}$$

用同样的方法, 可求出 $\frac{\partial}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$. 由相对论一章知道洛伦兹变换式为

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

式中 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. 由此可求得

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{v}{c^2}$$

这样便得出 $\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}\right)$

同样可得 $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}\right)$

利用上述变换关系, 我们先对式

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

进行代换, 这时方程变为

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} = -\gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial x'}$$

移项并合并同类项得

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma(E_z + vB_y)] = -\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(\frac{v}{c^2} E_x + B_y \right) \right]$$

在 K' 系中, 这个方程必须是下列形式

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

两式相比, 便可得到场量间的变换关系式

$$E'_x = E_x, \quad E'_z = \gamma[E_z + vB_y], \quad B'_y = \gamma\left(\frac{v}{c^2}E_z + B_y\right)$$

同理对式

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

进行代换可得

$$\frac{\partial}{\partial x'}[\gamma(E_y - vB_x)] - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(-\frac{v}{c^2}E_y + B_z\right)\right]$$

这个方程应该和

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_z}{\partial t'}$$

相等,两式相比,又可得到场量间的变换关系式

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_x), \quad E'_x = E_x, \quad B'_z = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}E_y + B_z\right)$$

归纳以上结果,便可得出用 K 系中的 E 和 B 的分量来表示 K' 系中 E' 和 B' 分量的变换关系式

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_x) \quad B'_y = \gamma\left(\frac{v}{c^2}E_z + B_y\right)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \quad B'_z = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}E_y + B_z\right)$$

如果将上式中的 v 改为 $-v$,便可得反向变换关系式

$$E_x = E'_x$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_x) \quad B_y = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}E'_z + B'_y\right)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) \quad B_z = \gamma\left(\frac{v}{c^2}E'_y + B'_z\right)$$

仿照上述程序,再对式

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

进行代换,并注意到 $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, 还可证得 $B'_x = B_x$.

尽管上述推导是对自由空间内电磁场这一特例进行的,但是由此所导出的变换关系式却具有普遍性.

应该指出,作为场源的电荷量 q 是相对论不变量,即 q 值与电荷的运动,亦即与参考系无关.

下面举一个应用上述场量变换关系的具体例子,说明在不同惯性系中所观察到的电磁场的分布情况.

设有一点电荷 q 静止于惯性系 K' 的原点处,而 K' 系相对于惯性系 K 以速度 v 沿 x 轴方向运动(图 14-4),在 K' 系内观察,只有静电场,并测得 t' 时刻在 $P(x', y', z')$ 处的电磁场为

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} r', \quad B' = 0$$

其电场线以点电荷为中心,在各个方向均匀分布,图 14-5 表示在 K' 系中电场线在 $x'-y'$ 平面内的分布情况,而磁场则为零.在 K 系内观察,点电荷 q 以速度 v 沿 x 轴方向运动,除电场外还观察到磁场(图 14-6).由上述场量的变换关系,可得 t 时刻在 $P(x, y, z)$ 点处的电磁场为

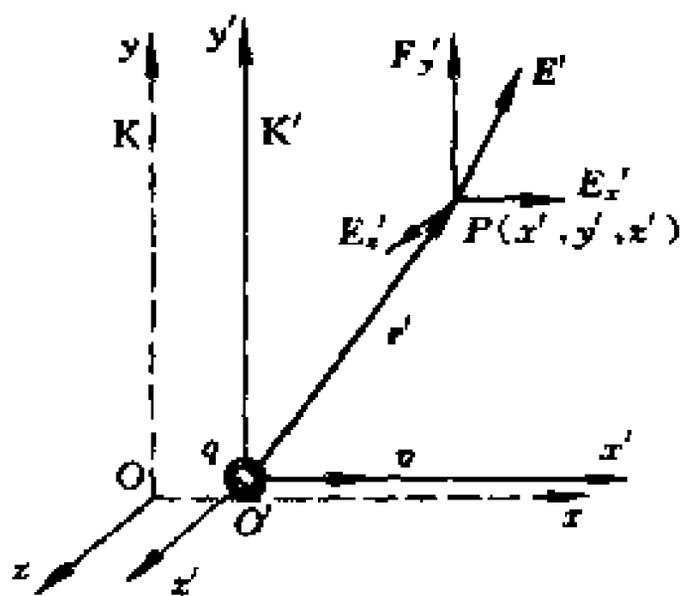


图 14-4 电荷在 K' 系内的场强

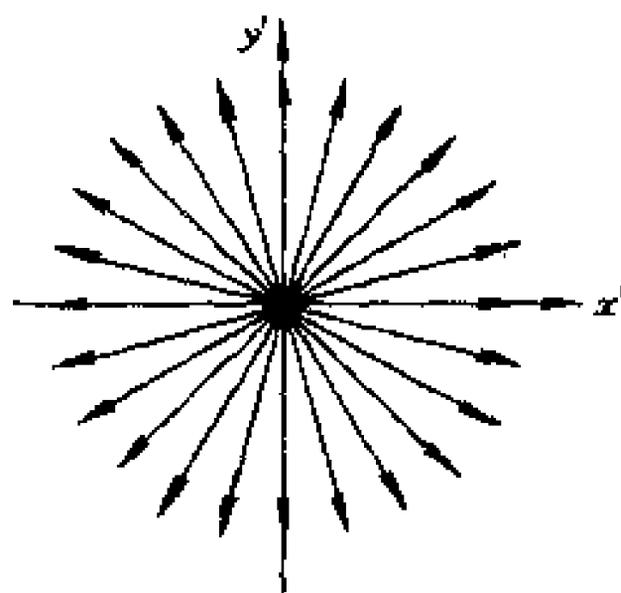


图 14-5 在 $x'-y'$ 平面内的电场线分布

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} & B_x &= 0 \\
 E_y &= \gamma \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} & B_y &= -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \\
 E_z &= \gamma \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} & B_z &= \gamma \frac{v}{c^2} \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}
 \end{aligned}$$

现在再利用洛伦兹变换式,将上式中 r' 用 K 系中的坐标来表示,因为

$$\begin{aligned}
 r' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

代入上式便得

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{\gamma q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} & B_x &= 0 \\
 E_y &= \frac{\gamma qy}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} & B_y &= -\frac{v}{c^2} E_z \\
 E_z &= \frac{\gamma qz}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} & B_z &= \frac{v}{c^2} E_y
 \end{aligned}$$

从上述结果可知,在 K 系内电场分布已经不具有球形对称性,平行于电荷运动方向的场强分量小于电荷静止时的场强,而垂直于运动方向的平面内的场强分量则大于电荷静止时的场强,并且随着电荷运动速度的增加,电场趋向于集中分布在垂直于运动方向的平面内.至于磁场在空间的分布情况,其磁感应线分布在垂直于运动方向的平面内,是以电荷运动方向为中心线的同心圆,磁感应线的方向和运动正电荷的运动的方向仍服从右手螺旋规则.图 14-7 表示一个高速运动电荷在 x - y 平面内的电场线和它在 y - z 平面内磁感应线的分布情况.

设电荷 q 经过 K 系原点的时刻为 $t=0$,我们在同一时刻观测空间各点的场强,当运动电荷的速度很小时 ($v \ll c$),略去前式中的 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 项,则在 K 系中观测的场强为

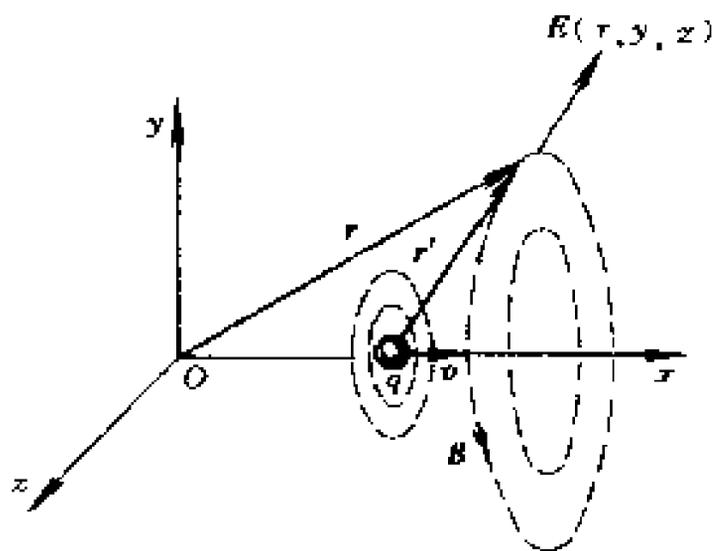


图 14-6 电荷在 K 系内的场强

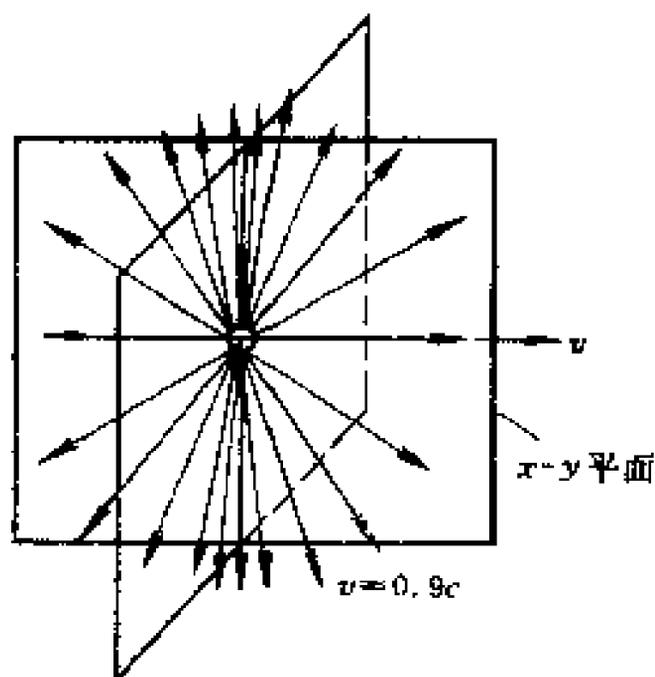


图 14-7 高速运动电荷的电场线和磁感应线分布

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

第一式为静电场的库仑定律,第二式为恒定磁场的毕奥-萨伐尔定律(式中用到 $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$)。上式说明,当运动电荷的速度很小时,它所激发的电磁场就接近于恒定流动情况所激发的电磁场。

思考题

14-1 什么叫做位移电流?什么叫做全电流?位移电流和传导电流有什么不同?位移电流和位移电流密度的表式是怎样得到的?

14-2 位移电流密度的方向是否与电位移 D 的方向平行?

14-3 一电容器与交变电源相联结,在电容器极板间的位移电流是超前还是落后于电源的电动势?

14-4 电容器极板间的位移电流与联结极板的导线中的电流大小相等,然而在极板间的磁场越靠近轴线中心越弱,而传导电流的磁场越靠近导线越强,为什么?

14-5 证明 $\epsilon_0 \frac{d\psi_E}{dt}$ 具有电流的量纲.

14-6 试分析麦克斯韦方程组的不对称性,并说明这种不对称性的物理内容.

14-7 静电场中的高斯定理 $\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q = \iiint_V \rho dV$ 和使用于真空中电磁场时的高斯定理 $\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q = \iiint_V \rho dV$ 在形式上是相同的,但理解上述两式时有何区别?

14-8 对于真空中恒定电流的磁场, $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 对于一般的电磁场又碰到 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 这个式子,在这两种情况下,对 \mathbf{B} 矢量的理解上有哪些区别?

14-9 怎样理解电磁场的物质性和电磁场量的相对性.

习 题

14-1 试证明平行板电容器中的位移电流可写为

$$I_d = C \frac{dU}{dt}$$

式中 C 是电容器的电容, U 是两极板间的电势差. 如果不是平行板电容器, 上式可以应用吗? 如果是圆柱形电容器, 其中的位移电流密度和平板电容器时有何不同?

14-2 在一对巨大的圆形极板(电容 $C = 1.0 \times 10^{-12}$ F)上, 加上频率为 50 Hz、峰值为 174 000 V 的交变电压, 计算极板间位移电流的最大值.

14-3 有一点电荷 q , 以速度 \mathbf{v} ($v \ll c$) 作匀速运动. 试从 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\psi}{dt}$ 出发, 计算离电荷 r 处的磁场强度.

14-4 当导线中载有交变电流时, 证明: 其中传导电流密度 δ 与位移电流密度 $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ 的大小比为 $\gamma/\omega\epsilon_0$. 式中 γ 是导线的电导率, $\omega = 2\pi f$, f 是交变电流的频率, 导线的 $\epsilon_r \approx 1$. 已知铜导线的 $\gamma = 5.7 \times 10^7$ S/m, 分别计算当铜导线中载有频率分别为(1)50 Hz 和(2) 3.0×10^{11} Hz 的交变电流时, 传导电流密度和位移电流密度大小的比值.

14-5 有一平板电容器,极板是半径为 R 的圆形板,现将两极板由中心处用长直引线连接到一远处的交变电源上,使两极板上的电荷量按规律 $q = q_0 \sin \omega t$ 变化.略去极板边缘效应,试求两极板间任一点的磁场强度.

14-6 为了在一个 $1.0 \mu\text{F}$ 的电容器内产生 1.0 A 的瞬时位移电流,加在电容器上的电压变化率应是多大?

14-7 一圆形极板电容器,极板的面积为 S ,两极板的间距为 d .一根长为 d 的极细的导线在极板间沿轴线与两板相连,已知细导线的电阻为 R ,两极板外接交变电压 $U = U_0 \sin \omega t$,求:

- (1) 细导线中的电流;
- (2) 通过电容器的位移电流;
- (3) 通过极板外接线中的电流;
- (4) 极板间离轴线为 r 处的磁场强度.设 r 小于极板的半径.

14-8 已知无限长载流直导线在空间任一点的磁感应强度为 $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,试证明满足方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

14-9 从方程式 $\nabla \times \mathbf{H} = \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 及 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 出发,导出

$$\nabla \cdot \delta = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

并解释其物理意义.

14-10 利用电磁场量间的变换关系式,证明 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ 和 $E^2 - c^2 B^2$ 是不变量.

阅读材料 I

磁流体波

当导电流体在磁场中运动时,根据法拉第电磁感应定律,这时在流体中产生感生电场和感应电流,这电流和磁场的相互作用又

要改变流体的运动,这样,磁场和流体运动交替作用的结果将使某一部分具有初速流体的运动状态向它的周围传播出去,在流体中产生一种新的周期运动形式,即磁流体波.磁流体波的存在首先是阿尔文(H. Alfvén)在1942年提出来的,1949年隆德奎斯特(S. Lundquist)第一个在实验室里检测到这种波.这一现象在天体物理学中很重要,用它可以解释太阳黑子和伴随黑子活动的太阳磁场,近几年在可控热核反应的研究中也观察到这一现象.因此,磁流体力学在目前已是一门迅速发展着的科学.

下面我们先讨论产生磁流体波的物理过程,然后就特殊情况导出磁流体波的波动方程.

假定在整个空间充满均匀、各向同性、不可压缩的导电流体,流体的密度为 ρ ,电导率为 γ ,在流体所占空间有一均匀恒定磁场 $B_0 = \mu I I_0$,磁场方向沿 x 轴正方向.设在 $y-z$ 平面内取一无限薄的流体层A,令它以速度 v 沿 y 轴方向运动,如图L-1所示.当流体层A运动后,在其中将产生感生电场 E 和感应电流 I (电流密度为 δ),它们的方向都和 z 轴反向.感应电流因要形成闭合回路,在流体层A左、右两侧原来静止的流体层中必有电流沿 z 轴的正方向通过,如图L-1中所示.根据电流在磁场中所受力可以判断出,在

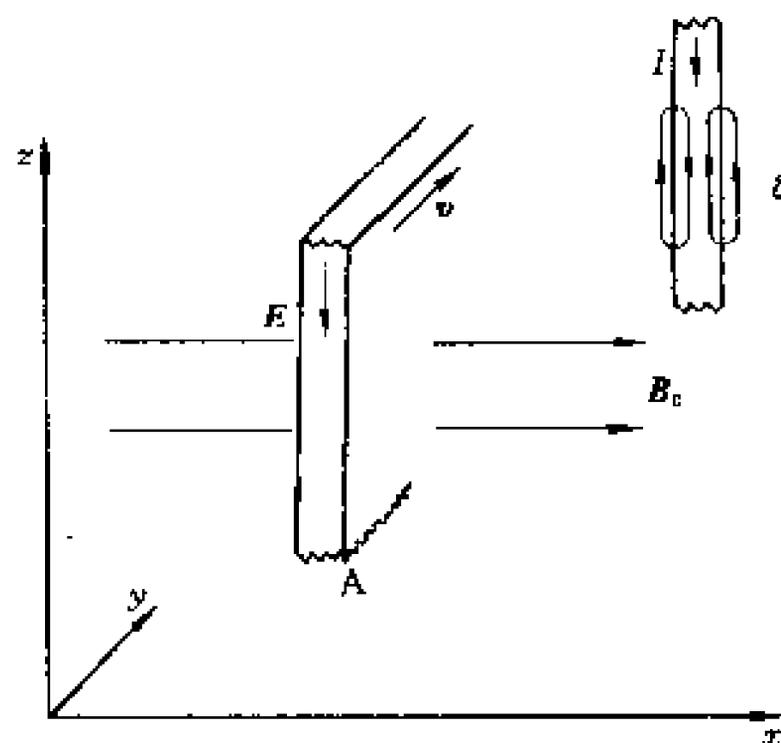


图 L-1

流体层 A 中电流所受磁力的方向与 y 轴反向, 它将阻止流体层 A 的运动; 而在流体层 A 左、右两侧的流体层中的电流所受磁力的方向与 y 轴同向, 它将使原来静止的流体层加速运动. 由此可见, 在磁场和流体运动的相互作用下, 流体层 A 的运动将逐渐停止, 而在它左、右两侧的流体层则沿着流体层 A 的原先运动方向运动, 这样就逐步把流体层的运动向周围扩展开来. 也就是说, 在磁场和流体运动的交替作用下, 使某一部分具有初速的流体的运动状态逐渐向它的周围传播出去, 这就形成了运动状态沿磁场方向 (正、负两方) 传播的磁流体波.

上述问题也可以这样来考虑, 即把磁流体波的产生过程看成是导电流体中的感应电流引起磁场的改变, 下面就从这一观点来导出磁流波的波动方程.

设导电流体中感应电流激发的磁感应强度为 $B_A = \mu H_A$ (H_A 为相应的磁场强度), 方向沿 y 轴. 这时流体中的总磁感应强度为

$$B = B_0 + B_A \quad (1)$$

由麦克斯韦方程

$$\nabla \times H = \delta \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3)$$

当导电流体在磁场中运动时, 以流体为参考系时的电场为

$$E' = E + (v \times B) \quad (4)$$

因此欧姆定律为

$$\delta = \gamma(E + v \times B) \quad (5)$$

考虑到电场、磁场的方向, 并注意到原磁场 B_0 恒定不变, 则式 (2) 和式 (3) 可简化为

$$\frac{\partial H_A}{\partial x} = \delta = \gamma(E - vB_0) \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B_A}{\partial t} \quad (7)$$

在前面所提的理想情况下, 沿 y 轴方向的流体压强不变, 故在 y 轴

方向流体体积元所受的力只是电磁力

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{B})_y = (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{B}_0)$$

即
$$F_y = \delta B_0 = B_0 \frac{\partial H_A}{\partial x}$$

或
$$F_y = \rho \frac{\partial v}{\partial t} = B_0 \frac{\partial H_A}{\partial x} \quad (8)$$

将式(6)对 t 求偏导得

$$\gamma \left(\frac{\partial E}{\partial t} - B_0 \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 H_A}{\partial t \partial x}$$

由式(8), 上式变成

$$\gamma \left(\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\rho} \frac{\partial H_A}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 H_A}{\partial t \partial x} \quad (9)$$

再将式(9)对 x 求偏导得

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} - \frac{B_0^2}{\rho} \frac{\partial^2 H_A}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 H_A}{\partial t \partial x^2}$$

应用式(7)和 $B_A = \mu H_A$, 则上式可化为

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 B_A}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\rho \mu} \frac{\partial^2 B_A}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^3 B_A}{\partial t \partial x^2}$$

为了简化讨论, 假定流体是完全导电的, 即 $\gamma = \infty$, 则上式化为

$$\frac{\partial^2 B_A}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho \mu} \frac{\partial^2 B_A}{\partial x^2} \quad (10)$$

这是磁场 B_A 沿 x 轴正、负两个方向传播的波动方程, 也就是磁流体波的波动方程, 其波速为

$$v_m = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu}}$$

由上式可知, 磁流体波速 v_m 与磁场本身的振动频率和振幅无关, 而且它的数值远小于光速. 例如, 当 $B_0 = 10^{-1} \text{ T}$, $\rho = 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 时, $v_m = 2.82 \text{ m/s}$.

如果令式(10)的正弦波解为

$$B_A = A \sin p(x - v_m t)$$

代入式(8)可得

$$v = - \frac{AB_0}{\rho v_m \mu} \sin p(x - v_m t) = - \frac{B_0}{\rho v_m} H_A$$

因此
$$\frac{B_A}{v} = \frac{\mu H_A}{v} = - \frac{\mu \rho v_m}{B_0} = - \sqrt{\mu \rho} = - \frac{B_0}{v_m}$$

再由
$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B_A}{\partial t} = - A v_m p \cos p(x - v_m t)$$

可得
$$E = - A v_m \sin p(x - v_m t) = - v_m B_A = v B_0$$

这与下列矢量关系相符合

$$E = B \times v_m$$

最后必须指明,磁流体波是沿着原磁场的磁感应线传播的,但是可以证明总磁场的磁力线却随着流体以相同的速度运动着,如同磁力线被冻结在流体中一样.

附录 I 矢量(第二部分)

§ I-1 梯 度

1. 标量场和矢量场 任何物质的运动,或者任何一个物理过程,总是在一定的空间和时间发生的.如果空间(或者它的某一部分)的每一点都对应着某个物理量的确定值,我们便叫这空间为这物理量的场.如果这物理量仅是数量性质的,便叫相应的场为标量场;如果这物理量是矢量性质的,便叫相应的场为矢量场.例如:温度和大气压强等都是数量性质的,这些物理量有确定值的空间便称温度场、压强场等,都是标量场;而空气的流速或地磁磁感应强度所构成的场便是矢量场.所以,要注意到这里所谓的场只具有数学上的意义,意思是指空间位置的函数.因此,标量场只是指一个空间位置的标量函数,如 $\phi(x, y, z)$;而矢量场就是指一个空间位置的矢量函数,如 $A(x, y, z)$.

如果我们所研究的物理量在空间每一点的值不随时间变化,这种场称为稳定场(或恒定场),否则便是不稳定场.静电场、重力场、温度分布恒定的场,都是稳定场.

2. 等值面 设某一物理量,例如静电场的势(电势),在空间形成稳定的标量场,以 $V(x, y, z)$ 表示.我们假定 $V(x, y, z)$ 是 x, y, z 的单值连续函数,而且有连续的一阶偏导数,则函数 $V(x, y, z)$ 在空间具有同一数值的各点所组成的曲面称为等值面或等势面,即

$$V(x, y, z) = C \quad (C = \text{常量})$$

不同的 C 值对应于不同的等值面.

3. 梯度 为了研究标量场中某一点 P 附近标量函数 $\phi(x, y, z)$ 的变化情况,我们设想从 P 点经无限小的位移元 dl ($dl = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$) 到达 P' 点时, ϕ 值的增量为 $d\phi$. 由于我们已经假设 $\phi(x, y, z)$ 是 x, y, z 的单值连续函数,而且有连续的一阶偏导数,所以

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (1-1)$$

考察上式之后,我们可以引进一个新的矢量,它在三个坐标轴上的分量分别

为 $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$, 并以 $\text{grad } \phi$ 来表示这矢量

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \quad (1-2)$$

那么 $d\phi$ 便可写成两矢量 $\text{grad } \phi$ 和 $d\mathbf{l}$ 的标积形式(按标积的公式 $A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$), 即

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} \quad (1-3)$$

新定义的这个矢量 $\text{grad } \phi$ 称为 ϕ 的梯度, 它反映函数 ϕ 在空间的变化情况. 从定义式(1-2)可知, $\text{grad } \phi$ 的三个分量

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

分别反映函数 ϕ 沿 x, y, z 三个坐标轴方向的变化情况. 可是, 矢量 $\text{grad } \phi$ 本身究竟是什么意思呢? 当我们把矢量 $\text{grad } \phi$ 和 ϕ 的等值面连系起来考察时, 就看得比较清楚了. 根据式(1-3), 考虑到标积的公式 $A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos \theta$ (θ 为 A 和 B 的夹角), 可知

$$d\phi = |\text{grad } \phi| \cos \theta dl$$

和
$$\frac{d\phi}{dl} = |\text{grad } \phi| \cos \theta \quad (1-4)$$

式中的 $|\text{grad } \phi|$ 是矢量 $\text{grad } \phi$ 的大小, θ 是矢量 $\text{grad } \phi$ 和 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角, $|\text{grad } \phi| \cos \theta$ 则表示矢量 $\text{grad } \phi$ 沿 $d\mathbf{l}$ 方向的分量, $\frac{d\phi}{dl}$ 表示函数 ϕ 沿 $d\mathbf{l}$ 方向上的变化率, 叫做函数 ϕ 的方向导数. 如图 1-1 所示, 曲面 1 表示通过 P 点的等值面, 显然, 当位移元 $d\mathbf{l}$ 所取的方向不相同时, 方向导数 $\frac{d\phi}{dl}$ 也不相同. 例如, 当 $d\mathbf{l}$ 取在 P 点的等值面上时, ϕ 值没有变化, $\frac{d\phi}{dl} = 0$, 当 $d\mathbf{l}$ 取在 P 的等值面上的法线单位矢量 e_n (e_n 指向 ϕ 值增加的一边) 的方向时, $\frac{d\phi}{dl}$ 将有最大值. $\frac{d\phi}{dl}$ 的最大

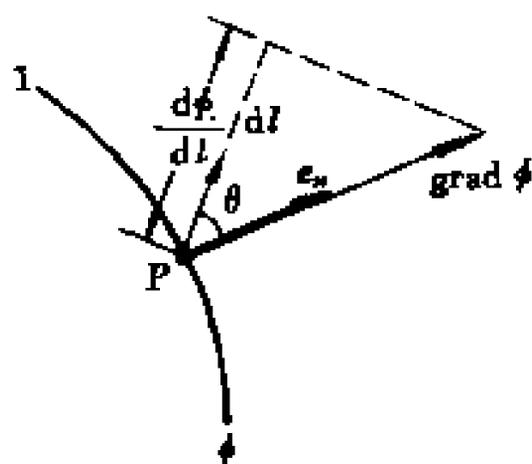


图 1-1 在 P 点处, $\text{grad } \phi$ 的方向垂直于通过 P 点的等值面, 指向 ϕ 值增加的一方

值等于多少呢? 看一看式(1-4)就清楚了: 当 $\theta = 0$ 时, $\frac{d\phi}{dl}$ 的值最大, 等于

$|\text{grad } \phi|$. 如上所说, θ 表示矢量 $\text{grad } \phi$ 和 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角, 现在 $d\mathbf{l}$ 取在 \mathbf{e}_n 方向, 所以 $\theta=0$ 这一结果表明矢量 $\text{grad } \phi$ 的方向和 \mathbf{e}_n 的方向一致. 式(1-4)表示, 在 P 点处函数 ϕ 沿任一 $d\mathbf{l}$ 方向的方向导数 $\frac{d\phi}{dl}$ 等于该点处的 ϕ 的梯度 ($\text{grad } \phi$) 沿 $d\mathbf{l}$ 的分量, 总之, 在 P 点处 ϕ 的梯度 ($\text{grad } \phi$) 方向沿着通过 P 点的等值面的法线方向, 而指向 ϕ 值增加的一方, ϕ 的梯度的量值则反映了 ϕ 值沿其梯度方向的增加率. 或者说, ϕ 的梯度表示了函数 ϕ 在该点的变化率最大的方向和最大变化率的值. ϕ 在其他方向上的变化率(方向导数)等于 $\text{grad } \phi$ 在该方向上的分量.

我们知道, 在静电场中移动单位正电荷时, 反抗电场力所作的功等于电势的增加, 即

$$dV = -E \cdot d\mathbf{l}$$

和式(1-3)进行比较, 可得

$$E = -\text{grad } V$$

上式表明电场强度 E 等于电势梯度 $\text{grad } V$ 的负值, 电场强度 E 的大小等于电势梯度, 即等于该处等势面上沿法线方向单位长度上电势的变化. 电场强度 E 的方向与电势增加的方向相反, 即指向电势降低的方向.

我们常用算符 ∇ 来表示 $\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$, 即

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad (1-5)$$

这算符叫做那勃勒算符, 这样

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi$$

∇ 也称矢量微分算符, 它具有矢量和微分运算的双重特性, 把 ∇ 用在矢量或标量函数上时, 要特别加以注意.

4. 梯度的线积分和保守场 在一般情况下, 任一单值连续可导的标量场的势函数 $\phi(x, y, z)$ 总是与一定的场强 \mathbf{e} 相关联, 其关系如下

$$\mathbf{e} = -\text{grad } \phi$$

所以, 只要各点的势函数一旦确定, 则该场中各点的场强也就唯一确定了. 因为

$$\int_A^B \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B d\phi = \phi_A - \phi_B$$

这说明任意 A, B 两点间矢量 \mathbf{e} 的线积分, 与连接这两点间的路程的形状

无关.

因此, 矢量 e 沿任一闭合路径 L 的线积分就必然为零.

$$\oint_L e \cdot dl = - \oint d\phi = 0$$

凡是具有上述性质的场称为保守场. 静电场是一保守场. 反之, 若有一力 F 绕一闭合曲线的线积分为零, 则必然存在一个与 F 相联系的保守场. 由此可知, 保守场和梯度场是必然联系在一起的.

§ 1-2 矢量的散度

1. 散度的定义 设有矢量场 $A(x, y, z)$ 在某点 $P(x, y, z)$ 附近为一阶连续可导, 我们作围绕该点的小封闭曲面 S , 曲面法线取向外为正, 则

$$\oiint_S A \cdot dS$$

表示矢量场 A 从曲面 S 的内部通过该封闭曲面发散出来的流量或通量^①, 它的数值与所取封闭曲面的体积大小和形状有关.

设 ΔV 是封闭曲面 S 所包围的体积, 那么

$$\frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V}$$

表示从单位体积内发散出来的通量. 它反映了在 ΔV 区域内的一种平均性质. 当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, 小体积 ΔV 将缩为 P 点, 上式的极限值就可以表征矢量函数 A 在 P 点的一种性质. 我们把这个极限值称为矢量 A 在 P 点处的散度, 并用 $\text{div } A$ 表示, 即

$$\text{div } A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V} \quad (1-6)$$

矢量的散度是标量, 在矢量场内可以随着给定点 P 的位置不同而取不同的数值, 因此 $\text{div } A$ 是空间坐标的函数.

2. 散度的表式 为了求出散度在空间直角坐标系中的表式, 我们取边长为 dx, dy, dz 的无限小六面体所包围的封闭面(图 1-2), 并计算通过这小六面体表面的通量.

① 当 A 表示流体的流速矢量时, $\oiint_S A \cdot dS$ 有表示流量或通量的意义. 对泛指 A 矢量而言, 并不真正表示有什么东西流过或通过, 但仍借用流量或通量这一名称.

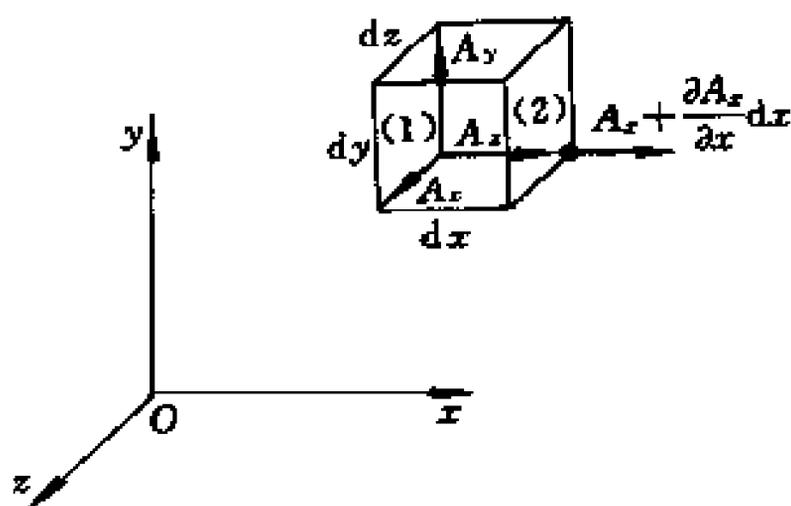


图 1-2

我们先计算通过垂直于 x 轴的两个平面 1 和 2 的通量, 设六面体一顶点处的 A 矢量沿三个轴线方向的分量分别为 A_x 、 A_y 、 A_z , 只有和这两个面垂直的分量 A_x 对这通量有贡献, 设在面 1 上 x 分量值为 A_x , 则在面 2 上其值为 $A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$, 这样, 通过垂直于 x 轴的两个面的通量为

$$\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy dz - A_x dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz$$

同理, 对通过垂直于 y 轴两个面和垂直于 z 轴的两个面的通量分别为

$$\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right) dx dz - A_y dx dz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz$$

$$\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dx dy - A_z dx dy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz$$

所以通过封闭曲面的六个面的总通量为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

根据散度的定义得

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-7)$$

如果采用 ∇ 算符, 则 A 矢量的散度 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 也可写成 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 因为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

当 $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$ 时, 表示从体积元内有向外发散的通量; 当 $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$ 时, 表示有从外边进入体积元的通量. 如果 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, 则表示进入体积元的总通量

和从体积元发散的总通量相等。

§ 1-3 高斯定理

如果在某一矢量场中能求得该矢量的散度,那么散度的体积分可以化成该矢量的面积分,面积分的积分域就是该体积的外表面,证明如下。

设在矢量场 A 的空间取任一封闭曲面 S ,它所包围的体积为 V 。我们用互相垂直的一系列平面,将该曲面 S 所包围的体积分割成无数的体积元 dV (图 1-3),对于每一个体积元 dV ,发散的通量按散度的定义应为

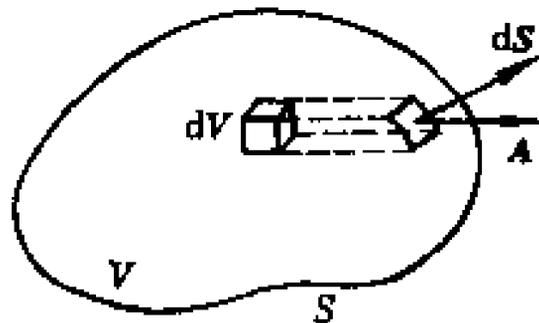


图 1-3

$$\oint_{S_1} A \cdot dS = \text{div } A dV$$

面积分是以体积元 dV 所有的表面积积分的,在 S 面内,由于任意两个体积元的公共面所给出的通量大小相等,符号相反,相互抵消,因而,通过整个封闭曲面的通量为

$$\oint_S A \cdot dS = \iiint_V \text{div } A dV \quad (1-8)$$

上式叫作高斯定理,它给出矢量 A 的面积分和标量函数 $\text{div } A$ 的体积分之间的关系,它的物理意义表示从某体积 V 所发散出去的通量,等于穿过这体积包围的表面的通量。

§ 1-4 旋 度

1. 旋度的定义 我们知道,围绕载流线圈周围的磁感应线总是无头无尾的“封闭曲线”。在流体中,流动有了旋涡,流体就以旋涡为中心不停地旋转,形成封闭的循环流动。为了研究这种矢量场的性质,引入了旋度的概念。

设有矢量场 $A(x, y, z)$,在某点 $P(x, y, z)$ 附近为一阶连续可导,我们作围绕该点的封闭曲线 L ,则

$$\oint_L A \cdot dl$$

表示矢量场 A 沿曲线 L 的环流,它的数值与所取封闭曲线 L 的大小、形状和方向有关。

设 ΔS 是 L 所包围的光滑曲面,那么

$$\frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1-9)$$

表示矢量 \mathbf{A} 沿封闭曲线 L 的环流与此曲线所包围的面积 ΔS 之比,它反映了 \mathbf{A} 在 ΔS 内的一种平均性质. 现在的问题是这个比值的大小还有赖于面积 ΔS 的方位,当 ΔS 在某一方位时,这个比值有最大值,我们就把这时 ΔS 的法线方向定为矢量 \mathbf{A} 的旋度的方向,而把这个面积 $\Delta S \rightarrow 0$ 时,上式的极限称为矢量 \mathbf{A} 在该点的旋度的大小,用 $\text{rot } \mathbf{A}$ 或 $\text{curl } \mathbf{A}$ 表示旋度矢量,它的大小可表示为

$$|\text{rot } \mathbf{A}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1-10)$$

矢量 \mathbf{A} 的旋度和矢量 \mathbf{A} 的环流的方向关系符合右手螺旋法则. 如果式 (1-9) 中的 ΔS 的法线方向和使它有最大值的方向不一致,则由此算得的将是矢量 \mathbf{A} 的旋度在该 ΔS 的法线方向的投影.

2. 旋度的表式 为了求出矢量 \mathbf{A} 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A}$ 在空间直角坐标中的表式,我们在 x - y 平面内取边长为 dx, dy 的无限小矩形回路 $PABC$ (图 1-4). 设这回路一顶点 P 处的 \mathbf{A} 矢量沿三个轴线方向的分量分别为 A_x, A_y, A_z , 并设在各线段上的 \mathbf{A} 值相等,即在 PA 段上 \mathbf{A} 的 x 分量为 A_x , 在 CB 段上 \mathbf{A} 的 x 分量为 $A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$; PC 段上 \mathbf{A} 的 y 分量为 A_y , 在 AB 段上 \mathbf{A} 的 y 分量为 $A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx$. 因此 \mathbf{A} 矢量沿回路的环流为

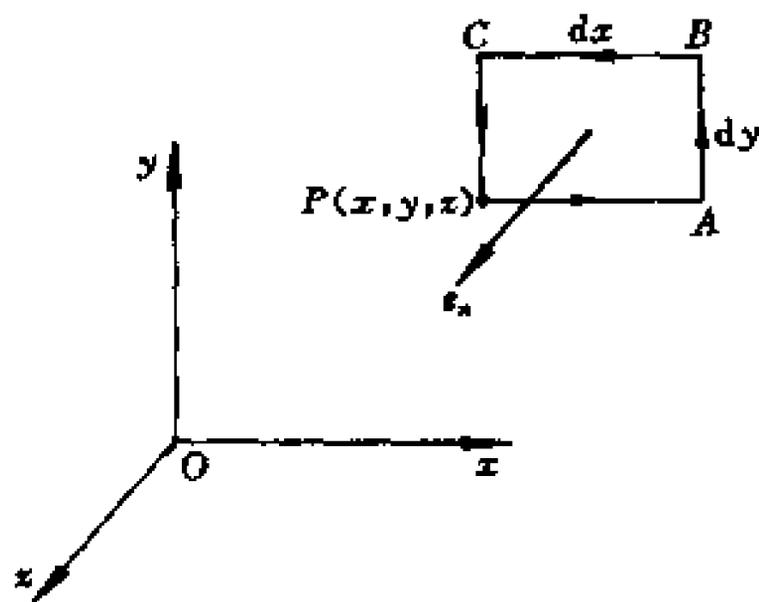


图 1-4

$$\begin{aligned} \oint A \cdot dl &= \int_P^A A \cdot dl + \int_A^H A \cdot dl + \int_H^C A \cdot dl + \int_C^P A \cdot dl = \\ &A_x dx + \left(A_y + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy + \left[- \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right) \right] dx - A_y dy = \\ &\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

根据旋度的定义,旋度在 z 方向的分量为

$$(\text{rot } A)_z = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta S} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

同理,如果我们取平行于 yz 平面和 zx 平面的无限小矩形为闭合回路,

则得
$$(\text{rot } A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot } A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

由此我们得到旋度的坐标分量表达式

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k \quad (\text{I-11})$$

如果采用 ∇ 算符,则 A 矢量的旋度 $\text{rot } A$ 也可写成 $\nabla \times A$ 为

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (A_x i + A_y j + A_z k) = \\ &\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

上式也可写成行列式

$$\text{rot } A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

如果一个矢量场的旋度处处为零,即 $\nabla \times A = 0$,那么这矢量场称为无旋场.

静电场中 E 矢量沿任一闭合路径的环流 $\oint_L E \cdot dl = 0$,因此,静电场 E 矢量的旋度 $\text{rot } E = 0$,所以静电场是无旋场.

§ 1-5 斯托克斯定理

如果在某一矢量场中能求得该矢量的旋度,那么旋度在一表面上的面积分可以化成该矢量沿闭合曲线的线积分,这个闭合曲线就是该面积分的周界,证明如下.

设在矢量场 A 的空间取封闭曲线 L ,它所包围的曲面为 S .我们将曲面 S 分割成无数的面积元 dS (图 1-5),对于每个面积元, A 矢量的线积分按旋度定义应为

$$\oint_{L_i} A \cdot dl = \text{rot } A \cdot dS$$

线积分是围绕面积元 dS 的周界进行的,将方程对所有面积元 dS 求和不难看出,方程左边部分在面积 S 内对所有面积元边界的线积分进行了两次,而且方向相反,相互抵消,结果只剩下沿整个曲面 S 的边界 L 的线积分,因此

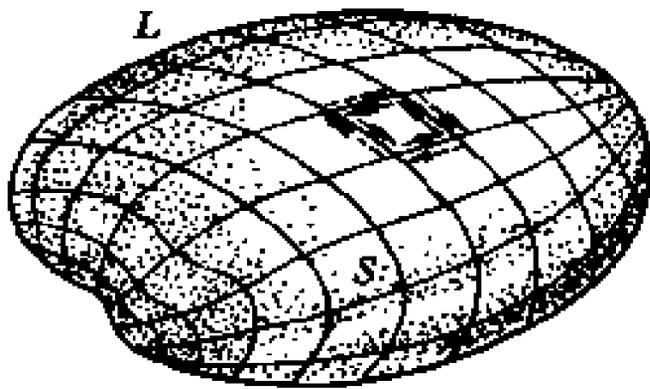


图 1-5

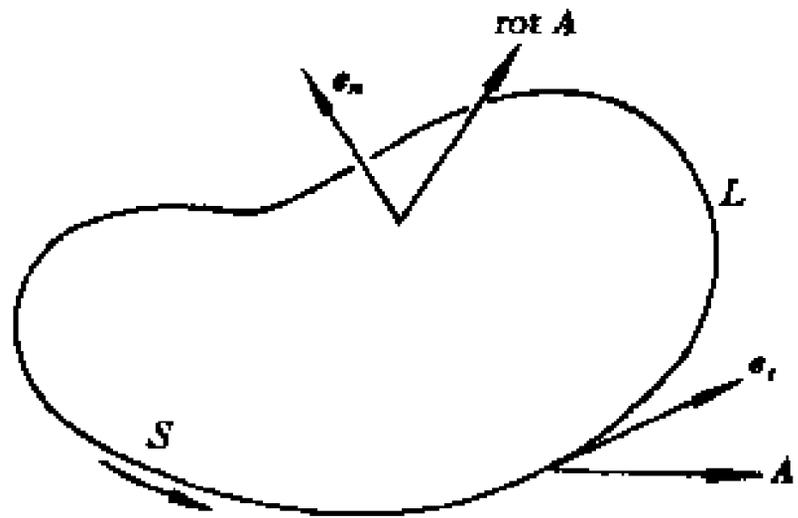


图 1-6

$$\oint_L A \cdot dl = \iint_S \text{rot } A \cdot dS \quad (1-12)$$

上式叫做斯托克斯定理,它给出矢量 A 的线积分和矢量场中 $\text{rot } A$ 的面积分之间的关系. $\text{rot } A$ 沿曲面 S 的面积分也称为 A 矢量的涡流.上式表明矢量 A 在闭合曲线 L 上的环流等于矢量 A 的旋度在以曲线 L 为边界的任意曲面 S 上的面积分.

式(1-12)也可写成

$$\oint_L A_i dl = \iint_S (\text{rot } A)_n dS$$

式中 A_t 表示矢量 A 在闭合曲线 L 切线方向上的分量, $(\text{rot } A)_n$ 表示矢量 A 的旋度在曲面 S 法线上的投影(图 I-6).

附录 I 电磁量的单位制

电磁量有多种不同的单位制,物理学和工程学科文献上有时采用不同的单位制.我们将简单地说明四种比较主要的单位制以及各单位制之间的相互关系.

1. 厘米克秒绝对静电单位制(简称静电单位制) 厘米克秒绝对静电单位制常用符号 CGSE 表示,在規定这种单位制时,长度、质量和时间是三个基本量,而一切电磁量是这三个基本量的导出量.在这种单位制中,采用厘米、克和秒为基本单位,并以真空中的库仑定律

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

为基础,規定真空电容率 ϵ_0 (亦即上式中比例系数 k 的倒数)单位为 1 且值也等于 1,从而确定电荷量的单位和量纲.再根据有关的定律和定义,可确定所有其他各电磁量——电场强度、电势、电容、磁场强度等的量纲和单位,举例说明如下.

根据上述規定,真空中两等值的正点电荷 q ,如果相距为 1 cm,相互作用的静电斥力为 1 dyn 时,那么每个正点电荷的电荷量定义为 1 静电制电荷量单位,而电荷量的量纲为

$$\dim q = \dim(Fr^2)^{\frac{1}{2}} = (\text{MLT}^{-2}\text{L}^2)^{\frac{1}{2}} = \text{L}^{\frac{3}{2}}\text{M}^{\frac{1}{2}}\text{T}^{-1}$$

电容率 ϵ 和磁导率 μ 的量纲以及在真空中的 ϵ_0 和 μ_0 的量值如下.

在电介质中,库仑定律可写作

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$$

式中 ϵ 为电介质的电容率,因为式中 F 、 q 和 r 的量纲都已确定,所以 ϵ 的量纲为

$$\dim \epsilon = \dim \frac{q^2}{Fr^2} = \frac{(\text{L}^{\frac{3}{2}}\text{M}^{\frac{1}{2}}\text{T}^{-1})^2}{(\text{MLT}^{-2}\text{L}^2)} = \text{M}^0\text{L}^0\text{T}^0 = 1$$

即 ϵ 的量纲为 1. 真空电容率 ϵ_0 規定为 1.

磁导率 μ 的量纲可根据两平行长直电流之间的相互作用力公式

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2\mu I_1 I_2}{d}$$

导出, 式中 μ 为磁介质的磁导率. 由于上式中 $I, d, \Delta F$ 和 Δl 的量纲都已确定, 所以 μ 的量纲为

$$\dim \mu = \dim \left(\frac{\Delta F}{\Delta l} \frac{d}{I^2} \right) = \frac{\text{MLT}^{-2}\text{L}}{\text{L}(\text{L}^{\frac{3}{2}}\text{M}^{\frac{1}{2}}\text{T}^{-2})^2} = \text{L}^{-2}\text{T}^2$$

在真空中, 根据实验指出, 当 $I_1 = I_2 = 3 \times 10^{10}$ 静电制电流单位以及 $d = 1$ cm 时, $\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2$ dyn/cm, 从而得出真空的磁导率 μ_0 的量值为

$$\mu_0 = \frac{\Delta F}{\Delta l} \frac{d}{2I_1 I_2} = 2 \times \frac{1}{2(3 \times 10^{10})^2} = \frac{1}{(3 \times 10^{10})^2} \text{ 静电制磁导率单位}$$

亦即 $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, c 为光在真空中的传播速度.

由此可见, 在静电单位制中, 电容率 ϵ 量纲为 1, 而磁导率 μ 的量纲和单位不为 1. 因此静电单位制在理论上的缺点是:

(1) ϵ 和 μ 是两个相对应的物理量, 一个单位为 1 而另一个量纲和单位却不为 1;

(2) 物质的磁导率 μ 是与物质中原子或分子的磁化有关的量, 真空中并没有原子和分子, 而真空的磁导率 μ_0 具有一定的量值 $\frac{1}{c^2}$; 我们又知道电磁场传播速度就是 c , 所以 μ_0 是表示电磁场性质的一个物理量, 由此而言, μ_0 和 μ 虽然同是磁导率, 但两者在物理意义上并无相同之处.

2. 厘米克秒绝对电磁单位制(简称电磁单位制) 厘米克秒绝对电磁单位制常用符号 CGSM 表示, 在规定这种单位制时, 也以长度、质量和时间为三个基本量, 而一切电磁量是这三个基本量的导出量. 在这种单位制中, 也采用厘米、克和秒为基本单位, 但以真空中两平行长直电流间的相互作用力公式

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I_1 I_2}{d}$$

为基础, 并规定真空的磁导率 μ_0 (亦即上式中比例系数 k) 量纲为 1 且值也等于 1. 根据这一规定可以确定电流 I 的单位和量纲, 再根据有关的定律和定义, 可确定所有其他各电磁量的单位和量纲. 举例说明如下.

(1) 电流的单位和量纲 根据上述规定, 真空中两平行等值的长直电流, 如果其间的垂直距离为 1 cm, 相互作用力 $\frac{\Delta F}{\Delta l}$ 为 2 dyn/cm 时, 那么因每一

长直电流的强度定义为 1 电磁制电流单位, 而电流的量纲为

$$\dim I = \dim \left(\frac{\Delta F d}{\Delta l} \right)^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

电磁制电流单位与静电制电流单位之间在量值上的换算关系可如下求出. 按静电单位制, 当真空中相距为 1 cm 的两等值的平行长直电流之间的相互作用力 $\frac{\Delta F}{\Delta l}$ 如果为 2 dyn/cm 时, 这两电流各为 3×10^{10} 静电制电流单位. 而在电磁单位制中, 在上述相同的条件下 (即在真空中 $d = 1$ cm, $\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2$ dyn/cm), 电流为 1 电磁制电流单位. 由此可见

$$1 \text{ 电磁制电流单位} = 3 \times 10^{10} \text{ 静电制电流单位}$$

(2) 磁导率 μ 的量纲和真空中的磁导率 μ_0 的量值 磁介质中两平行长直电流之间的相互作用力公式为

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \frac{\mu I_1 I_2}{d}$$

式中 μ 是磁介质的磁导率. 由于公式中 $\frac{\Delta F}{\Delta l}$ 、 I 和 d 的量纲都已决定, 所以 μ 的量纲为

$$\dim \mu = \dim \left(\frac{\Delta F}{\Delta l} \frac{d}{I^2} \right) = \frac{MLT^{-2}L}{LLMT^{-2}} = L^0 M^0 T^0 = 1$$

即 μ 的量纲为 1. 真空中的磁导率 μ_0 规定为 1.

(3) 电荷量的量纲和单位 按定义 $I = \frac{q}{t}$, 所以 q 的量纲为

$$\dim q = \dim It = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} T = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$$

按定义 1 电磁制电荷量单位等于 1 电磁制电流单位的电流在 1 s 内流过导线截面的电荷量.

因 1 电磁制电流单位 = 3×10^{10} 静电制电流单位,

所以 1 电磁制电荷量单位 = 3×10^{10} 静电制电荷量单位.

可见, 同一电流 (或电荷量), 用电磁单位制时, 量值为 I_M (或 q_M), 用静电单位制时, 量值为 I_E (或 q_E), 两者之间在量值上的换算关系应写作

$$I_E \text{ (或 } q_E) = c I_M \text{ (或 } q_M)$$

在静电单位制与电磁单位制之间, 其他电磁量的换算关系也都可根据电流或电荷的换算关系求出.

(4) 电容率 ϵ 的量纲和真空中 ϵ_0 的量值 按库仑定律 $F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$, 式中 F 、 q 及 r 的量纲都已确定, 所以 ϵ 的量纲为

$$\dim \epsilon = \dim \frac{q^2}{F r^2} = \frac{(\text{L}^{\frac{1}{2}} \text{M}^{\frac{1}{2}})^2}{\text{MLT}^{-2} \text{L}^2} = \text{L}^{-2} \text{T}^2$$

在真空中, 当两点电荷各为 1 静电制电荷量单位, 亦即 $\frac{1}{3 \times 10^{10}}$ 电磁制电荷量单位, 相距为 1 cm 时, 作用力为 1 dny 所以

$$\epsilon_0 = \frac{q_1 q_2}{F r^2} = \frac{\left(\frac{1}{3 \times 10^{10}} \right)^2}{1 \times 1^2} = \frac{1}{(3 \times 10^{10})^2} \text{ 电磁制电容率单位}$$

亦即 $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, c 为光在真空中的速度.

电磁单位制在理论上也有与静电单位制相似的缺点: (1) ϵ 和 μ 是两个相对应的物理量, 一个量纲不为 1, 而另一个却为 1; (2) 电介质的电容率 ϵ 与原子或分子的电极化有关, 在真空中并没有原子和分子, 而 $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (c 是电磁波传播的速度), 是表示电磁场性质的一个物理量; ϵ 和 ϵ_0 虽然同是电容率, 但两者在物理意义上也并无相同之处.

3. 高斯制 高斯制的基本单位也是厘米、克和秒, 在这种单位制中, 全部电学量的单位和量纲都与静电单位制一样, 而全部磁学量的单位和量纲都与电磁单位制一样. 在高斯单位制中, 电容率 ϵ 和磁导率 μ 都规定为量纲为 1, 而且对于真空, $\epsilon_0 = 1$, 以及 $\mu_0 = 1$. 采用高斯制时, 在所有同时含有电学量和磁学量的公式中, 都含有 c ($c = 3 \times 10^{10}$ cm/s) 这个常量. 例如, 毕奥-萨伐尔定律在电磁单位制中写作

$$dH = \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

但在高斯制中, 由于式中电流须用静电制电流单位, 又根据换算关系 $I_M = \frac{I_E}{c}$, 得毕奥-萨伐尔定律的形式为

$$dH = \frac{Idl \sin \theta}{c r^2}$$

上两式中 θ 均为 Idl 与 r 的夹角. 又如两平行长直电流之间的相互作用力公式, 在电磁单位制中为 $\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2\mu I_1 I_2}{d}$, 但在高斯制单位中, 由于电流须用静电

制单位,这一公式应写作

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2\mu I_1 I_2}{c^2 d}$$

高斯制的优点在于能弥补静电单位制和电磁单位制中的缺点.在高斯单位制中,电容率 ϵ 和磁导率 μ 量纲均为 1,而在真空中 ϵ_0 和 μ_0 都等于 1.这样,电介质的电容率 ϵ 表明在真空中场强 E_0 与在均匀电介质中场强 E 相差的倍数;而磁介质的磁导率 μ 表明真空中磁感应强度 B_0 与在均匀磁介质中磁感应强度 B 相差的倍数.所以在高斯制中,全部电学量和磁学量的量纲和单位能符合物理的涵义.

应用上述三种单位制时,电学量和磁学量的量值在实用上常感到很不方便,有些单位嫌太小,有些又嫌太大.所以有必要建立一个适合工程上实际应用的单位制.下面我们来说明这种单位制.

4. 有理化米千克秒安培制 这种单位制,也称为实用单位制,常用符号 MKSA 表示.在制定这种单位制时,任何电磁量不仅以长度、质量和时间为基本量,还须用一个电学量或磁学量作为基本量.

现在,在这种单位制中,用米、千克、秒和电流的单位安培作为四个基本单位(也有用磁导率的单位作为第四个基本单位的,本书不采用).这种单位制以真空中平行长直电流间的相互作用力公式

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

为基础,并用下述定义规定电流的单位:真空中两平行等值的长直电流,当其间的垂直距离为 1 m,相互作用力 $\frac{\Delta F}{\Delta l}$ 为 2×10^{-7} N/m 时,那么每一电流的强度为 1 A.

根据这一规定,真空的磁导率 μ_0 为

$$\mu_0 = \frac{2\pi d \left(\frac{\Delta F}{\Delta l} \right)}{I_1 I_2} = \frac{2\pi \times 1 \times 2 \times 10^{-7}}{1 \times 1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

μ_0 的量纲为

$$\dim \mu_0 = \dim \frac{d \left(\frac{\Delta F}{\Delta l} \right)}{I_1 I_2} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{I}^2} = \text{I}^{-2} \text{LMT}^{-2}$$

磁介质的磁导率 μ 和真空的磁导率 μ_0 具有相同的单位和量纲.

电流单位安培和电磁制电流单位及静电制电流单位在量值上的换算关

系可确定如下：用电磁单位制时，当两平行长直电流各为 1 电磁制电流单位，相距 $d = 1 \text{ cm}$ 时，两电流之间的相互作用力为 $\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \text{ dyn/cm}$ 。换用 MKSA 单位， $d = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ ， $\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \text{ dyn/cm} = 2 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ 那么同一电流用 MKSA 单位来表示应是

$$I = \left[\frac{2\pi d \frac{\Delta F}{\Delta l}}{\mu_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\pi \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ A} =$$

$$(10^2)^{\frac{1}{2}} = 10 \text{ A}$$

即 1 电磁制电流单位 = 10 A

总之，在静电单位制、电磁单位制和实用单位制中，电流和电荷量的单位在量值上的换算关系是

$$1 \text{ A} = \frac{1}{10} \text{ 电磁制电流单位} = 3 \times 10^9 \text{ 静电制电流单位}$$

$$1 \text{ C} = \frac{1}{10} \text{ 电磁制电荷量单位} = 3 \times 10^9 \text{ 静电制电荷量单位}$$

根据上述的换算关系以及其他有关的定律和定义，可确定其他一切电磁量的单位和量纲。例如，电容率 ϵ 的量纲和真空的 ϵ_0 的量值可确定如下：按静电单位制中的库仑定律，真空中两点电荷 $q_1 = q_2 = 1$ 静电制电量单位 = $\frac{1}{3 \times 10^9} \text{ C}$ ，相距 $r = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ 时，静电库仑力 $F = 1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$ 。按有理化米千克秒安培制，把库仑定律写作

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

并代入上述各量值得

$$\epsilon_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2 F} = \frac{\left(\frac{1}{3 \times 10^9} \right)^2}{4\pi \times 10^{-2} \times 10^{-5}} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

而 ϵ 的量纲为

$$\dim \epsilon = \dim \frac{q^2}{F r^2} = \frac{(\text{IT})^2}{\text{MLT}^{-2}\text{L}^2} = \text{I}^2 \text{L}^{-1} \text{M}^{-1} \text{T}^4$$

其他电磁量的单位和量纲也可仿此决定。

从以上的讨论，应该注意以下两点。

(1) 在有理化米千克秒安培制中，为了使各电磁量的单位都尽可能适合

工程学科的实际应用,在真空电容率 ϵ_0 和磁导率 μ_0 的量值中就分别含有数字 10^{-7} 和 10^{-12} ,因而在介质的 ϵ 和 μ 中,也分别含有数字 10^{-7} 和 10^{-12} .这在应用时似乎不方便,但是,实用上我们所常用的仅是相对电容率 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 和相对磁导率 $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$,这些相对量值与高斯制中的 ϵ 和 μ 的量值相同,所以在实用上并无不便之处.

(2)按有理化单位制,在上述的库仑定律等公式中引入系数 4π ,引入系数 4π 的原因是使电磁场公式有理化,关于有理化的意义举例说明如下.

我们应该注意到,如果库仑定律写作 $F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$,由此得点电荷的场强为 $E = \frac{q}{\epsilon r^2}$,高斯定理为 $\oint D_n dS = 4\pi \Sigma q_i$,平板电容器内的场强为 $E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ 等相应的表式.可见,在具有球对称性的点电荷场强公式中不出现系数 4π ,而在并无球对称性的平板电容器内的场强公式中反而出现系数 4π ,这是不合理的.如果库仑定律改写作 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}$,在公式内先引入系数 4π ,由此得点电荷的场强为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$,高斯定理为 $\oint D_n dS = \Sigma q_i$,平板电容器内的场强为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ 等相应的表式,后两式中不出现系数 4π ,显然较为合理.此外,按有理化单位制,麦克斯韦方程组的形式更对称.

在各种单位制中,电磁场公式都可使之有理化.现代文献中,用米千克秒安培制单位制时,用有理化的较多,因而我们在本书中直接引入有理化制.

以上我们一共讨论了四种重要的单位制,事实上还有其他一些大同小异的单位制.完全用静电单位制或电磁单位制确是比较单纯,但这两种单位制在理论上各有缺点,工程学科多不采用这两种单位制.高斯单位制克服了上述理论上的缺点,在物理学文献中用得比较多,但不甚适合工程上学科的要求.有理化米千克秒安培制有较大的优越性,已普遍地应用于工程学科中,现代物理学文献中也日益采用.目前采用的国际单位制中电磁量的单位就是有理化米千克秒安培制的单位.为了便于阅读其它参考书刊,在本附录中还列出了“电磁量在国际制和高斯制之间的换算关系”以及“国际制和未有理化制中电磁学常用公式对照表”,以供参考.

表 1 电磁量在国际制和高斯制之间的换算关系

($c=2.99776 \times 10^{10} \approx 3 \times 10^{10}$)

物理量名称	单位换算关系
电 荷 量	$1 \text{ C} = \frac{c}{10} \text{ CGSE} = 3.0 \times 10^9 \text{ CGSE}$
电 流	$1 \text{ A} = \frac{c}{10} \text{ CGSE} = 3.0 \times 10^9 \text{ CGSE}$
电 场 强 度	$1 \text{ V/m} = \frac{10^6}{c} \text{ CGSE}$ $= \frac{1}{3.0 \times 10^4} \text{ CGSE}$
电 位 移	$1 \text{ C/m}^2 = \frac{4\pi c}{10^5} \text{ CGSE} = 12\pi \times 10^5 \text{ CGSE}$
电 势	$1 \text{ V} = \frac{10^6}{c} \text{ CGSE} = \frac{1}{300} \text{ CGSE}$
电 容	$1 \text{ F} = \frac{c^2}{10^9} \text{ CGSE} = 9.0 \times 10^{11} \text{ CGSE}$
电 阻	$1 \Omega = \frac{10^9}{c^2} \text{ CGSE} = \frac{1}{9.0 \times 10^{11}} \text{ CGSE}$
磁感应强度	$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$
磁 场 强 度	$1 \text{ A/m} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe}$
磁 通 量	$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx}$
电 感	$1 \text{ H} = 10^9 \text{ CGSM}$

表 2 国际制和未有理化制中电磁学常用公式对照表

公式名称	国际制	未有理化制
库仑定律(真空)	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
库仑定律(介质)	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$
点电荷的场强 (真空)	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
平板电容器内场强 (真空)	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$E = 4\pi\sigma$
点电荷的电势 (真空)	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$V = \frac{q}{r}$
平板电容器的电容 (真空)	$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$	$C = \frac{S}{4\pi d}$
平板电容器的电容 (介质)	$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
电场力作功与电势 差之间的关系	$A_{AB} = q(V_A - V_B)$	$A_{AB} = q(V_A - V_B)$
电场强度与电势 之间的关系	$E_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$	$E_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$
高斯定理	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \sum q_i$
\mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{P} 之间的关系	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
带电系统的能量	$W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$	$W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$
电场能量密度	$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$
欧姆定律	$I = \frac{V_A - V_B}{R}$	$I = \frac{V_A - V_B}{R}$
毕奥-萨伐尔定律 (真空)	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}$

续表

公式名称	国际制	未有理化制
毕奥·萨伐尔定律 (介质)	$dB = \frac{\mu_r \mu_0 I dl \times r}{4\pi r^3}$	$dB = \frac{\mu(I dl \times r)}{r^3}$
安培环路定理	$\oint H \cdot dl = \sum I_i$	$\oint H \cdot dl = 4\pi \sum I_i$
安培定律	$dF = Idl \times B$	$dF = Idl \times B$
洛伦兹力	$F = qv \times B$	$F = qv \times B$
平行载流直导线间 相互作用力(真空)	$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$	$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2I_1 I_2}{d}$
螺线管磁感应强度	$B = \mu_r \mu_0 nI$	$B = 4\pi \mu nI$
螺线管磁场强度	$H = nI$	$H = 4\pi nI$
法拉第电磁感应 定律	$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$
螺线管的自感	$L = \mu_r \mu_0 n^2 V$	$L = 4\pi \mu n^2 V$
磁场能量密度	$w_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2 = \frac{1}{2} B \cdot H$	$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B \cdot H}{8\pi}$
B, H, M 之间的 关系	$B = \mu_0 H + \mu_0 M$	$B = H + 4\pi M$
麦克斯韦方程组	$\oint_S D \cdot dS = q$ $\oint_S B \cdot dS = 0$ $\oint_L E \cdot dl = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$ $\oint_L H \cdot dl = \iint_S \left(\delta + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS$	$\oint_S D \cdot dS = 4\pi q$ $\oint_S B \cdot dS = 0$ $\oint_L E \cdot dl = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$ $\oint_L H \cdot dl = 4\pi \iint_S \left(\delta + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS$

习题答案

第八章

8-1 10^{-7}N ; $3.3 \times 10^{-10}\text{C}$.

8-2 (1) $3.22 \times 10^{-7}\text{i N}$; (2) 0.07 m .

8-3 (1) $F_1=59.6\text{ N}$, $F_2=67.7\text{ N}$, $F_3=81.1\text{ N}$, q_3 受力最大;
(2) 67.7 N , 与 q_2q_3 连线交角 $\theta=60.1^\circ$.

8-4 $Q=-2\sqrt{2}q$.

8-5 (1) $\pm 2.38 \times 10^{-8}\text{ C}$; (2) $1.4 \times 10^3\text{ m/s}$.

8-7 $9.00 \times 10^4 \left[\frac{2.0}{x^2} + \frac{5.0}{(x+0.10)^2} \right] \text{ V/m}$ (在 $x > 0$ 区间);
 $9.00 \times 10^4 \left[\frac{5.0}{(x+0.10)^2} - \frac{2.0}{x^2} \right] \text{ V/m}$ (在 $0.10\text{ m} < x < 0$ 区间);
 $-9.00 \times 10^4 \left[\frac{2.0}{x^2} + \frac{5.0}{(x+0.10)^2} \right] \text{ V/m}$ (在 $x < -0.10\text{ m}$ 区间).

8-8 $3.24 \times 10^4\text{ V/m}$, 33.7° .

8-9 (1) 0 ; (2) $\frac{\sqrt{2}q}{\epsilon_0 \pi d^2}$ 或 0 .

8-10 (1) $-9.9 \times 10^{-9}\text{ C}$; (2) $1.79 \times 10^6\text{ V/m}$.

8-11 (1) 50i V/m ; (2) 10.8i V/m .

8-12 (1) $\frac{\sqrt{q_1}d}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$;
(2) $\frac{\sqrt{q_1}d}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}$ (当 $x > d$), $|x| = \frac{\sqrt{q_1}d}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}$ (当 $x < 0$).

$$8-13 \quad \pm \frac{d}{2\sqrt{2}}.$$

$$8-15 \quad (1) 6.75 \times 10^2 \text{ V/m}; (2) 1.50 \times 10^3 \text{ V/m}.$$

$$8-16 \quad \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}, 45^\circ.$$

$$8-17 \quad \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \mathbf{i}.$$

$$8-18 \quad 0.72 \text{ V/m, 指向縫隙}.$$

$$8-19 \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, 0.$$

$$8-20 \quad 3.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}.$$

$$8-21 \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi(\sqrt{R^2+d^2}-d)}{\sqrt{R^2+d^2}}.$$

$$8-22 \quad (1) 1.04 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}; (2) 9.2 \times 10^{-12} \text{ C}.$$

$$8-23 \quad 0; 0.$$

$$8-24 \quad 0.269 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}, 2.38 \times 10^{-12} \text{ C}.$$

$$8-25 \quad (1) -9.02 \times 10^5 \text{ C}; (2) 1.14 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2.$$

$$8-26 \quad (1) 1.12 \times 10^{-19} \text{ C}; (2) 3.60 \times 10^{11} \text{ V/m}.$$

$$8-27 \quad (1) E_{0.05} = 0; (2) E_{0.15} = 0.41 \text{ V/m}; (3) E_{0.5} = 1.04 \text{ V/m}.$$

$$8-28 \quad \frac{k r^2}{4\epsilon_0} (r < R), \frac{k R^4}{4\epsilon_0 r^2} (r > R).$$

$$8-29 \quad (1) 0; (2) 1.69 \times 10^3 \text{ V/m}; (3) 2.83 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

$$8-30 \quad \mathbf{E}_O = \frac{\rho r_{OO'}}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_O, \mathbf{E}_\alpha = \frac{\rho r_{\alpha'O'}}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_O, \mathbf{E}_P = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{r_{OP}^2} - r_{OP} \right) \mathbf{r}_O, \mathbf{E}_P = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{r_{PO}^2} - \frac{R^3}{r_{PO}^2} \right) \mathbf{r}_O.$$

$$8-31 \quad \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]}.$$

$$8-32 \quad (1) 0, 2.88 \times 10^3 \text{ V}; (2) -2.88 \times 10^{-6} \text{ J}; (3) 2.88 \times 10^{-6} \text{ J}.$$

8-33 (1) $3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$; (2) $-3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$.

8-35 $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qr^2}{r^3} \cos^2 \theta$.

8-36 $66.7 \text{ pC}, 476 \text{ V}$.

8-37 -0.61 J .

8-38 (1) 900 V ; (2) 450 V .

8-40 0.043 V .

8-41 $-6.0 \text{ V/m}(a,b), 0(b,c), 3.0 \text{ V/m}(c,e),$

$15 \text{ V/m}(e,f), 0(f,g), -3.0 \text{ V/m}(g,h).$

8-42 (1) $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2}-x)$; (2) $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1 \right)$;

(3) $4.52 \times 10^4 \text{ V}, 4.52 \times 10^5 \text{ V/m}$.

8-43 $\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} [a(x^2-y^2) + bx(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}], \frac{y}{x^2+y^2} [2ax + b(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$.

8-44 (1) $2.56 \times 10^5 \text{ V}$; (2) 0.745 C .

8-45 (1) $1.8 \times 10^6 \text{ eV}, 1.11 \times 10^{-13} \text{ J}$; (2) $2.01 \times 10^8 \text{ m/s}$;

(3) $2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$.

8-46 $5.0 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}, -8.66 \times 10^{-2} \text{ J}$.

8-47 $3.54 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$.

8-48 (1) $3.48 \times 10^5 \text{ V}$; (2) $6.25 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$; (3) $8.34 \times 10^6 \text{ m/s}$.

第九章

9-1 $\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m}, \sqrt{\frac{q\sigma}{\epsilon_0 m} d}, \sqrt{\frac{4m\epsilon_0}{\sigma q} d}$.

9-2 $2.5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

$$9-4 \quad \sigma > \sqrt{\frac{2mg\epsilon_0}{S}}.$$

$$9-5 \quad -\frac{q}{2\pi d^2} \cos^3 \theta.$$

$$9-6 \quad (1) \text{ 电荷: 内表面 } -q, \text{ 外表面 } +q; \text{ 电势: } \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2};$$

$$(2) \text{ 电荷: 内表面 } -q, \text{ 外表面 } 0; \text{ 电势: } 0;$$

$$(3) \frac{r_1}{r_2} q, \frac{r_1 - 2r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} q.$$

$$9-7 \quad (1) 120 \text{ V}; (2) 300 \text{ V}; (3) 120 \text{ V}.$$

$$9-8 \quad \Delta V_i = 6.7 \times 10^2 \text{ V}, \Delta V_o = 0.$$

$$9-9 \quad (1) 3.3 \times 10^2 \text{ V}, 2.7 \times 10^2 \text{ V}; (2) 2.7 \times 10^2 \text{ V}; (3) V_1 = 60 \text{ V}, \\ V_2 = 0.$$

$$9-11 \quad (1) q_B = -1.0 \times 10^{-7} \text{ C}, q_C = -2.0 \times 10^{-7} \text{ C}; (2) 2.3 \times 10^3 \text{ V}.$$

$$9-12 \quad \text{相同}, 7.1 \times 10^{-4} \text{ F}.$$

$$9-14 \quad (1) 3.75 \mu\text{F}; (2) q_2 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ C}, V_2 = 25 \text{ V}; (3) q_3 = 5.0 \times \\ 10^{-4} \text{ C}, V_3 = 100 \text{ V}.$$

$$9-15 \quad (1) 2.86 \mu\text{F}; (2) q_5 = q_6 = 4.0 \times 10^{-4} \text{ C}, q_2 = q_4 = 1.7 \times 10^{-4} \text{ C}, \\ q_1 = 5.7 \times 10^{-4} \text{ C}, q_3 = 1.1 \times 10^{-4} \text{ C}; (3) W_1 = 8.1 \times 10^{-4} \text{ J}, W_2 = \\ W_4 = 7.3 \times 10^{-3} \text{ J}, W_3 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ J}, W_5 = W_6 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

$$9-16 \quad (1) 0.8 \text{ C/m}^2; (2) 0.08 \text{ C} \cdot \text{m}.$$

$$9-17 \quad (1) P = 0.5 \text{ C/m}^2, D = 0.67 \text{ C/m}^2; (2) 0.67 \text{ C/m}^2; (3) E_i = 7.57 \\ \times 10^{10} \text{ N/C}, E_o = 1.89 \times 10^{10} \text{ N/C}.$$

$$9-18 \quad 1 - \frac{\delta(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r d}.$$

$$9-19 \quad 1.75 \text{ 倍}.$$

$$9-20 \quad \frac{2}{\epsilon_r + 1} U.$$

$$9-22 \quad (\pi - 1) \frac{\epsilon_0 S}{4d}.$$

$$9-23 \quad \frac{1}{2} \left(V + \frac{qd}{2\epsilon_0 S} \right).$$

$$9-24 \quad \frac{(\epsilon_1 - 3\epsilon_2)S}{4d}, \quad \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)S}{2d}.$$

$$9-25 \quad \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}, \quad \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2 S}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)d}.$$

$$9-26 \quad (1) 1.1 \times 10^4 \text{ V/m}; (2) 5.0 \times 10^{-6} \text{ C}; (3) 4.1 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

$$9-27 \quad (1) 7.2; (2) 7.7 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

$$9-28 \quad (1) 2.7 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2; (2) 2.7 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2; (3) 1.8 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2;$$

$$(4) 1.8 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2; (5) 3.0 \times 10^6 \text{ V/m}, 2.0 \times 10^6 \text{ V/m}.$$

$$9-29 \quad (1) 20 \mu\text{C/m}^2; (2) 7.5 \times 10^5 \text{ V/m}, 5.7 \times 10^5 \text{ V/m};$$

$$(3) 13.3 \mu\text{C/m}^2, 15.0 \mu\text{C/m}^2.$$

$$9-30 \quad (1) E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} (R' < r < R), E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R);$$

$$(2) V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) (R < r < R'); V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} (r > R');$$

$$(3) V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right)$$

$$9-31 \quad (1) E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^3} r (R_1 < r < R_2), E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r (R_0 < r < R_1, r > R_2),$$

$$D_1 = D_0 = \frac{Q}{4\pi r^2} r;$$

$$(2) P = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r r^3} r, \quad \sigma'_{R_1} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r R_1^2} Q, \quad \sigma'_{R_2} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r R_2^2} Q.$$

$$9-32 \quad (1) E = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r}, \quad D = \frac{\lambda_0}{2\pi r}, \quad P = \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r r} \lambda_0;$$

$$(2) \frac{1 - \epsilon_r}{2\pi\epsilon_r R_1} \lambda_0, \quad \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r R_2} \lambda_0.$$

$$9-33 \quad 25.5^\circ.$$

$$9-34 \quad 769 \text{ V/m}, 66.8^\circ.$$

$$9-35 \quad (1) W_{13} = W_{23} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}, W_{12} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d}; \quad (2) -\frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$9-36 \quad \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 l}, \quad -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$$

$$9-37 \quad -400 \text{ MeV.}$$

$$9-38 \quad \Delta Q = \frac{C_1^2 + C_2^2}{C_1 + C_2} U, \Delta W = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2}{C_1 + C_2} U^2, \text{ 并联大.}$$

$$9-39 \quad (1) 1.8 \times 10^{-4} \text{ J}; (2) 8.1 \times 10^{-5} \text{ J.}$$

$$9-40 \quad C' = \epsilon_r C_0, \quad W' = \frac{W}{\epsilon_r}$$

$$9-41 \quad (1) 1.83 \times 10^{-4} \text{ J}; (2) 0.61 \times 10^{-4} \text{ J.}$$

$$9-42 \quad (1) 1.11 \times 10^{-2} \text{ J}, 2.22 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3; (2) 8.88 \times 10^{-8} \text{ J}, 2.66 \times 10^{-7} \text{ J}; (3) 3.54 \times 10^{-7} \text{ J.}$$

$$9-43 \quad (1) 1.280 \mu\text{C}(C_1), 1.920 \mu\text{C}(C_2); (2) 1.28 \text{ J(前)}, 0.512 \text{ J(后)}.$$

$$9-44 \quad (1) \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_r^2 l^2}; (2) \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_r l} dr; (3) \frac{Q^2}{4\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}; (4) \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$9-45 \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right); (1) \left[\frac{q^2}{4\pi m \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$(2) \left[\frac{q^2}{2\pi m \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

第 十 章

$$10-1 \quad 6.3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}, \quad 1.4 \times 10^{12} \text{ s.}$$

$$10-2 \quad 18.7, \text{ 单位为 C.}$$

$$10-3 \quad 3.75 \times 10^{15} \text{ 个.}$$

$$10-4 \quad 6.0 \times 10^6 \text{ A/m}^2, 4.4 \times 10^{-2} \text{ cm/s.}$$

$$10-5 \quad (1) 2.2 \times 10^{-5} \Omega; \quad (2) 2.3 \times 10^3 \text{ A}; \quad (3) 1.4 \times 10^6 \text{ A/m}^2;$$

$$(4) 2.5 \times 10^{-2} \text{ V/m}; \quad (5) 1.1 \times 10^2 \text{ W}; \quad (6) 1.0 \times 10^{-4} \text{ m/s.}$$

- 10-7 0.75Ω .
- 10-8 (1) $1.1 \times 10^8 \Omega$; (2) $9.1 \times 10^{-7} \text{ A}$.
- 10-9 (1) 47.7Ω ; (2) 1.19Ω ; (3) 1.16Ω .
- 10-10 (1) $1.08 \times 10^3 \Omega$; (2) 45 W ; (3) 两种接法里, 通过每段电阻丝的电流相同. 在 (b) 图中, 从电源取得的总电流增大了一倍.
- 10-11 (1) $\frac{R}{R_1+R} \mathcal{E}$; (2) $\mathcal{E}, 0$; (3) $0, \frac{\mathcal{E}}{R_1}$; (4) $\frac{R\mathcal{E}^2}{(R_1+R)^2}$;
 (5) $R : R_1$; (6) $\frac{R}{R+R_1}, 50\%$.
- 10-12 $4.10 \text{ V}, 0.05 \Omega$.
- 10-13 (1) $0.10\%, 11\%$; (2) $0.30\%, 36\%$.
- 10-14 (1) $2.0 \text{ W}; 2.0 \text{ J}$; (2) $2.0 \text{ W}, 0.70 \text{ J}$; (3) $2.0 \text{ W}, 0.60 \text{ J}$.
- 10-15 (1) 225 J ; (2) 300 J ; (3) 78 J .
- 10-16 -1.5 V .
- 10-17 (1) $R_1: 0.4 \text{ A}, R_2: 2.0 \text{ A}, R_3: 2.0 \text{ A}$; (2) $5.2 \text{ V}, 6.8 \text{ V}$;
 (3) $U_{AD} = -2.8 \text{ V}$; (4) $U_{BC} = -4.8 \text{ V}$; (5) $4.0 \text{ V}, 0, 4.8 \text{ V}, 6.8 \text{ V}$.
- 10-18 (1) 10.5 V ; (2) 2.5 V ; (3) 0.38 A , 方向从 D 指向 B.
- 10-19 6.4 km .
- 10-20 $\pm 10 \text{ V}, \mp 2.0 \text{ V}, \mp 6.0 \text{ V}$.
- 10-21 (1) 8.0 V ; (2) 7.5 V .
- 10-22 $1.5 \text{ A}, 2.5 \text{ A}, 4.0 \text{ A}$.
- 10-23 $2.0 \text{ A}, 3.0 \text{ A}, 1.0 \text{ A}$.
- 10-24 (1) $I_{BC} = 1.38 \text{ A}, I_{CD} = 1.02 \text{ A}, I_{CF} = 0.364 \text{ A}, I_{GH} = 0$;
 (2) $66 \mu\text{C}$; (3) 不变.
- 10-25 (1) $I_1 = 0.35 \text{ mA}, I_b = 0.05 \text{ mA}, I_2 = 0.30 \text{ mA}$;
 (2) $3.05 \text{ V}, -2.95 \text{ V}, 3.69 \text{ V}$.

- 10-26 (1) $1.7 \times 10^{-7} \text{ m/s}$; (2) $1.2 \times 10^5 \text{ m/s}$; (3) $1.4 \times 10^{-14} \text{ s}$;
 (4) $1.7 \times 10^{-9} \text{ m}$; (5) $1.4 \times 10^{-2} \text{ V/m}$; (6) $9.9 \times 10^9 \text{ V/m}$.
- 10-27 $2.5 \times 10^{-14} \text{ s}$, $4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$.

第 十 一 章

- 11-1 (1) $2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$; (2) 3.46 Wb , $-3.46 \times 10^{-5} \text{ Wb}$.
- 11-2 (1) 2 Wb ; (2) 0 ; (3) 1.44 Wb .
- 11-3 (1) 0.135 Wb ; (2) 0 .
- 11-4 $5.66 \times 10^{-6} \text{ T}$, 方向: 在与 I_1, I_2 相垂直的平面内, 沿由 I_2 指向 I_1 的方向.
- 11-5 $1.73 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$, 方向垂直纸面向外.
- 11-6 $\frac{\mu_0 3 \sqrt{3}}{4\pi h} I$.
- 11-7 (1) $\frac{2 \sqrt{2} \mu_0 I l^2}{\pi(l^2 + 4x^2)(l^2 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}}$; (2) $4.8 \times 10^{-6} \text{ T}$.
- 11-8 (1) $1.26 \times 10^{-5} \text{ T}$; (2) $1.98 \times 10^{-6} \text{ T}$.
- 11-9 0 .
- 11-10 $4 \sqrt{2} / \pi^2$.
- 11-11 16 匝 .
- 11-12 $7.0 \times 10^{-4} \text{ T}$, B_A 与 B_B 成 $26^\circ 34'$ 角.
- 11-13 (1) $\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln 2$; (2) $\frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2x}$, 方向与平面平行.
- 11-14 $6.37 \times 10^{-6} \text{ T}$, 方向水平向右.
- 11-15 $\frac{\mu_0 N I}{4R}$.
- 11-16 $\frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$.
- 11-17 (1) $4.0 \times 10^{-5} \text{ T}$; (2) $2.2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$.

- 11-18 $\frac{\mu_0 I}{4\pi} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ Wb}.$
- 11-20 $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} (r < R_1), \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (R_1 < r < R_2), \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) (R_2 < r < R_3),$
 $0 (r > R_3).$
- 11-21 (1) $\frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)}, \frac{\mu_0 I d}{2\pi (R^2 - r^2)}; (2) 3.1 \times 10^{-6} \text{ T}, 3.1 \times 10^{-4} \text{ T}.$
- 11-22 $0.5 \times 10^5 \text{ T},$ 方向:沿负 z 轴方向.
- 11-23 $1.6 \times 10^{-13} \mathbf{k} \text{ N}.$
- 11-24 (1) 向东偏转; (2) $6.2 \times 10^{14} \text{ m/s}^2; (3) 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}.$
- 11-25 $5.69 \text{ T}, 10^7 \text{ s}^{-1}.$
- 11-26 (1) $3.48 \times 10^{-2} \text{ m}; (2) 0.38 \text{ m}; (3) 2.28 \times 10^7 \text{ s}^{-1}.$
- 11-27 $7.0 \times 10^7 \text{ m/s}.$
- 11-28 $8.4 \times 10^{-3} \text{ m}.$
- 11-30 (1) $0.48 \text{ T}; (2) 1.43 \times 10^{-7} \text{ s}.$
- 11-32 (1) $6.7 \times 10^{-4} \text{ m/s}; (2) 2.8 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}.$
- 11-33 (1) $1.4 \times 10^{-4} \text{ m/s}; (2) 4.5 \times 10^{-23} \text{ N (向下)}; (3) 2.8 \times 10^{-4} \text{ V/m (向下)}; (4) 5.6 \times 10^{-6} \text{ V (上高下低)}; (5) 2.8 \times 10^{-4} \text{ V/m (向下)}.$
- 11-34 $3.46 \times 10 \text{ N/m}.$
- 11-35 $0.2 \text{ A},$ 流向自左向右.
- 11-36 $-0.0439 \mathbf{k} \text{ N}.$
- 11-38 $9.35 \times 10^{-3} \text{ T}.$
- 11-39 $7.0 \times 10^{-4} \text{ N},$ 方向向左.
- 11-40 (1) $\mu_0 I_1 I_2,$ 方向向右; (2) $\mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} \right),$ 方向向左.
- 11-41 (1) $\frac{m}{lB} \sqrt{2gh}; (2) 1.2 \text{ C}.$

11-42 30° .

11-43 $2.09 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$, 方向沿 y 轴.

11-44 (1) $1.06 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; (2) $4.2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

11-45 $2\pi \sqrt{\frac{J}{I^2 IB}}$.

11-46 (1) $7.85 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$; (2) $7.85 \times 10^{-2} \text{ J}$.

第十二章

12-1 $1.57 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

12-2 $6.37 \times 10^7 \text{ A/m}$.

12-3 (1) $6.2 \times 10^8 \text{ A}$; (2) 能; (3) 不能.

12-4 0.24 Hz .

12-5 365.

12-6 (1) $7.56 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; (2) $11.4 \text{ N} \cdot \text{m}$.

12-7 (1) $4.4 \times 10^{10} \text{ rad/s}$; (2) 2.3 m/s ; (3) $4.7 \times 10^{-24} \text{ J}$.

12-8 1.19 T .

12-9 $7.2 \times 10^5 \text{ A/m}$, 与 B 方向相反.

12-10 (1) $2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, 200 A/m ; (2) 1.05 T , 200 A/m ;
(3) $2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, 1.05 T .

12-11 (1) 0.02 T ; (2) 32 A/m ; (3) 15.9 A ; (4) $6.25 \times 10^{-4} \text{ H/m}$,
 $497,496$; (5) $1.59 \times 10^4 \text{ A/m}$.

12-12 (1) $2.0 \times 10^4 \text{ A/m}$; (2) $7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$; (3) 38.8 ;
(4) 775 A , 39.8 .

12-13 (1) $H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$, $B = \frac{\mu_1 I}{2\pi R_1^2} (r < R_1)$; $H = \frac{I}{2\pi r}$, $B = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} (R_1 < r < R_2)$;
 $H = \frac{I}{2\pi r}$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r > R_2)$;

$$(2) \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi\mu_0 R_1} I, \quad \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi\mu_0 R_2} I.$$

12-14 $1.6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, 0.18 \text{ 个}.$

12-15 (1) $4.48 \times 10^{-8} \text{ Wb};$ (2) $0.43 \text{ A}.$

12-16 $85^\circ.$

12-17 $\frac{\pi R^2 B \cos \theta}{\mu_r \mu_0} (\mu_r - 1), (1 - \mu_r) B \sin \theta.$

12-18 (1) $2.7 \times 10^{-3} \text{ H/m};$ (2) $6.9 \times 10^{-4} \text{ H/m}.$

12-19 $9.6 \times 10^{-4} \text{ Wb}.$

12-20 $1.34 \text{ A}, 1.47 \times 10^4 \text{ 匝}.$

12-21 $50 \times 10^{-3} \text{ A}.$

第十三章

13-1 $7.0 \times 10^{-3} \text{ V}, A \text{ 端电势高}.$

13-2 $k \text{ vlt},$ 方向 A 指向 $B.$

13-3 $6.86 \times 10^{-6} \text{ V}.$

13-4 (1) $0.2 \text{ V};$ (2) $0.2 \{t\}, \text{ V};$ (3) $0, 0;$ (4) $0.1 \text{ A}, 0.1 \{t\}, \text{ A}.$

13-5 $\frac{\mu_0 l_1}{2\pi} \left(\ln \frac{d_2 + l_2}{d_2} - \ln \frac{d_1 + l_2}{d_1} \right) \frac{dI}{dt}.$

13-6 (1) $1.0 \text{ V};$ (2) $5.0 \text{ W};$ (3) $1.3 \text{ N}.$

13-7 (1) $\mathcal{E}_{AB} = 8 \text{ V}, \mathcal{E}_{CD} = 4 \text{ V};$ (2) $U_{AB} = 6 \text{ V}, U_{CD} = 6 \text{ V};$ (3) $0.$

13-8 (1) $60 \text{ Hz};$ (2) $2.96 \text{ V}, 2.96 \times 10^{-3} \text{ A}.$

13-9 $4.74 \times 10^{-3} \text{ V}.$

13-10 $3.1 \times 10^{-2} \text{ V},$ 从左向右.

13-11 $0.302 \text{ V}.$

13-12 (1) $\frac{\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2y^3};$ (2) $\frac{3\mu_0 I \pi r^2}{2R^2 N^4} v;$ (3) 与大回路中电流同方向.

13-13 $5.0 \times 10^{-4} \text{ V/m}, 6.25 \times 10^{-4} \text{ V/m}, 3.13 \times 10^{-4} \text{ V/m}.$

13-14 $4.4 \times 10^7 \text{ m/s}^2$ (方向向右), $0, 4.4 \times 10^7 \text{ m/s}^2$ (方向向左).

13-15 223 T/s .

$$13-16 \quad \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \frac{dB}{dt}.$$

13-17 (2) $\mathcal{E}_{AC} = 0$; (3) $4 \times 10^{-3} \text{ V}$; (4) $2 \times 10^{-3} \text{ A}$; (5) $1 \text{ mV}, V_A > V_C$.

13-18 圆盘上沿径向长度 l 的线段切割磁力线产生感应电流, 通感应电流的线段受磁场的力对转轴的力矩使圆盘慢下来.

13-19 (1) 29.7 A ; (2) 2.2 J ; (3) 4 倍.

13-21 1.2×10^3 匝.

$$13-22 \quad \frac{1}{3} \text{ V}.$$

13-23 $7.5 \times 10^{-5} \text{ H}, 9.0 \times 10^{-7} \text{ Wb}, 2.25 \times 10^{-4} \text{ Wb}$.

$$13-24 \quad \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

13-25 (1) $6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$; (2) $-3.14 \times 10^{-4} \text{ Wb/s}, 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$.

$$13-26 \quad \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2 r^2}{2 (R^2 + d^2)^{3/2}}.$$

13-27 $2.8 \times 10^{-6} \text{ H}, 0$.

13-28 (1) $9.86 \times 10^{-4} \text{ H}, 7.76 \Omega, 1.27 \times 10^{-4} \text{ s}$; (2) $2.03 \times 10^3 \text{ A/s}$;
(3) 0.258 A ; (4) $3.28 \times 10^{-5} \text{ J}, 4.18 \text{ J/m}^3$.

13-29 $0.115 \text{ s}, 291.6 \text{ J}, 1008 \text{ J}$.

13-30 $12.3 \text{ s}, 6.9\pi$.

13-31 (1) 238 J/s ; (2) 152 J/s ; (3) 390 J/s .

13-32 $8.0 \text{ s}, 8000 \text{ A}, 1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$.

13-33 (1) 0.01 A ; (2) 0.07 s ; (3) 0.035 s .

13-34 (1) $9.5 \times 10^{-7} \text{ C/s}$; (2) $1.1 \times 10^{-6} \text{ W}$; (3) $2.7 \times 10^{-6} \text{ W}$;
(4) $3.8 \times 10^{-6} \text{ W}$.

13-35 $8.0 \times 10^{-2} \text{ J}$.

13-36 (1) 0.95 J/m^3 ; (2) $4.8 \times 10^{-15} \text{ J/m}^3$.

13-38 $7 \times 10^{18} \text{ J}$.

第十四章

14-2 $5.47 \times 10^{-5} \text{ A}$.

14-3 $\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r^3} q\mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

14-4 (1) 2.1×10^{16} ; (2) 3.5×10^6 .

14-5 $\frac{q}{2\pi R^2} \omega r \cos \omega t$.

14-6 $1.0 \times 10^6 \text{ V/s}$.

14-7 (1) $\frac{U_0}{R} \sin \omega t$; (2) $\frac{\epsilon_0 S \omega U_0}{d} \cos \omega t$; (3) $\frac{U_0}{R} \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 S \omega U_0}{d} \cos \omega t$;
(4) $\frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{U_0}{rR} \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 \pi r \omega U_0}{d} \cos \omega t \right]$.

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 普通物理学 2 第五版

作者 =

页数 = 4 5 4

SS号 = 1 0 1 0 1 6 3 7

出版日期 =

电场和磁场

第八章 真空中的静电场

- 8 - 1 电荷 库仑定律
- 8 - 2 电场 电场强度
- 8 - 3 高斯定理
- 8 - 4 静电场的环路定理 电势
- 8 - 5 等势面 电场强度与电势梯度的关系
- 8 - 6 带电粒子在静电场中的运动

思考题

习题

阅读材料F 电子的发现和电子电荷量的测定

第九章 导体和电介质中的静电场

- 9 - 1 静电场中的导体
- 9 - 2 空腔导体内外的静电场
- 9 - 3 电容器的电容
- 9 - 4 电介质及其极化
- 9 - 5 电介质中的静电场
- 9 - 6 有电介质时的高斯定理 电位移
- 9 - 7 电场的边值关系
- 9 - 8 电荷间的相互作用能 静电场的能量
- 9 - 9 铁电体 压电体 永电体

思考题

习题

阅读材料G 静电现象的应用

第十章 恒定电流和恒定电场

- 10 - 1 电流密度 电流连续性方程
- 10 - 2 恒定电流和恒定电场 电动势
- 10 - 3 欧姆定律 焦耳 - 楞次定律
- 10 - 4 一段含源电路的欧姆定律 基尔霍夫定律
- 10 - 5 金属导电的经典电子理论

思考题

习题

阅读材料H 接触电势差 温差电现象

第十一章 真空中的恒定磁场

- 11 - 1 磁感应强度 磁场的高斯定理
- 11 - 2 毕奥 - 萨伐尔定律
- 11 - 3 毕奥 - 萨伐尔定律的应用
- 11 - 4 安培环路定理
- 11 - 5 安培环路定理的应用
- 11 - 6 带电粒子在磁场中所受作用及其运动
- 11 - 7 带电粒子在电场和磁场中运动的应用
- 11 - 8 磁场对载流导线的作用
- 11 - 9 平行载流导线间的相互作用力 电流单位 “安培” 的定义
- 11 - 10 磁力的功

思考题

习题

阅读材料I 生物磁学

第十二章 磁介质中的磁场

- 12 - 1 磁介质 顺磁质和抗磁质的磁化
- 12 - 2 磁化强度 磁化电流
- 12 - 3 磁介质中的磁场 磁场强度
- 12 - 4 磁场的边值关系
- 12 - 5 铁磁质
- 12 - 6 磁路定理

思考题

习题

阅读材料J 地球的磁场

第十三章 电磁感应和暂态过程

- 13 - 1 电磁感应定律
- 13 - 2 动生电动势
- 13 - 3 感生电动势 有旋电场
- 13 - 4 涡电流
- 13 - 5 自感和互感

1 3 - 6 电感和电容电路的暂态过程

1 3 - 7 磁场的能量

思考题

习题

阅读材料K 磁效应及其应用

第十四章 麦克斯韦方程组 电磁场

1 4 - 1 位移电流

1 4 - 2 麦克斯韦方程组

1 4 - 3 电磁场的物质性

1 4 - 4 电磁场的统一性 电磁场量的相对性

思考题

习题

阅读材料L 磁流体波

附录 矢量 (第二部分)

附录 电磁量的单位制

习题答案

附录页