

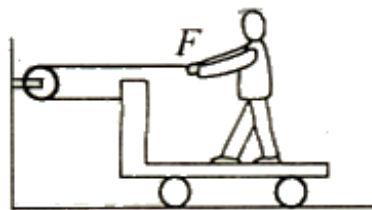
# 一、整体法

## 方法简介

整体是以物体系统为研究对象，从整体或全过程去把握物理现象的本质和规律，是一种把具有相互联系、相互依赖、相互制约、相互作用的多个物体，多个状态，或者多个物理变化过程组合作为一个融洽加以研究的思维形式。整体思维是一种综合思维，也可以说是一种综合思维，也是多种思维的高度综合，层次深、理论性强、运用价值高。因此在物理研究与学习中善于运用整体研究分析、处理和解决问题，一方面表现为知识的综合贯通，另一方面表现为思维的有机组合。灵活运用整体思维可以产生不同凡响的效果，显现“变”的魅力，把物理问题变繁为简、变难为易。

## 赛题精讲

**例 1:** 如图 1—1 所示，人和车的质量分别为  $m$  和  $M$ ，人用水平力  $F$  拉绳子，图中两端绳子均处于水平方向，不计滑轮质量及摩擦，若人和车保持相对静止，且水平地面是光滑的，则车的加速度为\_\_\_\_\_。



1-1

**解析:** 要求车的加速度，似乎需将车隔离出来才能求解，事实上，人和车保持相对静止，即人和车有相同的加速度，所以可将人和车看做一个整体，对整体用牛顿第二定律求解即可。

将人和车整体作为研究对象，整体受到重力、水平面的支持力和两条绳的拉力。在竖直方向重力与支持力平衡，水平方向绳的拉力为  $2F$ ，所以有：

$$2F = (M + m)a, \text{ 解得: } a = \frac{2F}{M + m}$$

**例 2:** 用轻质细线把两个质量未知的小球悬挂起来，如图 1—2 所示，今对小球  $a$  持续施加一个向左偏下  $30^\circ$  的恒力，并对小球  $b$  持续施加一个向右偏上  $30^\circ$  的同样大小的恒力，最后达到平衡，表示平衡状态的图可能是（ ）

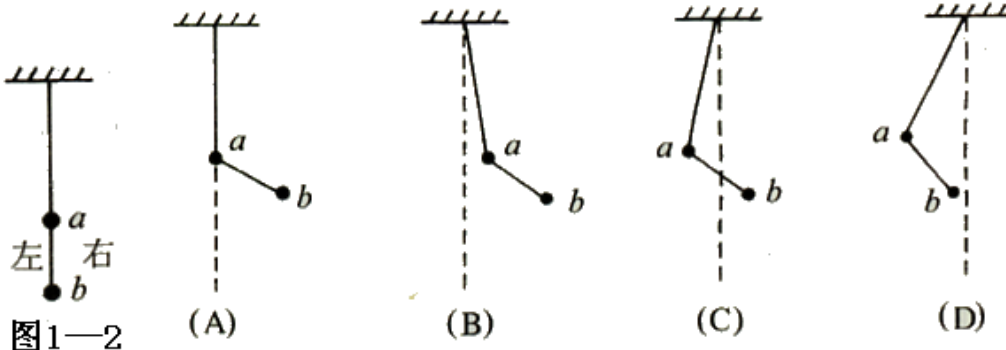


图 1-3

**解析:** 表示平衡状态的图是哪一个，关键是要求出两条轻质细绳对小球  $a$  和小球  $b$  的拉力的方向，只要拉力方向求出后，图就确定了。

先以小球 a、b 及连线组成的系统为研究对象，系统共受五个力的作用，即两个重力  $(m_a + m_b)g$ ，作用在两个小球上的恒力  $F_a$ 、 $F_b$  和上端细线对系统的拉力  $T_1$ 。因为系统处于平衡状态，所受合力必为零，由于  $F_a$ 、 $F_b$  大小相等，方向相反，可以抵消，而  $(m_a + m_b)g$  的方向竖直向下，所以悬线对系统的拉力  $T_1$  的方向必然竖直向上。再以 b 球为研究对象，b 球在重力  $m_b g$ 、恒力  $F_b$  和连线拉力  $T_2$  三个力的作用下处于平衡状态，已知恒力向右偏上  $30^\circ$ ，重力竖直向下，所以平衡时连线拉力  $T_2$  的方向必与恒力  $F_b$  和重力  $m_b g$  的合力方向相反，如图所示，故应选 A。

**例 3:** 有一个直角架 AOB，OA 水平放置，表面粗糙，OB 竖直向下，表面光滑，OA 上套有小环 P，OB 上套有小环 Q，两个环的质量均为  $m$ ，两环间由一根质量可忽略、不伸长的细绳相连，并在某一位置平衡，如图 1—4 所示。现将 P 环向左移动一段距离，两环再次达到平衡，那么将移动后的平衡状态和原来的平衡状态相比，OA 杆对 P 环的支持力  $N$  和细绳上的拉力  $T$  的变化情况是 ( )

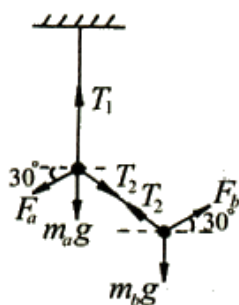


图 1-3-甲

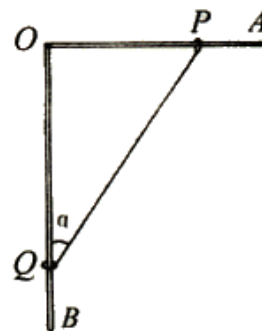


图 1-4

- A.  $N$  不变， $T$  变大
- B.  $N$  不变， $T$  变小
- C.  $N$  变大， $T$  变小
- D.  $N$  变大， $T$  变大

**解析:** 先把 P、Q 看成一个整体，受力如图 1—4—甲所示，则绳对两环的拉力为内力，不必考虑，又因 OB 杆光滑，则杆在竖直方向上对 Q 无力的作用，所以整体在竖直方向上只受重力和 OA 杆对它的支持力，所以  $N$  不变，始终等于 P、Q 的重力之和。再以 Q 为研究对象，因 OB 杆光滑，所以细绳拉力的竖直分量等于 Q 环的重力，当 P 环向左移动一段距离后，发现细绳和竖直方向夹角  $\alpha$  变小，所以在细绳拉力的竖直分量不变的情况下，拉力  $T$  应变小。由以上分析可知应选 B。

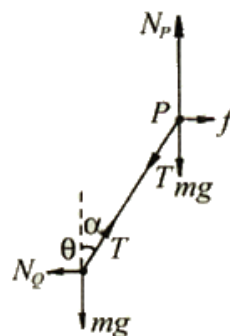


图 1-4-甲

**例 4:** 如图 1—5 所示，质量为  $M$  的劈块，其左右劈面的倾角分别为  $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ ，质量分别为  $m_1 = \sqrt{3} \text{ kg}$  和  $m_2 = 2.0 \text{ kg}$  的两物块，同时分别从左右劈面的顶端从静止开始下滑，劈块始终与水平面保持相对静止，各相互接触面之间的动摩擦因数均为  $\mu = 0.20$ ，求两物块下滑过程中 ( $m_1$  和  $m_2$  均未达到底端) 劈块受到地面的摩擦力。(  $g = 10 \text{ m/s}^2$  )

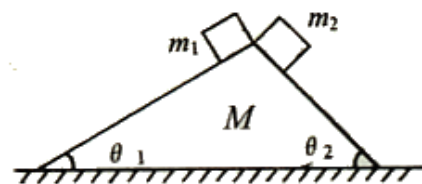


图 1-5

**解析:** 选  $M$ 、 $m_1$  和  $m_2$  构成的整体为研究对象，把在相同时间内， $M$  保持静止， $m_1$  和  $m_2$  分别以不同的加速度下滑三个过程视为一个整体过程来研究。根据各种性质的力产生的条件，在水平方向，整体除受到地面的静摩擦力外，不可能再受到其他力；如果受到静摩擦力，那么此力便是整体在水平方向受到的合外力。

根据系统牛顿第二定律，取水平向左的方向为正方向，则有：

$$F_{\text{合}x} = Ma' + m_1 a_{1x} - m_2 a_{2x}$$

其中  $a'$ 、 $a_{1x}$  和  $a_{2x}$  分别为  $M$ 、 $m_1$  和  $m_2$  在水平方向的加速度的大小，而  $a' = 0$ ， $a_{1x} = g(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ) \cdot \cos 30^\circ$ ， $a_{2x} = g(\sin 45^\circ - \mu \cos 45^\circ) \cdot \cos 45^\circ$ 。所以：

$$\begin{aligned} F_{\text{合}} &= m_1 g (\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ) \cdot \cos 30^\circ - m_2 g (\sin 45^\circ - \mu \cos 45^\circ) \cdot \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3} \times 10 \times \left( \frac{1}{2} - 0.2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2.0 \times 10 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 0.3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2.3 \text{N} \end{aligned}$$

负号表示整体在水平方向受到的合外力的方向与选定的正方向相反。所以劈块受到地面的摩擦力的大小为 2.3N，方向水平向右。

**例 5：**如图 1—6 所示，质量为  $M$  的平板小车放在倾角为  $\theta$  的光滑斜面上（斜面固定），一质量为  $m$  的人在车上沿平板向下运动时，车恰好静止，求人的加速度。

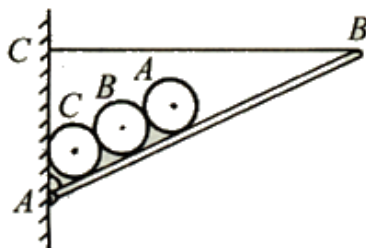
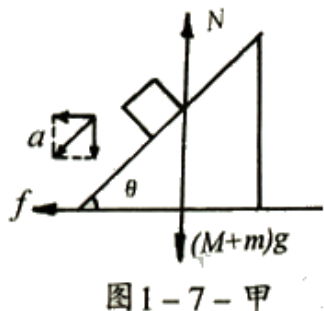
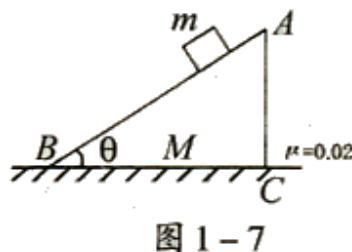
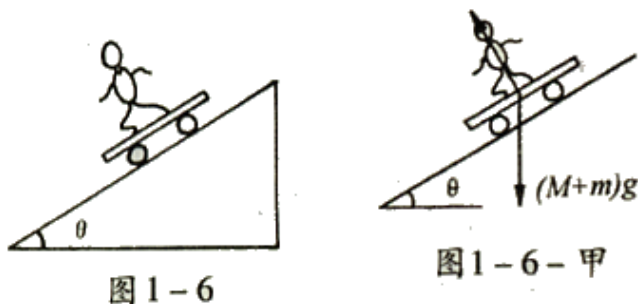
**解析：**以人、车整体为研究对象，根据系统牛顿运动定律求解。如图 1—6—甲，由系统牛顿第二定律得：

$$(M + m)g \sin \theta = ma$$

$$\text{解得人的加速度为 } a = \frac{M + m}{m} g \sin \theta$$

**例 6：**如图 1—7 所示，质量  $M = 10\text{kg}$  的木块 ABC 静置于粗糙的水平地面上，滑动摩擦因数  $\mu = 0.02$ ，在木块的倾角  $\theta$  为  $30^\circ$  的斜面上，有一质量  $m = 1.0\text{kg}$  的物块静止开始沿斜面下滑，当滑行路程  $s = 1.4\text{m}$  时，其速度  $v = 1.4\text{m/s}$ ，在这个过程中木块没有动，求地面对木块的摩擦力的大小和方向。（重力加速度取  $g = 10/\text{s}^2$ ）

**解析：**物块  $m$  由静止开始沿木块的斜面下滑，受重力、弹力、摩擦力，在这三个恒力的作用下做匀加速直线运动，由运动学公式可以求出下滑的加速度，物块  $m$  是处于不平衡状态，说明木块  $M$  一定受到地面给它的摩擦力，其大小、方向可根据力的平衡条件求解。此题也可以将物块  $m$ 、木块  $M$  视为一个整体，根据系统的牛顿第二定律求解。



由运动学公式得物块  $m$  沿斜面下滑的加速度:

$$a = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_t^2}{2s} = \frac{1.4^2}{2 \times 1.4} = 0.7 \text{m/s}^2$$

以  $m$  和  $M$  为研究对象, 受力如图 1—7—甲所示。由系统的牛顿第二定律可解得地面对木块  $M$  的摩擦力为  $f = ma \cos \theta = 0.61 \text{N}$ , 方向水平向左。

**例 7:** 有一轻质木板  $AB$  长为  $L$ ,  $A$  端用铰链固定在竖直墙上, 另一端用水平轻绳  $CB$  拉住。板上依次放着  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个圆柱体, 半径均为  $r$ , 重均为  $G$ , 木板与墙的夹角为  $\theta$ , 如图 1—8 所示, 不计一切摩擦, 求  $BC$  绳上的张力。

**解析:** 以木板为研究对象, 木板处于力矩平衡状态, 若分别以圆柱体  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为研究对象, 求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  对木板的压力, 非常麻烦, 且容易出错。若将  $A$ 、 $B$ 、 $C$  整体作为研究对象, 则会使问题简单化。

以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  整体为研究对象, 整体受到重力  $3G$ 、木板的支持力  $F$  和墙对整体的支持力  $F_N$ , 其中重力的方向竖直向下, 如图 1—8—甲所示。合重力经过圆柱  $B$  的轴心, 墙的支持力  $F_N$  垂直于墙面, 并经过圆柱  $C$  的轴心, 木板给的支持力  $F$  垂直于木板。由于整体处于平衡状态, 此三力不平行必共点, 即木板给的支持力  $F$  必然过合重力墙的支持力  $F_N$  的交点。

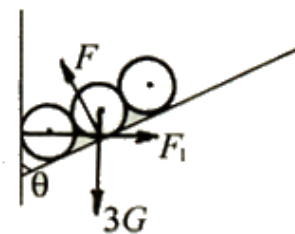


图 1—8—甲

根据共点力平衡的条件:  $\Sigma F = 0$ , 可得:  $F = \frac{3G}{\sin \theta}$ 。

由几何关系可求出  $F$  的力臂  $L = 2r \sin^2 \theta + \frac{r}{\sin \theta} + r \cdot \cot \theta$

以木板为研究对象, 受力如图 1—8—乙所示, 选  $A$  点为转轴, 根据力矩平衡条件  $\Sigma M = 0$ , 有:  $F \cdot L = T \cdot L \cos \theta$

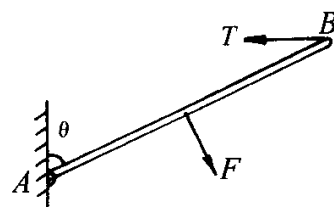


图 1—8 乙

$$\text{即: } \frac{3Gr(2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta)}{\sin \theta} = T \cdot L \cos \theta$$

$$\text{解得绳 } CB \text{ 的张力: } T = \frac{3Gr}{L} (2 \tan \theta + \frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta \cdot \cos \theta})$$

**例 8:** 质量为  $1.0 \text{kg}$  的小球从高  $20 \text{m}$  处自由下落到软垫上, 反弹后上升的最大高度为  $5.0 \text{m}$ , 小球与软垫接触的时间为  $1.0 \text{s}$ , 在接触时间内小球受合力的冲量大小为 (空气阻力不计, 取  $g = 10 \text{m/s}^2$ ) ( )

- A.  $10 \text{N} \cdot \text{s}$       B.  $20 \text{N} \cdot \text{s}$       C.  $30 \text{N} \cdot \text{s}$       D.  $40 \text{N} \cdot \text{s}$

**解析:** 小球从静止释放后, 经下落、接触软垫、反弹上升三个过程后到达最高点。动量没有变化, 初、末动量均为零, 如图 1—9 所示。这时不要分开过程求解, 而是要把小球运动的三个过程作为一个整体来求解。

设小球与软垫接触时间内小球受到合力的冲量大小为  $I$ , 下落高度为  $H_1$ , 下落时间为  $t_1$ , 接触反弹上升的高度为  $H_2$ , 上升的时间为  $t_2$ , 则以竖直向上为正方向, 根据动量定理得:

$$-mg \cdot t_1 + I - mg \cdot t_2 = 0$$

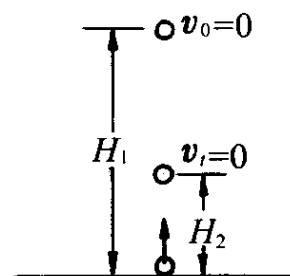


图 1—9

$$\text{而 } t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2H_2}{g}}$$

$$\text{故: } I = m(\sqrt{2gH_1} + \sqrt{2gH_2}) = 30\text{N}\cdot\text{s}$$

答案: C

**例 9:** 总质量为  $M$  的列车以匀速率  $v_0$  在平直轨道上行驶, 各车厢受的阻力都是车重的  $k$  倍, 而与车速无关。某时刻列车后部质量为  $m$  的车厢脱钩, 而机车的牵引力不变, 则脱钩的车厢刚停下的瞬间, 前面列车的速度是多少?

**解析:** 此题求脱钩的车厢刚停下的瞬间, 前面列车的速度, 就机车来说, 在车厢脱钩后, 开始做匀加速直线运动, 而脱钩后的车厢做匀减速运动, 由此可见, 求机车的速度可用匀变速直线运动公式和牛顿第二定律求解。

现在若把整个列车当作一个整体, 整个列车在脱钩前后所受合外力都为零, 所以整个列车动量守恒, 因而可用动量守恒定律求解。

根据动量守恒定律, 得:  $Mv_0 = (M-m)V$

$$\text{即: } V = \frac{Mv_0}{M-m}$$

即脱钩的车厢刚停下的瞬间, 前面列车的速度为  $\frac{Mv_0}{M-m}$ 。

**【说明】**显然此题用整体法以列车整体为研究对象, 应用动量守恒定律求解比用运动学公式和牛顿第二定律求简单、快速。

**例 10:** 总质量为  $M$  的列车沿水平直轨道匀速前进, 其末节车厢质量为  $m$ , 中途脱钩, 司机发觉时, 机车已走了距离  $L$ , 于是立即关闭油门, 撤去牵引力, 设运动中阻力与质量成正比, 机车的牵引力是恒定的, 求, 当列车两部分都静止时, 它们的距离是多少?

**解析:** 本题若分别以机车和末节车厢为研究对象用运动学、牛顿第二定律求解, 比较复杂, 若以整体为研究对象, 研究整个过程, 则比较简单。

假设末节车厢刚脱钩时, 机车就撤去牵引力, 则机车与末节车厢同时减速, 因为阻力与质量成正比, 减速过程中它们的加速度相同, 所以同时停止, 它们之间无位移差。事实是机车多走了距离  $L$  才关闭油门, 相应的牵引力对机车多做了  $FL$  的功, 这就要求机车相对于末节车厢多走一段距离  $\Delta S$ , 依靠摩擦力做功, 将因牵引力多做功而增加的动能消耗掉, 使机车与末节车厢最后达到相同的静止状态。所以有:

$$FL = f \cdot \Delta S$$

$$\text{其中 } F = \mu Mg, \quad f = \mu(M-m)g$$

$$\text{代入上式得两部分都静止时, 它们之间的距离: } \Delta S = \frac{ML}{M-m}$$

**例 11:** 如图 1—10 所示, 细绳绕过两个定滑轮 A 和 B, 在两端各挂一个重为  $P$  的物体, 现在 A、B 的中点 C 处挂一个重为  $Q$  的小球,  $Q < 2P$ , 求小球可能下降的最大距离  $h$ 。已知 AB 的长为  $2L$ , 不讲滑轮和绳之间的摩擦力及绳的质量。

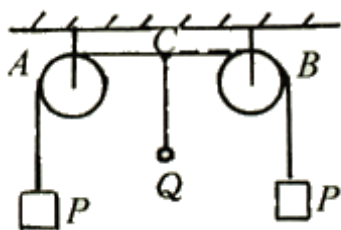


图 1-10

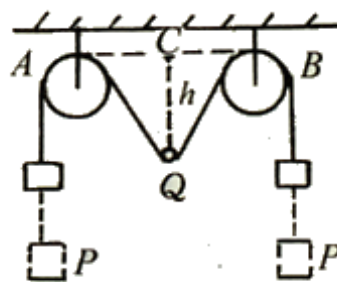


图 1-10-甲

**解析：**选小球 Q 和两重物 P 构成的整体为研究对象，该整体的速率从零开始逐渐增为最大，紧接着从最大又逐渐减小为零（此时小球下降的距离最大为 h），如图 1—10—甲。在整过程中，只有重力做功，机械能守恒。

因重为 Q 的小球可能下降的最大距离为 h，所以重为 P 的两物体分别上升的最大距离均为： $\sqrt{h^2 + L^2} - L$

考虑到整体初、末位置的速率均为零，故根据机械能守恒定律知，重为 Q 的小球重力势能的减少量等于重为 P 的两个物体重力势能的增加量，即：

$$Qh = 2P(\sqrt{h^2 + L^2} - L)$$

$$\text{从而解得： } h = \frac{2PL(\sqrt{8P^2 - Q^2} - Q)}{Q^2 - 4P^2}$$

**例 12：**如图 1—11 所示，三个带电小球质量相等，均静止在光滑的水平面上，若只释放 A 球，它有加速度  $a_A = 1\text{m/s}^2$ ，方向向右；若只释放 B 球，它有加速度  $a_B = 3\text{m/s}^2$ ，方向向左；若只释放 C 球，求 C 的加速度  $a_C$ 。



图 1-11

**解析：**只释放一个球与同时释放三个球时，每球所受的库仑力相同。而若同时释放三个球，则三球组成的系统所受合外力为 0，由此根据系统牛顿运动定律求解。

把 A、B、C 三个小球看成一个整体，根据系统牛顿运动定律知，系统沿水平方向所受合外力等于系统内各物体沿水平方向产生加速度所需力的代数和，由此可得：

$$ma_A + ma_B + ma_C = 0$$

规定向右为正方向，可解得 C 球的加速度：

$$a_C = -(a_A + a_B) = -(1 - 3) = 2\text{m/s}^2$$

方向水平向右：

**例 13：**如图 1—12 所示，内有 a、b 两个光滑活塞的圆柱形金属容器，其底面固定在水平地板上，活塞将容器分为 A、B 两部分，两部分中均盛有温度相同的同种理想气体，平衡时，A、B 气体柱的高度分别为  $h_A = 10\text{cm}$ ， $h_B = 20\text{cm}$ ，两活塞的重力均忽略不计，活塞的横截面积  $S = 1.0 \times 10^{-3}\text{m}^2$ 。现用竖直向上的力 F 拉活塞 a，使其缓慢地向上移动  $\Delta h = 3.0\text{cm}$ ，时，活塞 a、b 均恰好处于静止状态，环境温度保护不变，求：

(1) 活塞 a、b 均处于静止平衡时拉力 F 多大？

(2) 活塞 a 向上移动 3.0cm 的过程中，活塞 b 移动了多少？

(外界大气压强为  $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ )

**解析：**针对题设特点，A、B 为同温度、同种理想气体，可选 A、B 两部分气体构成的整体为研究对象，并把两部分气体在同一时间内分别做等温变化的过程视为同一整体过程来研究。

(1) 根据波意耳定律， $p_1 V_1 = p_2 V_2$  得： $p_0(10 + 20)S = p'(10 + 20 + 3.0)S'$

从而解得整体末态的压强为  $p' = \frac{10}{11} p_0$

再以活塞 a 为研究对象，其受力分析如图 1—12 甲所示，因活塞 a 处于平衡状态，故有： $F + p'S = p_0 S$

从而解得拉力：

$$F = (p_0 - p')S = (p_0 - \frac{10}{11} p_0)S = \frac{1}{11} p_0 S = \frac{1}{11} \times 1.0 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-3} \\ = 9.1 \text{N}$$

(2) 因初态 A、B 两气体的压强相同，温度相同，分子密度相同，末态两气体的压强相同，温度相同，分子密度相同，故部分气体体积变化跟整体气体体积变化之比，必然跟原来它们的体积成正比，即：

$$\frac{\Delta h_B}{\Delta h} = \frac{h_B}{h_A + h_B}$$

所以活塞 b 移动的距离： $\Delta h_B = \frac{h_B}{h_A + h_B} \Delta h = \frac{20}{10 + 20} \times 3.0 = 2.0 \text{cm}$

**例 14：**一个质量可不计的活塞将一定量的理想气体封闭在上端开口的直立圆筒形气缸内，活塞上堆放着铁砂，如图 1—13 所示，最初活塞搁置在气缸内壁的固定卡环上，气体柱的高度为  $H_0$ ，压强等于大气压强  $p_0$ 。现对气体缓慢加热，当气体温度升高了  $\Delta T = 60 \text{K}$  时，活塞（及铁砂）开始离开卡环而上升。继续加热直到气柱高度为  $H_1 = 1.5H_0$ 。此后，在维持温度不变的条件下逐渐取走铁砂，直到铁砂全部取走时，气柱高度变为  $H_2 = 1.8H_0$ ，求此时气体的温度。

(不计活塞与气缸之间的摩擦)

**解析：**气缸内气体的状态变化可分为三个过程：等容变化→等压变化→等温变化；因为气体的初态压强等于大气压  $p_0$ ，最后铁砂全部取走后气体的压强也等于大气压  $p_0$ ，所以从整状态变化来看可相当于一个等压变化，故将这三个过程当作一个研究过程。

根据盖·吕萨克定律： $\frac{H_0 S}{T_1} = \frac{H_2 S}{T_2}$  ①

再隔离气体的状态变化过程，从活塞开始离开卡环到把温度升到  $H_1$  时，气体做等压

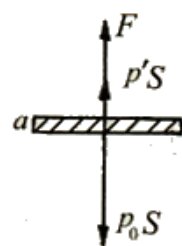
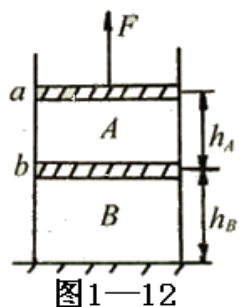


图1—12甲

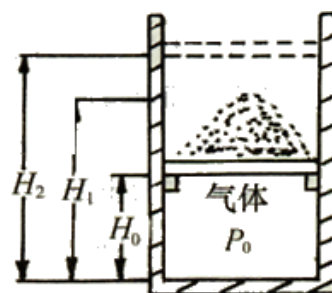


图1—13

变化, 有:  $\frac{H_0 S}{T_1 + \Delta T} = \frac{H_1 S}{T_2}$  ②

解①、②两式代入为数据可得:  $T_2 = 540K$

**例 15:** 一根对称的“ $\wedge$ ”形玻璃管置于竖直平面内, 管所有空间有竖直向上的匀强电场, 带正电的小球在管内从 A 点由静止开始运动, 且与管壁的动摩擦因数为  $\mu$ , 小球在 B 端与管作用时无能量损失, 管与水平面间夹角为  $\theta$ , AB 长 L, 如图 1—14 所示, 求从 A 开始, 小球运动的总路程是多少? (设小球受的电场力大于重力)

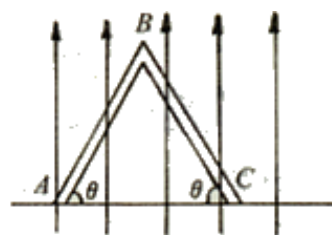
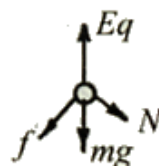


图2—14

**解析:** 小球从 A 端开始运动后共受四个力作用, 电场力为  $qE$ 、重力  $mg$ 、管壁支持力  $N$ 、摩擦力  $f$ , 由于在起始点 A 小球处于不平衡状态, 因此在斜管上任何位置都是不平衡的, 小球将做在“ $\wedge$ ”管内做往复运动, 最后停在 B 处。若以整个运动过程为研究对象, 将使问题简化。

以小球为研究对象, 受力如图 1—14 甲所示, 由于电场力和重力做功与路径无关, 而摩擦力做功与路径有关, 设小球运动的总路程为  $s$ , 由动能定理得:



1-14-甲

$$qEL\sin\theta - mgL\sin\theta - fs = 0 \quad ①$$

$$\text{又因为 } f = \mu N \quad ②$$

$$N = (qE - mg)\cos\theta \quad ③$$

所以由以上三式联立可解得小球运动的总路程:  $s = \frac{L \tan \theta}{\mu}$

**例 16:** 两根相距  $d = 0.20m$  的平行金属长导轨固定在同一水平面内, 并处于竖直方向的匀强磁场中, 磁场的磁感应强度  $B = 0.2T$ , 导轨上面横放着两条金属细杆, 构成矩形回路, 每条金属细杆的电阻为  $r = 0.25\Omega$ , 回路中其余部分的电阻可不计。已知两金属细杆在平行于导轨的拉力的作用下沿导轨朝相反方向匀速平移, 速度大小都是  $v = 5.0m/s$ , 如图 1—15 所示。不计导轨上的摩擦。

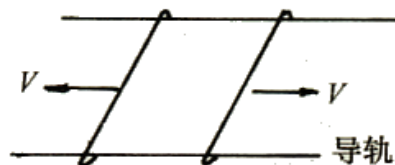


图2—15

(1) 求作用于每条金属细杆的拉力的大小;

(2) 求两金属细杆在间距增加  $0.40m$  的滑动过程中共产生的热量。

**解析:** 本题是电磁感应问题, 以两条细杆组成的回路整体为研究对象, 从力的角度看, 细杆匀速移动, 拉力跟安培力大小相等。从能量的角度看, 外力做功全部转化为电能, 电又全部转化为内能。根据导线切割磁感线产生感应电动势公式得:  $\varepsilon_{\text{总}} = 2BLv$

$$\text{从而回路电流: } I = \frac{2Blv}{2r}$$

$$\text{由于匀速运动, 细杆拉力: } F = F_{\text{安}} = BIl = \frac{B^2 l^2 v}{r} = 3.2 \times 10^{-2} N$$

$$\text{根据能量守恒有: } Q = Pt = 2Fvt = Fs = 1.28 \times 10^{-2} J$$

即共产生的热量为  $1.28 \times 10^{-2} J$ 。



**例 17:** 两金属杆  $ab$  和  $cd$  长均为  $l$ ，电阻均为  $R$ ，质量分别为  $M$  和  $m$ ， $M > m$ 。用两根质量和电阻均可忽略的不可伸长的柔软导线将它们连成闭合回路，并悬挂在水平、光滑、不导电的圆棒两侧。两金属杆都处在水平位置，如图 1—16 所示。整个装置处在一与回路平面相垂直的匀强磁场中，磁感应强度为  $B$ 。若金属杆  $ab$  正好匀速向下运动，求运动的速度。

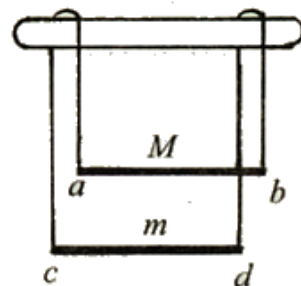


图 1—16

**解析:** 本题属电磁感应的平衡问题，确定绳上的拉力，可选两杆整体为研究对象，确定感应电流可选整个回路为研究对象，确定安培力可选一根杆为研究对象。设匀强磁场垂直回路平面向外，绳对杆的拉力为  $T$ ，以两杆为研究对象，受力如图 1—16 甲所示。因两杆匀速移动，由整体平衡条件得：

$$4T = (M + m)g \quad (1)$$

对整个回路由欧姆定律和法拉第电磁感应定律得：

$$I = \frac{Blv}{2R} \quad (2)$$

对  $ab$  杆，由于杆做匀速运动，受力平衡：

$$BIl + 2T - Mg = 0 \quad (3)$$

联立①②③三式解得：
$$v = \frac{(M - m)gR}{2B^2l^2}$$

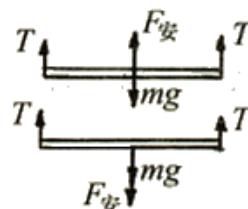


图 1—16甲

### 针对训练

1. 质量为  $m$  的小猫，静止于很长的质量为  $M$  的吊杆上，如图 1—17 所示。在吊杆上端悬线断开的同时，小猫往上爬，若猫的高度不变，求吊杆的加速度。（设吊杆下端离地面足够高）



图 1—17

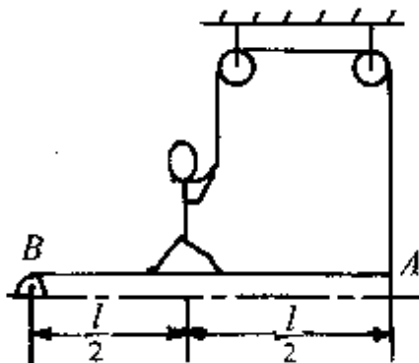


图 1—18

2. 一粒钢珠从静止状态开始自由下落，然后陷入泥潭中，若把在空中下落的过程称为过程 I，进入泥潭直到停止的过程称为过程 II，则（ ）

A、过程 I 中钢珠动量的改变量等于它重力的冲量

B、过程 II 中阻力的冲量的大小等于全过程中重力冲量的大小

C、过程 II 中钢珠克服阻力所做的功等于过程 I 与过程 II 中钢珠所减少的重力势能之和

D、过程 II 中损失的机械能等于过程 I 中钢珠所增加的动能

3. 质量为  $m$  的运动员站在质量为  $\frac{m}{2}$  的均匀长板 AB 的中点，板位于水平面上，可绕通过 B 点的水平轴转动，板的 A 端系有轻绳，轻绳的另一端绕过两个定滑轮后，握在运动员手中。当运动员用力拉绳时，滑轮两侧的绳子都保持在竖直方向，如图 1—18 所示。要使板的 A 端离开地面，运动员作用于绳子的最小拉力是\_\_\_\_\_。

4. 如图 1—19，一质量为  $M$  的长木板静止在光滑水平桌面上。一质量为  $m$  的小滑块以水平速度  $v_0$  从长木板的一端开始在木板上滑动，直到离开木板。滑块刚离开木板时的速度为  $\frac{v_0}{3}$ 。

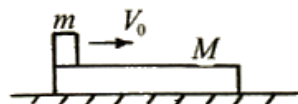


图 1—19

若把该木板固定在水平桌面上，其他条件相同，求滑块离开木板时的速度  $v$ 。

5. 如图 1—20 所示为一个横截面为半圆，半径为  $R$  的光滑圆柱，一根不可伸长的细绳两端分别系着小球 A、B，且  $m_A = 2m_B$ ，由图示位置从静止开始释放 A 球，当小球 B 达到半圆的顶点时，求线的张力对小球 A 所做的功。

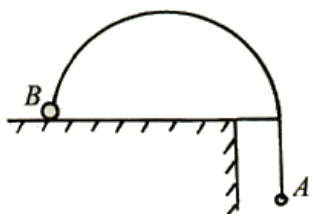


图 1—20

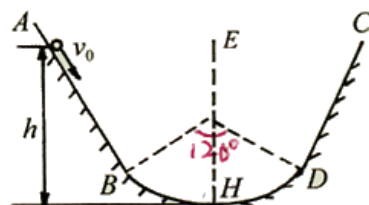


图 1—21

6. 如图 1—21 所示，AB 和 CD 为两个斜面，其上部足够长，下部分别与一光滑圆弧面相切，EH 为整个轨道的对称轴，圆弧所对圆心角为  $120^\circ$ ，半径为  $2m$ ，某物体在离弧底 H 高  $h = 4m$  处以  $V_0 = 6m/s$  沿斜面运动，物体与斜面的摩擦系数  $\mu = 0.04$ ，求物体在 AB 与 CD 两斜面上（圆弧除外）运动的总路程。（取  $g = 10m/s^2$ ）

7. 如图 1—22 所示，水平转盘绕竖直轴  $OO'$  转动，两木块质量分别为  $M$  与  $m$ ，到轴线的距离分别是  $L_1$  和  $L_2$ ，它们与转盘间的最大静摩擦力为其重力的  $\mu$  倍，当两木块用水平细绳连接在一起随圆盘一起转动并不发生滑动时，转盘最大角速度可能是多少？

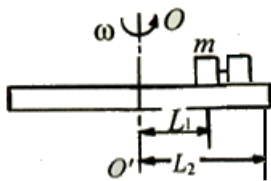


图 1—22

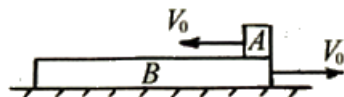


图 1—23

8. 如图 2—23 所示，一质量为  $M$ ，长为  $l$  的长方形木板 B，放在光滑的水平地面上，在其右端放一质量为  $m$  的小木块，且  $m < M$ 。现以地面为参考系，给 A 和 B 以大小相等、方向相反的初速度，使 A 开始向左运动，B 开始向右运动，且最后 A 没有滑离木板 B，求以地面为参考系时小木块 A 的最大位移是多少？摩擦力做的功是多大？

9. 如图 1—24 所示，A、B 是体积相同的气缸，

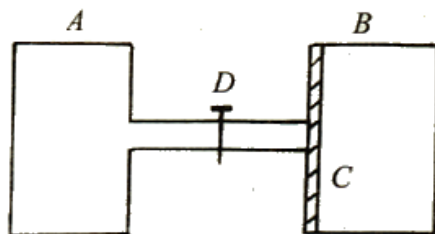


图 1—24

B 内有一导热的、可在气缸内无摩擦滑动的、体积不计的活塞 C、D 为不导热的阀门。起初，阀门关闭，A 内装有压强  $P_1 = 2.0 \times 10^5 \text{Pa}$ ，温度  $T_1 = 300\text{K}$  的氮气。B 内装有压强  $P_2 = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ ，温度  $T_2 = 600\text{K}$  的氧气。阀门打开后，活塞 C 向右移动，最后达到平衡。以  $V_1$  和  $V_2$  分别表示平衡后氮气和氧气的体积，则  $V_1 : V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（假定氧气和氮气均为理想气体，并与外界无热交换，连接气体的管道体积可忽略）

10. 用销钉固定的活塞把水平放置的容器分隔成 A、B 两部分，其体积之比  $V_A : V_B = 2 : 1$ ，如图 1—25 所示。起初 A 中有温度为  $127^\circ\text{C}$ ，压强为  $1.8 \times 10^5 \text{Pa}$  的空气，B 中有温度  $27^\circ\text{C}$ ，压强为  $1.2 \times 10^5 \text{Pa}$  的空气。拔出销钉，使活塞可以无摩擦地移动（不漏气）。由于容器缓慢导热，最后气体都变成室温  $27^\circ\text{C}$ ，活塞也停住，求最后 A 中气体的压强。

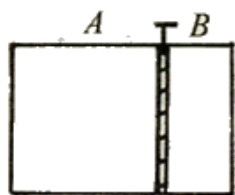


图 1—25

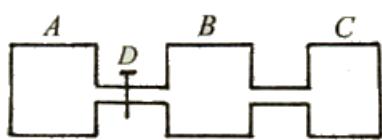


图 1—26

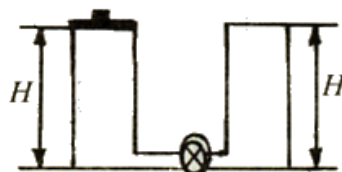


图 1—27

11. 如图 1—26 所示，A、B、C 三个容器内装有同种气体，已知  $V_A = V_B = 2\text{L}$ ， $V_C = 1\text{L}$ ， $T_A = T_B = T_C = 300\text{K}$ ，阀门 D 关闭时  $p_A = 3\text{atm}$ ， $p_B = p_C = 1\text{atm}$ 。若将 D 打开，A 中气体向 B、C 迁移（迁移过程中温度不变），当容器 A 中气体压强降为  $p_A' = 2\text{atm}$  时，关闭 D；然后分别给 B、C 加热，使 B 中气体温度维持  $T_b' = 400\text{K}$ ，C 中气体温度维持  $T_c' = 600\text{K}$ ，求此时 B、C 两容器内气体的压强（连通三容器的细管容积不计）。

12. 如图 1—27 所示，两个截面相同的圆柱形容器，右边容器高为  $H$ ，上端封闭，左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞。两容器由装有阀门的极细管道相连，容器、活塞和细管都是绝热的。开始时，阀门关闭，左边容器中装有热力学温度为  $T_0$  的单原子理想气体，平衡时活塞到容器底的距离为  $H$ ，右边容器内为真空。现将阀门缓慢打开，活塞便缓慢下降，直至系统达到平衡，求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度。（提示：一摩尔单原子理想气体的内能为  $\frac{3}{2}RT$ ，其中  $R$  为摩尔气体常量， $T$  为气体的热力学温度。）

13. 如图 1—28 所示，静止在光滑水平面上已经充电的平行板电容器的极板距离为  $d$ ，在板上开个小孔，电容器固定在一绝缘底座上，总质量为  $M$ ，有一个质量为  $m$  的带正电的小铅丸对准小孔水平向左运动（重力不计），铅丸进入电容器后，距左极板的最小距离为  $\frac{d}{2}$ ，

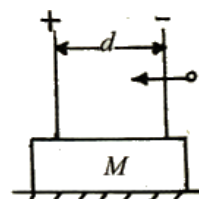


图 1—28

求此时电容器已移动的距离。

14. 一个质量为  $m$ ，带有电量  $-q$  的小物体，可在水平轨道 OX 上运动，O 端有一与轨道垂直的固定墙壁，轨道处于匀强电场中，场强大小为  $E$ ，方向沿 OX 正方向，如图 1—29 所示，小物体以初速  $v_0$  从  $x_0$  点沿 Ox 运动时，受到大小不变的摩擦力  $f$  的作用，且  $f < qE$ ；设小物体与墙碰撞时不损失机械能，

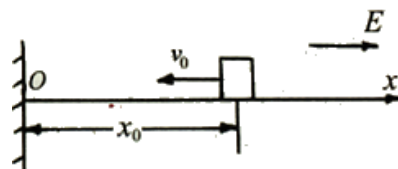


图 1—29

且电量保持不变，求它在停止运动前所通过的总路程  $s$ 。

15. 如图 1—30 所示，一条长为  $L$  的细线，上端固定，下端拴一质量为  $m$  的带电小球。将它置于一匀强电场中，电场强度大小为  $E$ ，方向是水平的，已知当细线离开竖直位置的偏角为  $\alpha$  时，小球处于平衡。求：

- (1) 小球带何种电荷？小球所带的电量；
- (2) 如果使细线的偏角由  $\alpha$  增大到  $\varphi$ ，然后将小球由静止开始释放，则  $\varphi$  应为多大，才能使在细线到达竖直位置时小球的速度刚好为零？

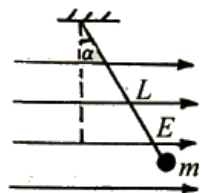


图1—30

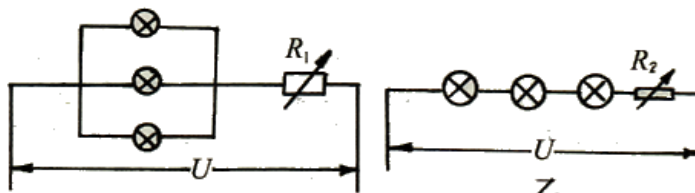


图1—31

16. 把 6 只相同的电灯泡分别接成如图 1—31 所示的甲乙两种电路，两电路均加上  $U$  等于 12V 的恒定电压，分别调节变阻器  $R_1$  和  $R_2$ ，使 6 只灯泡均能正常工作，这时甲乙两种电路消耗的总功率分别为  $P_1$  和  $P_2$ ，试找出两者之间的关系。

17. 如图 1—32 所示，在竖直方向的  $x$ 、 $y$  坐标系中，在  $x$  轴上方有一个有界的水平向右的匀强电场，场强为  $E$ ， $x$  轴的下方有一个向里的匀强磁场，场强为  $B$ 。现从  $A$  自由释放一个带电量为  $-q$ 、质量为  $m$  的小球，小球从  $B$  点进入电场，从  $C$  点进入磁场，从  $D$  点开始做水平方向的匀速直线运动。已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  点的坐标分别为  $(0, y_1)$ 、 $(0, y_2)$ 、 $(-x, 0)$ ，求  $D$  点的纵坐标  $y_3$ 。

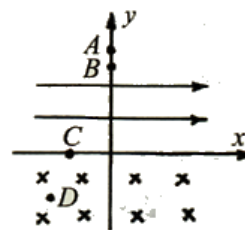


图1—32

## 参考答案

1、 $(1 + \frac{m}{M})g$

2、ABC

3、 $\frac{1}{2}mg$

4、 $\frac{t_0}{3} \sqrt{\frac{4m+M}{M}}$

5、 $19m_AgR$

6、 $290m$

7、 $\sqrt{\frac{\mu(M+m)g}{ML_2 + mL_1}}$

8、 $s = \frac{2ml}{M+m}$ ， $W = \mu mgl$

9、4 : 1

10、 $1.3 \times 10^5 \text{Pa}$

11、2.5atm

12、 $h = \frac{2}{5}H$  ,  $T = \frac{7}{5}T_0$

13、 $\frac{mg}{4M}$

14、 $\frac{2qEx_0 + mv_0^2}{2f}$

15、(1) 正电,  $c = \frac{mg}{E} \tan \alpha$  , (2)  $\varphi = 2\alpha$

16、 $P_1 = 2P_2$

17、 $y_3 = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 g}{q^2 B^2} - y_1 - \frac{qE}{mg} x\right)$

## 二、隔离法

### 方法简介

隔离法就是从整个系统中将某一部分物体隔离出来，然后单独分析被隔离部分的受力和运动情况，从而把复杂的问题转化为简单的一个个小问题求解。隔离法在求解物理问题时，是一种非常重要的方法，学好隔离法，对分析物理现象、物理规律大有益处。

### 赛题精讲

**例 1:** 两个质量相同的物体 1 和 2 紧靠在一起放在光滑水平桌面上，如图 2—1 所示，如果它们分别受到水平推力  $F_1$  和  $F_2$  作用，且  $F_1 > F_2$ ，则物体 1 施于物体 2 的作用力的大小为 ( )

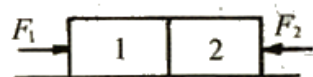


图 2—1

- A.  $F_1$       B.  $F_2$       C.  $\frac{F_1 + F_2}{2}$       D.  $\frac{F_1 - F_2}{2}$

**解析:** 要求物体 1 和 2 之间的作用力，必须把其中一个隔离出来分析。先以整体为研究对象，根据牛顿第二定律： $F_1 - F_2 = 2ma$  ①

再以物体 2 为研究对象，有  $N - F_2 = ma$  ②

解①、②两式可得  $N = \frac{F_1 + F_2}{2}$ ，所以应选 C

**例 2:** 如图 2—2 在光滑的水平桌面上放一物体 A，A 上再放一物体 B，A、B 间有摩擦。施加一水平力 F 于 B，使它相对于桌面向右运动，这时物体 A 相对于桌面 ( )

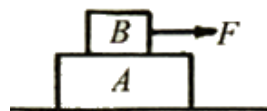


图 2—2

- A. 向左动      B. 向右动  
C. 不动      D. 运动，但运动方向不能判断

**解析:** A 的运动有两种可能，可根据隔离法分析

设 AB 一起运动，则： $a = \frac{F}{m_A + m_B}$

AB 之间的最大静摩擦力： $f_m = \mu m_B g$

以 A 为研究对象：若  $f_m \geq m_A a$ ，即： $\mu \geq \frac{m_A}{m_B(m_B + m_A)} F$  时，AB 一起向右运动。

若  $\mu < \frac{m_A}{m_B(m_B + m_A)} F$ ，则 A 向右运动，但比 B 要慢，所以应选 B

**例 3:** 如图 2—3 所示，已知物块 A、B 的质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ，A、B 间的摩擦因数为  $\mu_1$ ，A 与地面之间的摩擦因数为  $\mu_2$ ，在水平力 F 的推动下，要使 A、B 一起运动而 B 不至下滑，力 F 至少为多大？

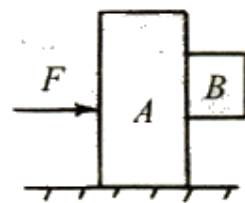


图 2—3

**解析:** B 受到 A 向前的压力 N，要想 B 不下滑，需满足的临界条件是： $\mu_1 N = m_2 g$ 。

设 B 不下滑时，A、B 的加速度为  $a$ ，以 B 为研究对象，用隔离法分析，B 受到重力，A 对 B 的摩擦力、A 对 B 向前的压力  $N$ ，如图 2—3 甲所示，要想 B 不下滑，需满足： $\mu_1 N \geq m_2 g$ ，即： $\mu_1 m_2 a \geq m_2 g$ ，所以加速度至少为  $a = \frac{g}{\mu_1}$

再用整体法研究 A、B，根据牛顿第二定律，有：

$$F - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

$$\text{所以推力至少为：} F = (m_1 + m_2)\left(\frac{1}{\mu_1} + \mu_2\right)g$$

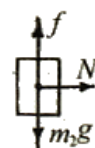


图2-3-甲

**例 4：**如图 2—4 所示，用轻质细绳连接的 A 和 B 两个物体，沿着倾角为  $\alpha$  的斜面匀速下滑，问 A 与 B 之间的细绳上有弹力吗？

**解析：**弹力产生在直接接触并发生了形变的物体之间，现在细绳有无形变无法确定。所以从产生原因上分析弹力是否存在就不行了，应结合物体的运动情况分析。

隔离 A 和 B，受力分析如图 2—4 甲所示，设弹力  $T$  存在，将各力正交分解，由于两物体匀速下滑，处于平衡状态，所以有：

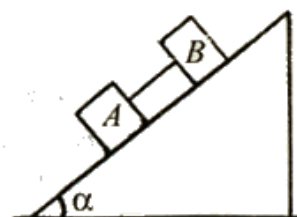


图2-4

$$m g_A \sin \alpha = T + f_A \quad \text{①}$$

$$m g_B \sin \alpha + T = f_B \quad \text{②}$$

设两物体与斜面间动摩擦因数分别为  $\mu_A$ 、 $\mu_B$ ，则：

$$f_A = \mu_A N_A = \mu_A m_A g \cos \alpha \quad \text{③}$$

$$f_B = \mu_B N_B = \mu_B m_B g \cos \alpha \quad \text{④}$$

由以上①②③④可解得：

$$T = m_A g (\sin \alpha - \mu_A \cos \alpha) \text{ 和 } T = m_B g (\mu_B \cos \alpha - \sin \alpha)$$

若  $T = 0$ ，应有： $\mu_A = \tan \alpha$ ， $\mu_B = \tan \alpha$

由此可见，当  $\mu_A = \mu_B$  时，绳子上的弹力  $T$  为零。

若  $\mu_A \neq \mu_B$ ，绳子上一定有弹力吗？

我们知道绳子只能产生拉力。当弹力存在时，应有： $T > 0$ ，即： $\mu_A < \tan \alpha$ ， $\mu_B > \tan \alpha$

所以只有当  $\mu_A < \mu_B$  时绳子上才有弹力。

**例 5：**如图 2—5 所示，物体系由 A、B、C 三个物体构成，质量分别为  $m_A$ 、 $m_B$ 、 $m_C$ 。用一水平力  $F$  作用在小车 C 上，小车 C 在  $F$  的作用下运动时能使物体 A 和 B 相对于小车 C 处于静止状态。求连接 A 和 B 的不可伸长的线的张力  $T$  和力  $F$  的大小。（一切摩擦和绳、滑轮的质量都不计）

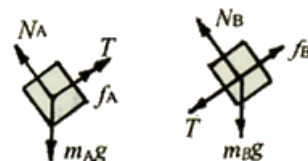


图2-4-甲

**解析：**在水平力  $F$  作用下，若 A 和 B 能相对于 C 静止，则它们对地必有相同的水平加速度。而 A 在绳的张力作用下只能产生水平向右的加速度，这就决定了  $F$  只能水平向右，可用整体法来求，而求张力必须用隔离法。

取物体系为研究对象，以地为参考系，受重力  $(m_A + m_B + m_C)g$ ，推力  $F$  和地面的弹

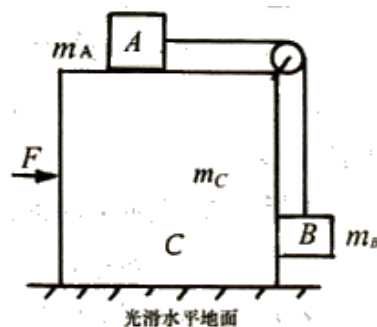


图2-5

力  $N$ ，如图 2—5 甲所示，设对地的加速度为  $a$ ，则有：

$$F = (m_A + m_B + m_C)a \quad ①$$

隔离 B，以地为参考系，受重力  $m_B g$ 、张力  $T$ 、C 对 B 的弹力  $N_B$ ，应满足：

$$N_B = m_B a, \quad \text{绳子的张力 } T = m_B g \quad ②$$

隔离 A，以地为参考系，受重力  $m_A g$ ，绳的张力  $T$ ，C 的弹力  $N_A$ ，应满足：

$$N_A = m_A g \quad ③$$

$$T = m_A a \quad ④$$

当绳和滑轮的质量以及摩擦都不计时，由②、④两式解出加速度：

$$a = \frac{m_B}{m_A} g$$

$$\text{代入①式可得： } F = \frac{m_B(m_A + m_B + m_C)g}{m_A}$$

**例 6：**如图 2—6 所示，一根轻质弹簧上端固定，下端挂一质量为  $m_0$  的平盘，盘中有一物体质量为  $m$ ，当盘静止时，弹簧的长度比其自然长度伸长了  $L$ ，今向下拉盘，使弹簧再伸长  $\Delta L$  后停止。然后松手放开，设弹簧总处在弹性限度以内，则刚松开手时盘对物体的支持力等于（ ）

A.  $(1 + \frac{\Delta L}{L})mg$

B.  $(1 + \frac{\Delta L}{L})(m + m_0)g$

C.  $\frac{\Delta L}{L}mg$

D.  $\frac{\Delta L}{L}(m + m_0)g$

**解析：**确定物体  $m$  的加速度可用整体法，确定盘对物体的支持力需用隔离法。选整体为研究对象，在没有向下拉盘时有：

$$KL = (m + m_0)g \quad ①$$

在向下拉伸  $\Delta L$  又放手时有：

$$K\Delta L = (m + m_0)a \quad ②$$

$$\text{再选 } m \text{ 为研究对象： } F_N - mg = ma \quad ③$$

$$\text{解得： } F_N = (1 + \frac{\Delta L}{L})mg$$

应选 A。此题也可用假设法、极限法求解。

**例 7：**如图 2—7 所示，AO 是质量为  $m$  的均匀细杆，可绕 O 轴在竖直平面内自动转动。细杆上的 P 点与放在水平桌面上的圆柱体接触，圆柱体靠在竖直的挡板上而保持平衡，已知杆的倾角为  $\theta$ ，AP 长度是杆长的  $\frac{1}{4}$ ，各处的摩擦都不计，则挡板对圆柱体的作用力等于\_\_\_\_\_。

**解析：**求圆柱体对杆的支持力可用隔离法，用力矩平衡求解。求挡板对圆柱体的作用

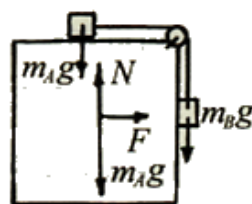


图2-5-甲



图2-6

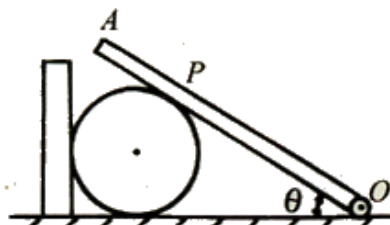


图2-7



力可隔离圆柱体，用共点力的平衡来解。

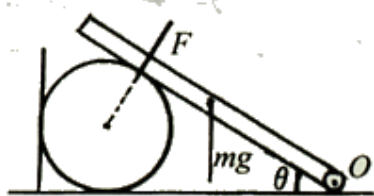


图2-7-甲

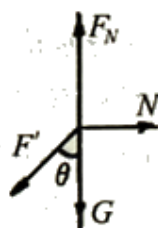


图2-7-乙

以杆为研究对象，受力如图 2—7 甲所示，根据力矩平衡条件：

$mg \frac{1}{2} \cos\theta = F \frac{3}{4} \cdot 1$ ，解得： $F = \frac{2}{3} mg \cos\theta$ 。根据牛顿第三定律，杆对圆柱体的作用力与

F 大小相等，方向相反，再以圆柱体为研究对象，将力 F 正交分解，如图 2—7—乙，在水平方向有：

$$\frac{2}{3} mg \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{3} mg \sin 2\theta$$

即挡板对圆柱体的作用力为  $\frac{1}{3} mg \sin 2\theta$ 。

**例 8：**如图 2—8 所示，质量为  $m$  的小球被两个劲度系数皆为  $k$  的相同弹簧固定在一个质量为  $M$  的盒中，盒从  $h$  高处（自桌面量起）开始下落，在盒开始下落的瞬间，两弹簧未发生形变，小球相对盒静止，问下落的高度  $h$  为多少时，盒与桌面发生完全非弹性碰撞后还能再跳起来。

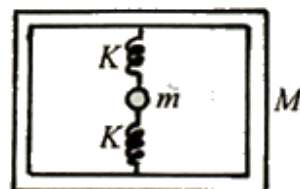


图2-8

**解析：**盒下落过程可用整体法研究，下落后弹簧的形变情况应用隔离小球研究，盒起跳时可隔离盒研究。

在盒与桌面发生碰撞之前，小球仅受重力作用，着地时速度为： $v = \sqrt{2gh}$ 。

碰撞后盒静止，球先压缩下面的弹簧，同时拉上面的弹簧，当小球向下的速度减为零后，接着又向上运动，在弹簧原长位置上方  $x$  处，小球的速度又减为 0，则在此过程中，对小球有：

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgx + 2 \cdot \frac{1}{2} kx^2$$

把盒隔离出来，为使盒能跳起来，需满足： $2kx > Mg$ ，代入上式可解得：

$$h = \frac{Mg}{2k} \left( 1 + \frac{M}{2m} \right)$$

**例 9：**如图 2—9 所示，四个相等质量的质点由三根不可伸长的绳子依次连接，置于光滑水平面上，三根绳子形成半个正六边形保持静止。今有一冲量作用在质点 A，并使这个质点速度变为  $u$ ，方向沿绳向外，试求此瞬间质点 D 的速度。

**解析：**要想求此瞬间质点 D 的速度，由已知条件可知得用动量定理，由于 A、B、C、D 相关联，所以用隔离法，对 B、C、D 分别应用动量定理，即可求解。以 B、C、D

分别为研究对象，根据动量定理：

$$\text{对 B 有： } I_A - I_B \cos 60^\circ = m_B u \quad \text{①}$$

$$I_A \cos 60^\circ - I_B = m_B u_1 \quad \text{②}$$

$$\text{对 C 有： } I_B - I_D \cos 60^\circ = m_C u_1 \quad \text{③}$$

$$I_B \cos 60^\circ - I_D = m_C u_2 \quad \text{④}$$

$$\text{对 D 有： } I_D = m_D u_2 \quad \text{⑤}$$

由①~⑤式解得 D 的速度： $u_2 = \frac{1}{13} u$

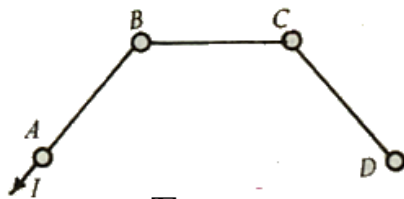
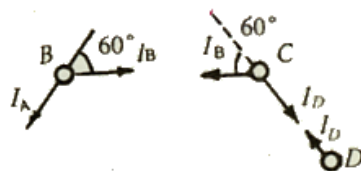


图2-9



**例 10：**有一个两端开口、粗细均匀的 U 形玻璃细管，放置在竖直平面内，处在压强为  $p_0$  的大气中，两个竖直支管的高度均为  $h$ ，水平管的长度为  $2h$ ，玻璃细管的半径为  $r$ ，且  $r \ll h$ 。今将水平管内灌满密度为  $\rho$  的水银，如图 2—10 所示。

1. 如将 U 形管两个竖直支管的开口分别密封起来，使其管内空气压强均等于大气压强，问当 U 形管向右做匀加速移动时，加速度应为多大时才能使水平管内水银柱的长度稳定为  $\frac{5}{3} h$ ？

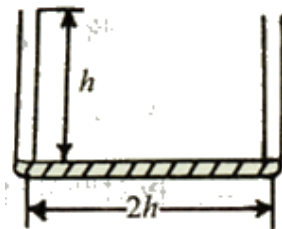


图2-10

2. 如将其中一个竖直支管的开口密封起来，使其管内气体压强为 1 个大气压。问当 U 形管绕以另一个竖直支管（开口的）为轴做匀速转动时，转数  $n$  应为多大才能使水平管内水银柱的长度稳定为  $\frac{5}{3} h$ （U 形管做以上运动时，均不考虑管内水银液面的倾斜）

**解析：**如图 2—10—甲所示，U 形管右加速运动时，管内水银柱也要以同样加速度运动，所以 A 管内气体体积减小、压强增大，B 管内气体体积增大、压强减小，水平管中液体在水平方向受力不平衡即产生加速度。若 U 形管以 A 管为轴匀速转动时，水平部分的液体也要受到水平方向的压力差而产生向心加速度。

1. 当 U 形管以加速度  $a$  向右运动时，对水平管中水银柱有： $F_1 - F_2 = ma$ ，即：

$$(p_A + \rho g \frac{h}{3})S - p_B S = \frac{5}{3} h S \rho \cdot a \quad \text{①}$$

对 A 中气体有： $p_0 h S = p_A (h - \frac{h}{3})S$ ，解得：

$$p_A = \frac{3}{2} p_0 \quad \text{②}$$

对 B 中气体有： $p_0 h S = p_B (h + \frac{h}{3})S$ ，解得：

$$p_B = \frac{3}{4} p_0 \quad \text{③}$$

将②、③式代入①式可得： $a = \frac{9p_0 + 4\rho gh}{20\rho h}$

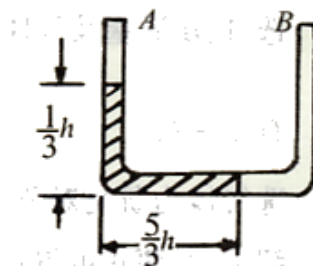


图2-10-甲

2. 如图 2—10—乙, 若 U 形管以 A 管为轴匀速转动时, 对水平管中水银柱有:  $F_2 - F_1 = ma$ 。若转速为  $n$ , 则有:

$$(p_B' + \rho g \frac{h}{3})S - p_0 S = m \cdot (2\pi n)^2 \cdot \frac{7}{6} h \quad ①$$

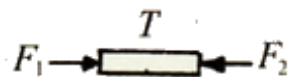


图 2—10—乙

对 B 中气体有:  $p_0 h S = p_B' (h - \frac{h}{3}) \cdot S$ , 解得:

$$p_B' = \frac{3}{2} p_0 \quad ②$$

将②式代入①式可解得转速:

$$n = \frac{1}{\pi h} \sqrt{\frac{9p_0 + 6\rho gh}{140\rho}}$$

**例 11:** 如图 2—11 所示, 一个上下都与大气相通的竖直圆筒, 内部横截面的面积  $S = 0.01\text{m}^2$ , 中间用两个活塞 A 与 B 封住一定质量的理想气体, A、B 都可沿圆筒无摩擦地上、下滑动, 但不漏气, A 的质量可不计, B 的质量为  $M$ , 并与一倔强系数  $k = 5 \times 10^3 \text{N/m}$  的较长的弹簧相连。已知大气压强  $p_0 = 1 \times 10^5 \text{Pa}$ , 平衡时, 两活塞间的距离  $l_0 = 0.6\text{m}$ 。现用力压 A 使之缓慢向下移动一定距离后, 保持平衡, 此时, 用于压 A 的力  $F = 5 \times 10^2 \text{N}$ 。求活塞 A 向下移动的距离。(假定气体温度保持不变。)

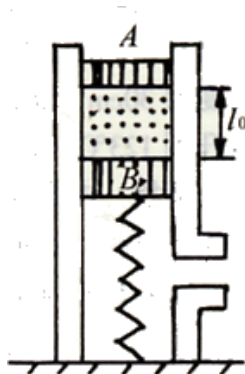


图 2—11

**解析:** 活塞 A 下移的距离应为 B 下降的距离与气体长度的减小量之和, B 下降的距离可用整体法求解。气体长度的变化可隔离气体来求解。

选 A、B 活塞及气体为研究对象, 设用力  $F$  向下压 A 时, 活塞 B 下降的距离为  $x$ , 则有:  $F = kx$  ①

选气体为研究对象, 据玻意耳定律有:  $p_0 l_0 S = (p_0 + \frac{F}{S}) l \cdot S$  ②

解①②两式可得:  $x = 0.1\text{m}$ ,  $l = 0.4\text{m}$

则活塞 A 下移的距离为:  $y = 0.1 + 0.6 - 0.4 = 0.3\text{m}$

**例 12:** 一个密闭的气缸, 被活塞分成体积相等的左右两室, 气缸壁与活塞是不导热的, 它们之间没有摩擦, 两室中气体的温度相等, 如图 2—12 所示, 现利用右室中的电热丝对右室中的气体加热一段时间, 达到平衡后, 左室的体积变为原来体积的  $\frac{3}{4}$ ,

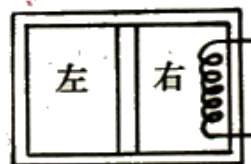


图 2—12

气体的温度  $T_1 = 300\text{K}$ 。求右室中气体的温度。

**解析:** 可隔离出 A、B 两部分气体, 用理想气体状态方程求解。设原来两室中气体的压强都为  $p$ , 温度都为  $T$ , 体积都为  $V$ ,

$$\text{对左边气体有: } \frac{pV}{T} = \frac{p' \cdot \frac{3}{4} V}{T_1} \quad ①$$

对右边气体有：
$$\frac{pV}{T} = \frac{p' \frac{5}{4} V}{T_2} \quad \text{②}$$

①、②两式相比，可得右室中气体温度  $T_2 = \frac{5}{3} T_1 = 500\text{K}$

**例 13:** 如图 2—13 所示，封闭气缸的活塞被很细的弹簧拉着，气缸内密封一定质量的气体，当温度为  $27^\circ\text{C}$  时，弹簧的长度为  $30\text{cm}$ ，此时缸内气体的压强为缸外大气压的  $1.2$  倍，当气温升到  $123^\circ\text{C}$  时，弹簧的长度为  $36\text{cm}$ ，求弹簧的原长。

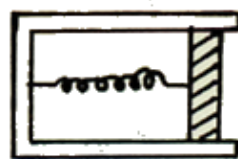


图2-13

**解析:** 本题所研究的对象就是密封在气缸内的一定质量的气体，气体所处的初态为：

$T_1 = 300\text{K}$ 、 $V_1 = SL_1$ 、(S 为气缸横截面积， $L_1$  为弹簧长度)  $p_1 = p_0 + \frac{F_1}{S} = 1.2p_0$ ，

末态为  $T_2 = 396\text{K}$ 、 $V_2 = SL_2$ 、 $p_2 = p_0 + \frac{F_2}{S}$  ( $p_0$  为大气压强， $F_1$ 、 $F_2$  为弹簧的弹力)。气体

从初态过渡到末态时质量恒定，所以可利用状态方程求解：

将上述各状态参量代入状态方程：
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

解得： $p_2 = 1.1p_1 = 1.32p_0$

由于弹力产生的压强等于气缸内外气体的压强差，所以：

$$\frac{K\Delta L_1}{S} = p_1 - p_0 = 0.2p_0 \quad \text{①}$$

$$\frac{K\Delta L_2}{S} = p_2 - p_0 = 0.32p_0 \quad \text{②}$$

联立①、②式得： $\Delta L_2 = 1.6\Delta L_1$

即： $L_2 - L_0 = 1.6(L_1 - L_0)$

解得弹簧的原长为  $L_0 = 20\text{cm}$

**例 14:** 一个由绝缘细细构成的刚性圆形轨道，其半径为  $R$ ，此轨道水平放置，圆心在  $O$  点，一个金属小珠  $P$  穿在此轨道上，可沿轨道无摩擦地滑动，小珠  $P$  带电荷  $Q$ 。已知在轨道平面内  $A$  点 ( $OA = r < R$ ) 放有一电荷  $q$ 。若在  $OA$  连线上某一点  $A_1$  放电荷  $q_1$ ，则给小珠  $P$  一个初速度，它就沿轨道做匀速圆周运动，求  $A_1$  点的位置及电荷  $q_1$  之值。

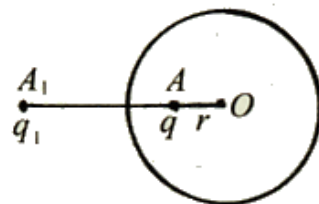


图2-14

**解析:** 小珠  $P$  虽沿轨道做匀速圆周运动，但受力情况并不清楚，因此不能从力的角度来解决，可以从电势的角度来考虑，因为小珠  $P$  沿轨道做匀速圆周运动，说明小珠只受法向的电场力。由此可知，电场力对小珠  $P$  做功为零，根据  $W = qU$  可知，圆轨道上各点电势相等，根据题意作图如图 2—14，设  $A_1$  点距圆形轨道的圆心  $O$  为  $r_1$ ， $A$  点放的电荷  $q$  距圆心为  $r$ ，由此得：

$$\frac{kq}{R-r} = \frac{kq_1}{r_1-R} \quad \text{①}$$

$$\frac{kq}{R+r} = \frac{kq_1}{r_1+R} \quad \text{②}$$

解①、②两式可得：A<sub>1</sub>点的位置距圆心O的距离为  $r_1 = \frac{R^2}{r}$ ，所带电量  $q_1 = \frac{R}{r}q$

**例 15:** 如图 2—15 所示，两个电池组的电动势  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3\text{V}$ ，每节电池的内阻均为  $0.5\Omega$ ， $R_1 = 1\Omega$ ， $R_2 = 2\Omega$ ， $R_3 = 1.8\Omega$ ，求通过  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  的电流及两个电池组的端电压各是多少？

**解析:** 解此题时，可采用与力学隔离法相似的解法，即采用电路隔离法。

气体从初态过渡到末态时质量恒定，所以可利用状态方程求解。

先将整个电路按虚线划分为 I、II、III 三个部分，则有：

$$U_{AB} = \varepsilon_1 - I_1(R_1 + 2r) \quad \text{①}$$

$$U_{AB} = \varepsilon_2 - I_2(R_2 + 2r) \quad \text{②}$$

$$U_{AB} = I_3 R_3 \quad \text{③}$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad \text{④}$$

联立①②③④四式解得： $I_1 = 0.6\text{A}$ ， $I_2 = 0.4\text{A}$ ， $I_3 = 1\text{A}$ ，电池组  $\varepsilon_1$  的端电压  $U_1 = 2.4\text{V}$ ，电池组  $\varepsilon_2$  的端电压  $U_2 = 2.6\text{V}$ 。

**例 16** 如图 2—16 所示，两根相互平行的间距  $L = 0.4\text{m}$  的金属导轨水平放在  $B = 0.2\text{T}$  的匀强磁场中，磁场垂直于导轨平面，导轨上的滑杆  $ab$ 、 $cd$  所受摩擦力均为  $0.2\text{N}$ ，两杆电阻均为  $0.1\Omega$ ，导轨电阻不计。当  $ab$  受到恒力  $F$  作用时， $ab$  以  $v_1$  做匀速运动， $cd$  以  $v_2$  做匀速运动，求通过  $ab$  杆的电流强度的大小和方向。

**解析** 要求通过  $ab$  杆的电流强度，应通过  $ab$  杆受的安培力求解，这就需要隔离出  $ab$  杆进行受力分析。

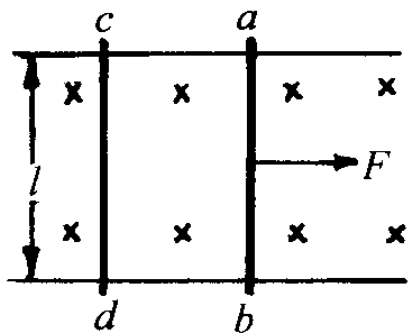


图2-16

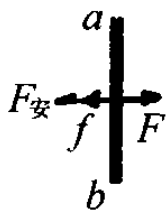


图2-16-甲

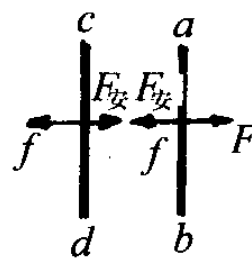


图2-16-乙

以  $ab$  杆为研究对象，因右手定则确定电流的方向为  $b \rightarrow a$ ，受力如图 2—6—甲所示。因为  $ab$  杆匀速运动处于平衡状态，故有：

$$F = f + BIL$$

再以滑杆  $ab$ 、 $cd$  整体作为研究对象，受力如图 2—16—乙所示，因为  $ab$ 、 $cd$  均做

匀速运动，受力平衡，故有：

$$F = 2f = 0.4N$$

代入上式，解得通过 ab 杆的电流为：

$$I = \frac{F-f}{BL} = 2.5A$$

所以通过 ab 杆的电流的大小为 2.5A ，方向 b→a 。

### 针对训练

1. 质量为 8kg 的木块 m 放在质量为 16kg 的木板 M 上，并通过滑轮用细绳连接，如图 2—17 所示，M 与 m 间，M 与水平地面间的动摩擦因数 μ 均为 0.25 ，滑轮摩擦不计。欲使 M 向匀速运动，水平拉力应为多大？（g 取 10m/s<sup>2</sup>）

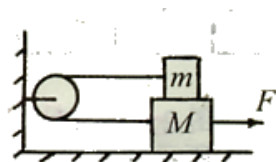


图2-17

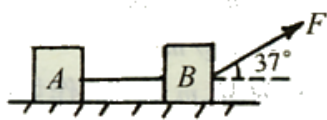


图2-18

2. 在水平面上有两个物体 A 和 B，它们之间用不可伸缩的质量不计的细绳连接起来，其中  $m_A = 3kg$  ，  $m_B = 2kg$  ， 它们与地面间的动摩擦因数  $\mu = 0.1$  。如图 2—18 所示，今用一与水平方向成  $37^\circ$  角、大小为 10N 的恒力拉 B ， 使 AB 一起向右做匀加速直线运动，试求 A 对 B 的拉力。（g 取 10m/s<sup>2</sup>）

3. 如图 2—19 所示，小物体 m 放在大物体 M 上，M 系在固定于墙上的水平弹簧的另一端，并置于光滑水平面上，若弹簧的劲度系数为 k ， 将 M 向右拉离平衡位置 x 后无初速度释放，在以后的运动中 M 与 m 保持相对静止，那么 m 在运动中受到的最大和最小摩擦力分别为多大？

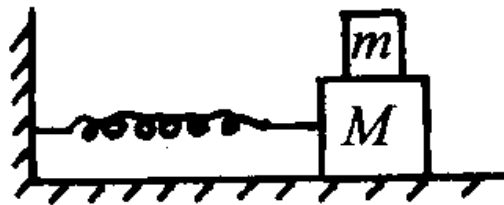


图2-19

4. 电梯内有一个物体，质量为 m ， 用细线挂在电梯的天花板上，当电梯以  $\frac{g}{3}$  的加速度竖直加速下降时（g 为重力加速度），细线对物体的拉力为（ ）

- A.  $\frac{2}{3}mg$                       B.  $\frac{1}{3}mg$   
 C.  $\frac{4}{3}mg$                         D. mg

5. 两物体 A 和 B ， 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  ， 互相接触放在光滑水平面上，如图 2—20 所示，对物体 A 施以水平的推力 F ， 则物体 A 对物体 B 的作用力等于（ ）

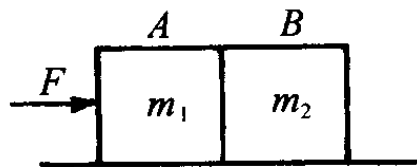


图2-20

- A.  $\frac{m_1}{m_1+m_2} F$                   B.  $\frac{m_2}{m_1+m_2} F$                   C. F                                  D.  $\frac{m_2}{m_1} F$

6. 在光滑水平面上有一木板，一木棒 A、B 可沿水平轴 O 转动，其下端 B 搁在木板下，而整个系统处于静止状态（如图 2—21 所示）。现在用水平力 F 向左推木板，但木板仍未动。由此可以得出结论：施力 F 后，木板和木棒之间的正压力（ ）

- A. 变大  
B. 不变  
C. 变小  
D. 条件不足，不能判断如何改变

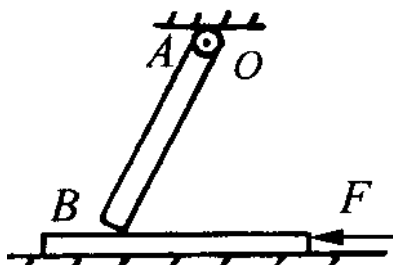


图2-21

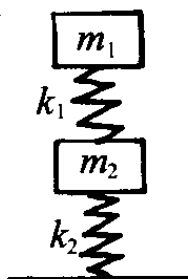


图2-22

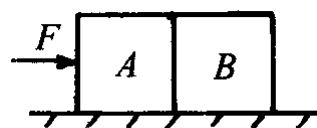


图2-23

7. 如图 2—22 所示，两木块的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ，两轻质弹簧的劲度系数分别为  $k_1$  和  $k_2$ ，上面木块压在上方的弹簧上（但不拴接），整个系统处于平衡状态。现缓慢向上提上面的木块，直到它刚离开上面弹簧，在这过程中下面木块移动的距离为（ ）

- A.  $\frac{m_1 g}{k_1}$   
B.  $\frac{m_2 g}{k_1}$   
C.  $\frac{m_1 g}{k_2}$   
D.  $\frac{m_2 g}{k_2}$

8. 如图 2—23，质量为  $2m$  的物块 A 与水平地面的摩擦可忽略不计，质量为  $m$  的物块 B 与地面的摩擦系数为  $\mu$ 。在已知水平推力 F 的作用下，AB 做加速运动，A 对 B 的作用力为\_\_\_\_\_。

9. 如图 2—24 所示，两块木块 A 和 B，质量分别为  $m_A$  和  $m_B$ ，紧挨着并排在水平桌面上，AB 间的接触面垂直于图中纸面且与水平面成  $\theta$  角。A、B 间的接触面是光滑的，但它们与水平桌面间有摩擦，静摩擦系数和滑动摩擦系数均为  $\mu$ 。开始时 A、B 都静止，现施一水平推力 F 于 A。要使 A、B 向右加速运动且 A、B 之间不发生相对滑动，则

- (1)  $\mu$  的数值应满足什么条件？  
(2) 推力 F 的最大值不能超过多少？  
(只考虑平动，不考虑转动问题)

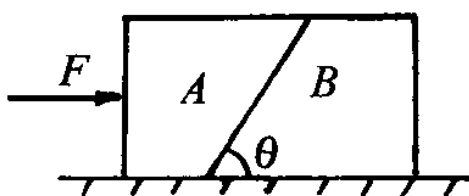


图2-24

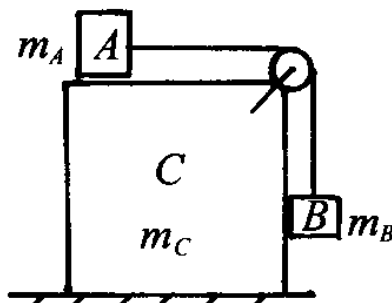


图2-25

10. 系统如图 2—25 所示，滑轮与绳的质量忽略，绳不可伸长。设系统所有部位都没有摩擦，物体 B 借助导轨（图中未画出来）被限定沿物体 C 的右侧面运动，试求物体 C 的运动加速度。

11. 质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$  和  $m_3$  的三个质点 A、B、C 位于光滑的水平桌面上，用已拉直的不可伸长的柔软的轻绳 AB 和 BC 连接， $\angle ABC$  为  $\pi - \alpha$ ， $\alpha$  为一锐角，如图 2—26 所示，今有一冲量为  $I$  的冲击力沿 BC 方向作用于质点 C，求质点 A 开始运动时的速度。

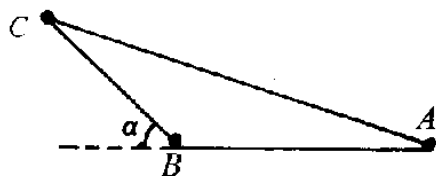


图2-26

12. 如图 2—27 所示，四个质量均为  $m$  的质点，用同样长度且不可伸长的轻绳连结成菱形 ABCD，静止放在水平光滑的桌面上。若突然给质点 A 一个力时极短沿 CA 方向的冲击，当冲击结束的时刻，质点 A 的速度为  $V$ ，其他质点也获得一定的速度， $\angle BAD = 2\alpha$  ( $\alpha < \frac{\pi}{4}$ )。求此质点系统受到冲击后所具有的总动量和总能量。

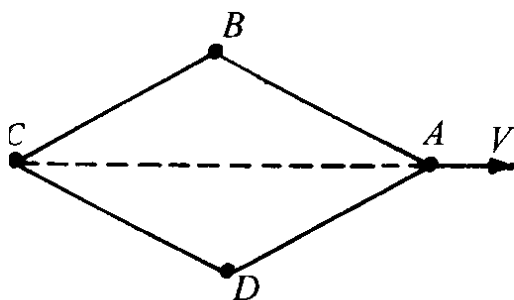


图2-27

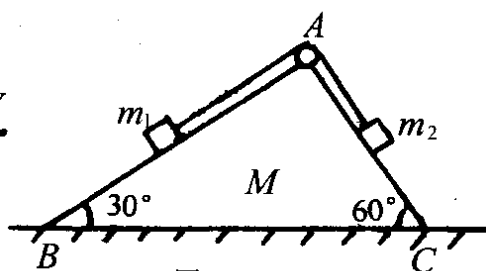


图2-28

13. 如图 2—28 所示，一三角木块 ABC 置于光滑水平面上，两斜边与平面夹角分别为  $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 。在斜边上有两个物体  $m_1$ 、 $m_2$ ，用不可伸长的细绳连接并跨在顶点 A 的定滑轮上， $m_1$ 、 $m_2$  可在斜面上无摩擦地滑动。已知木块的质量为  $M$ ，三物体的质量比为  $m_1 : m_2 : M = 4 : 1 : 16$ ，滑轮光滑且质量可忽略。

- (1) 求  $M$  的加速度  $a$  及  $m_1$  相对于  $M$  的加速度  $a'$ ；
- (2) 若  $m_1$  从静止开始沿斜面移动 20cm，求  $M$  沿水平面移动的距离。

14. 如图 2—29 所示，可沿气缸壁自由活动的活塞将密封的圆筒形气缸分隔成 A、B 两部分。活塞与气缸顶部有一弹簧相连。当活塞位于气缸底部时弹簧恰好无形变，开始时 B 内充有一定量的气体，A 内是真空，B 部分高度为  $l_1 = 0.10$  米，此时活塞受到的弹簧作用力与重力的大小相等。现将整个装置倒置。达到新的平衡后 B 部分的高度  $L_2$  于多少？设温度不变。

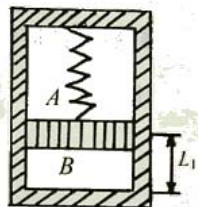


图2-29

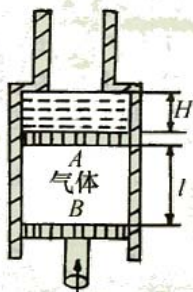


图2-30

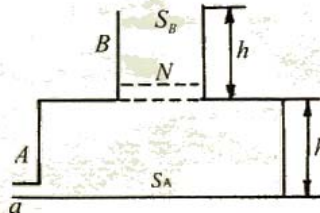


图2-31

15. 图 2—30 中竖直圆筒是固定不动的，粗筒横截面积是细筒的 4 倍，细筒足够长。粗筒中 A、B 两轻质活塞间封有空气，气柱长  $l = 20$  厘米。活塞 A 上方的水银深  $H = 10$  厘米，两活塞与筒壁间的摩擦不计。用外力向上托住活塞 B，使之处于平衡状态，水银面与



粗筒上端相平。现使活塞 B 缓慢上移，直至水银的一半被推入细筒中，求活塞 B 上移的距离（设在整个过程中气柱的温度不变，大气压强  $p_0$  相当于 75 厘米高的水银柱产生的压强）。

16. 如图 2—31 是容器的截面图，它是由 A、B 两部分构成，两部分都是圆筒形，高度都是  $h$ ，底面积  $S_B = S$ ， $S_A = 2S$ ，容器下端有一小孔 a 与大气相通，上端开口，B 中有一质量为  $m$  厚度不计的活塞，它与 B 的器壁有摩擦，最大摩擦力为  $f(f < mg)$ ，开始时活塞 N 位于 B 的最下端，已知大气压强为  $p_0$ ，当时温度为  $T_0$ ，现把 a 孔封闭，为保证封闭气体不与外界相通，筒中气体温度允许在多大范围内变化？

17. 如图 2—32 所示，长为  $2l$  的圆形筒形气缸可沿摩擦因数为  $\mu$  的水平面滑动，在气缸中央有一个截面积为  $S$  的活塞，气缸内气体的温度为  $T_0$ ，压强为  $p_0$ （大气压强也为  $p_0$ ）。在墙壁与活塞之间装有劲度系数为  $k$  的弹簧，当活塞处于如图位置时，弹簧恰好在原长位置。今使气缸内气体体积增加一倍，问气体的温度应达到多少？（气缸内壁光滑，活塞和气缸总质量为  $m$ ）。

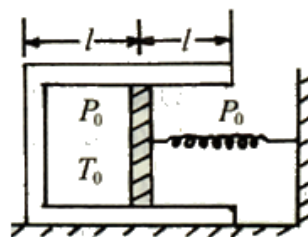


图 2—32

18. A、B 两带电小球，A 固定不动，B 的质量为  $m$ 。在库仑作用下，B 由静止开始运动。已知初始时 A、B 间的距离为  $d$ ，B 的加速度为  $a$ 。

经过一段时间后，B 的加速度变为  $\frac{a}{4}$ ，此时 A、B 间的距离应为\_\_\_\_\_。已知此时 B 的速度为  $v$ ，则在此过程中电势能的减少量为\_\_\_\_\_。

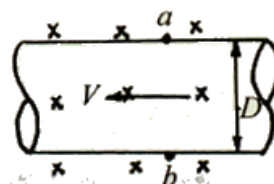


图 2—33

19. 如图 2—33 所示，是电磁流量计的示意图，在非磁性材料做成的圆管道外加一匀强磁场区域，当管中的导电液体流过磁场区域时，测出管壁上、下表面两点 a、b 间的电动势为  $\varepsilon$ ，从而可求出管中液体在单位时间内的流量  $Q$ 。已知圆管的内径为  $D$ ，磁感应强度为  $B$ ，试推导出  $Q$  与  $\varepsilon$  的关系表达式。

20. 如图 2—34 所示，一矩形管中（管长为  $l$ ，两侧面为导电面，并有导线在外面与之相连，上下面则为绝缘面）有电阻率为  $\rho$  的水银流动，当其一端加上压强  $p$  时，水银的流速为  $v_0$ 。现在竖直方向加上磁感应强度为  $B$  的匀强磁场。试证明：此时水银的流速为：

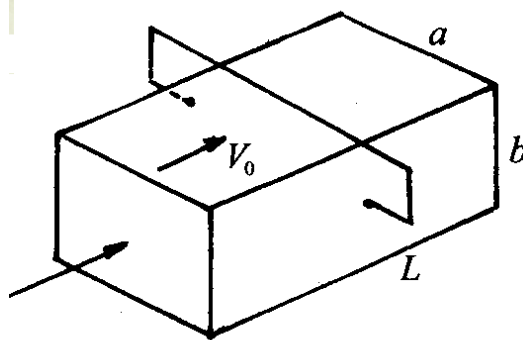


图 2—34

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{v_0 B^2 L}{\rho p} \right)^{-1} \text{。 (设水银的速度与压强成正比)}$$

## 参考答案

1.  $F = 100N$

2.  $T = 5.16\text{N}$

3.  $f_{\max} = \frac{mkx}{M+m}$ ,  $f_{\min} = 0$

4. A

5. B

6. C

7. C

8.  $\frac{F+2mg}{3}$

9. (1)  $\mu < \frac{m_A}{m_A+m_B} \tan\theta$  ; (2)  $F < \frac{(m_A+m_B)m_A g}{m_B} (\tan\theta - \mu)$

10.  $a_C = \frac{m_A m_B g}{(m_A+m_B+m_C)(m_A+m_B) - m_A}$

11.  $v_A = \frac{lm_2 \cos\alpha}{m_2(m_1+m_2+m_3) + m_1 m_2 \sin^2\alpha}$ , 方向沿 AB 方向。

12.  $P = \frac{4mv}{1+2\sin^2\alpha}$ ,  $E = \frac{2mv^2}{1+2\sin^2\alpha}$

13. (1)  $a = 0.5\text{m/s}^2$ ,  $a' = 0.64\text{m/s}^2$  ; (2)  $3.78\text{cm}$

14.  $0.2\text{m}$

15.  $8\text{cm}$

16.  $\frac{p_0 S + mg - f}{p_0 S} T_0 \leq T \leq \frac{p_0 S + mg + f}{p_0 S} T_0$

17. 摩擦力足够大时,  $T = 2(1 + \frac{kl}{p_0 S})T_0$  ; 摩擦力不是足够大时  $T = 2(1 + \frac{\mu mg}{p_0 S})T_0$

18.  $2d$ ,  $\frac{1}{2}mv^2$

19.  $Q = \frac{\pi\epsilon D}{4B}$

20. 证明略。

# 高中奥林匹克物理竞赛解题方法

## 三、微元法

### 方法简介

微元法是分析、解决物理问题中的常用方法，也是从部分到整体的思维方法。用该方法可以使一些复杂的物理过程用我们熟悉的物理规律迅速地加以解决，使所求的问题简单化。在使用微元法处理问题时，需将其分解为众多微小的“元过程”，而且每个“元过程”所遵循的规律是相同的，这样，我们只需分析这些“元过程”，然后再将“元过程”进行必要的数学方法或物理思想处理，进而使问题求解。使用此方法会加强我们对已知规律的再思考，从而引起巩固知识、加深认识和提高能力的作用。

### 赛题精讲

例 1：如图 3—1 所示，一个身高为  $h$  的人在灯以速度  $v$  沿水平直线行走。设灯距地面高为  $H$ ，求证人影的顶端  $C$  点是做匀速直线运动。

解析：该题不能用速度分解求解，考虑采用“微元法”。

设某一时间人经过  $AB$  处，再经过一微小过程  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ )，则人由  $AB$  到达  $A'B'$ ，人影顶端  $C$  点到达  $C'$  点，由于  $\Delta S_{AA'} = v\Delta t$  则人影顶端的

$$\text{移动速度 } v_C = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_{CC'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H}{H-h} \frac{\Delta S_{AA'}}{\Delta t} = \frac{Hv}{H-h}$$

可见  $v_C$  与所取时间  $\Delta t$  的长短无关，所以人影的顶端  $C$  点做匀速直线运动。

例 2：如图 3—2 所示，一个半径为  $R$  的四分之一光滑球面放在水平桌面上，球面上放置一光滑均匀铁链，其  $A$  端固定在球面的顶点， $B$  端恰与桌面不接触，铁链单位长度的质量为  $\rho$ 。试求铁链  $A$  端受的拉力  $T$ 。

解析：以铁链为研究对象，由于整条铁链的长度不能忽略不计，所以整条铁链不能看成质点，要分析铁链的受力情况，须考虑将铁链分割，使每一小段铁链可以看成质点，分析每一小段铁链的受力，根据物体的平衡条件得出整条铁链的受力情况。

在铁链上任取长为  $\Delta L$  的一小段（微元）为研究对象，其受力分析如图 3—2—甲所示。由于该元处于静止状态，所以受力平衡，在切线方向上应满足：

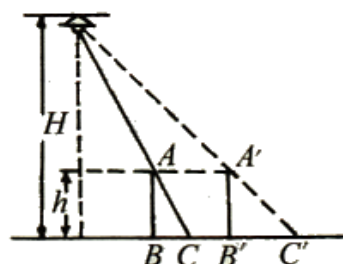


图 3-1

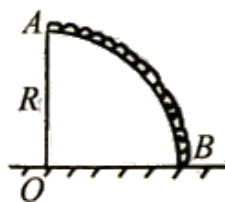


图 3-2

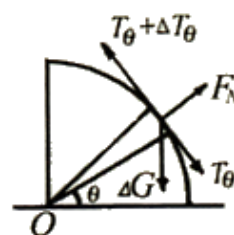


图 3-2-甲

$$T_\theta + \Delta T_\theta = \Delta G \cos \theta + T_\theta \quad \Delta T_\theta = \Delta G \cos \theta = \rho \Delta L g \cos \theta$$

由于每段铁链沿切线向上的拉力比沿切线向下的拉力大  $\Delta T_\theta$ ，所以整个铁链对 A 端的拉力是各段上  $\Delta T_\theta$  的和，

$$\text{即 } T = \sum \Delta T_\theta = \sum \rho \Delta L g \cos \theta = \rho g \sum \Delta L \cos \theta$$

观察  $\Delta L \cos \theta$  的意义，见图 3—2—乙，由于  $\Delta \theta$  很小，所以  $CD \perp OC$ ， $\angle OCE = \theta$   $\Delta L \cos \theta$  表示  $\Delta L$  在竖直方向上的投影  $\Delta R$ ，

$$\text{所以 } \sum \Delta L \cos \theta = R \quad \text{可得铁链 A 端受的拉力 } T = \rho g \sum \Delta L \cos \theta = \rho g R$$

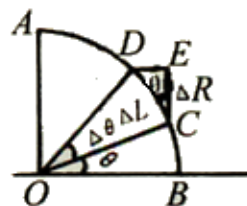


图3-2-乙

**例 3:** 某行星围绕太阳 C 沿圆弧轨道运行，它的近日点 A 离太阳的距离为  $a$ ，行星经过近日点 A 时的速度为  $v_A$ ，行星的远日点 B 离开太阳的距离为  $b$ ，如图 3—3 所示，求它经过远日点 B 时的速度  $v_B$  的大小。

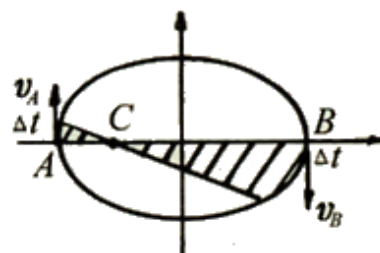


图3-3

**解析:** 此题可根据万有引力提供行星的向心力求解.也可根据开普勒第二定律，用微元法求解.

设行星在近日点 A 时又向前运动了极短的时间  $\Delta t$ ，由于时间极短可以认为行星在  $\Delta t$  时间内做匀速圆周运动，线速度为  $v_A$ ，半径为  $a$ ，可以得到行星在  $\Delta t$  时间内扫过的面积

$$S_a = \frac{1}{2} v_A \Delta t \cdot a \quad \text{同理，设行星在经过远日点 B 时也运动了相同的极短时间 } \Delta t,$$

$$\text{则也有 } S_b = \frac{1}{2} v_B \Delta t \cdot b \quad \text{由开普勒第二定律可知: } S_a = S_b$$

$$\text{即得 } v_B = \frac{a}{b} v_A \quad \text{此题也可用对称法求解.}$$

**例 4:** 如图 3—4 所示，长为  $L$  的船静止在平静的水面上，立于船头的人质量为  $m$ ，船的质量为  $M$ ，不计水的阻力，人从船头走到船尾的过程中，问：船的位移为多大？

**解析:** 取人和船整体作为研究系统，人在走动过程中，系统所受合外力为零，可知系统动量守恒.设人在走动过程中的  $\Delta t$  时间内为匀速运动，则可计算出船的位移.

设  $v_1$ 、 $v_2$  分别是人和船在任何一时刻的速率，则有

$$mv_1 = Mv_2 \quad \text{①} \quad \text{两边同时乘以一个极短的时间 } \Delta t, \quad \text{有 } mv_1 \Delta t = Mv_2 \Delta t \quad \text{②}$$

由于时间极短，可以认为在这极短的时间内人和船的速率是不变的，

所以人和船位移大小分别为  $\Delta s_1 = v_1 \Delta t$ ， $\Delta s_2 = v_2 \Delta t$



图3-4

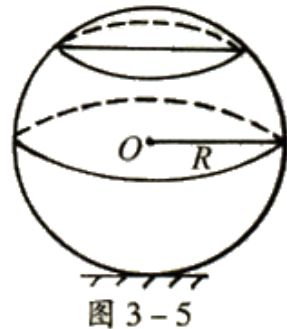
由此将②式化为  $m\Delta s_1 = M\Delta s_2$  ③

把所有的元位移分别相加有  $m\sum \Delta s_1 = M\sum \Delta s_2$  ④

即  $ms_1 = Ms_2$  ⑤ 此式即为质心不变原理. 其中  $s_1$ 、 $s_2$  分别为全过程中人和船对地位移的大小, 又因为  $L = s_1 + s_2$  ⑥

由⑤、⑥两式得船的位移  $s_2 = \frac{m}{M+m}L$

**例 5:** 半径为  $R$  的光滑球固定在水平桌面上, 有一质量为  $M$  的圆环状均匀弹性绳圈, 原长为  $\pi R$ , 且弹性绳圈的劲度系数为  $k$ , 将弹性绳圈从球的正上方轻放到球上, 使弹性绳圈水平停留在平衡位置上, 如图 3—5 所示, 若平衡时弹性绳圈长为  $\sqrt{2}\pi R$ , 求弹性绳圈的劲度系数  $k$ .



**解析:** 由于整个弹性绳圈的大小不能忽略不计, 弹性绳圈不能看成质点, 所以应将弹性绳圈分割成许多小段, 其中每一小段  $\Delta m$  两端受的拉力就是弹性绳圈内部的弹力  $F$ . 在弹性绳圈上任取一小段质量为  $\Delta m$  作为研究对象, 进行受力分析. 但是  $\Delta m$  受的力不在同一平面内, 可以从一个合适的角度观察. 选取一个合适的平面进行受力分析, 这样可以看清楚各个力之间的关系. 从正面和上面观察, 分别画出正视图的俯视图, 如图 3—5—甲和 2—3—5—乙. 先看俯视图 3—5—甲, 设在弹性绳圈的平面上,  $\Delta m$  所对的圆心角是  $\Delta\theta$ , 则每一小段的质量

$\Delta m = \frac{\Delta\theta}{2\pi}M$   $\Delta m$  在该平面上受拉力  $F$  的作用, 合力为

$$T = 2F \cos\left(\frac{\pi - \Delta\theta}{2}\right) = 2F \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

因为当  $\theta$  很小时,  $\sin\theta \approx \theta$  所以  $T = 2F \frac{\Delta\theta}{2} = F\Delta\theta$

再看正视图 3—5—乙,  $\Delta m$  受重力  $\Delta mg$ , 支持力  $N$ ,

二力的合力与  $T$  平衡. 即  $T = \Delta mg \cdot \tan\theta$

现在弹性绳圈的半径为  $r = \frac{\sqrt{2}\pi R}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

所以  $\sin\theta = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $\theta = 45^\circ$   $\tan\theta = 1$

因此  $T = \Delta mg = \frac{\Delta\theta}{2\pi}Mg$  ①、②联立,  $\frac{\Delta\theta}{2\pi}Mg = F\Delta\theta$ ,

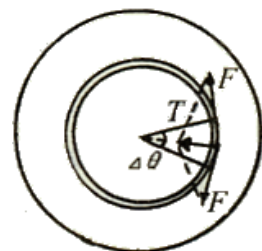


图 3—5—甲

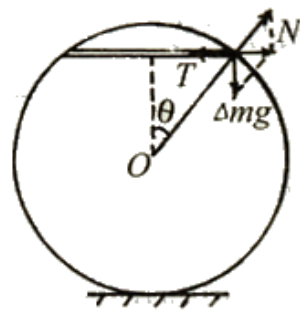


图 3—5—乙

解得弹性绳圈的张力为： $F = \frac{Mg}{2\pi}$

设弹性绳圈的伸长量为  $x$  则  $x = \sqrt{2}\pi R - \pi R = (\sqrt{2} - 1)\pi R$

所以绳圈的劲度系数为： $k = \frac{F}{x} = \frac{Mg}{2(\sqrt{2} - 1)\pi^2 R} = \frac{(\sqrt{2} + 1)Mg}{2\pi^2 R}$

**例 6：**一质量为  $M$ 、均匀分布的圆环，其半径为  $r$ ，几何轴与水平面垂直，若它能经受的最大张力为  $T$ ，求此圆环可以绕几何轴旋转的最大角速度。

**解析：**因为向心力  $F = mr\omega^2$ ，当  $\omega$  一定时， $r$  越大，向心力越大，所以要想求最大张力  $T$  所对应的角速度  $\omega$ ， $r$  应取最大值。

如图 3—6 所示，在圆环上取一小段  $\Delta L$ ，对应的圆心角

为  $\Delta\theta$ ，其质量可表示为  $\Delta m = \frac{\Delta\theta}{2\pi}M$ ，受圆环对它的张

力为  $T$ ，则同上例分析可得  $2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta m r \omega^2$

因为  $\Delta\theta$  很小，所以  $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ ，即

$$2T \cdot \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} M r \omega^2 \quad \text{解得最大角速度 } \omega = \sqrt{\frac{2\pi T}{Mr}}$$

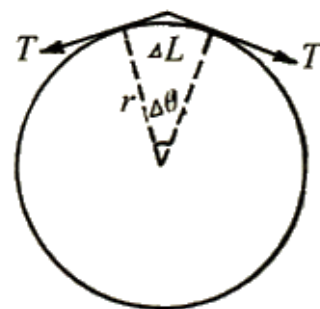


图 3-6

**例 7：**一根质量为  $M$ ，长度为  $L$  的铁链条，被竖直地悬挂起来，其最低端刚好与水平接触，今将链条由静止释放，让它落到地面上，如图 3—7 所示，求链条下落了长度  $x$  时，链条对地面的压力为多大？

**解析：**在下落过程中链条作用于地面的压力实质就是链条对地面的“冲力”加上落在地面上那部分链条的重力。根据牛顿第三定律，这个冲力也就等于同一时刻地面对链条的反作用力，这个力的冲量，使得链条落至地面时的动量发生变化。由于各质元原来的高度不同，落到地面的速度不同，动量改变也不相同。我们取某一时刻一小段链条（微元）作为研究对象，就可以将变速冲击变为恒速冲击。

设开始下落的时刻  $t=0$ ，在  $t$  时刻落在地面上的链条长为  $x$ ，未到达地面部分链条的速度为  $v$ ，并设链条的线密度为  $\rho$ 。由题意可知，链条落至地面后，速度立即变为零。从  $t$  时刻起取很小一段时间  $\Delta t$ ，在  $\Delta t$  内又有  $\Delta M = \rho \Delta x$  落到地面上静止。地面对  $\Delta M$  作用的冲量为

$$(F - \Delta M g) \Delta t = \Delta I \quad \text{因为 } \Delta M g \cdot \Delta t \approx 0$$

所以  $F \Delta t = \Delta M \cdot v - 0 = \rho v \Delta x$  解得冲力：

$$F = \rho v \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{其中 } \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ 就是 } t \text{ 时刻链条的速度 } v,$$

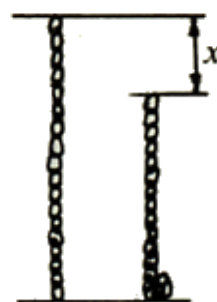


图 3-7

故  $F = \rho v^2$  链条在  $t$  时刻的速度  $v$  即为链条下落

长为  $x$  时的即时速度, 即  $v^2 = 2gx$ , 代入  $F$  的表达式中, 得  $F = 2\rho gx$

此即  $t$  时刻链对地面的作用力, 也就是  $t$  时刻链条对地面的冲力.

所以在  $t$  时刻链条对地面的总压力为 
$$N = 2\rho gx + \rho gx = 3\rho gx = \frac{3Mgx}{L}.$$

**例 8:** 一根均匀柔软的绳长为  $L$ , 质量为  $m$ , 对折后两端固定在一个钉子上, 其中一端突然从钉子上滑落, 试求滑落的绳端点离钉子的距离为  $x$  时, 钉子对绳子另一端的作用力是多大?

**解析:** 钉子对绳子另一端的作用力随滑落绳的长短而变化,

由此可用微元法求解. 如图 3—8 所示, 当左边绳端离钉子的

距离为  $x$  时, 左边绳长为  $\frac{1}{2}(l-x)$ , 速度  $v = \sqrt{2gx}$ ,

右边绳长为  $\frac{1}{2}(l+x)$ . 又经过一段很短的时间  $\Delta t$  以后,

左边绳子又有长度  $\frac{1}{2}v\Delta t$  的一小段转移到右边去了, 我们就分

析这一小段绳子, 这一小段绳子受到两力: 上面绳子对它的拉

力  $T$  和它本身的重力  $\frac{1}{2}v\Delta t\lambda g$  ( $\lambda = m/l$  为绳子的线密度),

根据动量定理, 设向上方向为正  $(T - \frac{1}{2}v\Delta t\lambda g)\Delta t = 0 - (-\frac{1}{2}v\Delta t\lambda \cdot v)$

由于  $\Delta t$  取得很小, 因此这一小段绳子的重力相对于  $T$  来说是很小的, 可以忽略,

所以有  $T = \frac{1}{2}v^2\lambda = gx\lambda$  因此钉子对右边绳端的作用力为

$$F = \frac{1}{2}(l+x)\lambda g + T = \frac{1}{2}mg(1 + \frac{3x}{l})$$

**例 9:** 图 3—9 中, 半径为  $R$  的圆盘固定不可转动, 细绳不可伸长但质量可忽略, 绳下悬挂的两物体质量分别为  $M$ 、 $m$ . 设圆盘与绳间光滑接触, 试求盘对绳的法向支持力线密度.

**解析:** 求盘对绳的法向支持力线密度也就是求盘对绳的法向单位长度所受的支持力. 因为盘与绳间光滑接触, 则任取一小段绳, 其两端受的张力大小相等, 又因为绳上各点受的支持力方向不同, 故不能以整条绳为研究对象, 只能以一小段绳为研究对象分析求解. 在与圆盘接触的半圆形中取一小段绳元  $\Delta L$ ,  $\Delta L$  所对应的圆心角为  $\Delta\theta$ , 如图 3—9—甲所示, 绳元  $\Delta L$  两端的张力均为  $T$ , 绳元所受圆盘法向支持力为  $\Delta N$ , 因细绳质量可忽略, 法向合力为零, 则由平衡条件得:

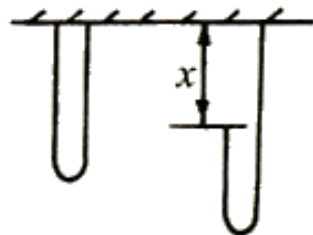


图 3—8

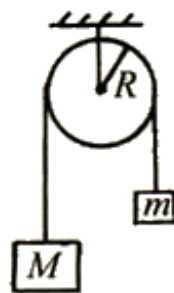


图 3—9

$$\Delta N = T \sin \frac{\Delta \theta}{2} + T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 2T \sin \frac{\Delta \theta}{2}$$

$$\text{当 } \Delta \theta \text{ 很小时, } \sin \frac{\Delta \theta}{2} \approx \frac{\Delta \theta}{2} \quad \therefore \Delta N = T \Delta \theta$$

又因为  $\Delta L = R \Delta \theta$

$$\text{则绳所受法向支持力线密度为 } n = \frac{\Delta N}{\Delta L} = \frac{T \Delta \theta}{R \Delta \theta} = \frac{T}{R} \quad \textcircled{1}$$

以  $M$ 、 $m$  分别为研究对象, 根据牛顿定律有  $Mg - T = Ma$  ②

$$T - mg = ma \quad \textcircled{3} \quad \text{由②、③解得: } T = \frac{2Mmg}{M + m}$$

$$\text{将④式代入①式得: } n = \frac{2Mmg}{(M + m)R}$$

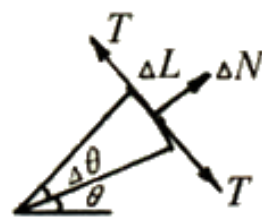


图 3-9-甲

**例 10:** 粗细均匀质量分布也均匀的半径分别为  $R$  和  $r$  的两圆环相切. 若在切点放一质点  $m$ , 恰使两边圆环对  $m$  的万有引力的合力为零, 则大小圆环的线密度必须满足什么条件?

**解析:** 若要直接求整个圆对质点  $m$  的万有引力比较难, 当若要用到圆的对称性及要求所受合力为零的条件, 考虑大、小圆环上关于切点对称的微元与质量  $m$  的相互作用, 然后推及整个圆环即可求解.

如图 3-10 所示, 过切点作直线交大小圆分别于  $P$ 、 $Q$  两点, 并设与水平线夹角为  $\alpha$ , 当  $\alpha$  有微小增量时, 则大小圆环上对应微小线元

$$\Delta L_1 = R \cdot 2\Delta \alpha \quad \Delta L_2 = r \cdot 2\Delta \alpha$$

其对应的质量分别为  $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta L_1 = \rho_1 R \cdot 2\Delta \alpha$

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta L_2 = \rho_2 r \cdot 2\Delta \alpha \quad \text{由于 } \Delta \alpha \text{ 很小,}$$

故  $\Delta m_1$ 、 $\Delta m_2$  与  $m$  的距离可以认为分别是  $r_1 = 2R \cos \alpha$   $r_2 = 2r \cos \alpha$

所以  $\Delta m_1$ 、 $\Delta m_2$  与  $m$  的万有引力分别为

$$\Delta F_1 = \frac{Gm\Delta m_1}{r_1^2} = \frac{G\rho_1 R \cdot 2\Delta \alpha m}{(2R \cos \alpha)^2}, \Delta F_2 = \frac{Gm\Delta m_2}{r_2^2} = \frac{G\rho_2 R \cdot 2\Delta \alpha m}{(2r \cos \alpha)^2}$$

由于  $\alpha$  具有任意性, 若  $\Delta F_1$  与  $\Delta F_2$  的合力为零,

$$\text{则两圆环对 } m \text{ 的引力的合力也为零, 即 } \frac{G\rho_1 R \cdot 2\Delta \alpha m}{(2R \cos \alpha)^2} = \frac{G\rho_2 r \cdot 2\Delta \alpha m}{(2r \cos \alpha)^2}$$

$$\text{解得大小圆环的线密度之比为: } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R}{r}$$

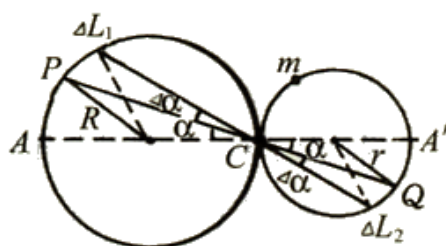


图 3-10



**例 11:** 一枚质量为  $M$  的火箭, 依靠向正下方喷气在空中保持静止, 如果喷出气体的速度为  $v$ , 那么火箭发动机的功率是多少?

**解析:** 火箭喷气时, 要对气体做功, 取一个很短的时间, 求出此时间内, 火箭对气体做的功, 再代入功率的定义式即可求出火箭发动机的功率.

选取在  $\Delta t$  时间内喷出的气体为研究对象, 设火箭推气体的力为  $F$ , 根据动量定理, 有

$$F\Delta t = \Delta m \cdot v \quad \text{因为火箭静止在空中, 所以根据牛顿第三定律和平衡条件有 } F = Mg$$

$$\text{即 } Mg \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v \quad \Delta t = \Delta m \cdot v / Mg$$

$$\text{对同样这一部分气体用动能定理, 火箭对它做的功为: } W = \frac{1}{2} \Delta m v^2$$

$$\text{所以发动机的功率 } P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m v^2}{(\Delta m v / Mg)} = \frac{1}{2} Mg v$$

**例 12:** 如图 3—11 所示, 小环  $O$  和  $O'$  分别套在不动的竖直杆  $AB$  和  $A'B'$  上, 一根不可伸长的绳子穿过环  $O'$ , 绳的两端分别系在  $A'$  点和  $O$  环上, 设环  $O'$  以恒定速度  $v$  向下运动, 求当  $\angle AOO' = \alpha$  时, 环  $O$  的速度.

**解析:**  $O$ 、 $O'$  之间的速度关系与  $O$ 、 $O'$  的位置有关, 即与  $\alpha$  角有关, 因此要用微元法找它们之间的速度关系.

设经历一段极短时间  $\Delta t$ ,  $O'$  环移到  $C'$ ,  $O$  环移到  $C$ , 自  $C'$  与  $C$  分别作为  $O' O$  的垂线  $C' D'$  和  $CD$ , 从图中看出.

$$OC = \frac{OD}{\cos \alpha}, O'C' = \frac{O'D'}{\cos \alpha} \quad \text{因此 } OC + O'C' = \frac{OD + O'D'}{\cos \alpha} \quad (1)$$

因  $\Delta \alpha$  极小, 所以  $EC' \approx ED'$ ,  $EC \approx ED$ ,

$$\text{从而 } OD + O'D' \approx OO' - CC' \quad (2)$$

$$\text{由于绳子总长度不变, 故 } OO' - CC' = O'C' \quad (3)$$

$$\text{由以上三式可得: } OC + O'C' = \frac{O'C'}{\cos \alpha} \quad \text{即 } OC = O'C' \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

$$\text{等式两边同除以 } \Delta t \text{ 得环 } O \text{ 的速度为 } v_0 = v \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

**例 13:** 在水平位置的洁净的平玻璃板上倒一些水银, 由于重力和表面张力的影响, 水银近似呈现圆饼形状 (侧面向外凸出), 过圆饼轴线的竖直截面如图 3—12 所示, 为了计算方便, 水银和玻璃的

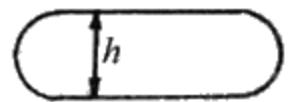


图 3—12

接触角可按  $180^\circ$  计算. 已知水银密度  $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 水

银的表面张力系数  $\sigma = 0.49 \text{ N/m}$ . 当圆饼的半径很大时, 试估算其厚度  $h$  的数值大约为多少? (取 1 位有效数字即可)

**解析:** 若以整个圆饼状水银为研究对象, 只受重力和玻璃板的支持力, 在平衡方程中, 液体

的体积不是  $h$  的简单函数，而且支持力  $N$  和重力  $mg$  都是未知量，方程中又不可能出现表面张力系数，因此不可能用整体分析列方程求解  $h$ 。现用微元法求解。

在圆饼的侧面取一个宽度为  $\Delta x$ ，高为  $h$  的体积元，如图 3—12—甲所示，该体积元受重力  $G$ 、液体内部作用在面积  $\Delta x \cdot h$  上的压力  $F$ ，

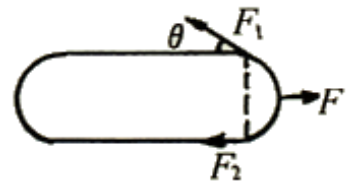


图 3—12—甲

$F = \bar{P}S = \frac{1}{2} \rho gh \cdot \Delta x h = \frac{1}{2} \rho gh^2 \cdot \Delta x$ ，

还有上表面分界线上的张力  $F_1 = \sigma \Delta x$  和下表面分界线上的张力  $F_2 = \sigma \Delta x$ 。作用在前、后两个侧面上的液体压力互相平衡，作用在体积元表面两个弯曲分界面上的表面张力的合力，当体积元的宽度较小时，这两个力也是平衡的，图中都未画出。

由力的平衡条件有： $F - F_1 \cos \theta - F_2 = 0$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \rho gh^2 \Delta x - \sigma \Delta x \cos \theta - \sigma \Delta x = 0$$

$$\text{解得： } h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 + \cos \theta)}{\rho g}} = 2.7 \times 10^{-3} \sqrt{1 + \cos \theta}$$

由于  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，所以  $1 < \sqrt{1 + \cos \theta} < \sqrt{2}$ ，故  $2.7 \times 10^{-3} \text{m} < h < 3.8 \times 10^{-3} \text{m}$

题目要求只取 1 位有效数字，所以水银层厚度  $h$  的估算值为  $3 \times 10^{-3} \text{m}$  或  $4 \times 10^{-3} \text{m}$ 。

**例 14：**把一个容器内的空气抽出一些，压强降为  $p$ ，容器上有一小孔，上有塞子，现把塞子拔掉，如图 3—13 所示。问空气最初以多大初速度冲进容器？（外界空气压强为  $p_0$ 、密度为  $\rho$ ）

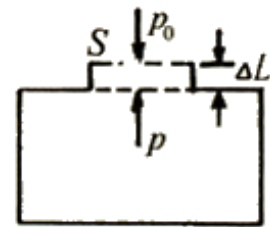


图 3—13

**解析：**该题由于不知开始时进入容器内分有多少，不知它们在容器外如何分布，也不知空气分子进入容器后压强如何变化，使我们难以找到解题途径。注意到题目中“最初”

二字，可以这样考虑：设小孔的面积为  $S$ ，取开始时位于小孔外一薄层气体为研究对象，令薄层厚度为  $\Delta L$ ，因  $\Delta L$  很小，所以其质量  $\Delta m$  进入容器过程中，不改变容器压强，故此薄层所受外力是恒力，该问题就可以解决了。

由以上分析，得： $F = (p_0 - p)S$  ① 对进入的  $\Delta m$  气体，

由动能定理得： $F \Delta L = \frac{1}{2} \Delta m v^2$  ② 而  $\Delta m = \rho S \Delta L$

联立①、②、③式可得：最初中进容器的空气速度  $v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$

**例 15：**电量  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的圆环上（如图 3—14 所示），求在圆环轴线上距圆心  $O$  点为  $x$  处的  $P$  点的电场强度。

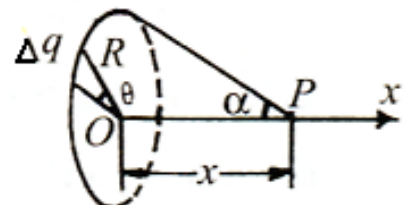


图 3—14

**解析：**带电圆环产生的电场不能看做点电荷产生的电场，故采用微元法，用点电荷形成的电场结合对称性求解。

选电荷元  $\Delta q = R\Delta\theta \frac{Q}{2\pi R}$ ，它在 P 点产生的电场的场强的 x 分量为：

$$\Delta E_x = k \frac{\Delta q}{r^2} \cos\alpha = k \frac{R\Delta\theta Q}{2\pi R(R^2 + x^2)} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\text{根据对称性 } E = \sum \Delta E_x = \frac{kQx}{2\pi\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} \sum \Delta\theta = \frac{kQx}{2\pi\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} 2\pi = \frac{kQx}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}$$

由此可见，此带电圆环在轴线 P 点产生的场强大小相当于带电圆环带电量集中在圆环的某一点时在轴线 P 点产生的场强大小，方向是沿轴线的方向。

**例 16：**如图 3—15 所示，一质量均匀分布的细圆环，其半径为 R，质量为 m。令此环均匀带正电，总电量为 Q。现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上，并处于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向竖直向下。当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度  $\omega$  沿图示方向旋转时，环中的张力等于多少？（设圆环的带电量不减少，不考虑环上电荷之间的作用）

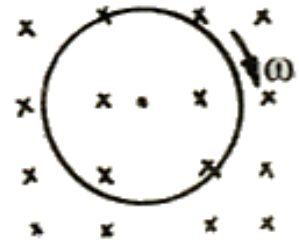


图 3-15

**解析：**当环静止时，因环上没有电流，在磁场中不受力，则环中也就没有因磁场力引起的张力。当环匀速转动时，环上电荷也随环一起转动，形成电流，电流在磁场中受力导致环中存在张力，显然此张力一定与电流在磁场中受到的安培力有关。由题意可知环上各点所受安培力方向均不同，张力方向也不同，因而只能在环上取一小段作为研究对象，从而求出环中张力的

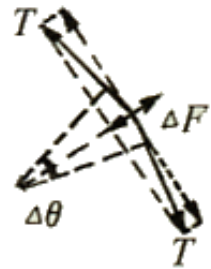


图 3-15-甲

大小。在圆环上取  $\Delta L = R\Delta\theta$  圆弧元，受力情况如图 3—15—甲所示。因转动角速度  $\omega$  而形成的电流

$$I = \frac{Q\omega}{2\pi}, \text{ 电流元 } I\Delta L \text{ 所受的安培力 } \Delta F = I\Delta LB = \frac{R\omega}{2\pi} QB\Delta\theta$$

因圆环法线方向合力为圆弧元做匀速圆周运动所需的向心力，

$$2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - \Delta F = \Delta m \omega^2 R$$

$$\text{当 } \Delta\theta \text{ 很小时, } \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \quad T\Delta\theta - \frac{R\omega QB}{2\pi} \Delta\theta = \Delta m \omega^2 R$$

$$\therefore \Delta m = \frac{m}{2\pi} \Delta\theta \quad \therefore T\Delta\theta - \frac{R\omega QB}{2\pi} \Delta\theta = \frac{m\omega^2 R}{2\pi} \Delta\theta$$

$$\text{解得圆环中张力为 } T = \frac{R\omega}{2\pi} (QB + m\omega)$$

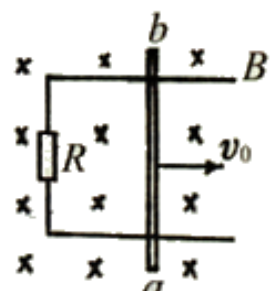


图 3-16

**例 17:** 如图 3—16 所示, 一水平放置的光滑平行导轨上放一质量为  $m$  的金属杆, 导轨间距为  $L$ , 导轨的一端连接一阻值为  $R$  的电阻, 其他电阻不计, 磁感应强度为  $B$  的匀强磁场垂直于导轨平面. 现给金属杆一个水平向右的初速度  $v_0$ , 然后任其运动, 导轨足够长, 试求金属杆在导轨上向右移动的最大距离是多少?

**解析:** 水平地从  $a$  向  $b$  看, 杆在运动过程中的受力分析如图 3—16—甲所示, 这是一个典型的在变力作用下求位移的题, 用我们已学过的知识好像无法解决, 其实只要采用的方法得当仍然可以求解.

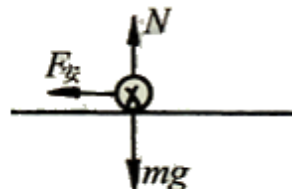


图 3-16-甲

设杆在减速中的某一时刻速度为  $v$ , 取一极短时间  $\Delta t$ , 发生了一段极小的位移  $\Delta x$ , 在  $\Delta t$  时间内, 磁通量的变化为

$$\Delta \Phi = BL\Delta x \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t R} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t R}$$

$$\text{金属杆受到安培力为 } F_{\text{安}} = ILB = \frac{B^2 L^2 \Delta x}{\Delta t R}$$

由于时间极短, 可以认为  $F_{\text{安}}$  为恒力, 选向右为正方向, 在  $\Delta t$  时间内,

$$\text{安培力 } F_{\text{安}} \text{ 的冲量为: } \Delta I = -F_{\text{安}} \cdot \Delta t = -\frac{B^2 L^2 \Delta x}{R}$$

对所有的位移求和, 可得安培力的总冲量为

$$I = \sum \left( -\frac{B^2 L^2 \Delta x}{R} \right) = -\frac{B^2 L^2}{R} x \quad \text{①} \quad \text{其中 } x \text{ 为杆运动的最大距离,}$$

$$\text{对金属杆用动量定理可得 } I = 0 - mV_0 \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②两式得: } x = \frac{mV_0 R}{B^2 L^2}$$

**例 18:** 如图 3—17 所示, 电源的电动势为  $E$ , 电容器的电容为  $C$ ,  $S$  是单刀双掷开关,  $MN$ 、 $PQ$  是两根位于同一水平面上的平行光滑长导轨, 它们的电阻可以忽略不计, 两导轨间距为  $L$ , 导轨处在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中, 磁场方向垂直于两导轨所在的平面并指向图中纸面向里的方向.  $L_1$  和  $L_2$  是两根横放在导轨上的导体小棒,

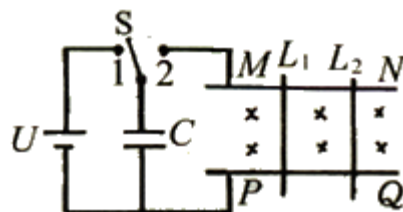


图 3-17

质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 且  $m_1 < m_2$ . 它们在导轨上滑动

时与导轨保持垂直并接触良好, 不计摩擦, 两小棒的电阻相同, 开始时两根小棒均静止在导轨上. 现将开关  $S$  先合向 1, 然后合向 2. 求:

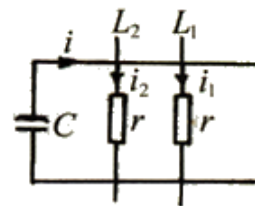


图 3-18

(1) 两根小棒最终速度的大小;

(2) 在整个过程中的焦耳热损耗。(当回路中有电流时, 该电流所产生的磁场可忽略不计)  
 解析: 当开关 S 先合上 1 时, 电源给电容器充电, 当开关 S 再合上 2 时, 电容器通过导体小棒放电, 在放电过程中, 导体小棒受到安培力作用, 在安培力作用下, 两小棒开始运动, 运动速度最后均达到最大。

(1) 设两小棒最终的速度的大小为  $v$ , 则分别为  $L_1$ 、 $L_2$  为研究对象得:

$$F_i \Delta t_i = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \quad \sum F_{i1} \Delta t_{i1} = m_1 v \quad \text{①} \quad \text{同理得:} \quad \sum F_{i2} \Delta t_{i2} = m_2 v \quad \text{②}$$

由①、②得:  $\sum F_{i1} \Delta t_{i1} + \sum F_{i2} \Delta t_{i2} = (m_1 + m_2)v$

又因为  $F_{i1} = Bli_1 \quad \Delta t_{i1} = \Delta t_{i2} \quad F_{i2} = Bli_2 \quad i_1 + i_2 = i$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \sum BLi_1 \Delta t_{i1} + \sum BLi_2 \Delta t_{i2} &= BL \sum (i_1 + i_2) \Delta t_i = BL \sum i \Delta t_i \\ &= BL(Q - q) = (m_1 + m_2)v \end{aligned}$$

而  $Q = CE \quad q = CU' = CBLv$

所以解得小棒的最终速度  $v = \frac{BLCE}{(m_1 + m_2) + CB^2 L^2}$

(2) 因为总能量守恒, 所以  $\frac{1}{2} CE^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2)v^2 + Q_{\text{热}}$

$$\begin{aligned} \text{即产生的热量} \quad Q_{\text{热}} &= \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)v^2 \\ &= \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C} (CBLv)^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)v^2 \\ &= \frac{1}{2} CE^2 - \frac{1}{2} [CB^2 L^2 - (m_1 + m_2)] \frac{BLCE}{(m_1 + m_2) + CB^2 L^2} \\ &= \frac{(m_1 + m_2)CE^2}{2(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)} \end{aligned}$$

## 针对训练

1. 某地强风的风速为  $v$ , 设空气的密度为  $\rho$ , 如果将通过横截面积为  $S$  的风的动能全部转化为电能, 则其电功率为多少?
2. 如图 3—19 所示, 山高为  $H$ , 山顶  $A$  和水平面上  $B$  点的水平距离为  $s$ . 现在修一条冰道  $ACB$ , 其中  $AC$  为斜面, 冰道光滑,

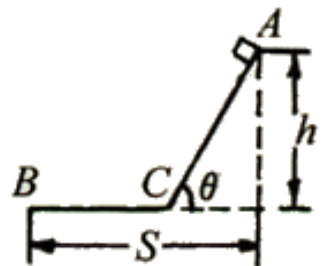


图 3—19

物体从 A 点由静止释放, 用最短时间经 C 到 B, 不计过 C 点的能量损失. 问 AC 和水平方向的夹角  $\theta$  多大? 最短时间为多少?

3. 如图 3—21 所示, 在绳的 C 端以速度  $v$  匀速收绳从而拉动低处的物体 M 水平前进, 当绳 AO 段也水平恰成  $\alpha$  角时, 物体 M 的速度多大?

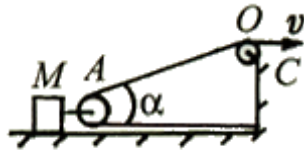


图 3-21

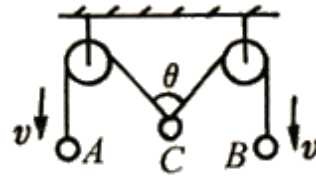


图 3-22

4. 如图 3—22 所示, 质量相等的两个小球 A 和 B 通过轻绳绕过两个光滑的定滑轮带动 C 球上升, 某时刻连接 C 球的两绳的夹角为  $\theta$ , 设 A、B 两球此时下落的速度为  $v$ , 则 C 球上升的速度多大?

5. 质量为  $M$  的平板小车在光滑的水平面上以  $v_0$  向左匀速运动, 一质量为  $m$  的小球从高  $h$  处自由下落, 与小车碰撞后反弹上升的高度仍为  $h$ . 设  $M \gg m$ , 碰撞弹力  $N \gg mg$ , 球与车之间的动摩擦因数为  $\mu$ , 则小球弹起后的水平速度可能是 ( )

- A.  $\sqrt{2gh}$       B. 0      C.  $2\mu\sqrt{2gh}$       D.  $v_0$

6. 半径为  $R$  的刚性球固定在水平桌面上. 有一质量为  $M$  的圆环状均匀弹性细绳圈, 原长  $2\pi a$ ,  $a=R/2$ , 绳圈的弹性系数为  $k$  (绳伸长  $s$  时, 绳中弹性张力为  $ks$ ). 将绳圈从球的正上方轻放到球上, 并用手扶着绳圈使其保持水平, 并最后停留在某个静力平衡位置. 考虑重力, 忽略摩擦.

- (1) 设平衡时弹性绳圈长  $2\pi b$ ,  $b=\sqrt{2}a$ , 求弹性系数  $k$ ; (用  $M$ 、 $R$ 、 $g$  表示,  $g$  为重力加速度)

- (2) 设  $k=Mg/2\pi^2R$ , 求绳圈的最后平衡位置及长度.

7. 一截面呈圆形的细管被弯成大圆环, 并固定在竖直平面内, 在环内的环底 A 处有一质量为  $m$ 、直径比管径略小的小球, 小球上连有一根穿过环顶 B 处管口的轻绳, 在外力  $F$  作用下小球以恒定速度  $v$  沿管壁做半径为  $R$  的匀速圆周运动, 如图 3—23 所示. 已知小球与管内壁中位于大环外侧部分的动摩擦因数为  $\mu$ , 而大环内侧部分的管内壁是光滑的. 忽略大环内、外侧半径的差别, 认为均为  $R$ . 试求小球从 A 点运动到 B 点过程中  $F$  做的功  $W_F$ .

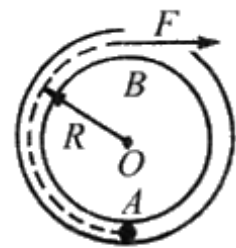


图 3-23

8. 如图 3—24, 来自质子源的质子 (初速度为零), 经一加速电压为  $800\text{kV}$  的直线加速器加速, 形成电流为  $1.0\text{mA}$  的细柱形质子流. 已知质子电荷  $e=1.60 \times 10^{-19}\text{C}$ . 这束质子流每秒打到靶上的质子数为 \_\_\_\_\_. 假设分布在质子源到靶之间的加速电场是均匀的, 在质子束中与质子源相距  $l$

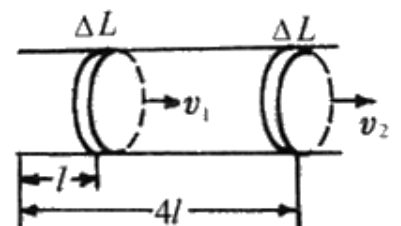


图 3-24

和  $4l$  的两处，各取一段极短的相等长度的质子流，其中质子数分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，则  $n_1:n_2$ \_\_\_\_\_.

9. 如图 3—25 所示，电量  $Q$  均匀分布在一个半径为  $R$  的细圆环上，求圆环轴上与环心相距为  $x$  的点电荷  $q$  所受的力的大小.

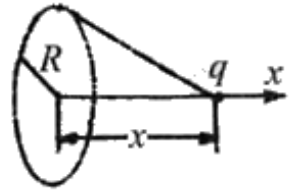


图 3-25

10. 如图 3—26 所示，一根均匀带电细线，总电量为  $Q$ ，弯成半径为  $R$  的缺口圆环，在细线的两端处留有很小的长为  $\Delta L$  的空隙，求圆环中心处的场强.

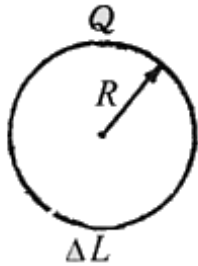


图 3-26

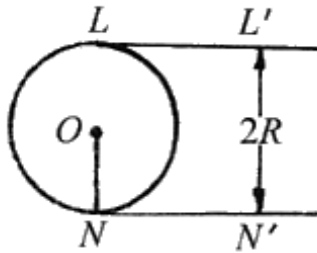


图 3-27

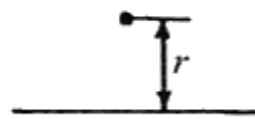


图 3-28

11. 如图 3—27 所示，两根均匀带电的半无穷长平行直导线（它们的电荷线密度为  $\eta$ ），端点连线  $LN$  垂直于这两直导线，如图所示.  $LN$  的长度为  $2R$ . 试求在  $LN$  的中点  $O$  处的电场强度.



图 3-29

12. 如图 3—28 所示，有一均匀带电的无穷长直导线，其电荷线密度为  $\eta$ . 试求空间任意一点的电场强度. 该点与直导线间垂直距离为  $r$ .

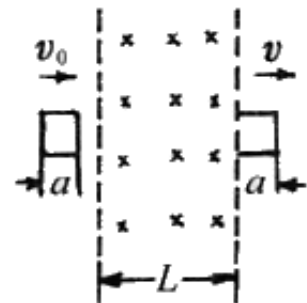


图 3-30

13. 如图 3—29 所示，半径为  $R$  的均匀带电半球面，电荷面密度为  $\delta$ ，求球心  $O$  处的电场强度.

14. 如图 3—30 所示，在光滑的水平面上，有一垂直向下的匀强磁场分布在宽度为  $L$  的区域内，现有一个边长为  $a$  ( $a < L$ )，质量为  $m$  的正方形闭合线框以初速  $v_0$  垂直磁场边界滑过磁场后，速度变为  $v$  ( $v < v_0$ )，求：

(1) 线框在这过程中产生的热量  $Q$ ;

(2) 线框完全进入磁场后的速度  $v'$  .

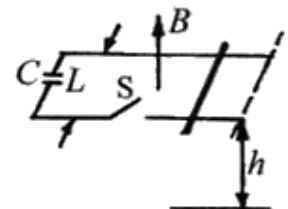


图 3-31

15. 如图 3—31 所示，在离水平地面  $h$  高的平台上有一相距  $L$  的光滑轨道，左端接有已充电的电容器，电容为  $C$ ，充电后两端电压为  $U_1$ . 轨道平面处于垂直向上的磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中. 在轨道右端放一质量为  $m$  的金属棒，当闭合  $S$ ，棒离开轨道后电容器的两极电压变为  $U_2$ ，求棒落在离平台多远的位置.

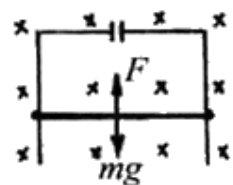


图 3-32

16. 如图 3—32 所示, 空间有一水平方向的匀强磁场, 大小为  $B$ , 一光滑导轨竖直放置, 导轨上接有一电容为  $C$  的电容器, 并套一可自由滑动的金属棒, 质量为  $m$ , 释放后, 求金属棒的加速度  $a$ .

答案:

$$1. \frac{1}{2}S\rho v^3 \quad 2. \theta = 60^\circ \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{s}{2h} \right) \quad 3. v/(1 + \cos x) \quad 4. v/\cos \frac{\theta}{2} \quad 5. CD$$

$$6. (1) \frac{(\sqrt{2} + 1)Mg}{2\pi^2 R} \quad (2) \text{绳圈掉地上, 长度为原长} \quad 7. 2mgR + \mu m \pi v^2$$

$$8. 6.25 \times 10^{15}, 2:1 \quad 9. K \frac{Qqx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad 10. K \frac{Q\Delta l}{2\rho R^3} \quad 11. \frac{2k\lambda}{R} \quad 12. \frac{2k\lambda}{r}$$

$$13. 2\pi R\sigma \quad 14. \frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2), v' = \frac{v + v_0}{2} \quad 15. \frac{CBL(u_1 - u_2)}{m} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad 16. a = \frac{mg}{m + CB^2 L^2}$$



## 四、等效法

### 方法简介

在一些物理问题中，一个过程的发展、一个状态的确定，往往是由多个因素决定的，在这一决定中，若某些因素所起的作用和另一些因素所起的作用相同，则前一些因素与后一些因素是等效的，它们便可以互相代替，而对过程的发展或状态的确定，最后结果并不影响，这种以等效为前提而使某些因素互相代替来研究问题的方法就是等效法。

等效思维的实质是在效果相同的情况下，将较为复杂的实际问题变换为简单的熟悉问题，以便突出主要因素，抓住它的本质，找出其中规律。因此应用等效法时往往是用较简单的因素代替较复杂的因素，以使问题得到简化而便于求解。

### 赛题精讲

**例 1:** 如图 4—1 所示，水平面上，有两个竖直的光滑墙壁 A 和 B，相距为  $d$ ，一个小球以初速度  $v_0$  从两墙之间的 O 点斜向上抛出，与 A 和 B 各发生一次弹性碰撞后，正好落回抛出点，求小球的抛射角  $\theta$ 。

**解析:** 将弹性小球在两墙之间的反弹运动，可等效为一个完整的斜抛运动（见图）。所以可用解斜抛运动的方法求解。

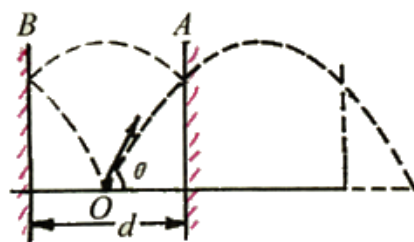


图 4—1

$$\text{由题意得: } 2d = v_0 \cos \theta \cdot t = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\text{可解得抛射角: } \theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2gd}{v_0^2}$$

**例 2:** 质点由 A 向 B 做直线运动，A、B 间的距离为  $L$ ，已知质点在 A 点的速度为  $v_0$ ，加速度为  $a$ ，如果将  $L$  分成相等的  $n$  段，质点每通过  $\frac{L}{n}$  的距离加速度均增加  $\frac{a}{n}$ ，求质点到达 B 时的速度。

**解析:** 从 A 到 B 的整个运动过程中，由于加速度均匀增加，故此运动是非匀变速直线运动，而非匀变速直线运动，不能用匀变速直线运动公式求解，但若能将此运动用匀变速直线运动等效代替，则此运动就可以求解。

因加速度随通过的距离均匀增加，则此运动中的平均加速度为：

$$a_{\text{平}} = \frac{a_{\text{初}} + a_{\text{末}}}{2} = \frac{a + a + \frac{(n-1)a}{n}}{2} = \frac{3an - a}{2n} = \frac{(3n-1)a}{2n}$$

$$\text{由匀变速运动的导出公式得: } 2a_{\text{平}}L = v_B^2 - v_0^2$$

$$\text{解得: } v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{(3n-1)aL}{n}}$$

**例 3:** 一只老鼠从老鼠洞沿直线爬出, 已知爬出速度  $v$  的大小与距老鼠洞中心的距离  $s$  成反比, 当老鼠到达距老鼠洞中心距离  $s_1 = 1\text{m}$  的 A 点时, 速度大小为  $v_1 = 20\text{cm/s}$ , 问当老鼠到达距老鼠洞中心  $s_2 = 2\text{m}$  的 B 点时, 其速度大小  $v_2 = ?$  老鼠从 A 点到达 B 点所用的时间  $t = ?$

**解析:** 我们知道当汽车以恒定功率行驶时, 其速度  $v$  与牵引力  $F$  成反比, 即  $v = \frac{P}{F}$ , 由此可把老鼠的运动等效为在外力以恒定的功率牵引下的弹簧的运动。

$$\text{由此分析, 可写出: } v = \frac{P}{F} = \frac{P}{kx}$$

$$\text{当 } x = s_1 \text{ 时, } v = v_1$$

$$\text{将其代入上式求解, 得: } k = \frac{P}{v_1 s_1} = \frac{P}{v_2 s_2}$$

$$\text{所以老鼠到达 B 点时的速度 } v_2 = \frac{s_1}{s_2} v_1 = \frac{1}{2} \times 20 = 10\text{cm/s}$$

$$\text{再根据外力做的功等于此等效弹簧弹性势能的增加, } Pt = \frac{1}{2} k s_2^2 - \frac{1}{2} k s_1^2$$

$$\text{代入有关量可得: } Pt = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{v_1 s_1} (s_2^2 - s_1^2)$$

$$\text{由此可解得: } t = \frac{s_2^2 - s_1^2}{2s_1 v_1} = \frac{2^2 - 1^2}{2 \times 1 \times 0.2} = 7.5\text{s}$$

(此题也可以用图像法、类比法求解。)

**例 4:** 如图 4—2 所示, 半径为  $r$  的铅球内有一半径为  $\frac{r}{2}$  的球形空腔, 其表面与球面相切, 铅球的质量为  $M$ 。在铅球和空腔的中心连线上, 距离铅球中心  $L$  处有一质量为  $m$  的小球 (可以看成质点), 求铅球对小球的引力。

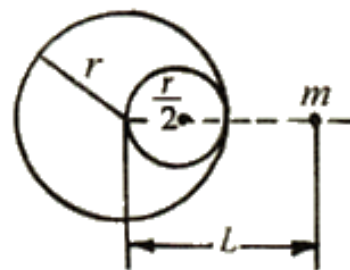


图 4—2

**解析:** 因为铅球内部有一空腔, 不能把它等效成位于球心的质点。我们设想在铅球的空腔内填充一个密度与铅球相同的小铅球  $\Delta M$ , 然后在对于小球  $m$  对称的另一侧位置放另一个相同的小铅球  $\Delta M$ , 这样加入的两个小铅球对小球  $m$  的引力可以抵消, 就这样将空腔铅球变成实心铅球, 而结果是等效的。

带空腔的铅球对  $m$  的引力等效于实心铅球与另一侧  $\Delta M$  对  $m$  的引力之和。设空腔铅球对  $m$  的引力为  $F$ , 实心铅球与  $\Delta M$  对  $m$  的引力分别为  $F_1$ 、 $F_2$ 。则

$$F = F_1 - F_2 \quad \text{①}$$

经计算可知:  $\Delta M = \frac{1}{7} M$ , 所以:

$$F_1 = G \frac{m(M + \Delta M)}{L^2} = \frac{8GmM}{7L^2} \quad \text{②}$$

$$F_2 = G \frac{m\Delta M}{(L - \frac{r}{2})^2} = \frac{GmM}{7(L - \frac{r}{2})^2} \quad (3)$$

将②、③代入①式，解得空腔铅球对小球的引力为：

$$F = F_1 - F_2 = GmM \left[ \frac{8}{7L^2} - \frac{1}{7(L - \frac{r}{2})^2} \right]$$

**例 5：**如图 4-3 所示，小球长为  $L$  的光滑斜面顶端自由下滑，滑到底端时与挡板碰撞并反向弹回，若每次与挡板碰撞后的速度大小为碰撞前速度大小的  $\frac{4}{5}$ ，求小球从开始下滑到最终停止于斜面下端时，小球总共通过的路程。

**解析：**小球与挡板碰撞后的速度小于碰撞前的速度，说明碰撞过程中损失能量，每次反弹距离都不及上次大，小球一步一步接近挡板，最终停在挡板处。我们可以分别计算每次碰撞后上升的距离  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $\dots$ 、 $L_n$ ，则小球总共通过的路程为  $s = 2(L_1 + L_2 + \dots + L_n) + L$ ，然后用等比数列求和公式求出结果，但是这种解法很麻烦。

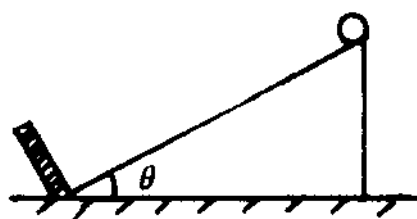


图 4—3

我们假设小球与挡板碰撞不损失能量，其原来损失的能量看做小球运动过程中克服阻力做功而消耗掉，最终结果是相同的，而阻力在整个运动过程中都有，就可以利用摩擦力做功求出路程。

设第一次碰撞前后小球的速度分别为  $v$ 、 $v_1$ ，碰撞后反弹的距离为  $L_1$ ，则：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin\theta, \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = mgL_1\sin\theta$$

$$\text{其中 } v_1 = \frac{4}{5}v, \text{ 所以: } \frac{L_1}{L} = \frac{v_1^2}{v^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\text{碰撞中损失的动能为: } \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{16}{25}\right)$$

$$\text{根据等效性有: } f(L_1 + L) = \Delta E_k, \text{ 解得等效摩擦力 } f = \frac{9}{41}mg\sin\theta$$

通过这个结果可以看出等效摩擦力与下滑的长度无关，所以在以后的运动过程中，等效摩擦力都相同。以整个运动为研究过程，有： $f \cdot s = mgL \cdot \sin\theta$

$$\text{解出小球总共通过的总路程为: } s = \frac{41}{9}L$$

(此题也可以通过递推法求解，读者可试试。)

**例 6：**如图 4—4 所示，用两根等长的轻质细线悬挂一个小球，设  $L$  和  $\alpha$  已知，当小球垂直于纸面做简谐运动时，其周期为\_\_\_\_\_。

**解析：**此题是一个双线摆，而我们知道单摆的周期，若将又线摆摆长等效为单摆摆长，则双线摆的周期就可以求出来了。

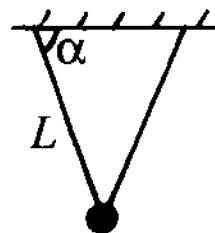


图 4—4

将双线摆摆长等效为单摆摆长  $L' = L \sin \alpha$ ，则此双线摆的周期为：

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L \sin \alpha}{g}}$$

**例 8：**如图 4—5 所示，由一根长为  $L$  的刚性轻杆和杆端的小球组成的单摆做振幅很小的自由振动。如果杆上的中点固定另一个相同的小球，使单摆变成一个异形复摆，求该复摆的振动周期。

**解析：**复摆这一物理模型属于大学普通物理学的内容，中学阶段限于知识的局限，不能直接求解。如能进行等效操作，将其转化成中学生熟悉的单摆模型，则求解周期将变得简捷易行。

设想有一摆长为  $L_0$  的辅助单摆，与原复摆等周期，两摆分别从摆角  $\alpha$  处从静止开始摆动，摆动到与竖直方向夹角为  $\beta$  时，具有相同的角速度  $\omega$ ，对两摆分别应用机械能守恒定律，于是得：

$$mgl(\cos\beta - \cos\alpha) + mg \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega l}{2}\right)^2$$

$$\text{对单摆，得：} mgl_0(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}m(\omega l_0)^2$$

$$\text{联立两式求解，得：} l_0 = \frac{5}{6}l$$

$$\text{故原复摆的周期为：} T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g}}$$

**例 9：**粗细均匀的 U 形管内装有某种液体，开始静止在水平面上，如图 4—6 所示，已知： $L = 10\text{cm}$ ，当此 U 形管以  $4\text{m/s}^2$  的加速度水平向右运动时，求两竖直管内液面的高度差。（ $g = 10\text{m/s}^2$ ）

**解析：**当 U 形管向右加速运动时，可把液体当做放在等效重力场中， $g'$  的方向是等效重力场的竖直方向，这时两边的液面应与等效重力场的水平方向平行，即与  $g'$  方向垂直。

设  $g'$  的方向与  $g$  的方向之间夹角为  $\alpha$ ，则：

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} = 0.4$$

由图 4—6 可知液面与水平方向的夹角为  $\alpha$ ，

所以， $\Delta h = L \cdot \tan\alpha = 10 \times 0.4 = 4\text{cm} = 0.04\text{m}$

**例 10：**光滑绝缘的圆形轨道竖直放置，半径为  $R$ ，在其最低点 A 处放一质量为  $m$  的带电小球，整个空间存在匀强电场，使小球受到电场力的大小为  $\frac{\sqrt{3}}{3}mg$ ，方向水平向右，现给小球一个水平向右的初速度  $v_0$ ，使小球沿轨道向上运动，若小球刚好能做完整的圆周运动，求  $v_0$ 。

**解析：**小球同时受到重力和电场力作用，这时也可以认为小球处在等效重力场中。小

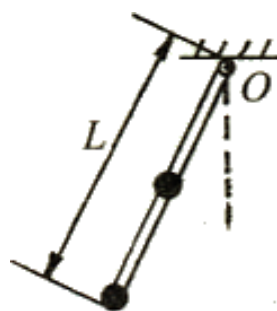


图 4—5

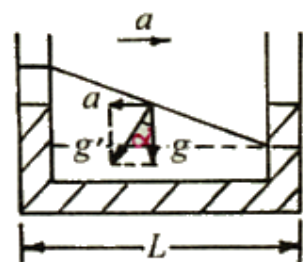


图 4—6

球受到的等效重力为:

$$G' = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}mg\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg$$

$$\text{等效重力加速度: } g' = \frac{G'}{m} = \frac{2\sqrt{3}}{3}g$$

与竖直方向的夹角  $\theta = 30^\circ$  , 如图 4—7 甲所示。所以 B 点为等效重力场中轨道的最高点, 如图 4—7, 由题意, 小球刚好能做完整的圆周运动, 小球运动到 B 点时的速度  $v_B = \sqrt{g'R}$

在等效重力场中应用机械能守恒定律:

$$\frac{1}{2}m v_0^2 = mg' (R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}m v_B^2$$

将  $g'$ 、 $v_B$  分别代入上式, 解得给小球的初速度为:

$$v_0 = \sqrt{2(\sqrt{3}+1)gR}$$

**例 11:** 空间某一体积为  $V$  的区域内的平均电场强度 ( $E$ ) 的定义为:

$$E = \frac{E_1\Delta V_1 + E_2\Delta V_2 + \dots + E_n\Delta V_n}{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

如图 4—8 所示, 今有一半径为  $a$  原来不带电的金属球, 现使它处于电量为  $q$  的点电荷的电场中, 点电荷位于金属球外, 与球心的距离为  $R$  , 试计算金属球表面的感应电荷所产生的电场在此球内的平均电场强度。

**解析:** 金属球表面的感应电荷产生的球内电场, 由静电平衡知识可知等于电量为  $q$  的点电荷在金属球内产生的电场, 其大小相等, 方向相反, 因此求金属球表面的感应电荷产生的电场, 相当于求点电荷  $q$  在金属球内产生的电场。

由平均电场强度公式得:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n E_i\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n E_i\Delta V_i = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\Delta V_i}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{kq}{r_i^2} \frac{\Delta V_i}{V}$$

设金属球均匀带电, 带电量为  $q$  , 其密度为  $\rho = \frac{q}{V}$  , 则有:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{k_1\rho\Delta V_i}{r_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{k\Delta q_i}{r_i^2}$$

$\sum_{i=1}^n \frac{k\Delta q_i}{r_i^2}$  为带电球体在  $q$  所在点产生的场强, 因而有  $E = \frac{kq}{R^2}$  , 方向从  $O$  指向  $q$  。

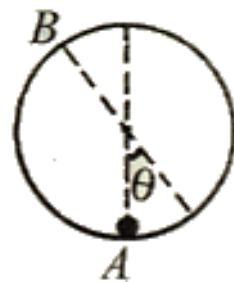


图 4—7

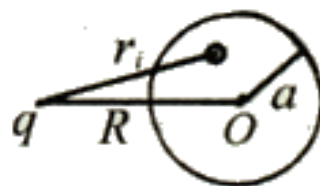


图 4—8

**例 11:** 质量为  $m$  的小球带电量为  $Q$ ，在场强为  $E$  的水平匀强电场中获得竖直向上的初速度为  $v_0$ 。若忽略空气阻力和重力加速度  $g$  随高度的变化，求小球在运动过程中的最小速度。

**解析:** 若把电场力  $E_q$  和重力  $mg$  合成一个力，则小球相当于只受一个力的作用，由于小球运动的初速度与其所受的合外力之间成一钝角，因此可以把小球的运动看成在等效重力  $G'$ （即为合外力）作用下的斜抛运动，而做斜抛运动的物体在其速度方向与  $G'$  垂直时的速度为最小，也就是斜抛运动的最高点，由此可见用这种等效法可以较快求得结果。

电场力和重力的合力方向如图 4—9 所示，

由图所示的几何关系可知： $\tan\theta = \frac{mg}{qE}$

小球从  $O$  点抛出时，在  $y$  方向上做匀减速直线运动，在  $x$  轴方向上做匀速直线运动。当在  $y$  轴方向上的速度为零时，小球只具有  $x$  轴方向上的速度，此时小球的速度为最小值，所以：

$$v_{\min} = v_0 \cos\theta = \frac{qEv_0}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}$$

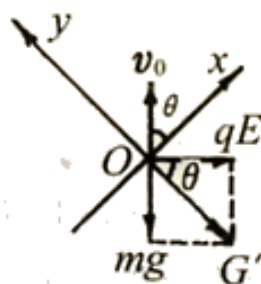


图 4—9

（此题也可以用矢量三角形求极值的方法求解，读者可自行解决。）

**例 12:** 如图 4—10 所示， $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  为定值电阻，但阻值未知， $R_x$  为电阻箱。当  $R_x$  为  $R_{x1} = 10\Omega$  时，通过它的电流  $I_{x1} = 1.0A$ ；当  $R_x$  为  $R_{x2} = 18\Omega$  时，通过它的电流  $I_{x2} = 0.6A$ 。则当  $I_{x3} = 0.1A$  时，求电阻  $R_{x3}$ 。

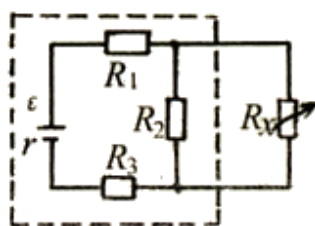


图 4—10

**解析:** 电源电动势  $\epsilon$ 、内电阻  $r$ 、电阻  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  均未知，按题目给的电路模型列式求解，显然方程数少于未知量数，于是可采取变换电路结构的方法。

将图 4—10 所示的虚线框内电路看成新的电源，则等效电路如图 4—10 甲所示，电源的电动势为  $\epsilon'$ ，内电阻为  $r'$ 。根据电学知识，新电路不改变  $R_x$  和  $I_x$  的对应关系，有：

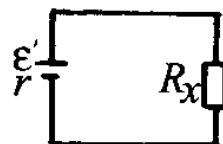


图 4—10 甲

$$\epsilon' = I_{x1}(R_{x1} + r') \quad \text{①}$$

$$\epsilon' = I_{x2}(R_{x2} + r') \quad \text{②}$$

$$\epsilon' = I_{x3}(R_{x3} + r') \quad \text{③}$$

由①、②两式，得： $\epsilon' = 12V$ ， $r' = 2\Omega$

代入③式，可得： $R_{x3} = 118\Omega$

**例 13:** 如图 4—11 所示的甲、乙两个电阻电路具有这样的特性：对于任意阻值的  $R_{AB}$ 、 $R_{BC}$  和  $R_{CA}$ ，相应的电阻  $R_a$ 、 $R_b$  和  $R_c$  可确定。因此在对对应点  $A$  和  $a$ ， $B$  和  $b$ 、 $C$  和  $c$  的电位是相同的，并且，流入对应点（例如  $A$  和  $a$ ）的电流也相同，

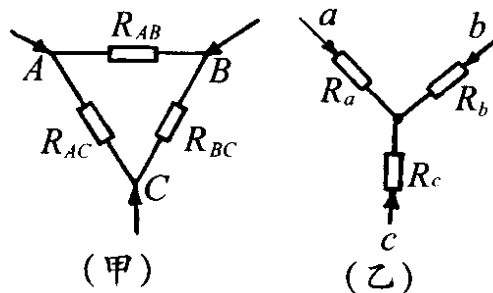


图 4—11

利用这些条件证明： $R_a = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$ ，并证明

对  $R_b$  和  $R_c$  也有类似的结果，利用上面的结果求图 4—11 甲中 P 和 Q 两点之间的电阻。

**解析：**图 4—11 中甲、乙两种电路的接法分别叫三角形接法和星形接法，只有这两种电路任意两对应点之间的总电阻部分都相等，两个电路可以互相等效，对应点 A、a、B、b 和 C、c 将具有相同的电势。

由  $R_{ab} = R_{AB}$ ， $R_{ac} = R_{AC}$ ， $R_{bc} = R_{BC}$ ，对 ab 间，有：

$$R_a + R_b = \left( \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC} + R_{BC}} \right)^{-1} = \frac{R_{AB}R_{CA} + R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad ①$$

同样，ac 间和 bc 间，也有：

$$R_a + R_c = \left( \frac{1}{R_{CA}} + \frac{1}{R_{AB} + R_{BC}} \right)^{-1} = \frac{R_{AB}R_{CA} + R_{BC}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad ②$$

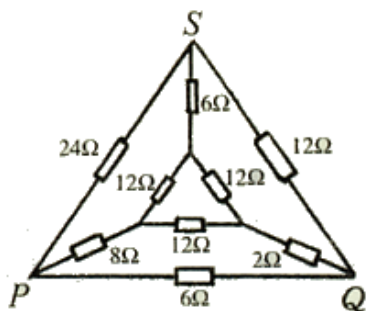
$$R_b + R_c = \left( \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{AB} + R_{CA}} \right)^{-1} = \frac{R_{AB}R_{BC} + R_{BC}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad ③$$

将①+②-③得：
$$R_a = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

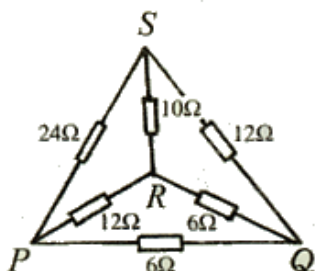
再通过①-②+③和③+②-①，并整理，就得到  $R_b$  和  $R_c$  的表达式——

$$R_b = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, \quad R_c = \frac{R_{BC}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

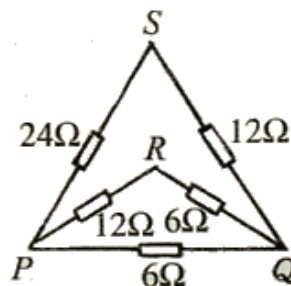
下面利用以上结果求图 4—12 甲中 P 和 Q 两点之间的电阻。



4—12 甲



4—12 乙



4—12 丙

用星形接法代替三角形接法，可得图 4—12 乙所示电路，PRQS 回路是一个平衡的惠斯登电桥，所以在 RS 之间无电流，因此它与图 4—12 丙所示电路是等效的。因此 PQ 之间的总电阻  $R_{PQ}$  可通过这三个并联电阻求和得到。所以：

$$R_{PQ} = \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \right)^{-1} = 4\Omega$$

**例 14：**如图 4—13 所示，放在磁感应强度  $B = 0.6T$  的匀强磁场中的长方形金属线框 abcd，框平面与磁感应强度方向垂直，其中 ab 和 bc 各是一段粗细均匀的电阻丝  $R_{ab} = 5\Omega$ ， $R_{bc} = 3\Omega$ ，线框其余部分电阻忽略不计。现让导体 EF 搁置在 ab、cd 边上，其有效长度  $L = 0.5m$ ，且与 ab 垂直，阻值  $R_{EF} = 1\Omega$ ，并使其从金属框 ad 端以恒定的速度  $V = 10m/s$  向右滑动，当 EF 滑过 ab 长的  $\frac{4}{5}$  距离时，问流过 aE 端的电流多大？

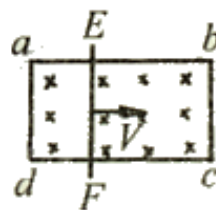


图 4—13

**解析：**EF 向右运动时，产生感应电动势  $\varepsilon$ ，当 EF 滑过 ab 长的  $\frac{4}{5}$  时，电路图可等效为

如图 4—13 甲所示的电路。

根据题设可以求出 EF 产生的感应电动势  $\varepsilon$

$$\varepsilon = BLV = 0.6 \times 0.5 \times 10 = 3.0\text{V}$$

$$R_{aE} = 4\Omega, R_{Eb} = 1\Omega, R_{bc} = 3\Omega$$

此时电源内阻为导体 EF 的电阻， $r = R_{EF} = 1\Omega$ ，则电路中的总电阻为：

$$R = r + \frac{R_{aE} \cdot (R_{Eb} + R_{bc})}{R_{aE} + (R_{Eb} + R_{bc})} = 3\Omega$$

$$\text{电路中的总电流为：} I = \frac{\varepsilon}{R} = 1.0\text{A}$$

$$\therefore \text{通过 aE 的电流为：} I_{aE} = 0.5\text{A}$$

**例 15：**有一薄平凹透镜，凹面半径为 0.5m，玻璃的折射率为 1.5，且在平面上镀一层反射层，如图 4—14 所示，在此系统的左侧主轴上放一物 S，S 距系统 1.5m，问 S 成像于何处？

**解析：**本题可等效为物点 S 先经薄平凹透镜成像，其像为平面镜的物，平面镜对物成像又为薄平凹透镜成像的物，根据成像规律，逐次求出最终像的位置。

根据以上分析，首先考虑物 S 经平凹透镜的成像  $S'$ ，

$$\text{根据公式 } \frac{1}{P'_1} + \frac{1}{P} = \frac{1}{f_1}$$

$$\text{其中 } \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.5-1)\left(\frac{1}{-0.5} - \frac{1}{\infty}\right) = -1\text{m}^{-1}$$

$$\text{故有：} \frac{1}{P'_1} + \frac{1}{1.5} = -1, P'_1 = -0.6\text{m}$$

成像在左侧，为虚像，该虚像再经平凹透镜成像  $S''$  后，其像距为：

$$P'_2 = -P_2 = -P'_1 = 0.6\text{m}$$

成像在右侧，为虚像，该虚像再经平凹透镜成像  $S'''$ ，有：

$$\frac{1}{P_3} + \frac{1}{P'_3} = \frac{1}{f}, \text{ 其中 } P_3 = P'_2 = 0.6\text{m}, \frac{1}{f} = -1\text{m}^{-1}$$

$$\text{故：} \frac{1}{P_3} + \frac{1}{0.6} = -1, \text{ 解得：} P'_3 = -0.375\text{m}$$

即成虚像于系统右侧 0.375m 处。

(此题还可用假设法求解。)

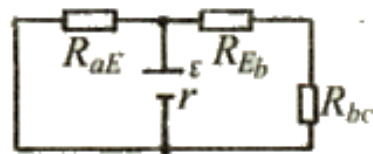


图 4—13 甲

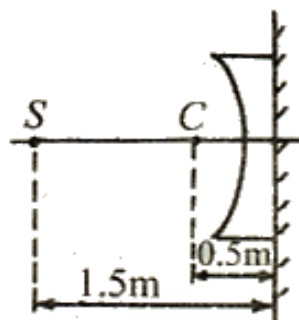


图 4—14



### 针对训练

1. 半径为  $R$  的金属球与大地相连，距球心  $L$  处有一带电量为  $+q$  的点电荷如图 4—15 所示。试求：

- (1) 球上感应电荷的总电量；
- (2)  $q$  受到的库仑力。



图 4—15

2. 如图 4—16 所示，设  $R_1 = 40\Omega$ ， $R_2 = 80\Omega$ ， $R_3 = 5\Omega$ ， $R_4 = 10\Omega$ ， $R_5 = 40\Omega$ ， $R_6 = 99\Omega$ ， $R_7 = 101\Omega$ ， $R_8 = 20\Omega$ ，求 AB 之间的电阻。

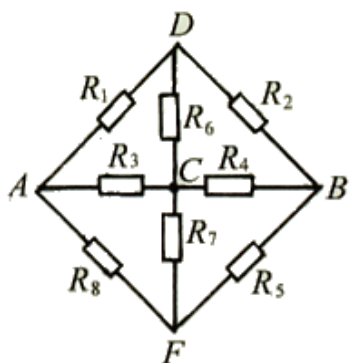


图 4—16

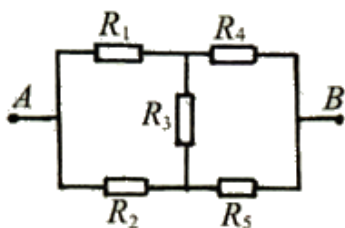


图 4—17

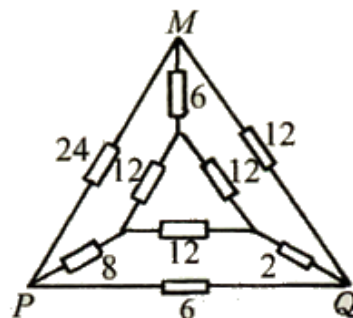


图 4—18

3. 电路如图 4—17 所示， $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 3\Omega$  时， $R_2 = 1\Omega$ ，求 AB 间的等效电阻。
4. 有 9 个电阻联成如图 4—18 电路，图中数字的单位是  $\Omega$ ，求 PQ 两点间的等效电阻。
5. 如图 4—19 所示电路，求 AB 两点间的等效电阻。

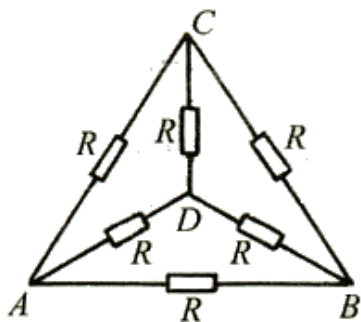


图 4—19

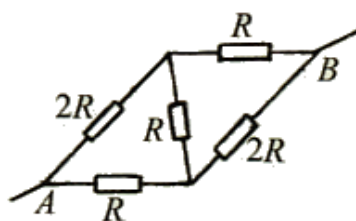


图 4—20

6. 如图 4—20 所示，由 5 个电阻联成的网络，试求 AB 两点间的等效电阻。
7. 由 7 个阻值均为  $r$  的电阻组成的网络元如图 4—21 甲所示。由这种网络元彼此连接形成的无限梯形网络如图 4—21 乙所示。试求 P、Q 两点之间的等效电阻。

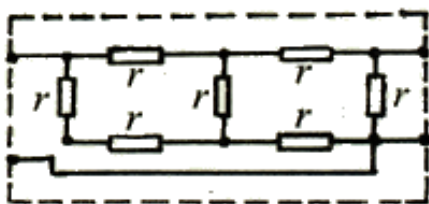


图 4—21 甲

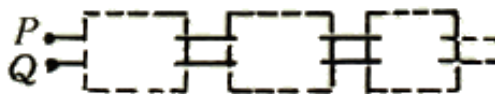


图 4—21 乙

8. 图 4—22 表示一交流电的电流随时间而变化的图像，此交流电流有效值是 ( )  
 A、 $5\sqrt{2}$  A                      B、5A                      C、 $3.5\sqrt{2}$  A                      D、3.5A

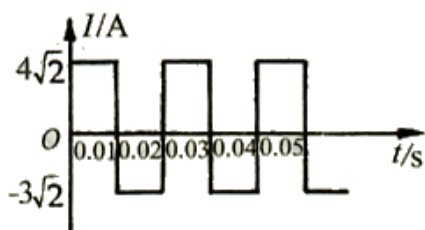


图 4—22

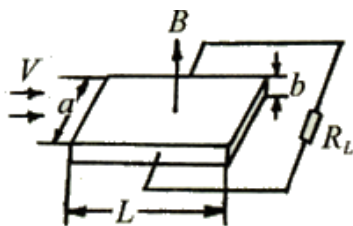


图 4—23

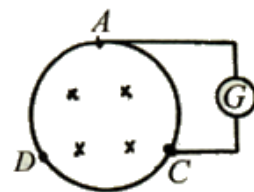


图 4—24

9. 磁流体发电机的示意图如图 4—23 所示，横截面为矩形的管道长为  $L$ ，宽为  $a$ ，高为  $b$ ，上下两个侧面是绝缘体，相距为  $a$  的两个侧面是电阻可忽略的导体，此两导体侧面与负载电阻  $R_L$  相连。整个管道放在一个匀强磁场中，磁感应强度的大小为  $B$ ，方向垂直于上下侧面向上。现有电离气体（正、负带电粒子）持续稳定的流经管道，为了使问题简化，设横截面上各点流速相同。已知流速与电离气体所受的压力成正比；且无论有无磁场存在时，都维持管道两端电离气体的压强差皆为  $p$ 。设无磁场存在时电离气体的流速为  $v_0$ 。求有磁场存在时流体发电机的电动势的大小  $\varepsilon$ 。已知电离气体的平均电阻率为  $\rho$ 。

10. 一匀质细导线圆环，总电阻为  $R$ ，半径为  $a$ ，圆环内充满方向垂直于环面的匀强磁场，磁场以速率  $K$  均匀地随时间增强，环上的  $A$ 、 $D$ 、 $C$  三点位置对称。电流计  $G$  连接  $A$ 、 $C$  两点，如图 4—24 所示，若电流计内阻为  $R_G$ ，求通过电流计的电流大小。

11. 固定在匀强磁场中的正方形导线框  $abcd$ ，各边长为  $L_1$ ，其中  $ab$  是一段电阻为  $R$  的均匀电阻丝，其余三边均为电阻可忽略的铜线，磁场的磁感应强度为  $B$ ，方向垂直纸面向里，现有一与  $ab$  段的材料、粗细、长度都相同的电阻丝  $PQ$  架在导线框上，如图 4—25 所示，以恒定的速度  $v$  从  $ad$  滑向  $bc$ ，当  $PQ$  滑过  $\frac{1}{3}L$  的距离时，通过  $aP$  段电阻丝的电流是多大？方向如何？

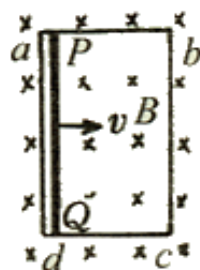


图 4—25

12. 如图 4—26 所示，一根长的薄导体平板沿  $x$  轴放置，板面位于水平位置，板的宽度为  $L$ ，电阻可忽略不计， $aebcfd$  是圆弧形均匀导线，其电阻为  $3R$ ，圆弧所在的平面与  $x$  轴垂直，圆弧的两端  $a$  和  $d$  与导体板的两个侧面相接触，并可在其上滑动。圆弧  $ae = eb = cf = fd = \frac{1}{8}$  圆周长，圆弧  $bc = \frac{1}{4}$  圆周长，

一内阻  $R_g = nR$  的体积很小的电压表位于圆弧的圆心  $O$  处，电压表的两端分别用电阻可以忽略的直导线与  $b$  和  $c$  点相连，整个装置处在磁感应强度为  $B$ 、方向竖直向上的匀强磁场中。当导体板不动而圆弧导线与电压表一起以恒定的速度  $v$  沿  $x$  轴方向平移运动时：

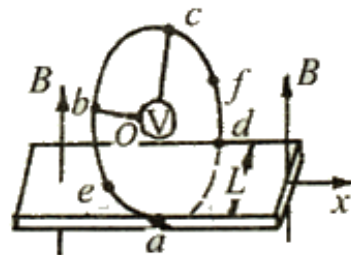


图 4—26

- (1) 求电压表的读数；
- (2) 求  $e$  点与  $f$  点的电势差 ( $U_e - U_f$ )。

13. 如图 4—27 所示, 长为  $2\pi a$ 、电阻为  $r$  的均匀细导线首尾相接形成一个半径为  $a$  的圆。现将电阻为  $R$  的电压表, 以及电阻可以忽略的导线, 按图 a 和图 b 所示的方式分别与圆的两点相连接。这两点之间的弧线所对圆心角为  $\theta$ 。若在垂直圆平面的方向上有均匀变化的匀强磁场, 已知磁感应强度的变化率为  $k$ , 试问: 在图 a、b 两种情形中, 电压表的读数各为多少?

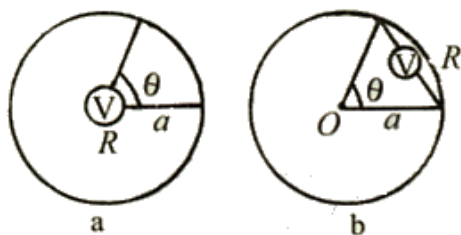


图 4—27

14. 一平凸透镜焦距为  $f$ , 其平面上镀了银, 现在其凸面一侧距它  $2f$  处, 垂直于主轴主置一高为  $H$  的物, 其下端位于透镜的主轴上如图 4—28 所示。

- (1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像, 并标明该像是虚、是实;
- (2) 用计算法求出此像的位置和大小。

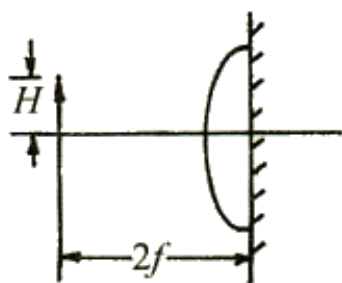


图 4—28

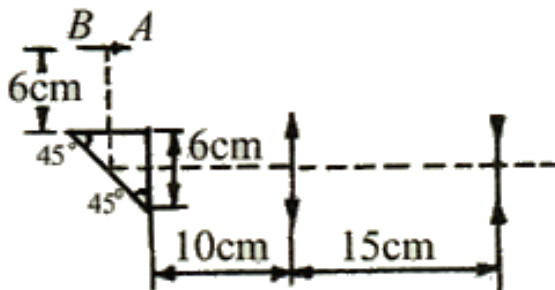


图 4—29

15. 如图 4—29 所示, 折射率  $n = 1.5$  的全反射棱镜上方  $6\text{cm}$  处放置一物体  $AB$ , 棱镜直角边长为  $6\text{cm}$ , 棱镜右侧  $10\text{cm}$  处放置一焦距  $f_1 = 10\text{cm}$  的凸透镜, 透镜右侧  $15\text{cm}$  处再放置一焦距  $f_2 = 10\text{cm}$  的凹透镜, 求该光学系统成像的位置和放大率。

### 参考答案

1、  $-\frac{R}{L}q$ ,  $\frac{KRL^2q}{(L^2 - R^2)^2}$

2、  $\frac{120}{11}\Omega$

3、  $\frac{7}{3}\Omega$

4、  $4\Omega$

5、  $0.5\Omega$

6、  $1.4\Omega$

7、  $1.32r$

8、 C

9、  $\frac{p}{\frac{p}{Bv_0 a} + \frac{BL}{\rho a + R_1 L b}}$

10、  $\frac{3\pi a^2 K}{qR_G + 2R}$

11、  $\frac{6BL_1 v}{11R}$ ，从 a 指向 P

12、 (1)  $\frac{nR\sqrt{2}Bav}{3nR + 2R}$ ； (2)  $(2 - \sqrt{2} + \frac{n+1}{3n+2}\sqrt{2})Bav$

13、 0，  $\frac{2\pi^2 a^2 k \sin \theta}{\theta(2\pi - \theta)\frac{r}{R} + 4\pi^2}$

14、 (1) 图略； (2) 距光心  $\frac{2}{3}f$ ，  $\frac{1}{3}H$

15、 凹透镜的右侧 10cm 处，放大率为 2。

# 高中奥林匹克物理竞赛解题方法

## 五、极限法

### 方法简介

极限法是把某个物理量推向极端，即极大和极小或极左和极右，并依此做出科学的推理分析，从而给出判断或导出一般结论。极限法在进行某些物理过程的分析时，具有独特作用，恰当应用极限法能提高解题效率，使问题化难为易，化繁为简，思路灵活，判断准确。因此要求解题者，不仅具有严谨的逻辑推理能力，而且具有丰富的想象能力，从而得到事半功倍的效果。

### 赛题精讲

例 1: 如图 5—1 所示，一个质量为  $m$  的小球位于一质量可忽略的直立弹簧上方  $h$  高度处，该小球从静止开始落向弹簧，设弹簧的劲度系数为  $k$ ，则物块可能获得的最大动能为\_\_\_\_\_。



图 5—1

解析：球跟弹簧接触后，先做变加速运动，后做变减速运动，据此推理小球所受合力为零的位置速度、动能最大。所以速最大时有

$$mg=kx \quad \text{①}$$

由机械能守恒有  $mg(h+x) = E_k + \frac{1}{2}kx^2$  ②

联立①②式解得  $E_k = mgh - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 g^2}{k}$

例 2: 如图 5—2 所示，倾角为  $\alpha$  的斜面上方有一点  $O$ ，在  $O$  点放一沿斜面的光滑直轨道，要求一质点从  $O$  点沿直轨道到达斜面  $P$  点的时间最短。求该直轨道与竖直方向的夹角  $\beta$ 。

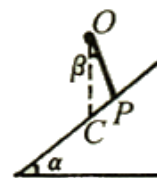


图 5—2

解析：质点沿  $OP$  做匀加速直线运动，运动的时间  $t$  应该与  $\beta$  角有关，

求时间  $t$  对于  $\beta$  角的函数的极值即可。

由牛顿运动定律可知，质点沿光滑轨道下滑的加速度为

$$a = g \cos \beta$$

该质点沿轨道由静止滑到斜面所用的时间为  $t$ ，则

$$\frac{1}{2}at^2 = \overline{OP}$$

$$\text{所以 } t = \sqrt{\frac{2\overline{OP}}{g \cos \beta}} \quad \textcircled{1}$$

由图可知，在 $\triangle OPC$ 中有

$$\frac{\overline{OP}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\overline{OC}}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)}$$

$$\text{所以 } \overline{OP} = \frac{\overline{OC} \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{将 } \textcircled{2} \text{ 式代入 } \textcircled{1} \text{ 式得 } t = \sqrt{\frac{2\overline{OC} \cos \alpha}{g \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}} = \sqrt{\frac{4\overline{OC} \cos \alpha}{[\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\beta)]g}}$$

显然，当 $\cos(\alpha - 2\beta) = 1$ ，即 $\beta = \frac{\alpha}{2}$ 时，上式有最小值。

所以当 $\beta = \frac{\alpha}{2}$ 时，质点沿直轨道滑到斜面所用的时间最短。

此题也可以用作图法求解。

例 3：从底角为 $\theta$ 的斜面顶端，以初速度 $v_0$ 水平抛出一小球，不计空气阻力，若斜面足够长，如图 5—3 所示，则小球抛出后，离开斜面的最大距离  $H$  为多少？

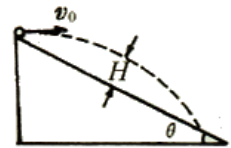


图 5—3

解析：当物体的速度方向与斜面平行时，物体离斜面最远。  
以水平向右为  $x$  轴正方向，竖直向下为  $y$  轴正方向，

$$\text{则由： } v_y = v_0 \tan \theta = gt, \text{ 解得运动时间为 } t = \frac{v_0}{g} \tan \theta$$

$$\text{该点的坐标为 } x = v_0 t = \frac{v_0^2}{g} \tan \theta \quad y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0^2}{2g} \tan^2 \theta$$

$$\text{由几何关系得： } H / \cos \theta + y = x \tan \theta$$

$$\text{解得小球离开斜面的最大距离为 } H = \frac{v_0^2}{2g} \tan \theta \cdot \sin \theta。$$

这道题若以沿斜面方向和垂直于斜面方向建立坐标轴，求解则更加简便。

例 4：如图 5—4 所示，一水枪需将水射到离喷口的水平距离为 3.0m 的墙外，从喷口算起，墙高为 4.0m。若不计空气阻力，取  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ，求所需的最小初速及对应的发射仰角。

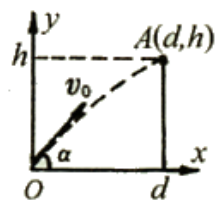


图 5—4

解析：水流做斜上抛运动，以喷口 O 为原点建立如图所示的直角坐标，本题的任务就是水流能通过点 A (d、h) 的最小初速度和发射仰角。

$$\text{根据平抛运动的规律，水流的运动方程为} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

把 A 点坐标 (d、h) 代入以上两式，消去 t，得：

$$\begin{aligned} v_0^2 &= -gd^2 / 2\cos^2 \alpha \cdot (h - d \tan \alpha) \\ &= gd^2 / [d \sin 2\alpha - h(\cos 2\alpha + 1)] \\ &= gd^2 / \sqrt{d^2 + h^2} \left[ \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \sin 2\alpha - \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \cos 2\alpha \right] - h \end{aligned}$$

令  $h/d = \tan \theta$ ，则  $d/\sqrt{d^2 + h^2} = \cos \theta$ ， $h/\sqrt{d^2 + h^2} = \sin \theta$ ，上式可变为

$$\begin{aligned} v_0^2 &= gd^2 / \sqrt{d^2 + h^2} \sin(2\alpha - \theta) - h, \text{显然，当} \sin(2\alpha - \theta) = 1, \text{即} 2\alpha - \theta = 90^\circ \\ \text{亦即发射角} \alpha &= 45^\circ + \frac{\theta}{2} = 45^\circ + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{d} = 45^\circ + \arctan \frac{4}{3} = 71.6^\circ \text{时，} v_0 \text{最小，} \end{aligned}$$

$$\text{且最小初速 } v_0 = \sqrt{g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)} = 3\sqrt{10} \text{ m/s} = 9.5 \text{ m/s}.$$

例 5：如图 5—5 所示，一质量为 m 的人，从长为 l、质量为 M 的铁板的一端匀加速跑向另一端，并在另一端骤然停止。铁板和水平面间摩擦因数为  $\mu$ ，人和铁板间摩擦因数为  $\mu'$ ，且  $\mu' \gg \mu$ 。这样，人能使铁板朝其跑动方向移动

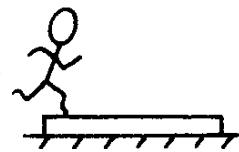


图 5—5

的最大距离 L 是多少？

解析：人骤然停止奔跑后，其原有动量转化为与铁板一起向前冲的动量，此后，地面对载人铁板的阻力是地面对铁板的摩擦力  $f$ ，其加速度  $a_1 = \frac{f}{M+m} = \frac{\mu(M+m)g}{M+m} = \mu g$ 。

由于铁板移动的距离  $L = \frac{v'^2}{2a_1}$ ，故  $v'$  越大，L 越大。 $v'$  是人与铁板一起开始地运动

的速度，因此人应以不会引起铁板运动的最大加速度奔跑。

人在铁板上奔跑但铁板没有移动时，人若达到最大加速度，则地面与铁板之间的摩擦力达到最大静摩擦  $\mu(M+m)g$ ，根据系统的牛顿第二定律得：

$$F = ma_2 + M \cdot 0$$

$$\text{所以 } a_2 = \frac{F}{m} = \mu \frac{M+m}{m} g \quad \text{①哈}$$

设  $v$ 、 $v'$  分别是人奔跑结束及人和铁板一起运动时的速度

$$\text{因为 } mv = (M + m)v' \quad \text{②}$$

$$\text{且 } v^2 = 2a_2l, v'^2 = 2a_1L$$

并将  $a_1$ 、 $a_2$  代入②式解得铁板移动的最大距离

$$L = \frac{m}{M + m}l$$

例 6: 设地球的质量为  $M$ , 人造卫星的质量为  $m$ , 地球的半径为  $R_0$ , 人造卫星环绕地球做圆周运动的半径为  $r$ 。试证明: 从地面上将卫星发射至运行轨道, 发射速度

$$v = \sqrt{R_0g\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)}, \text{ 并用该式求出这个发射速度的最小值和最大值。 (取 } R_0=6.4$$

$\times 10^6\text{m}$ ), 设大气层对卫星的阻力忽略不计, 地面的重力加速度为  $g$ )

解析: 由能量守恒定律, 卫星在地球的引力场中运动时总机械能为一常量。设卫星从地面发射的速度为  $v_{\text{发}}$ , 卫星发射时具有的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{\text{发}}^2 - G\frac{Mm}{R_0} \quad \text{①}$$

$$\text{进入轨道后卫星的机械能为 } E_2 = \frac{1}{2}mv_{\text{轨}}^2 - G\frac{Mm}{r} \quad \text{②}$$

$$\text{由 } E_1=E_2, \text{ 并代入 } v_{\text{轨}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ 解得发射速度为 } v_{\text{发}} = \sqrt{\frac{GM}{R_0}\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)} \quad \text{③}$$

$$\text{又因为在地面上万有引力等于重力, 即: } G\frac{Mm}{R_0^2} = mg \quad \text{所以 } \frac{GM}{R_0} = R_0g \quad \text{④}$$

$$\text{把④式代入③式即得: } v_{\text{发}} = \sqrt{R_0g\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)}$$

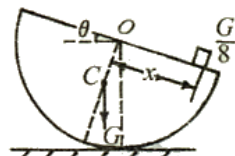
(1) 如果  $r=R_0$ , 即当卫星贴近地球表面做匀速圆周运动时, 所需发射速度最小

$$\text{为 } v_{\text{min}} = \sqrt{gR_0} = 7.9 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

(2) 如果  $r \rightarrow \infty$ , 所需发射速度最大 (称为第二宇宙速度或脱离速度) 为

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2R_0g} = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

例 7: 如图 5—6 所示, 半径为  $R$  的匀质半球体, 其重心在球心  $O$  点正下方  $C$  点处,  $OC=3R/8$ , 半球重为  $G$ , 半球放在





水平面上，在半球的平面上放一重为  $G/8$  的物体，它与半球平在间的动摩擦因数  $\mu = 0.2$ ，求无滑动时物体离球心

图 5—6

O 点最大距离是多少？

解析：物体离 O 点放得越远，根据力矩的平衡，半球体转过的角度  $\theta$  越大，但物体在球体斜面上保持相对静止时， $\theta$  有限度。

设物体距球心为  $x$  时恰好无滑动，对整体以半球体和地面接触点为轴，根据平衡条件有：
$$G \cdot \frac{3R}{8} \sin \theta = \frac{G}{8} x \cos \theta$$

得  $x = 3R \tan \theta$

可见， $x$  随  $\theta$  增大而增大。临界情况对应物体所受摩擦力为最大静摩擦力，则：

$$\tan \theta_m = \frac{f_m}{N} = \mu = 0.2, \text{ 所以 } x = 3\mu R = 0.6R.$$

例 8：有一质量为  $m=50\text{kg}$  的直杆，竖立在水平地面上，杆与地面间静摩擦因数  $\mu = 0.3$ ，杆的上端固定在地面上的绳索拉住，绳与杆的夹角  $\theta = 30^\circ$ ，如图 5—7 所示。

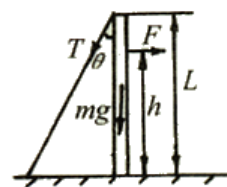


图 5—7

(1) 若以水平力  $F$  作用在杆上，作用点到地面的距离  $h_1 = 2L/5$  ( $L$  为杆长)，要使杆不滑倒，力  $F$  最大不能越过多少？

(2) 若将作用点移到  $h_2 = 4L/5$  处时，情况又如何？

解析：杆不滑倒应从两方面考虑，杆与地面间的静摩擦力达到极限的前提下，力的大小还与  $h$  有关，讨论力与  $h$  的关系是关键。

杆的受力如图 5—7—甲所示，由平衡条件得

$$F - T \sin \theta - f = 0$$

$$N - T \cos \theta - mg = 0$$

$$F(L-h) - fL = 0$$

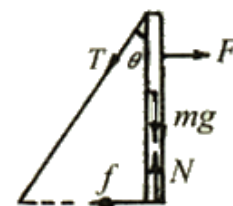


图 5—7—甲

另由上式可知， $F$  增大时， $f$  相应也增大，故当  $f$  增大到最大静摩擦力时，杆刚要滑倒，此时满足： $f = \mu N$

$$\text{解得： } F_{\text{mas}} = \frac{mgL \tan \theta}{(L-h) \tan \theta / \mu - h}$$

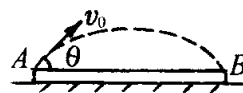
由上式又可知，当  $(L-h) \tan \theta / \mu - h \rightarrow \infty$ ，即当  $h_0 = 0.66L$  时对  $F$  就没有限制了。

(1) 当  $h_1 = \frac{2}{5}L < h_0$ , 将有关数据代入  $F_{\max}$  的表达式得

$$F_{\max} = 385N$$

(2) 当  $h_2 = \frac{4}{5}L > h_0$ , 无论  $F$  为何值, 都不可能使杆滑倒, 这种现象即称为自锁。

例 9: 放在光滑水平面上的木板质量为  $M$ , 如图 5—8 所示, 板上有质量为  $m$  的小狗以与木板成  $\theta$  角的初速度  $v_0$  (相对于地面)



由 A 点跳到 B 点, 已知 AB 间距离为  $s$ 。求初速度的最小值。 图 5—8

解析: 小狗跳起后, 做斜上抛运动, 水平位移向右, 由于水平方向动量守恒, 木板向左运动。小狗落到板上的 B 点时, 小狗和木板对地位移的大小之和, 是小狗对木板的水平位移。

由于水平方向动量守恒, 有  $mv_0 \cos \theta = Mv$  即  $v = \frac{mv_0 \sin \theta}{M}$  ①

小狗在空中做斜抛运动的时间为  $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$  ②

又  $s + v_0 \cos \theta \cdot t = vt$  ③

将①、②代入③式得  $v_0 = \sqrt{\frac{Mgs}{(M+m)\sin 2\theta}}$

当  $\sin 2\theta = 1$ , 即  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时,  $v_0$  有最小值,  $v_{0\min} = \sqrt{\frac{Mgs}{M+m}}$ 。

例 10: 一小物块以速度  $v_0 = 10m/s$  沿光滑地面滑行, 然后沿光滑

曲面上升到顶部水平的高台上, 并由高台上飞出, 如图 5—9 所示, 当高台的高度  $h$  多大时, 小物块飞行的水平距离  $s$  最大? 这个距离是多少? ( $g$  取  $10m/s^2$ )

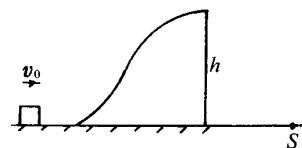


图 5—9

解析: 依题意, 小物块经历两个过程。在脱离曲面顶部之前, 小物块受重力和支持力, 由于支持力不做功, 物块的机械能守恒, 物块从高台上飞出后, 做平抛运动, 其水平距离  $s$  是高度  $h$  的函数。

设小物块刚脱离曲面顶部的速度为  $v$ , 根据机械能守恒定律,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad ①$$

小物块做平抛运动的水平距离  $s$  和高度  $h$  分别为:  $h = \frac{1}{2}gt^2$  ②

$$s = vt \quad (3)$$

以上三式联立解得：
$$s = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 - \left(h - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}$$

当  $h = \frac{v_0^2}{4g} = 2.5m$  时，飞行距离最大，为  $s_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5m$ 。

例 11：军训中，战士距墙  $s$ ，以速度  $v_0$  起跳，如图 5—10 所示，

再用脚蹬墙面一次，使身体变为竖直向上的运动以继续升高，墙面与鞋底之间的静摩擦因数为  $\mu$ 。求能使人体重心有最大总升高的起跳角  $\theta$ 。

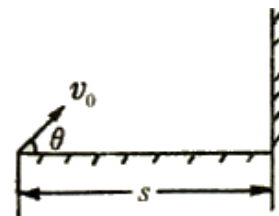


图 5—10

解析：人体重心最大总升高分为两部分，一部分是人做斜上抛运动上升的高度，另一部分是人蹬墙所能上升的高度。

如图 5—10—甲，人做斜抛运动  $v_x = v_0 \cos \theta$ ，

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

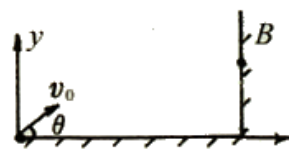


图 5—10—甲

重心升高为 
$$H_1 = s_0 \tan \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_0 \cos \theta}\right)^2$$

脚蹬墙面，利用最大静摩擦力的冲量可使人向上的动量增加，即

$$\Delta(mv_y) = m\Delta v_y = \sum f(t) = \sum \mu N(t)\Delta t = \mu \sum N(t)\Delta t, \text{ 而 } \sum N(t)\Delta t = mv_x,$$

$\therefore \Delta v_y = \mu v_x$ ，所以人蹬墙后，其重心在竖直方向向上的速度为

$$v'_y = v_y + \Delta v_y = v_y + \mu v_x, \text{ 继续升高 } H_2 = \frac{v'^2_y}{2g}, \text{ 人的重心总升高}$$

$$H = H_1 + H_2 = \frac{v_0^2}{2g} (\mu \cos \theta + \sin \theta)^2 - \mu s_0, \text{ 当 } \theta = \tan^{-1} \frac{1}{\mu} \text{ 时，重心升高最大。}$$

例 12：如图 5—11 所示，一质量为  $M$  的平顶小车，以速度  $v_0$  沿水

平的光滑轨道做匀速直线运动。现将一质量为  $m$  的小物块无初速地放置在车顶前缘。已知物块和车顶之间的滑动摩擦因数为  $\mu$ 。

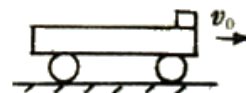


图 5—11

(1) 若要求物块不会从车顶后缘掉下，则该车顶最少要多长？

(2) 若车顶长度符合 (1) 问中的要求，整个过程中摩擦力共做多少功？

解析：当两物体具有共同速度时，相对位移最大，这个相对位移的大小即为车顶的最小

长度。

设车长至少为  $l$ ，则根据动量守恒

$$Mv_0 = (M + m)v$$

根据功能关系  $mg\mu l = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)v^2$

解得  $l = \frac{Mv_0^2}{2(M + m)g\mu}$ ，摩擦力共做功

$$W = -mg\mu l = -\frac{Mmv_0^2}{2(M + m)}$$

例 13: 一质量  $m=200\text{kg}$ ，高  $2.00\text{m}$  的薄底大金属桶倒扣在宽广的水池底部，如图 5—12 所示。桶的内横截面积  $S=0.500\text{m}^2$ ，桶壁加桶底的体积为  $V_0=2.50\times 10^{-2}\text{m}^3$ 。桶内封有高度为  $l=0.200\text{m}$  的空气。池深  $H_0=20.0\text{m}$ ，大气压强  $p_0=10.00\text{m}$  水

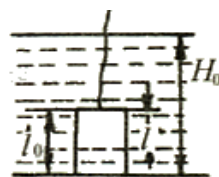


图 5—12

柱高，水的密度  $\rho = 1.000\times 10^3\text{kg}/\text{m}^3$ ，重力加速度取  $g=10.00\text{m}/\text{s}^2$ 。若用图中所示吊绳将桶上提，使桶底到达水面处，求绳子拉力对桶所需何等的最小功为多少焦耳？（结果要保留三位有效数字）。不计水的阻力，设水温很低，不计其饱和蒸汽压的影响。并设水温上下均匀且保持不变。

解析: 当桶沉到池底时，桶自身重力大于浮力。在绳子的作用下桶被缓慢提高过程中，桶内气体体积逐步增加，排开水的体积也逐步增加，桶受到的浮力也逐渐增加，绳子的拉力逐渐减小，当桶受到的浮力等于重力时，即绳子拉力恰好减为零时，桶将处于不稳定平衡的状态，因为若有一扰动使桶略有上升，则浮力大于重力，无需绳的拉力，桶就会自动浮起，而不需再拉绳。因此绳对桶的拉力所需做的最小功等于将桶从池底缓慢地提高到浮力等于重力的位置时绳子拉桶所做的功。

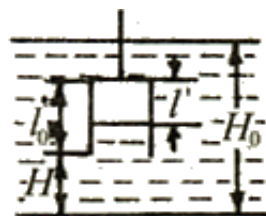


图 5—12—甲

设浮力等于重力的不稳定平衡位置到池底的距离为  $H$ ，桶内气体的厚度为  $l'$ ，如图 5—12—甲所示。因为总的浮力等于桶的重力  $mg$ ，因而有

$$\rho(l'S + V_0)g = mg$$

有  $l'=0.350\text{m}$  ①

在桶由池底上升高度  $H$  到达不稳定平衡位置的过程中，桶内气体做等温变化，由玻意耳定律得

$$[p_0 + H_0 - H - (l_0 - l')]l'S = [p_0 + H_0 - (l_0 - l)]lS$$
 ②

由①、②两式可得

$$H=12.240\text{m}$$

由③式可知  $H < (H_0 - l')$ ，所以桶由池底到达不稳定平衡位置时，整个桶仍浸在水中。

由上分析可知，绳子的拉力在整个过程中是一个变力。对于变力做功，可以通过分析水和桶组成的系统的能量变化的关系来求解：先求出桶内池底缓慢地提高了  $H$  高度后的总机械能量  $\Delta E$ 。  $\Delta E$  由三部分组成：

(1) 桶的重力势能增量

$$\Delta E_1 = mgH \quad (4)$$

(2) 由于桶本身体积在不同高度处排开水的势能不同所产生的机械能的改变量  $\Delta E_2$ ，可认为在  $H$  高度时桶本身体积所排开的水是去填充桶在池底时桶所占有的空间，这时水的重力势能减少了。

$$\text{所以 } \Delta E_2 = -\rho V_0 gH \quad (5)$$

(3) 由于桶内气体在不同高度处所排开水的势能不同所产生的机械能的改变  $\Delta E_3$ ，由于桶内气体体积膨胀，因而桶在  $H$  高度时桶本身空气所排开的水可分为两部分：一部分可看为填充桶在池底时空气所占空间，体积为  $lS$  的水，这部分水增加的重力势能为

$$\Delta E_{31} = -l\rho SgH \quad (6)$$

另一部分体积为  $(l' - l)S$  的水上升到水池表面，这部分水上升的平均高度为

$$[H_0 - H - l_0 + l + (l' - l)/2],$$

增加的重力势能为

$$\Delta E_{32} = \rho(l' - l)Sg[H_0 - H - l_0 + l + (l' - l)/2] \quad (7)$$

由整个系统的功能关系得，绳子拉力所需做的最小功为

$$W_T = \Delta E \quad (8)$$

将④、⑤、⑥、⑦式代入⑧式得

$$W_T = \rho Sg[(l' - l)(H - l_0) + (l'^2 - l^2)/2] \quad (9)$$

将有关数据代入⑨式计算，并取三位有效数字，可得

$$W_T = 1.37 \times 10^4 \text{ J}$$

例 14：如图 5—13 所示，劲度系数为  $k$  的水平轻质弹簧，左端固定，右端系一质量为  $m$  的物体，物体可在有摩擦的水平桌面上滑动，弹簧为原长时位于  $O$  点，现把物体拉到距  $O$  为  $A_0$  的  $P$  点按住，放手后弹簧把物体拉动，设物体在第二次经过  $O$  点前，在  $O$  点左方停住，求：

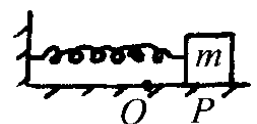


图 5—13

(1) 物体与桌面间的动摩擦因数  $\mu$  的大小应在什么范围内？

(2) 物体停住点离  $O$  点的距离的最大值，并回答这是不是物体在运动过程中所

能达到的左方最远值？为什么？（认为动摩擦因数与静摩擦因数相等）

解析：要想物体在第二次经过 O 点前，在 O 点左方停住，则需克服摩擦力做功消耗掉全部弹性势能，同时还需合外力为零即满足平衡条件。

(1) 物体在距离 O 点为  $l$  处停住不动的条件是：

- a. 物体的速度为零，弹性势能的减小等于物体克服滑动摩擦力所做的功。
- b. 弹簧弹力  $\leq$  最大静摩擦力

对物体运动做如下分析：

①物体向左运动并正好停在 O 点的条件是：
$$\frac{1}{2}kA_0^2 = \mu mgA_0$$

得：
$$\mu = \frac{1}{2mg}kA_0$$

②若  $\mu < \frac{1}{2mg}kA_0$ ，则物体将滑过 O 点，设它到 O 点左方 B 处（设  $OB=L_1$ ）时

速度为零，则有：

$$\frac{1}{2}kA_0^2 - \frac{1}{2}kL_1^2 = \mu mg(A_0 + L_1) \quad \text{②}$$

若物体能停住，则  $kL_1 \leq \mu mg$ ，故得  $\mu \geq \frac{1}{3mg}kA_0$  ③

③如果②能满足，但  $\mu < \frac{1}{3mg}kA_0$ ，则物体不会停在 B 处而要向右运动。 $\mu$  值越

小，则往右滑动的距离越远。设物体正好停在 O 处，则有：
$$\frac{1}{2}kL_1^2 = \mu mgL_1$$

得：
$$\mu = \frac{1}{4mg}kA_0$$
。要求物体停在 O 点左方，则相应地要求  $\mu > \frac{1}{4mg}kA_0$ 。

综合以上分析结果，物体停在 O 点左方而不是第二次经过 O 点时， $\mu$  的取值

范围为 
$$\frac{1}{4mg}kA_0 < \mu < \frac{1}{2mg}kA_0$$

(2) 当  $\mu$  在  $\frac{1}{3mg}kA_0 \leq \mu < \frac{1}{2mg}kA_0$  范围内时，物体向左滑动直至停止而不返回，

由②式可求出最远停住点（设为  $B_1$  点）到 O 点的距离为

$$L = A_0 - \frac{2\mu mg}{k} = A_0 - \left(\frac{2mg}{k}\right)\left(\frac{kA_0}{3mg}\right) = \frac{A_0}{3}.$$

当  $\mu < \frac{1}{3mg} kA_0$  时，物体在  $B_1$  点 ( $OB_1 = \frac{A_0}{3}$ ) 的速度大于零，因此物体将继续

向左运动，但它不可能停在  $B_1$  点的左方。因为与  $B_1$  点对应的  $\mu = \frac{1}{3mg} kA_0$ ，

$L_1 = A_0/3$ ，如果停留在  $B_1$  点的左方，则物体在  $B_1$  点的弹力大于  $\frac{kA_0}{3}$ ，而摩擦力

$\mu mg \frac{kA_0}{3}$ ，小于弹力大于摩

擦力，所以物体不可能停住而一定返回，最后停留在  $O$  与  $B_1$  之间。

所以无论  $\mu$  值如何，物体停住与  $O$  点的最大距离为  $\frac{A_0}{3}$ ，但这不是物体在运

动过程中所能达到的左方最远值。

例 15：使一原来不带电的导体小球与一带电量为  $Q$  的导体大球接触，分开之后，小球获得电量  $q$ 。今让小球与大球反复接触，在每次分开后，都给大球补充电荷，使其带电量恢复到原来的值  $Q$ 。求小球可能获得的最大电量。

解析：两球接触后电荷的分配比例是由两球的半径决定的，这个比例是恒定的。

根据两球带电比例恒定，第一次接触，电荷量之比为  $\frac{Q-q}{q}$

最后接触电荷之比为  $\frac{Q}{q_m}$ ，有  $\frac{Q-q}{q} = \frac{Q}{q_m} \quad \therefore q_m = \frac{Qq}{Q-q}$

此题也可以用递推法求解。

例 16：一系列相同的电阻  $R$ ，如图 5—14 所示连接，求  $AB$  间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

解析：无穷网络，增加或减小网络的格数，其等效电阻不变，所以  $R_{AB}$  跟从  $CD$  往右看的电阻是相等的。因此，有

$$R_{AB} = 2R + \frac{R_{AB}R}{R_{AB} + R} \text{ 解得 } R_{AB} = (\sqrt{3} + 1)R$$

例 17：如图 5—15 所示，一个 U 形导体框架，宽度  $L=1\text{m}$ ，

其所在平面与水平面的夹角  $\alpha = 30^\circ$ ，其电阻可以忽略不计，设匀强磁场为 U 形框架的平面垂直，磁感应强度  $B=1\text{T}$ ，质量  $0.2\text{kg}$  的导体棒电阻  $R=0.1\ \Omega$ ，跨

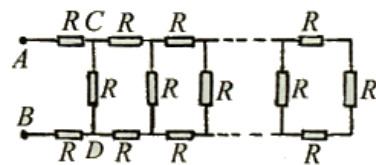


图 5—14

图 5—14

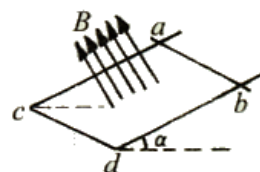


图 5—15

放在 U 形框上，并且能无摩擦地滑动。求：

- (1) 导体棒 ab 下滑的最大速度  $v_m$ ；
- (2) 在最大速度  $v_m$  时，ab 上释放出来的电功率。

解析：导体棒做变加速下滑，当合力为零时速度最大，以后保持匀速运动

(1) 棒 ab 匀速下滑时，有  $mg \sin \alpha = BIl$ ，而  $I = \frac{Blv}{R}$

$$\text{解得最大速度 } v_m = \frac{mg \sin \alpha \cdot R}{B^2 l^2} = 0.1 \text{ m/s}$$

(2) 速度最大时，ab 释放的电功率  $P = mg \sin \alpha \cdot v_m = 0.1 \text{ W}$

### 针对训练

1. 如图 5—16 所示，原长  $L_0$  为 100 厘米的轻质弹簧放置在一光滑的直槽内，弹簧的一端固定在槽的 O 端，另一端连接一小球，这一装置可以从水平位置开始绕 O 点缓缓地转到竖直位置。设弹簧的形变总是在其弹性限度内。试在下述 (a)、(b) 两种情况下，分别求出这种装置从原来的水平位置开始缓缓地绕 O 点转到竖直位置时小球离开原水平面的高度  $h_0$ 。(a) 在转动过程中，发现小球距原水平面的高度变化出现极大值，且极大值  $h_m$  为 40 厘米，(b) 在转动的过程中，发现小球离原水平面的高度不断增大。

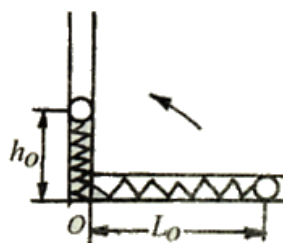


图 5—16

2. 如图 5—17 所示，一滑雪运动员自 H 为 50 米高处滑至 O 点，由于运动员的技巧（阻力不计），运动员在 O 点保持速率  $v_0$  不变，并以仰角  $\theta$  起跳，落至 B 点，令 OB 为 L，试问  $\alpha$  为  $30^\circ$  时，L 的最大值是多大？当 L 取极值时， $\theta$  角为多大？

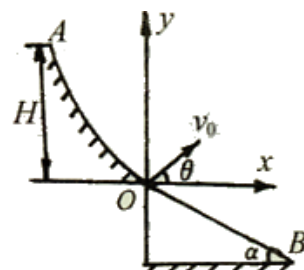


图 5—17

3. 如图 5—18 所示，质量为 M 的长滑块静止放在光滑水平面上，左侧固定一劲度系数为 K 且足够长的水平轻质弹簧，右侧用一不可伸长的细轻绳连接于竖直墙上，细线所能承受的最大拉力为 T。

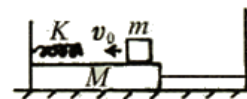


图 5—18

使一质量为  $m$ ，初速度为  $v_0$  的小物体，在滑块上无摩擦地向左运动，而后压缩弹簧。

- (1) 求出细线被拉断的条件；
  - (2) 滑块在细线拉断后被加速的过程中，所能获得的最大的左向加速度为多大？
  - (3) 物体最后离开滑块时相对于地面速度恰为零的条件是什么？
4. 质量  $m=2.0\text{kg}$  的小铁块静止于水平导轨 AB 的 A 端，导轨及支架 ABCD 形状及尺寸如图 5—19 所示，它只能绕通过支架 D 点的垂直于纸面的水平轴转动，其重心在图



中的 O 点，质量  $M=4.0\text{kg}$ ，现用一细线沿轨拉铁块，拉力  $F=12\text{N}$ ，铁块和导轨之间的摩擦系数  $\mu = 0.50$ ，重力加速度  $g=10\text{m/s}^2$ ，从铁块运动时起，导轨（及支架）能保持静止的最长时间  $t$  是多少？

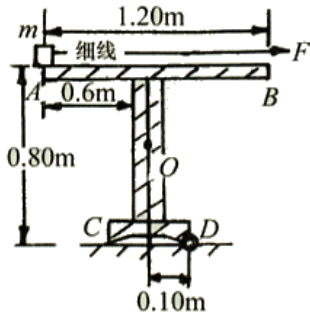


图 5—19

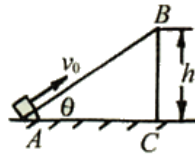


图 5—20

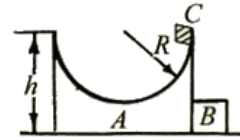


图 5—21

5. 如图 5—20 所示，在水平桌面上放一质量为  $M$ 、截面为直角三角形的物体  $ABC$ 。 $AB$  与  $AC$  间的夹角为  $\theta$ ， $B$  点到桌面的高度为  $h$ 。在斜面  $AB$  上的底部  $A$  处放一质量为  $m$  的小物体。开始时两者皆静止。现给小物体一沿斜面  $AB$  方向的初速度  $v_0$ ，如果小物体与斜面间以及  $ABC$  与水平桌面间的摩擦都不考虑，则  $v_0$  至少要大于何值才能使小物体经  $B$  点滑出？
6. 如图 5—21 所示，长为  $L$  的光滑平台固定在地面上，平台中央放有一小物体  $A$  和  $B$ ，两者彼此接触。物体  $A$  的上表面是半径为  $R$  ( $R \ll L$ ) 的半圆形轨道，轨道顶端距台面的高度为  $h$  处，有一小物体  $C$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$  的质量均为  $m$ 。现物体  $C$  从静止状态沿轨道下滑，已知在运动过程中， $A$ 、 $C$  始终保持接触，试求：
- (1) 物体  $A$  和  $B$  刚分离时，物体  $B$  的速度；
  - (2) 物体  $A$  和  $B$  分离后，物体  $C$  所能达到距台面的最大高度；
  - (3) 判断物体  $A$  从平台的左边还是右边落地，并粗略估算物体  $A$  从  $B$  分离后到离开台面所经历的时间。

7. 电容器  $C_1$ 、 $C_2$  和可变电阻器  $R_1$ 、 $R_2$  以及电源  $\varepsilon$  连接成如图 5—22 所示的电路。当  $R_1$  的滑动触头在图示位置时， $C_1$ 、 $C_2$  的电量相等。要使  $C_1$  的电量大于  $C_2$  的电量，应 ( )

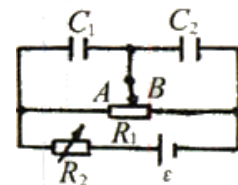


图 5—22

- A. 增大  $R_2$
  - B. 减小  $R_2$
  - C. 将  $R_1$  的滑动触头向  $A$  端移动
  - D. 将  $R_1$  的滑动触头向  $B$  端滑动
8. 如图 5—23 所示的电路中，电源的电动势恒定，要想使灯泡变亮，可以 ( )
- A. 增大  $R_1$
  - B. 减小  $R_2$
  - C. 增大  $R_2$
  - D. 减小  $R_2$

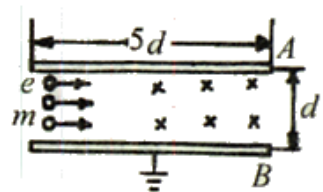
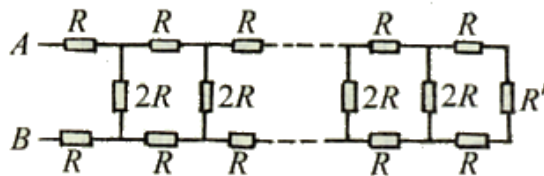
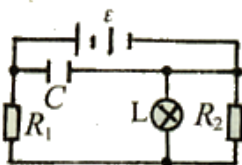


图 5—23

图 5—24

图 5—25

9. 电路如图 5—24 所示, 求当  $R'$  为何值时,  $R_{AB}$  的阻值与“网格”的数目无关? 此时  $R_{AB}$  的阻值等于什么?

10. 如图 5—25 所示, A、B 两块不带电的金属板, 长为  $5d$ , 相距为  $d$ , 水平放置, B 板接地, 两板间有垂直纸面向里的匀强磁场, 现有宽度为  $d$  的电子束从两板左侧水平方向入射, 每个电子的质量为  $m$ , 电量为  $e$ , 速度为  $v$ , 要使电子不会从两板间射出, 求两板间的磁感应强度应为多大?

11. 图 5—26 中  $abcd$  是一个固定的 U 形金属框架,  $ad$  和  $cd$  边都很长,  $bc$  边长为  $L$ , 框架的电阻可不计,  $ef$  是放置在框架上与  $bc$  平行的导体杆, 它可在框架上自由滑动 (摩擦可忽略), 它的电阻  $R$ , 现沿垂直于框架的方向加一恒定的匀强磁场, 磁感应强度为  $B$ , 方向垂直于纸面向里, 已知当以恒定力  $F$  向右拉导体杆  $ef$  时, 导体杆最后匀速滑动, 求匀速滑动时的速度?

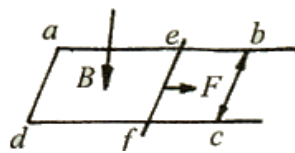


图 5—26

12. 如图 5—27 所示, 导线框  $abcd$  固定在竖直平面内,  $bc$  段的电阻为  $R$ , 其他电阻均可忽略。  $ef$  是一电阻可忽略的水平放置的导体杆, 杆长为  $L$ , 质量为  $m$ , 杆的两端分别与  $ab$  和  $cd$  保持良好接触, 又能沿它们无摩擦地滑动。整个装置放在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中, 磁场方向与框面垂直。现用一恒力  $F$  竖直向上拉  $ef$ , 当  $ef$  匀速上升时, 其速度的大小为多大?



图 5—27

13. 在倾角为  $\alpha$  的足够长的两光滑平行金属导轨上, 放一质量为  $m$ , 电阻为  $R$  的金属棒  $ab$ , 所在空间有磁感应强度为  $B$  的匀强磁场, 方向垂直轨道平面向上, 导轨宽度为  $L$ , 如图 5—28 所示, 电源电动势为  $\varepsilon$ , 电源内阻和导轨电阻均不计, 电容器的电容为  $C$ 。求:

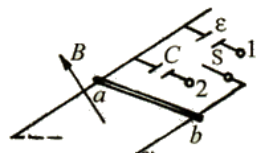


图 5—28

(1) 当开关  $S$  接 1 时, 棒  $ab$  的稳定速度是多大?

(2) 当开关  $S$  接 2 时, 达到稳定状态时, 棒  $ab$  将做何运动?

14. 如图 5—29 所示, 有上下两层水平放置的平行光滑导轨, 间距是  $L$ , 上层导轨上搁置一根质量为  $m$ 、电阻是  $R$  的金属杆  $ST$ , 下层导轨末端紧接着两根竖直在竖直平面内的半径为  $R$  的光滑绝缘半圆形轨道, 在靠近半圆形轨道处搁置一根质量也是  $m$ 、电阻也是  $R$  的金属杆  $AB$ 。上下两层平行导轨所在区域里有一个竖直向下的匀强磁场。当闭合开关  $S$  后, 有电量  $q$  通过金属杆  $AB$ , 杆  $AB$  滑过下层导轨后进入半圆形轨道并且刚好能通过轨道最高点  $D' F'$  后滑上上层导轨。设上下两层导轨都足够长, 电阻不计。

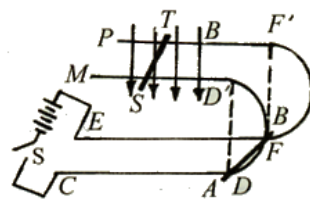


图 5—29

(1) 求磁场的磁感应强度。

(2) 求金属杆  $AB$  刚滑到上层导轨瞬间, 上层导轨和金属杆组成的回路里的电流。

(3) 求两金属杆在上层导轨滑动的最终速度。

(4) 问从  $AB$  滑到上层导轨到具有最终速度这段时间里上层导轨回路中有多少能量

(1) 求磁场的磁感应强度。

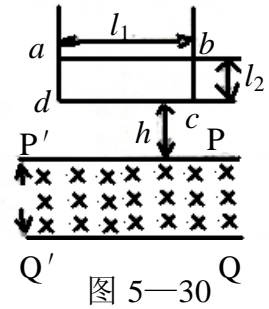
(2) 求金属杆  $AB$  刚滑到上层导轨瞬间, 上层导轨和金属杆组成的回路里的电流。

(3) 求两金属杆在上层导轨滑动的最终速度。

(4) 问从  $AB$  滑到上层导轨到具有最终速度这段时间里上层导轨回路中有多少能量

转变为内能?

15. 位于竖直平面内的矩形平面导线框  $abcd$ ,  $ab$  长为  $l_1$ , 是水平的,  $bc$  长  $l_2$ , 线框的质量为  $m$ , 电阻为  $R$ , 其下方有一匀强磁场区域, 该区域的上、下边界  $PP'$  和  $QQ'$  均与  $ab$  平行, 两边界间的距离为  $H$ ,  $H > l_2$ , 磁场的磁感强度为  $B$ , 方向与线框平面垂直, 如图 5—30 所示, 令线框的  $dc$  边从离磁场区域上边界  $PP'$  的距离为  $h$  处自由下落, 已知在线框的  $dc$  边进入磁场以后,  $ab$  边到达边界  $PP'$  之前的某一时刻线框的速度已达到这一阶段的最大值。问从线框开始下落到  $dc$  边刚刚到达磁场区域下边界  $QQ'$  的过程中, 磁场作用于线框的安培力做的总功为多少?



答案:

1. (a) 37.5cm (b)  $50\text{cm} < h < 100\text{cm}$  2.  $L_{\max} = 200m$   $\theta = 30^\circ$

3.  $v_0 > \frac{T}{\sqrt{mK}}$ ,  $a = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{m}{m+M} (KMv_0^2 + T^2)}$   $v_0 = \frac{T}{\sqrt{(m-M)K}}$

4. 1.41s 5.  $\sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M+mL^2\theta}}$  6. (1)  $\sqrt{\frac{gh}{3}}$  (2)  $h - \frac{1}{4}R$  (3)  $\frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{gh}}$

7. D 8. B、C 9.  $(\sqrt{5}-1)R$   $(\sqrt{5}+1)R$

10.  $\frac{mv}{13de} \leq B \leq \frac{2mv}{de}$  11.  $\frac{FR}{B^2L^2}$  12.  $\frac{(F-mg)R}{B^2L^2}$

13. (1)  $\frac{BI\varepsilon - mgR \sin \alpha}{B^2L^2}$  (2) 加速度  $\frac{mg \sin \alpha}{m + CB^2L^2}$

14. (1)  $\frac{m}{qL} \sqrt{5gR}$  (2)  $\frac{BL\sqrt{gR}}{2R}$  (3)  $\frac{\sqrt{gR}}{2R}$  (4)  $\frac{1}{4}mgR$

15.  $W = \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l^4} - mg(l_2 + h)$



## 六、递推法

### 方法简介

递推法是解决物体与物体发生多次作用后的情况. 即当问题中涉及相互联系的物体较多并且有规律时, 应根据题目特点应用数学思想将所研究的问题归类, 然后求出通式. 具体方法是先分析某一次作用的情况, 得出结论. 再根据多次作用的重复性和它们的共同点, 把结论推广, 然后结合数学知识求解. 用递推法解题的关键是导出联系相邻两次作用的递推关系式.

### 塞题精析

**例 1** 质点以加速度  $a$  从静止出发做直线运动, 在某时刻  $t$ , 加速度变为  $2a$ ; 在时刻  $2t$ , 加速度变为  $3a$ ;  $\dots$ ; 在  $nt$  时刻, 加速度变为  $(n+1)a$ , 求:

- (1)  $nt$  时刻质点的速度;
- (2)  $nt$  时间内通过的总路程.

**解析** 根据递推法的思想, 从特殊到一般找到规律, 然后求解.

(1) 物质在某时刻  $t$  末的速度为  $v_t = at$

$2t$  末的速度为  $v_{2t} = v_t + 2at$ , 所以  $v_{2t} = at + 2at$

$3t$  末的速度为  $v_{3t} = v_{2t} + 3at = at + 2at + 3at$

.....

则  $nt$  末的速度为  $v_{nt} = v_{(n-1)t} + nat$

$$= at + 2at + 3at + \dots + (n-1)at + nat = at(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= at \cdot \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2}n(n+1)at$$

(2) 同理: 可推得  $nt$  内通过的总路程  $s = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)at^2$ .

**例 2** 小球从高  $h_0 = 180m$  处自由下落, 着地后跳起又下落, 每与地面相碰一次, 速度减小  $\frac{1}{n}(n=2)$ , 求小球从下落到停止经过的总时间为通过的总路程. ( $g$  取  $10m/s^2$ )

**解析** 小球从  $h_0$  高处落地时, 速率  $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 60\text{m/s}$

第一次跳起时和又落地时的速率  $v_1 = v_0/2$

第二次跳起时和又落地时的速率  $v_2 = v_0/2^2$

⋮

第  $m$  次跳起时和又落地时的速率  $v_m = v_0/2^m$

每次跳起的高度依次  $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{h_0}{n^2}, h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{h_0}{n^4},$

⋮

通过的总路程  $\sum s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_m + \cdots$

$$\begin{aligned} &= h_0 + \frac{2h_0}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{1}{n^{2m-2}}\right) + \cdots \\ &= h_0 + \frac{2h_0}{n^2 - 1} = h_0 \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{5}{3}h_0 = 300\text{m} \end{aligned}$$

经过的总时间为  $\sum t = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_m + \cdots$

$$\begin{aligned} &= \frac{v_0}{g} + \frac{2v_1}{g} + \cdots + \frac{2v_m}{g} + \cdots \\ &= \frac{v_0}{g} \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^m + \cdots\right] \\ &= \frac{v_0}{g} \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \frac{3v_0}{g} = 18\text{s} \end{aligned}$$

**例 3** A、B、C 三只猎犬站立的位置构成一个边长为  $a$  的正三角形, 每只猎犬追捕猎物的速度均为  $v$ , A 犬想追捕 B 犬, B 犬想追捕 C 犬, C 犬想追捕 A 犬, 为追捕到猎物, 猎犬不断调整方向, 速度方向始终“盯”住对方, 它们同时起动, 经多长时间可捕捉到猎物?

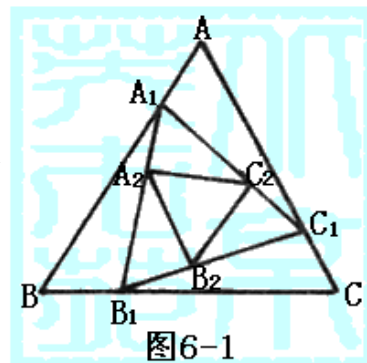


图6-1

**解析** 由题意可知, 由题意可知, 三只猎犬都做等速率曲线运动, 而且任一时刻三只猎

犬的位置都分别在一个正三角形的三个顶点上，但这正三角形的边长不断减小，如图 6—1 所示。所以要想求出捕捉的时间，则需用微元法将等速率曲线运动变成等速率直线运动，再用递推法求解。

设经时间  $t$  可捕捉猎物，再把  $t$  分为  $n$  个微小时间间隔  $\Delta t$ ，在每一个  $\Delta t$  内每只猎犬的运动可视为直线运动，每隔  $\Delta t$ ，正三角形的边长分别为  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $\dots$ 、 $a_n$ ，显然当  $a_n \rightarrow 0$  时三只猎犬相遇。

$$a_1 = a - AA_1 - BB_1 \cos 60^\circ = a - \frac{3}{2}v\Delta t,$$

$$a_2 = a_1 - \frac{3}{2}v\Delta t = a - 2 \times \frac{3}{2}v\Delta t,$$

$$a_3 = a_2 - \frac{3}{2}v\Delta t = a - 3 \times \frac{3}{2}v\Delta t,$$

...

$$a_n = a - n \cdot \frac{3}{2}v\Delta t$$

$$\text{因为 } a - n \cdot \frac{3}{2}v\Delta t = 0,$$

$$\text{即 } n\Delta t = t \quad \text{所以 } t = \frac{2a}{3v}$$

此题还可用对称法，在非惯性参考系中求解。

**例 4** 一列进站后的重载列车，车头与各节车厢的质量相等，均为  $m$ ，若一次直接起动，车头的牵引力能带动 30 节车厢，那么，利用倒退起动，该车头能起动多少节同样质量的车厢？

**解析** 若一次直接起动，车头的牵引力需克服摩擦力做功，使各节车厢动能都增加，若利用倒退起动，则车头的牵引力需克服摩擦力做的总功不变，但各节车厢起动的动能则不同。

原来挂钩之间是张紧的，倒退后挂钩间存在  $\Delta s$  的宽松距离，设火车的牵引力为  $F$ ，则有：

$$\text{车头起动时，有 } (F - \mu mg)\Delta s = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{拉第一节车厢时： } (m + m)v_1' = mv_1$$

$$\text{故有 } v_1^2 = \frac{1}{4}v_1'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\Delta s$$

$$(F - 2\mu mg)\Delta s = \frac{1}{2} \times 2mv_2^2 - \frac{1}{2} \times 2mv_1'^2$$

$$\text{拉第二节车厢时： } (m + 2m)v_2' = 2mv_2$$

$$\text{故同样可得: } v_2'^2 = \frac{4}{9}v_2^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{F}{m} - \frac{5}{3}\mu g\right)\Delta s$$

.....

$$\text{推理可得 } v_n'^2 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{F}{m} - \frac{2n+1}{3}\mu g\right)\Delta s$$

$$\text{由 } v_n'^2 > 0 \text{ 可得: } F > \frac{2n+1}{3}\mu mg$$

另由题意知  $F = 31\mu mg$ , 得  $n < 46$

因此该车头倒退起动时, 能起动 45 节相同质量的车厢.

**例 5** 有  $n$  块质量均为  $m$ , 厚度为  $d$  的相同砖块, 平放在水平地面上, 现将它们一块一块地叠放起来, 如图 6—2 所示, 人至少做多少功?

**解析** 将平放在水平地面上的砖一块一块地叠放起来, 每次克服重力做的功不同, 因此需一次一次地计算递推出通式计算.

将第 2 块砖平放在第一块砖上人至少需克服重力做功为  $W_2 = mgd$

将第 3、4、...、 $n$  块砖依次叠放起来, 人克服重力至少所需做的功分别为

$$W_3 = mg2d$$

$$W_4 = mg3d$$

$$W_5 = mg4d$$

...

$$W_n = mg(n-1)d$$

所以将  $n$  块砖叠放起来, 至少做的总功为

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n \\ &= mgd + mg2d + mg3d + \dots + mg(n-1)d \\ &= mgd \cdot n \frac{(n-1)}{2} \end{aligned}$$

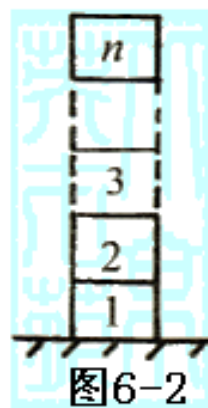


图6-2

**例 6** 如图 6—3 所示, 有六个完全相同的长条薄片  $A_iB_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) 依次架在水平碗口上, 一端搁在碗口, 另一端架在另一薄片的中正位置 (不计薄片的质量). 将质量为  $m$  的质点置于  $A_1A_6$  的中点处, 试求:  $A_1B_1$  薄片对  $A_6B_6$  的压力.

**解析** 本题共有六个物体, 通过观察会发现,  $A_1B_1$ 、 $A_2B_2$ 、...、 $A_5B_5$  的受力情况完全相同, 因此将  $A_1B_1$ 、 $A_2B_2$ 、...、 $A_5B_5$  作为一类, 对其中一个进行受力分析, 找出规律, 求出通式即可求解.

以第  $i$  个薄片  $AB$  为研究对象, 受力情况如图 6—3 甲所示, 第  $i$  个

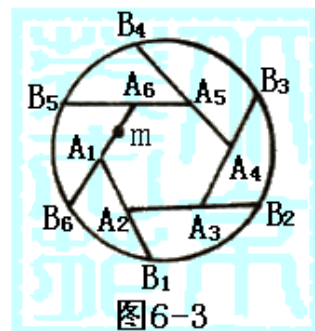


图6-3

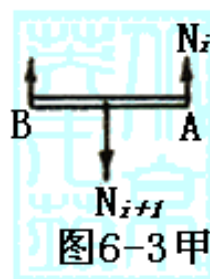


图6-3甲

薄片受到前一个薄片向上的支持力  $N_i$ 、碗边向上的支持力和后一个薄片向下的压力  $N_{i+1}$ 。选碗边 B 点为轴，根据力矩平衡有

$$N_i \cdot L = N_{i+1} \cdot \frac{L}{2}, \text{得 } N_i = \frac{N_{i+1}}{2}$$

$$\text{所以 } N_1 = \frac{1}{2} N_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} N_3 = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^5 N_6 \quad \textcircled{1}$$

再以  $A_6B_6$  为研究对象，受力情况如图 6—3 乙所示， $A_6B_6$  受到薄片  $A_5B_5$  向上的支持力  $N_6$ 、碗向上的支持力和后一个薄片  $A_1B_1$  向下的压力  $N_1$ 、质点向下的压力  $mg$ 。选  $B_6$  点为轴，根据力矩平衡有

$$N_1 \cdot \frac{L}{2} + mg \cdot \frac{3}{4} L = N_6 \cdot L$$

$$\text{由①、②联立，解得 } N_1 = \frac{mg}{42}$$

所以， $A_1B_1$  薄片对  $A_6B_6$  的压力为  $\frac{mg}{42}$ 。

**例 7** 用 20 块质量均匀分布的相同光滑积木块，在光滑水平面上一块叠一块地搭成单孔桥，已知每一积木块长度为  $L$ ，横截面是边长为  $h(h = L/4)$  的正方形，要求此桥具有最大的跨度（即桥孔底宽），计算跨度与桥孔高度的比值。

**解析** 为了使搭成的单孔桥平衡，桥孔两侧应有相同的积木块，从上往下计算，使积木块均能保证平衡，要满足合力矩为零，平衡时，每块积木块都有最大伸出量，则单孔桥就有最大跨度，又由于每块积木块都有厚度，所以最大跨度与桥孔高度存在一比值。

将从上到下的积木块依次计为 1、2、 $\dots$ 、 $n$ ，显然第 1 块相对第 2 块的最大伸出量为

$$\Delta x_1 = \frac{L}{2}$$

第 2 块相对第 3 块的最大伸出量为  $\Delta x_2$ （如图 6—4 所示），则

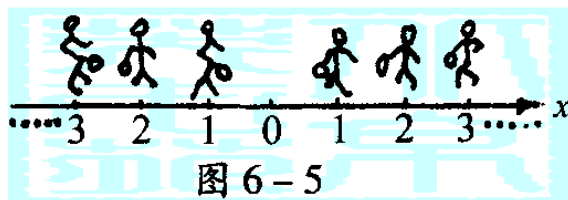
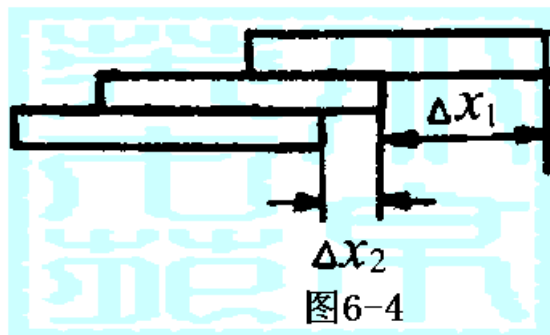
$$G \cdot \Delta x_2 = \left(\frac{L}{2} - \Delta x_2\right) \cdot G$$

$$\Delta x_2 = \frac{L}{4} = \frac{L}{2 \times 2}$$

同理可得第 3 块的最大伸出量  $\Delta x_3 = \frac{L}{2 \times 3}$

$\dots\dots$

最后归纳得出  $\Delta x_n = \frac{L}{2 \times n}$





$$\text{所以总跨度 } k = 2 \sum_{n=1}^9 \Delta x_n = 11.32h$$

$$\text{跨度与桥孔高的比值为 } \frac{k}{H} = \frac{11.32h}{9h} = 1.258$$

**例 8** 如图 6—5 所示, 一排人站在沿  $x$  轴的水平轨道旁, 原点  $O$  两侧的人的序号都记为  $n(n=1,2,3 \dots)$ . 每人只有一个沙袋,  $x > 0$  一侧的每个沙袋质量为  $m=14\text{kg}$ ,  $x < 0$  一侧的每个沙袋质量  $m' = 10\text{kg}$ . 一质量为  $M=48\text{kg}$  的小车以某初速度  $v_0$  从原点出发向正  $x$  轴方向滑行. 不计轨道阻力. 当车每经过一人身旁时, 此人就把沙袋以水平速度  $v$  朝与车速相反的方向沿车面扔到车上,  $v$  的大小等于扔此袋之前的瞬间车速大小的  $2n$  倍. ( $n$  是此人的序号数)

(1) 空车出发后, 车上堆积了几个沙袋时车就反向滑行?

(2) 车上最终有大小沙袋共多少个?

**解析** 当人把沙袋以一定的速度朝与车速相反的方向沿车面扔到车上时, 由动量守恒定律知, 车速要减小, 可见, 当人不断地把沙袋以一定的速度扔到车上, 总有一时刻使车速反向或减小到零, 如车能反向运动, 则另一边的人还能将沙袋扔到车上, 直到车速为零, 则不能再扔, 否则还能扔.

小车以初速  $v_0$  沿正  $x$  轴方向运动, 经过第 1 个 ( $n=1$ ) 人的身旁时, 此人将沙袋以  $u = 2nv_0 = 2v_0$  的水平速度扔到车上, 由动量守恒得  $Mv_0 - m \cdot 2v_0 = (M + m)v_1$ , 当小车运动到第 2 人身旁时, 此人将沙袋以速度  $u' = 2nv_1 = 4v_1$  的水平速度扔到车上, 同理有  $(M + m)v_1 - m \cdot 2nv_1 = (M + 2m)v_2$ , 所以, 当第  $n$  个沙袋抛上车后的车速为  $v_n$ , 根据动量守恒有  $[M + (n-1)m]v_{n-1} - 2n \cdot mv_{n-1} = (M + nm)v_n$ , 即  $v_n = \frac{M - (n+1)m}{M + nm} v_{n-1}$ .

同理有  $v_{n+1} = \frac{M - (n+2)m}{M + (n+1)m} v_n$ , 若抛上  $(n+1)$  包沙袋后车反向运动, 则应有  $v_n > 0, v_{n+1} < 0$ .

即  $M - (n+1)m > 0, M - (n+2)m < 0$ .

由此两式解得:  $n < \frac{38}{14}, n > \frac{20}{14}, n$  为整数取 3.

当车反向滑行时, 根据上面同样推理可知, 当向左运动到第  $n$  个人身旁, 抛上第  $n$  包沙袋后由动量守恒定律有:

$$[M + 3m + (n-1)m']v'_{n-1} - 2m'nv_{n-1} = (M + 3m + nm')v'_n$$

$$\text{解得: } v_n' = \frac{M + 3m - (n+1)m'}{M + 3m + nm'} v_{n-1}' \quad \text{同理 } v_{n+1}' = \frac{M + 3m - (n+2)m'}{M + 3m + (n+1)m'} v_n'$$

设抛上  $n+1$  个沙袋后车速反向, 要求  $v_n' > 0, v_{n+1}' \leq 0$

$$\text{即 } \begin{cases} M + 3m - (n+1)m' > 0 \\ M + 3m - (n+2)m' \leq 0 \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} n > 7 \\ n = 8 \end{cases} \quad \text{即抛上第 8 个}$$

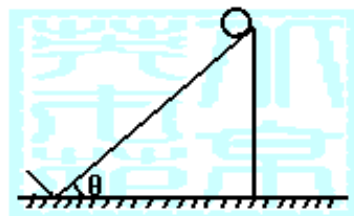


图6-6

沙袋后车就停止, 所以车上最终有 11 个沙袋.

**例 9** 如图 6—6 所示, 一固定的斜面, 倾角  $\theta = 45^\circ$ , 斜面长  $L=2.00$  米. 在斜面下端有一与斜面垂直的挡板. 一质量为  $m$  的质点, 从斜面的最高点沿斜面下滑, 初速度为零. 下滑到最底端

与挡板发生弹性碰撞. 已知质点与斜面间的动摩擦因数  $\mu = 0.20$ , 试求此质点从开始到发生第 11 次碰撞的过程中运动的总路程.

**解析** 因为质点每次下滑均要克服摩擦力做功, 且每次做功又不相同, 所以要想求质点从开始到发生  $n$  次碰撞的过程中运动的总路程, 需一次一次的求, 推出通式即可求解.

设每次开始下滑时, 小球距档板为  $s$

$$\text{则由功能关系: } \mu mg \cos \theta (s_1 + s_2) = mg(s_1 - s_2) \sin \theta$$

$$\mu mg \cos \theta (s_2 + s_3) = mg(s_2 - s_3) \sin \theta$$

$$\text{即有 } \frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = \dots = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} = \frac{2}{3}$$

由此可见每次碰撞后通过的路程是一等比数列, 其公比为  $\frac{2}{3}$ .

$\therefore$  在发生第 11 次碰撞过程中的路程

$$s = s_1 + 2s_2 + 2s_3 + \dots + 2s_{11}$$

$$= 2(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{11}) - s_1 = 2 \times \frac{s_1 [1 - (\frac{2}{3})^{11}]}{1 - \frac{2}{3}} - s_1$$

$$= 10 - 12 \times (\frac{2}{3})^{11} (m) = 9.86(m)$$

**例 10** 如图 6—7 所示, 一水平放置的圆环形刚性窄槽固定在桌面上, 槽内嵌着三个大小相同的刚性小球, 它们的质量分别是  $m_1$ 、 $m_2$

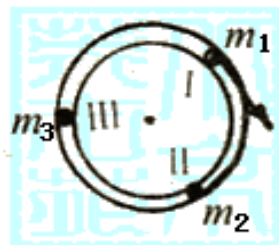


图6-7

和  $m_3$ ,  $m_2=m_3=2m_1$ . 小球与槽的两壁刚好接触而它们之间的摩擦可忽略不计. 开始时, 三球处在槽中 I、II、III 的位置, 彼此间距离相等,

$m_2$  和  $m_3$  静止,  $m_1$  以初速  $v_0 = \pi R / 2$  沿槽运动,  $R$  为圆环的内半径和

小球半径之和, 设各球之间的碰撞皆为弹性碰撞, 求此系统的运动周期  $T$ .

**解析** 当  $m_1$  与  $m_2$  发生弹性碰撞时, 由于  $m_2=2m_1$ , 所以  $m_1$  碰后弹回,  $m_2$  向前与  $m_3$  发生碰撞. 而又由于  $m_2=m_3$ , 所以  $m_2$  与  $m_3$  碰后,  $m_3$  能静止在  $m_1$  的位置,  $m_1$  又以  $v$  速度被反弹, 可见碰撞又重复一次. 当  $m_1$  回到初始位置, 则系统为一个周期.

以  $m_1$ 、 $m_2$  为研究对象, 当  $m_1$  与  $m_2$  发生弹性碰撞后, 根据动量守恒定律, 能量守恒定律可写出:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

$$\text{由①、②式得: } v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{1}{3} v_0 \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2}{3} v_0$$

$$\text{以 } m_2、m_3 \text{ 为研究对象, 当 } m_2 \text{ 与 } m_3 \text{ 发生弹性碰撞后, 得 } v_3 = \frac{2}{3} v_0 \quad v_2' = 0$$

$$\text{以 } m_3、m_1 \text{ 为研究对象, 当 } m_3 \text{ 与 } m_1 \text{ 发生弹性碰撞后, 得 } v_3' = 0 \quad v_1' = v_0$$

由此可见, 当  $m_1$  运动到  $m_2$  处时与开始所处的状态相似. 所以碰撞使  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  交换位置, 当  $m_1$  再次回到原来位置时, 所用的时间恰好就是系统的一个周期  $T$ , 由此可得周期

$$T = 3(t_1 + t_2 + t_3) = 3 \times \left( \frac{2\pi R}{3v_0} + \frac{2\pi R}{v_0} + \frac{2\pi R}{3v_0} \right) = \frac{10\pi R}{v_0} = \frac{10\pi R}{\frac{\pi R}{2}} = 20(s).$$

**例 11** 有许多质量为  $m$  的木块相互靠着沿一直线排列于光滑的水平面上. 每相邻的两个木块均用长为  $L$  的柔绳连接着. 现用大小为  $F$  的恒力沿排列方向拉第一个木块, 以后各木块依次被牵而运动, 求第  $n$  个木块被牵动时的速度.

**解析** 每一个木块被拉动起来后, 就和前面的木块成为一体, 共同做匀加速运动一段距离  $L$  后, 把绳拉紧, 再牵动下一个木块. 在绳子绷紧时, 有部分机械能转化为内能. 因此, 如果列出  $(n-1)FL = \frac{1}{2}nmv_n^2$  这样的关系式是错误的.

设第  $(n-1)$  个木块刚被拉动时的速度为  $v_{n-1}$ , 它即将拉动下一个木块时速度增至  $v'_{n-1}$ ,

第  $n$  个木块刚被拉动时速度为  $v_n$ . 对第  $(n-1)$  个木块开始运动到它把下一段绳子即将拉紧这一过程, 由动能定理有:

$$FL = \frac{1}{2}(n-1)mv_{n-1}'^2 - \frac{1}{2}(n-1)mv_{n-1}^2 \quad (1)$$

对绳子把第  $n$  个木块拉动这一短暂过程，由动量守恒定律，有

$$(n-1)mv_{n-1}' = nmv_n \quad \text{得：} \quad v_{n-1}' = \frac{n}{n-1}v_n \quad (2)$$

把②式代入①式得：
$$FL = \frac{1}{2}(n-1)m\left(\frac{n}{n-1}v_n\right)^2 - \frac{1}{2}(n-1)mv_{n-1}^2$$

整理后得：
$$(n-1)\frac{2FL}{m} = n^2v_n^2 - (n-1)^2v_{n-1}^2 \quad (3)$$

③式就是反映相邻两木块被拉动时速度关系的递推式，由③式可知

当  $n=2$  时有：
$$\frac{2FL}{m} = 2^2v_2^2 - v_1^2$$

当  $n=3$  时有：
$$2 \cdot \frac{2FL}{m} = 3^2v_3^2 - 2^2v_2^2$$

当  $n=4$  时有：
$$3 \cdot \frac{2FL}{m} = 4^2v_4^2 - 3^2v_3^2 \quad \dots$$

一般地有  $(n-1)\frac{2FL}{m} = n^2v_n^2 - (n-1)^2v_{n-1}^2$

将以上  $(n-1)$  个等式相加，得：
$$(1+2+3+\dots+n-1)\frac{2FL}{m} = n^2v_n^2 - v_1^2$$

所以有  $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2FL}{m} = n^2v_n^2 - v_1^2$

在本题中  $v_1 = 0$ ，所以  $v_n = \sqrt{\frac{FL(n-1)}{nm}}$ .

**例 12** 如图 6—8 所示，质量  $m=2\text{kg}$  的平板小车，后端放有质量  $M=3\text{kg}$  的铁块，它和车之间动摩擦因数  $\mu = 0.50$ 。开始

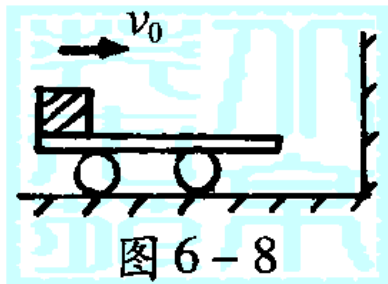


图 6—8

时，车和铁块共同以  $v_0 = 3\text{m/s}$  的速度向右在光滑水平面上

前进，并使车与墙发生正碰，设碰撞时间极短，碰撞无机械能损失，且车身足够长，使得铁块总不能和墙相碰，求小车走过的总路程。

**解析** 小车与墙撞后，应以原速率弹回。铁块由于惯性继续沿原来方向运动，由于铁块和车的相互摩擦力作用，过一段时间后，它们就会相对静止，一起以相同的速度再向右运动，然后车与墙发生第二次碰撞，碰后，又重复第一次碰后的情况。以后车与墙就这样一次次碰撞下去。车每与墙碰一次，铁块就相对于车向前滑动一段距离，系统就有一部分机械能转化为内能，车每次与墙碰后，就左、右往返一次，车的总路程就是每次往返的路程之和。

设每次与墙碰后的速度分别为  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$ 、 $\dots$ 、 $v_n$ 、 $\dots$  车每次与墙碰后向左运动的最远距

离分别为  $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$ 、 $\dots$ 、 $s_n$ 、 $\dots$ 。以铁块运动方向为正方向，在车与墙第  $(n-1)$  次碰后到发生第  $n$  次碰撞之前，对车和铁块组成的系统，由动量守恒定律有

$$(M-m)v_{n-1} = (M+m)v_n \quad \text{所以} \quad v_n = \frac{M-m}{M+m}v_{n-1} = \frac{v_{n-1}}{5}$$

$$\text{由这一关系可得: } v_2 = \frac{v_1}{5}, v_3 = \frac{v_1}{5^2}, \dots$$

$$\text{一般地, 有 } v_n = \frac{v_1}{5^{n-1}}, \dots$$

由运动学公式可求出车与墙发生第  $n$  次碰撞后向左运动的最远距离为

$$s_n = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{v_1^2}{2a} \cdot \frac{1}{5^{2n-2}}$$

$$\text{类似地, 由这一关系可递推到: } s_1 = \frac{v_1^2}{2a}, s_2 = \frac{v_1^2}{2a} \cdot \frac{1}{5^2}, s_3 = \frac{v_1^2}{2a} \cdot \frac{1}{5^4}, \dots, s_n = \frac{v_1^2}{2a} \cdot \frac{1}{5^{2n-2}}$$

所以车运动的总路程

$$\begin{aligned} s_{\text{总}} &= 2(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots) \\ &= 2 \cdot \frac{v_1^2}{2a} \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{2n-2}} + \dots\right) \\ &= \frac{v_1^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{v_1^2}{a} \cdot \frac{25}{24} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } v_1 = v_0 = 3m/s \quad a = \frac{Mg\mu}{m} = \frac{15}{2}m/s^2$$

$$\text{所以 } s_{\text{总}} = \frac{5}{4}(m)$$

**例 13** 10 个相同的扁长木块一个紧挨一个地放在水平地面上，如图 6—9 所示，每个木块的质量  $m = 0.40\text{kg}$ ，长度  $l = 0.45\text{m}$ ，它们与地面间的静摩擦系数和动摩擦系数均为  $\mu_2 = 0.10$ 。原来木块处于静止状态。左方第一个木块的左端上方放一个质量为  $M = 1.0\text{kg}$  的小铅块，它与木块间的静摩擦系数和动摩擦系数均为  $\mu_1 = 0.20$ 。现突然给铅块一向右的初速度  $v_0 = 4.3\text{m/s}$ ，使其在大

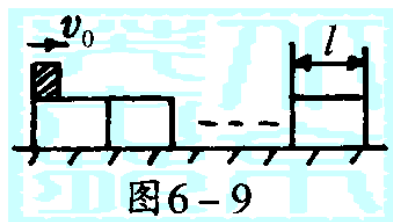


图 6-9

摩擦系数和动摩擦系数均为  $\mu_1 = 0.20$ 。现突然给铅块一向右的初速度  $v_0 = 4.3\text{m/s}$ ，使其在大

木块上滑行. 试确定铅块最后的位置在何处(落在地上还是停在哪个木块上). 重力加速度  $g$  取  $10(m/s)^2$ , 设铅块的长度与木块相比可以忽略.

**解析** 当铅块向右运动时, 铅块与 10 个相同的扁长木块中的第一块先发生摩擦力, 若此摩擦力大于 10 个扁长木块与地面间的最大静摩擦力, 则 10 个扁长木块开始运动, 若此摩擦力小于 10 个扁长木块与地面间的最大静摩擦力, 则 10 个扁长木块先静止不动, 随着铅块的运动, 总有一个时刻扁长木块要运动, 直到铅块与扁长木块相对静止, 后又一起匀减速运动到停止.

铅块  $M$  在木块上滑行所受到的滑动摩擦力  $f_1 = \mu_1 Mg = 2.0N$

设  $M$  可以带动木块的数目为  $n$ , 则  $n$  满足:  $f_1 - \mu_2(M + m)g - (n-1)\mu_2 mg \geq 0$

即  $2.0 - 1.4 - 0.4(n-1) \geq 0$

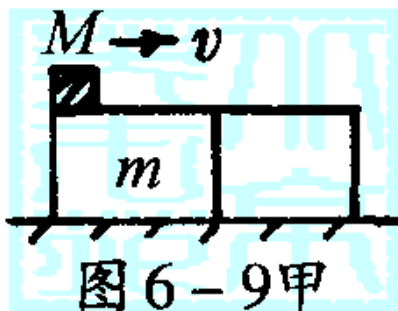
上式中的  $n$  只能取整数, 所以  $n$  只能取 2, 也就是当  $M$  滑行到倒数第二个木块时, 剩下的两个木块将开始运动. 设铅块刚离开第 8 个木块时速度为  $v$ , 则

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \mu_1 Mg \cdot 8l$$

得:  $v^2 = 2.49(m/s)^2 > 0$

由此可见木块还可以滑到第 9 个木块上.  $M$  在第 9 个木块上运动如图 6—9 甲所示, 则对  $M$  而言有:  $-\mu_1 Mg = Ma_M$

得:  $a_M = -2.0m/s^2$



第 9 及第 10 个木块的动力学方程为:  $\mu_1 Mg - \mu_2(M + m)g - \mu_2 mg = 2ma_m$ ,

得:  $a_m = 0.25m/s^2$ .

设  $M$  刚离开第 9 个木块上时速度为  $v'$ , 而第 10 个木块运动的速度为  $V'$ , 并设木块运动的距离为  $s$ , 则  $M$  运动的距离为  $s + l$ , 有:

$$v'^2 = v^2 + 2a_M(s + l)$$

$$V'^2 = 2a_m s$$

$$v' = v + a_M t$$

$$V' = a_m t$$

消去  $s$  及  $t$  求出:  $\begin{cases} v' = 0.611m/s \\ V' = 0.212m/s \end{cases}$  或  $\begin{cases} v' = -0.26m/s \\ V' = 0.23m/s \end{cases}$ , 显然后一解不合理应舍去.

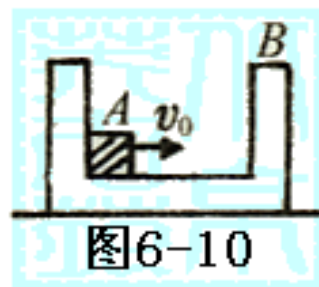
因  $v' > V'$ , 故  $M$  将运动到第 10 个木块上.

再设  $M$  运动到第 10 个木块的边缘时速度为  $v''$ , 这时木块的速度为  $V''$ , 则:

$$v''^2 = v'^2 + 2a_M(s' + l)$$

解得:  $v''^2 = -1.63 - 4s' < 0$ , 故  $M$  不能滑离第 10 个木块, 只能停在它的表面上, 最后和木块一起静止在地面上.

**例 14** 如图 6—10 所示, 质量为  $m$  的长方形箱子, 放在光滑的水平地面上. 箱内有一质量也为  $m$  的小滑块, 滑块与箱底间无摩擦. 开始时箱子静止不动, 滑块以恒定的速度  $v_0$  从箱子的 A 壁处向 B 处运动, 后与 B 壁碰撞. 假设滑块与箱壁每碰撞一次, 两者相对



速度的大小变为该次碰撞前相对速度的  $e$  倍,  $e = \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

(1) 要使滑块与箱子这一系统消耗的总动能不超过其初始动能的 40%, 滑块与箱壁最多可碰撞几次?

(2) 从滑块开始运动到刚完成上述次数的碰撞期间, 箱子的平均速度是多少?

**解析** 由于滑块与箱子在水平方向不受外力, 故碰撞时系统水平方向动量守恒. 根据题目给出的每次碰撞前后相对速度之比, 可求出每一次碰撞过程中动能的损耗. 滑块开始运动到完成题目要求的碰撞期间箱子的平均速度, 应等于这期间运动的总位移与总时间的比值.

(1) 滑块与箱壁碰撞, 碰后滑块对地速度为  $v$ , 箱子对地速度为  $u$ . 由于题中每次碰撞的  $e$  是一样的, 故有:

$$e = \frac{u_1 - v_1}{v_0 - u_0} = \frac{u_2 - v_2}{v_1 - u_1} = \dots = \frac{u_n - v_n}{v_{n-1} - u_{n-1}}$$

$$\text{或 } -e = \frac{v_1 - u_1}{v_0 - 0} = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} = \dots = \frac{v_n - u_n}{v_{n-1} - u_{n-1}}$$

$$(-e)^n = \frac{v_1 - u_1}{v_0} \times \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} \times \dots \times \frac{v_n - u_n}{v_{n-1} - u_{n-1}}$$

$$\text{即碰撞 } n \text{ 次后 } v_n - u_n = (-e)^n v_0 \quad \text{①}$$

$$\text{碰撞第 } n \text{ 次的动量守恒式是 } mv_n + mu_n = mv_0 \quad \text{②}$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ 联立得 } v_n = \frac{1}{2}[1 + (-e)^n]v_0 \quad u_n = \frac{1}{2}[1 - (-e)^n]v_0$$

第  $n$  次碰撞后，系统损失的动能

$$\begin{aligned} \Delta E_{kn} &= E_k - E_{kn} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m(v_n^2 + u_n^2) \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2(1 + e^{2n}) \\ &= \frac{1 - e^{2n}}{2} \times \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1 - e^{2n}}{2} E_k \end{aligned}$$

下面分别讨论：

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } \frac{\Delta E_{k1}}{E_k} = \frac{1 - e^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.146$$

$$n = 2 \text{ 时, } \frac{\Delta E_{k2}}{E_k} = \frac{1 - e^4}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = 0.25$$

$$n = 3 \text{ 时, } \frac{\Delta E_{k3}}{E_k} = \frac{1 - e^6}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.323$$

$$n = 4 \text{ 时, } \frac{\Delta E_{k4}}{E_k} = \frac{1 - e^8}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = 0.375$$

$$n = 5 \text{ 时, } \frac{\Delta E_{k5}}{E_k} = \frac{1 - e^{10}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.412$$

因为要求的动能损失不超过 40%，故  $n=4$ 。

(2) 设 A、B 两侧壁的距离为  $L$ ，则滑块从开始运动到与箱壁发生第一次碰撞的时间

$$t_0 = \frac{L}{v_0} \text{. 在下一次发生碰撞的时间 } t_1 = \frac{L}{|u_1 - v_1|} = \frac{L}{ev_0} \text{, 共碰撞四次, 另两次碰撞的时间}$$



分别为  $t_2 = \frac{L}{e^2 v_0}$ 、 $t_3 = \frac{L}{e^3 v_0}$ ，所以总时间  $t = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = \frac{L}{e^3 v_0} (1 + e + e^2 + e^3)$ 。

在这段时间中，箱子运动的距离是：

$$\begin{aligned} s &= 0 + u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3 \\ &= \frac{1}{2}(1+e)v_0 \times \frac{L}{ev_0} + \frac{1}{2}(1-e^2)v_0 \times \frac{L}{e^2 v_0} + \frac{1}{2}(1+e^3)v_0 \times \frac{L}{e^3 v_0} \\ &= \frac{L}{2e} + \frac{L}{2} - \frac{L}{2e^2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2e^3} + \frac{L}{2} \\ &= \frac{L}{2e^3} (1 + e + e^2 + e^3) \end{aligned}$$

所以平均速度为：
$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{\frac{L}{2e^3} (1 + e + e^2 + e^3)}{\frac{L}{e^3 v_0} (1 + e + e^2 + e^3)} = \frac{v_0}{2}$$

**例 15** 一容积为 1/4 升的抽气机，每分钟可完成 8 次抽气动作。一容积为 1 升的容器与此抽气筒相连通。求抽气机工作多长时间才能使容器内的气体的压强由 76mmHg 降为 1.9mmHg。（在抽气过程中容器内的温度保持不变）

**解析** 根据玻一马定律，找出每抽气一次压强与容器容积和抽气机容积及原压强的关系，然后归纳递推出抽  $n$  次的压强表达式。

设气体原压强为  $p_0$ ，抽气机的容积为  $V_0$ ，容器的容积为  $V$ 。每抽一次压强分别为  $p_1, p_2, \dots$ ，则由玻一马定律得：

$$\text{第一次抽气后： } p_0 V = p_1 (V + V_0) \quad \text{①}$$

$$\text{第二次抽气后： } p_1 V = p_2 (V + V_0) \quad \text{②}$$

$$\text{依次递推有： } p_2 V = p_3 (V + V_0) \quad \text{③}$$

⋮

$$p_{n-1} V = p_n (V + V_0) \quad \text{④}$$

由以上 ④ 式得：
$$p_n = \left(\frac{V}{V + V_0}\right)^n p_0 \quad \text{所以 } n = \frac{\lg \frac{p_0}{p_n}}{\lg \left(\frac{V + V_0}{V}\right)}$$

$$\text{代入已知得: } n = \frac{\lg 400}{\lg 1.25} = 27 \text{ (次)}$$

$$\text{工作时间为: } t = \frac{27}{8} = 3.38 \text{ 分钟}$$

**例 16** 使一原来不带电的导体小球与一带电量为  $Q$  的导体大球接触, 分开之后, 小球获得电量  $q$ . 今让小球与大球反复接触, 在每次分开有后, 都给大球补充电荷, 使其带电量恢复到原来的值  $Q$ . 求小球可能获得的最大电量.

**解析** 两个孤立导体相互接触, 相当于两个对地电容并联, 设两个导体球带电  $Q_1$ 、 $Q_2$ , 由于两个导体球对地电压相等,

$$\text{故有 } \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \text{ 即 } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}, \text{ 亦即 } \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = k,$$

所以  $Q = k(Q_1 + Q_2)$ ,  $k$  为常量, 此式表明: 带电 (或不带电) 的小球跟带电大球接触后, 小球所获得的电量与总电量的比值不变, 比值  $k$  等于第一次带电量  $q$  与总电量  $Q$  的比值, 即

$$k = \frac{q}{Q}. \text{ 根据此规律就可以求出小球可能获得的最大电量.}$$

设第 1、2、 $\dots$ 、 $n$  次接触后小球所带的电量分别为  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ , 有:

$$q_1 = kQ = q$$

$$q_2 = k(Q + q_1) = q + kq$$

$$q_3 = k(Q + q_2) = kQ + kq_2 = q + kq + k^2q$$

$\dots\dots$

$$q_n = k(Q + q_{n-1}) = q + kq + k^2q + \dots + k^{n-1}q$$

由于  $k < 1$ , 上式为无穷递减等比数列, 根据求和公式得:

$$q_n = \frac{q}{1-k} = \frac{q}{1-\frac{q}{Q}} = \frac{qQ}{Q-q}$$

即小球与大球多次接触后, 获得的最大电量为  $\frac{qQ}{Q-q}$ .

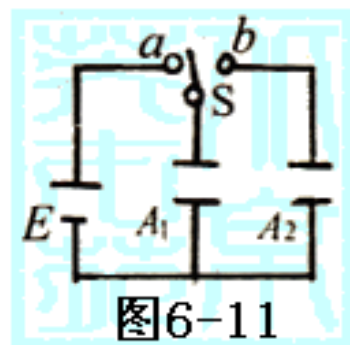


图 6-11

**例 17** 在如图 6—11 所示的电路中,  $S$  是一单刀双掷开关,  $A_1$  和  $A_2$  为两个平行板电容器,  $S$  掷向  $a$  时,  $A_1$  获电荷电量为  $Q$ , 当  $S$  再掷向  $b$  时,  $A_2$  获电荷电量为  $q$ . 问经过很多次  $S$  掷向  $a$ , 再掷向  $b$  后,  $A_2$  将获得多少电量?

**解析**  $S$  掷向  $a$  时, 电源给  $A_1$  充电,  $S$  再掷向  $b$ ,  $A_1$  给  $A_2$  充电, 在经过很多次重复的

过程中,  $A_2$  的带电量越来越多, 两板间电压越来越大. 当  $A_2$  的电压等于电源电压时,  $A_2$  的带电量将不再增加. 由此可知  $A_2$  最终将获得电量  $q_2 = C_2 E$ .

$$\text{因为 } Q = C_1 E \quad \text{所以 } C_1 = \frac{Q}{E}$$

$$\text{当 } S \text{ 由 } a \text{ 第一次掷向 } b \text{ 时, 有: } \frac{Q - q}{C_1} = \frac{q}{C_2}$$

$$\text{所以 } C_2 = \frac{Qq}{(Q - q)E}$$

$$\text{解得 } A_2 \text{ 最终获得的电量 } q_2 = \frac{Qq}{Q - q}$$

**例 18** 电路如图 6—12 所示, 求当  $R'$  为何值时,  $R_{AB}$  的阻值与“网络”的“格”数无关? 此时  $R_{AB}$  的阻值等于什么?

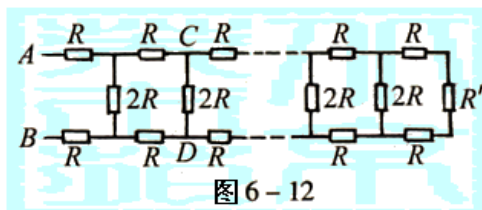


图 6-12

**解析** 要使  $R_{AB}$  的阻值与“网络”的“格”数无关, 则图中 CD 间的阻值必须等于  $R'$  才行.

$$\text{所以有 } \frac{(2R + R')2R}{2R + R' + 2R} = R' \quad \text{解得 } R' = (\sqrt{5} - 1)R$$

$$\text{此时 AB 间总电阻 } R_{AB} = (\sqrt{5} + 1)R$$

**例 19** 如图 6—13 所示, 在  $x$  轴上方有垂直于  $xy$  平面向里的匀强磁场, 磁感应强度为  $B$ , 在  $x$  轴下方有沿  $y$  轴负方向的匀强电场, 场强为  $E$ . 一质量为  $m$ , 电量为  $-q$  的粒子从坐标原点  $O$  沿着  $y$  轴方向射出. 射出之后, 第三次到达  $x$  轴时, 它与  $O$  点的距离为  $L$ . 求此粒子射出时的速度  $v$  和每次到达  $x$  轴时运动的总路程  $s$ . (重力不计)

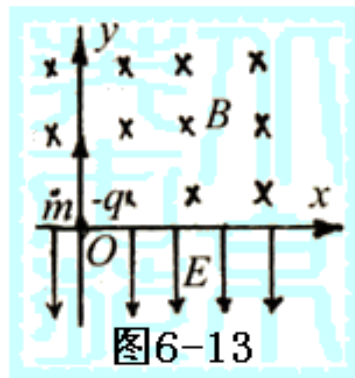


图 6-13

**解析** 粒子进入磁场后做匀速圆周运动, 经半周后通过  $x$  轴进入电场后做匀减速直线运动, 速度减为零后, 又反向匀加速通过  $x$  轴进入磁场后又做匀速圆周运动, 所以运动有周期性. 它第 3 次到达  $x$  轴时距  $O$  点的距离  $L$  等于圆半径的 4 倍 (如图 6—13 甲所示)

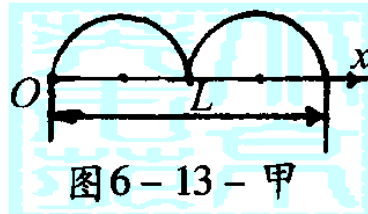


图 6-13-甲

$$\text{粒子在磁场中做匀速圆周运动的半径为 } R = \frac{mv}{Bq} = \frac{L}{4}$$

$$\text{所以粒子射出时的速度 } v = \frac{BqL}{4m}$$

粒子做圆周运动的半周长为  $s_1 = \frac{\pi L}{4}$

粒子以速度  $v$  进入电场后做匀减速直线运动，能深入的最大距离为  $y$ ，

因为  $v^2 = 2ay = 2 \frac{Eq}{m} y$

所以粒子在电场中进入一次通过的路程为  $s_2 = 2y = \frac{B^2 q L^2}{16mE}$

粒子第 1 次到达  $x$  轴时通过的路程为  $s_1 = \pi \cdot R = \frac{\pi L}{4}$

粒子第 2 次到达  $x$  轴时，已通过的路程为  $s_2 = s_1 + s_2 = \frac{\pi L}{4} + \frac{B^2 q L^2}{16mE}$

粒子第 3 次到达  $x$  轴时，已通过的路程为  $s_3 = s_1 + s_2 + s_1 = \frac{\pi L}{2} + \frac{B^2 q L^2}{16mE}$

粒子第 4 次到达  $x$  轴时，已通过的路程为  $s_4 = 2s_1 + 2s_2 = \frac{\pi L}{2} + \frac{B^2 q L^2}{8mE}$

粒子第  $(2n-1)$  次到达  $x$  轴时，已通过的路程为

$$s_{(2n-1)} = ns_1 + (n-1)s_2 = \frac{n\pi L}{4} + (n-1) \frac{B^2 q L^2}{16mE}$$

粒子第  $2n$  次到达  $x$  轴时，已通过的路程为  $s_{2n} = n(s_1 + s_2) = n \left( \frac{\pi L}{4} + \frac{B^2 q L^2}{16mE} \right)$

上面  $n$  都取正整数.

## 针对训练

- 一物体放在光滑水平面上，初速为零，先对物体施加一向东的恒力  $F$ ，历时 1 秒钟，随即把此力改为向西，大小不变，历时 1 秒钟，接着又把此力改为向东，大小不变，历时 1 秒钟，如此反复，只改变力的方向，共历时 1 分钟. 在此 1 分钟内 ( )
  - 物体时而向东运动，时而向西运动，在 1 分钟末静止于初始位置之东
  - 物体时而向东运动，时而向西运动，在 1 分钟末静止于初始位置
  - 物体时而向东运动，时而向西运动，在 1 分钟末继续向东运动

D. 物体一直向东运动，从不向西运动，在 1 分钟末静止于初始位置之东

2. 一小球从距地面为  $H$  的高度处由静止开始落下. 已知小球在空中运动时所受空气阻力为球所受重力的  $k$  倍 ( $k < 1$ ), 球每次与地面相碰前后的速率相等, 试求小球从开始运动到停止运动,

- (1) 总共通过的路程;  
(2) 所经历的时间.

3. 如图 6—14 所示, 小球从长  $L$  的光滑斜面顶端自由下滑, 滑到底端时与挡板碰撞并反弹而回, 若每次与挡板碰撞后的速度大小为碰撞前的  $4/5$ , 求小球从开始下滑到最终停止于斜面下端物体共通过的路程.

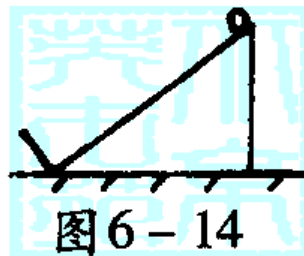


图 6-14

4. 如图 6—15 所示, 有一固定的斜面, 倾角为  $45^\circ$ , 斜面长为 2 米, 在斜面下端有一与斜面垂直的挡板, 一质量为  $m$  的质点, 从斜面的最高点沿斜面下滑, 初速度为 1 米/秒. 质点沿斜面下滑到斜面最底端与挡板发生弹性碰撞. 已知质点与斜面间的滑动摩擦因数为 0.20.

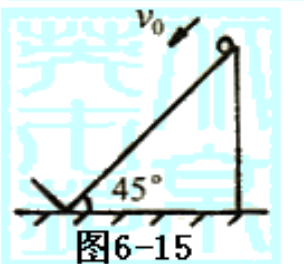


图 6-15

- (1) 试求此质点从开始运动到与挡板发生第 10 次碰撞的过程中通过的总路程;  
(2) 求此质点从开始运动到最后停下来的过程中通过的总路程.

5. 有 5 个质量相同、其大小可不计的小木块 1、2、3、4、5 等距离地依次放在倾角  $\theta = 30^\circ$  的斜面上 (如图 6—16 所示). 斜面在木块 2 以上的部分是光滑的, 以下部分是粗糙的, 5 个木块与斜面粗糙部分之间的静摩擦系数和滑动摩擦系数都是  $\mu$ , 开始时用手扶着木块 1, 其余各木块都静止在斜面上. 现在放手, 使木块 1 自然下滑, 并与木块 2 发生碰撞, 接着陆续发生其他碰撞. 假设各木块间的碰撞都是完全非弹性的. 求  $\mu$  取何值时木块 4 能被撞而木块 5 不能被撞.

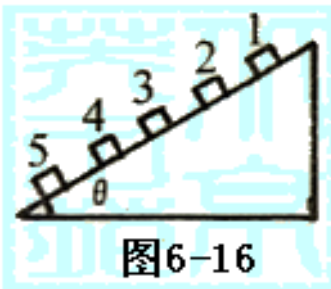


图 6-16

6. 在一光滑水平的长直轨道上, 等距离地放着足够多的完全相同的质量为  $m$  的长方形木块, 依次编号为木块 1, 木块 2, ..., 如图 6—17 所示.

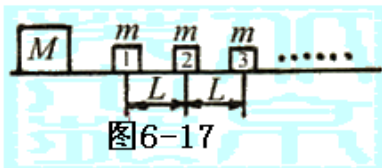


图 6-17

在木块 1 之前放一质量为  $M=4m$  的大木块, 大木块与木块 1 之间的距离与相邻各木块间的距离相同, 均为  $L$ . 现在, 在所有木块都静止的情况下, 以一沿轨道方向的恒力  $F$  一直作用在大木块上, 使其先与木块 1 发生碰撞, 设碰后与木块 1 结为一体再与木块 2 发生碰撞, 碰后又结为一体, 再与木块 3 发生碰撞, 碰后又结为一体, 如此继续下去. 今问大木块 (以及与之结为一体的各小木块) 与第几个小木块碰撞之前的一瞬间, 会达到它在整个过程中的最大速度? 此速度等于多少?

7. 有电量为  $Q_1$  的电荷均匀分布在一个半球面上, 另有无数个电量均为  $Q_2$  的点电荷位于通过球心的轴线上, 且在半球面的下部. 第  $k$  个电荷与球心的距离为  $R \cdot 2^{k-1}$ , 且  $k=1, 2, 3,$

4, ..., 设球心处的电势为零, 周围空间均为自由空间. 若  $Q_1$  已知, 求  $Q_2$ .

8. 一个半径为 1 米的金属球, 充电后的电势为  $U$ , 把 10 个半径为  $1/9$  米的均不带电的小金属球顺次分别与这个大金属球相碰后拿走, 然后把这 10 个充了电的小金属球彼此分隔摆在半径为 10 米的圆周上, 并拿走大金属球. 求圆心处的电势. (设整个过程中系统的总电量无泄漏)

9. 真空中, 有五个电量均为  $q$  的均匀带电薄球壳, 它们的半径分别为  $R, R/2, R/4, R/8, R/16$ , 彼此内切于  $P$  点 (如图 6—18). 球心分别为  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ , 求  $O_1$  与  $O_5$  间的电势差.

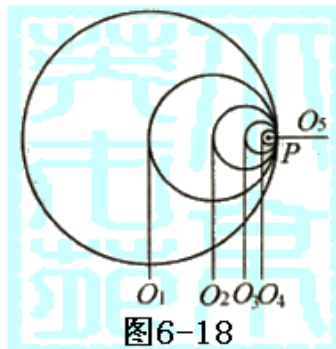


图6-18

10. 在图 6—19 所示的电路中, 三个电容器  $C_I, C_{II}, C_{III}$  的电容值均等于  $C$ , 电源的电动势为  $\varepsilon$ ,  $R_I, R_{II}$  为电阻,  $S$  为双掷开关. 开始时, 三个电容器都不带电. 先接通  $Oa$ , 再接通  $Ob$ , 再接通  $Oa$ , 再接通  $Ob$ ……如此反复换向, 设每次接通前都已达到静电平衡, 试求:

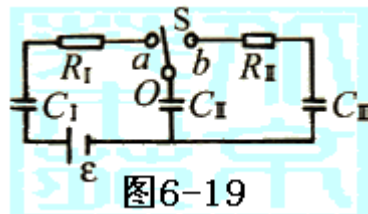


图6-19

(1) 当  $S$  第  $n$  次接通  $Ob$  并达到平衡后, 每个电容器两端的电压各是多少?

(2) 当反复换向的次数无限增多时, 在所有电阻上消耗的总电能是多少?

11. 一系列相同的电阻  $R$ , 如图 6—20 所示连接, 求  $AB$  间的等效电阻  $R_{AB}$ .

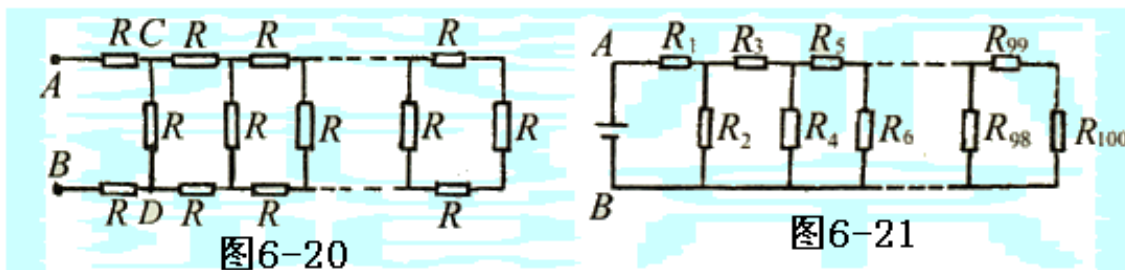


图6-20

图6-21

12. 如图 6—21 所示,  $R_1=R_3=R_5=\dots=R_{99}=5 \Omega$ ,  $R_2=R_4=R_6=\dots=R_{98}=10 \Omega$ ,  $R_{100}=5 \Omega$ ,  $\varepsilon=10V$  求:

(1)  $R_{AB}=?$

(2) 电阻  $R_2$  消耗的电功率应等于多少?

(3)  $R_i (i=1,2,3,\dots,99)$  消耗的电功率;

(4) 电路上的总功率.

13. 试求如图 6—22 所示, 框架中  $A, B$  两点间的电阻  $R_{AB}$ , 此框架是用同种细金属丝制作的, 单位长的电阻为  $r$ , 一连串内接等边三角形的数目可认为趋向无穷, 取  $AB$  边长为  $a$ , 以下每个三角形的边长依次减少一半.



图6-22

14. 图 6—23 中,  $AOB$  是一内表面光滑的楔形槽, 固定在水平桌面 (图中纸面) 上, 夹角  $\alpha = 1^\circ$  (为了能看清楚, 图中的是

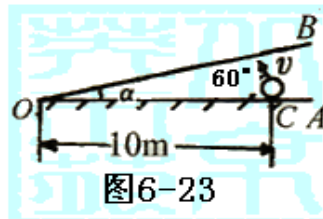


图6-23

夸大了的)。现将一质点在 BOA 面内从 C 处以速度  $v = 5m/s$  射出, 其方向与 AO 间的夹角  $\theta = 60^\circ$ ,  $OC = 10m$ . 设质点与桌面间的摩擦可忽略不计, 质点与 OB 面及 OA 面的碰撞都是弹性碰撞, 且每次碰撞时间极短, 可忽略不计, 试求:

(1) 经过几次碰撞质点又回到 C 处与 OA 相碰?

(计算次数时包括在 C 处的碰撞)

(2) 共用多少时间?

(3) 在这过程中, 质点离 O 点的最短距离是多少?

## 六、递推法答案

$$1. D \quad 2. \frac{H}{k}, \sqrt{\frac{2H}{(1-k)g}} \frac{1+k+\sqrt{1-k^2}}{2k} + \sqrt{\frac{2H}{(1+k)g}} \frac{1-k+\sqrt{1-k^2}}{2k}$$

$$3. \frac{41}{9}L \quad 4. 9.79m \quad 50m \quad 5. 0.597 < \mu < 0.622 \quad 6. 21 \text{ 块} \quad \sqrt{\frac{FL49}{m48}}$$

$$7. -\frac{Q_1}{2} \quad 8. 0.065U \quad 9. 24.46K \frac{q}{R}$$

$$10. (1) I: \frac{2}{3}C\varepsilon[1-(\frac{1}{4})^n], \quad II \quad III: \frac{1}{3}C\varepsilon[1-(\frac{1}{4})^n] \quad (3) \frac{1}{3}C\varepsilon^2$$

$$11. R_{AB} = (\sqrt{3}+1)R \quad 12. (1) 10\Omega \quad (2) 2.5W \quad (3) \frac{20}{2^{i+1}} (i=1,3,5,\dots,99),$$

$$\frac{10}{2^i} (i=2,4,\dots,98) \quad (4) 10W \quad 13. 40\Omega$$

$$14. R_{AB} = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)ra \quad 15. (1) 60 \text{ 次} \quad (2) 2s \quad (3) 5\sqrt{3}m$$

## 七、对称法

### 方法简介

由于物质世界存在某些对称性，使得物理学理论也具有相应的对称性，从而使对称现象普遍存在于各种物理现象和物理规律中。应用这种对称性它不仅能帮助我们认识和探索物质世界的某些基本规律，而且也能帮助我们求解某些具体的物理问题，这种思维方法在物理学中称为对称法。利用对称法分析解决物理问题，可以避免复杂的数学演算和推导，直接抓住问题的实质，出奇制胜，快速简便地求解问题。

### 赛题精析

**例 1:** 沿水平方向向一堵竖直光滑的墙壁抛出一个弹性小球 A，抛出点离水平地面的高度为  $h$ ，距离墙壁的水平距离为  $s$ ，小球与墙壁发生弹性碰撞后，落在水平地面上，落地点距墙壁的水平距离为  $2s$ ，如图 7—1 所示。求小球抛出时的初速度。

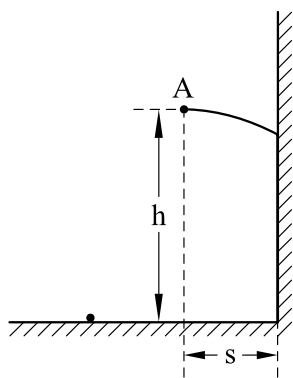


图 7—1

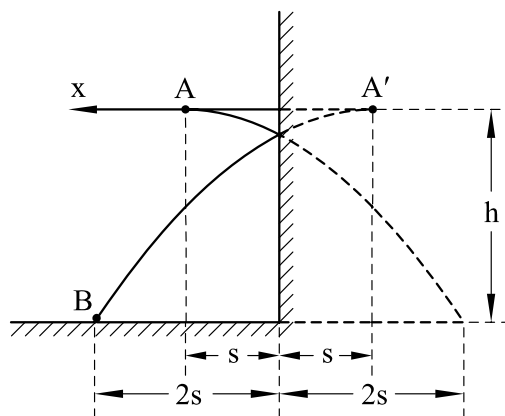


图 7—1 甲

**解析:** 因小球与墙壁发生弹性碰撞，故与墙壁碰撞前后入射速度与反射速度具有对称性，碰撞后小球的运动轨迹与无墙壁阻挡时小球继续前进的轨迹相对称，如图 7—1—甲所示，所以小球的运动可以转换为平抛运动处理，效果上相当于小球从  $A'$  点水平抛出所做的运动。

$$\text{根据平抛运动的规律: } \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

因为抛出点到落地点的距离为  $3s$ ，抛出点的高度为  $h$ ，代入后可解得：

$$v_0 = x \sqrt{\frac{g}{2y}} = 3s \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

**例 2:** 如图 7—2 所示，在水平面上，有两个竖直光滑墙壁 A 和 B，间距为  $d$ ，一个小球以初速度  $v_0$  从两墙正中间的 O 点斜向上抛出，与 A 和 B 各发生一次碰撞后正好落回抛出点 O，求小球的抛射角  $\theta$ 。



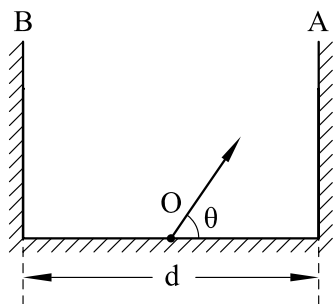


图 7—2

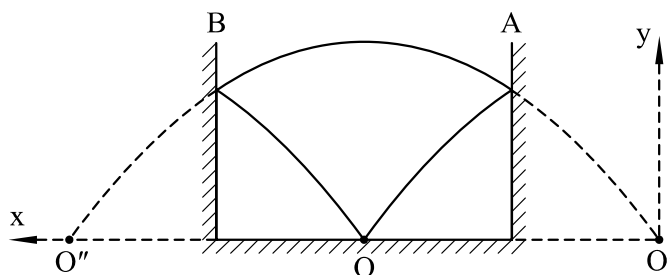


图 7—2甲

**解析：**小球的运动是斜上抛和斜下抛等三段运动组成，若按顺序求解则相当复杂，如果视墙为一平面镜，将球与墙的弹性碰撞等效为对平面镜的物、像移动，可利用物像对称的规律及斜抛规律求解。

物体跟墙 A 碰撞前后的运动相当于从 O' 点开始的斜上抛运动，与 B 墙碰后落于 O 点相当于落到 O'' 点，其中 O、O' 关于 A 墙对称，O、O'' 对于 B 墙对称，如图 7—2 一甲所示，于是有：

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta \cdot t \\ y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}, \text{落地时} \begin{cases} x = 2d \\ y = 0 \end{cases}$$

代入可解得： $\sin 2\theta = \frac{2gd}{v_0^2}$

所以，抛射角  $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2gd}{v_0^2}$

**例 3：**A、B、C 三只猎犬站立的位置构成一个边长为 a 的正三角形，每只猎犬追捕猎物的速度均为 v，A 犬想追捕 B 犬，B 犬想追捕 C 犬，C 犬想追捕 A 犬，为追捕到猎物，猎犬不断调整方向，速度方向始终“盯”住对方，它们同时起动，经多长时间可捕捉到猎物？

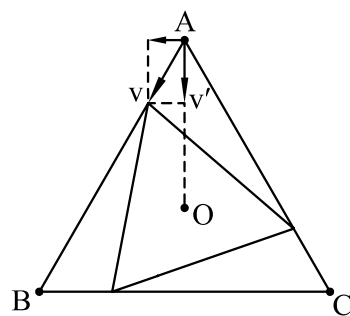


图 7—3

**解析：**以地面为参考系，三只猎犬运动轨迹都是一条复杂的曲线，但根据对称性，三只猎犬最后相交于三角形的中心点，在追捕过程中，三只猎犬的位置构成三角形的形状不变，以绕点旋转的参考系来描述，可认为三角形不转动，而是三个顶点向中心靠近，所以只要求出顶点到中心运动的时间即可。

由题意作图 7—3，设顶点到中心的距离为 s，则由已知条件得： $s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

由运动合成与分解的知识可知，在旋转的参考系中顶点向中心运动的速度为：

$$v' = v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

由此可知三角形收缩到中心的时间为： $t = \frac{s}{v'} = \frac{2a}{3v}$

（此题也可以用递推法求解，读者可自己试解。）

**例 4：**如图 7—4 所示，两个同心圆代表一个圆形槽，质量为 m，内外半径几乎同为

R。槽内 A、B 两处分别放有一个质量也为 m 的小球，AB 间的距离为槽的直径。不计一切摩擦。现将系统置于光滑水平面上，开始时槽静止，两小球具有垂直于 AB 方向的速度 v，试求两小球第一次相距 R 时，槽中心的速度 v<sub>0</sub>。

**解析：**在水平面参考系中建立水平方向的 x 轴和 y 轴。由系统的对称性可知中心或者说槽整体将仅在 x 轴方向上运动。设槽中心沿 x 轴正方向运动的速度变为 v<sub>0</sub>，两小球相对槽心做角速度大小为 ω 的圆周运动，A 球处于如图 7—4—甲所示的位置时，相对水平面的两个分速度为：

$$v_x = \omega R \sin\theta + v_0 \quad (1)$$

$$v_y = -\omega R \cos\theta \quad (2)$$

B 球的运动与 A 球的运动是对称的。

因系统在 x 轴方向上动量守恒、机械能也守恒，因此：

$$mv_0 + 2mv_x = 2mv \quad (3)$$

$$2 \times \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} m v_0^2 = 2 \times \frac{1}{2} m v^2 \quad (4)$$

将①、②式代入③、④式得：3v<sub>0</sub> = 2v - 2ωRsinθ

$$\omega^2 R^2 + 2\omega R v_0 \sin\theta + v_0^2 + \frac{1}{2} v_0^2 = v^2$$

$$\text{由此解得：} v_0 = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3 - 2\sin^2\theta}} \right) v$$

当两球间距离为 R 时，θ = 30°，代入可解得槽中心运动的速度为：

$$v_0 = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) v$$

**例 5：**用一轻质弹簧把两块质量各为 M 和 m 的木板连接起来，放在水平上，如图 7—5 所示，问必须在上木板施加多大的压力 F，才能使撤去此力后，上板跳起来恰好使下板离地？

**解析：**此题可用能量守恒的观点求解，但过程较繁，而用弹簧形变的“对称性”求解就显得简洁明了。若用拉力 F 作用在 m 上，欲使 M 离地，拉力 F 至少应为：

$$F = (M+m)g$$

根据弹簧的拉伸和压缩过程具有的对称性，故要产生上述效果，作用在 m 上的向下的压力应为 F = (M+m)g。

**例 6：**如图 7—6 所示，长为 l 的两块相同的均匀长方形砖块 A 和 B 叠放在一起，A 砖相对于 B 砖伸出  $\frac{1}{5}l$ ，B 砖放在水平桌面上，砖的端面与桌面平行。为保持两砖不翻倒，B 砖伸出桌面的最大长度是多少？

**解析：**此题可用力矩平衡求解，但用对称法求解，会直观简洁。把 A 砖右端伸出 B

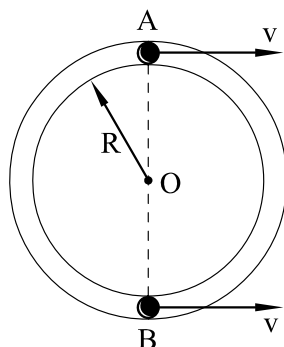


图 7—4

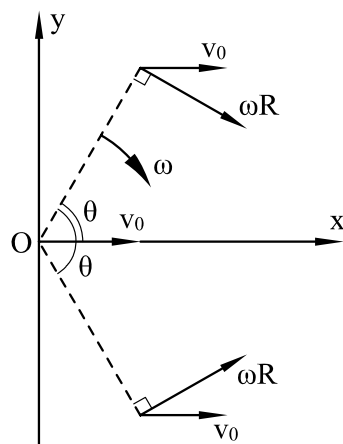


图 7—4甲

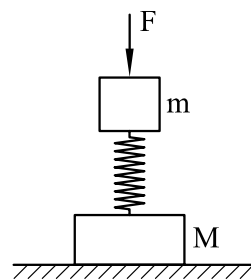


图 7—5

端的  $\frac{1}{5}$  截去，补在 B 砖的右端，则变成图 7—6—甲所示的对称形状。伸出最多时对称轴应恰好通过桌边。

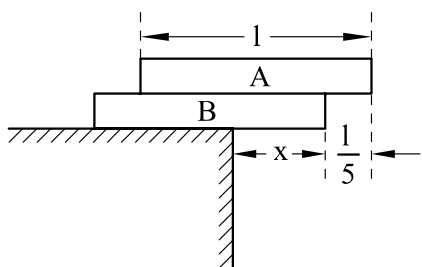


图 7—6

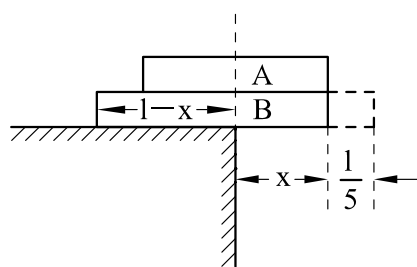


图 7—6甲

所以： $1-x = x + \frac{1}{5}$

解得 B 砖右端伸出桌面的最大长度为： $x = \frac{2}{5}l$ 。

**例 7：**如图 7—7 所示，OABC 是一张水平放置的桌球台面。取 OA 为 x 轴，OC 为 y 轴，P 是红球，坐标为  $(x, y)$ ，Q 是白球，坐标为  $(x_1, y_1)$ （图中未画出 Q 球在台面上的位置）。已知  $OA = BC = 25\text{dm}$ ， $AB = OC = 12\text{dm}$ 。若 P 球的坐标为： $x = 10\text{dm}$ ， $y = 8\text{dm}$  处，问 Q 球的位置在什么范围内时，可使击出的 Q 球顺次与 AB、BC、CO 和 OA 四壁碰撞反弹，最后击中 P 球？

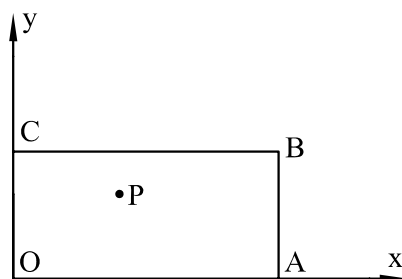


图 7—7

**解析：**由于弹性碰撞反弹服从的规律与光线的反射定律相同，所以作 P 点对 OA 壁的镜像  $P_1$ ， $P_1$  对 CO 壁的镜像  $P_2$ ， $P_2$  对 BC 壁的镜像  $P_3$  和  $P_3$  对 AB 壁的镜像  $P_4$ ，则只需瞄准  $P_4$  点击出 Q 球，Q 球在 AB 壁上 D 点反弹后射向  $P_3$ ，又在 BC 壁上 E 点反弹后射向  $P_2$ ，依次类推，最后再经 F，G 二点的反弹击中 P 点，如图 7—7—甲所示。

但是，若反弹点 E 离 B 点太近，Q 球从 E 点反弹后  $EP_2$  线与 CO 的交点，可能不在 CO 壁的范围之内而在 CO 的延长线上，这时 Q 球就无法击中 CO 壁（而击到 OA 壁上），不符合题目要求，所以，Q 球能够最后按题目要求击中 P 球的条件是：反弹点 D、E、F、和 G 一定要在相应的台壁范围之内。

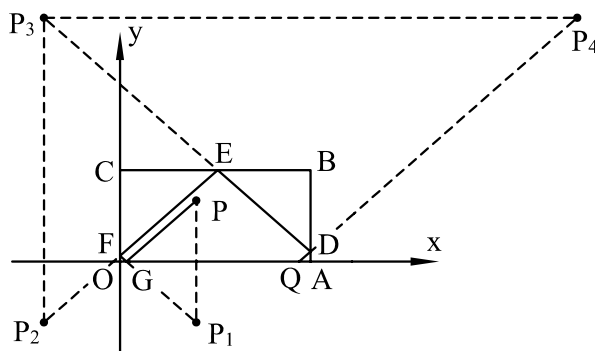


图 7—7甲

已知 P 点的坐标为  $(10, 8)$ ，由此可知，各个镜像点的坐标分别为：

$P_1(10, -8)$ ， $P_2(-10, -8)$ ， $P_3(-10, 32)$ ， $P_4(60, 32)$

设 Q 点的坐标为  $(x', y')$ ；直线  $QP_4$  的方程为：

$$Y - y' = \frac{32 - y'}{60 - x'}(X - x') \quad (1)$$

D 点在此直线上,  $X_D = 25$ , 由上式得:

$$Y_D = \frac{1}{60 - x'}(800 - 32x' + 35y') \quad (2)$$

直线  $DP_3$  的方程为:

$$Y - Y_D = -\frac{32 - y'}{60 - x'}(X - x_D) \quad (3)$$

E 点在此直线上,  $Y_E = 12$ , 由此式及②式得:

$$x_E = 25 - \frac{1}{32 - y'}(1 - 80 + 20x' - 35y') \quad (4)$$

直线  $EP_2$  的方程为:  $Y - Y_E = -\frac{32 - y'}{60 - x'}(X - x_E)$

F 点在此直线上,  $X_F = 0$ , 所以:  $Y_F = 12 - \frac{10}{60 - x'}(88 - 2x' + y')$

最后, 直线  $FP_1$  的方程为:  $Y - Y_F = -\frac{32 - y'}{60 - x'}(X - x_F) \quad (5)$

G 点在此直线上,  $Y_G = 0$ , 所以:  $X_G = \frac{1}{32 - y'}(-160 + 8x' - 10y') \quad (6)$

$$\left. \begin{aligned} 0 < Y_D < 12 \\ 0 < X_E < 25 \\ 0 < Y_F < 12 \\ 0 < X_G < 25 \end{aligned} \right\} \text{反弹点位于相应台壁上的条件为:} \quad (7)$$

将③、④、⑤和⑥式代入⑦, 除肯定满足无需讨论的不等式外, Q 球按题目要求击中 P 球的条件成为:

$$\begin{cases} Y_D: 35y' < 20x' - 80 \\ X_E: 35y' < 20x' - 80 \\ Y_F: 5y' < 4x' - 80 \\ X_G: 5y' < 4x' - 80 \end{cases}$$

上面共两个条件, 作直线  $l_1: 35Y = 20X - 80$

及  $l_2: 5Y = 4X - 80$

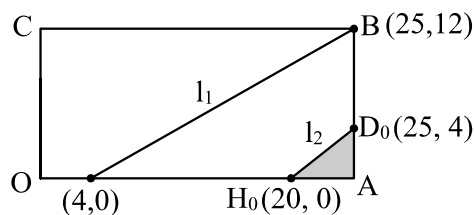


图 7—7 乙

如图 7—7—乙所示, 若 Q 球位于  $l_2$  下方的三角形  $D_0AH_0$  内, 即可同时满足⑧、⑨两式的条件, 瞄准  $P_4$  击出, 可按题目要求次序反弹后击中 P 球, 三角形  $D_0AH_0$  三个顶点的坐标如图 7—7—乙所示。

**例 8:** 一无限长均匀带电细线弯成如图 7—8 所示的平面图形, 其中 AB 是半径为 R 的半圆弧,  $AA'$  平行于  $BB'$ , 试求圆心 O 处的电场强度。

**解析:** 如图 7—8 甲所示, 左上 1/4 圆弧内的线元  $\Delta L_1$  与右下直线上的线元  $\Delta L_3$  具有角元  $\Delta\theta$  对称关系。 $\Delta L_1$  电荷与  $\Delta L_3$  电荷在 O 点的场强  $\Delta E_1$  与  $\Delta E_3$  方向相反, 若它们的大小也相等, 则左上与右下线元电场强度成对抵消, 可得圆心处场强为零。

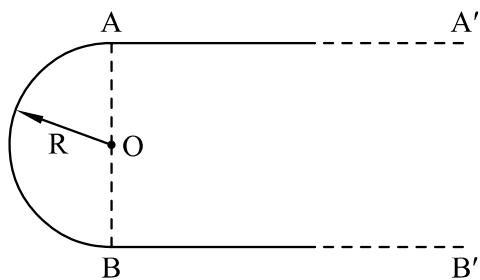


图 7—8

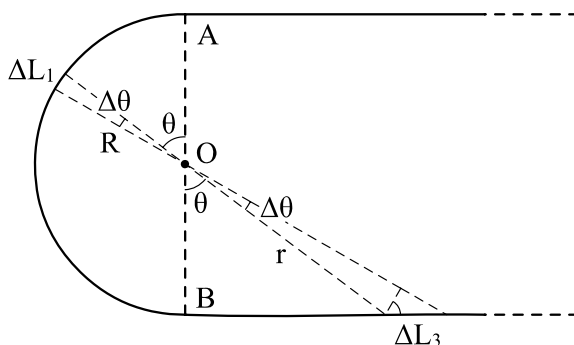


图 7—8甲

设电荷线密度为常量  $\lambda$ ，因  $\Delta\theta$  很小， $\Delta L_1$  电荷与  $\Delta L_3$  电荷可看做点电荷，其带电量：

$$q_1 = R\Delta\theta \cdot \lambda, \quad q_2 = \Delta L_3 \cdot \lambda$$

当  $\Delta\theta$  很小时，有：
$$q_2 = \frac{R\Delta\theta \cdot \lambda}{\cos\theta \cdot \cos\theta}$$

又因为  $\Delta E_1 = K \frac{q_1}{R^2}$ ， $\Delta E_2 = K \frac{q_2}{r^2} = K \frac{R\Delta\theta \cdot \lambda}{\cos^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{R^2} = K \frac{R\Delta\theta\lambda}{R^2}$ ，与  $\Delta E_1$  的大小相同，

且  $\Delta E_1$  与  $\Delta E_2$  方向相反。

所以圆心 O 处的电场强度为零。

**例 9：**如图 7—9 所示，半径为 R 的半圆形绝缘线上、下 1/4 圆弧上分别均匀带电 +q 和 -q，求圆心处 O 的场强。

**解析：**因圆弧均匀带电，在圆弧上任取一个微小线元，由于带电线元很小，可以看成点电荷。用点电荷场强公式表示它在圆心处的分场强，再应用叠加原理计算出合场强。由对称性分别求出合场强的方向再求出其值。

在带正电的圆弧上取一微小线元，由于圆弧均匀带电，因而线密度

$$\lambda = \frac{2q}{\pi R}。$$

在带负电的圆弧上必定存在着一个与之对称的线元，两者产生的场强如图 7—9 甲所示。显然，两者大小相等，其方向分别与 x 轴的正、负方向成  $\theta$  角，且在 x 轴方向上分量相等。由于很小，可以认为是点电荷，两线元在 O 点的场强为  $\Delta E = 2 \cdot \frac{KR \cdot \Delta\theta\lambda}{R^2} \sin\theta = \frac{2K\lambda\Delta h}{R^2}$ ，方向沿 y 轴的负方向，

所以 O 点的合场强应对  $\Delta E$  求和。

$$\text{即：} E = \Sigma\Delta E = \Sigma \frac{2K\lambda\Delta h}{R^2} = \frac{2K\lambda}{R^2} \Sigma\Delta h = \frac{2K\lambda}{R^2} R = \frac{4Kq}{\pi R^2}$$

**例 10：**电荷 q 均匀分布在半球面 ACB 上，球面的半径为 R，CD 为通过半球顶点 C 与球心 O 的轴线，如图 7—10 所示，P、Q 为 CD 轴线上在 O 点两侧，离 O 点距离相等的两点，已知 P 点的电势为  $U_P$ ，试求 Q 点的电势  $U_Q$ 。

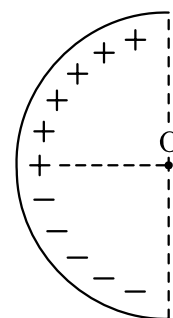


图 7—9

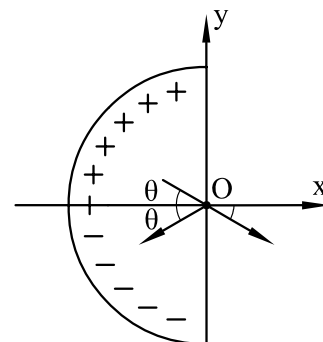


图 7—9甲

**解析：**可以设想一个均匀带电、带电量也是  $q$  的右半球，与题中所给的左半球组成一个完整的均匀带电球面，根据对称性来解。

由对称性可知，右半球在  $P$  点的电势  $U'_p$  等于左半球在  $Q$  点的电势  $U_Q$ 。即： $U'_p = U_Q$

所以有： $U_P + U_Q = U_P + U'_p$

而  $U_P + U'_p$  正是两个半球在  $P$  点的电势，因

为球面均匀带电，所以  $U_P + U'_p = K \frac{2q}{R}$

由此解得  $Q$  点的电势： $U_Q = \frac{2Kq}{R} - U_P$ 。

**例 11：**如图 7—11 所示，三根等长的细绝缘棒连接成等边三角形， $A$  点为三角形的内心， $B$  点与三角形共面且与  $A$  相对  $ac$  棒对称，三棒带有均匀分布的电荷，此时测得  $A$ 、 $B$  两点的电势各为  $U_A$ 、 $U_B$ ，现将  $ac$  棒取走，而  $ab$ 、 $bc$  棒的电荷分布不变，求这时  $A$ 、 $B$  两点的电势  $U'_A$ 、 $U'_B$ 。

**解析：** $ab$ 、 $bc$ 、 $ac$  三根棒中的电荷对称分布，各自对  $A$  点电势的贡献相同， $ac$  棒对  $B$  点电势的贡献和对  $A$  点电势的贡献相同，而  $ab$ 、 $bc$  棒对  $B$  点电势的贡献也相同。

设  $ab$ 、 $bc$ 、 $ac$  棒各自在  $A$  点的电势为  $U_1$ ， $ab$ 、 $bc$  棒在  $B$  点的电势为  $U_2$ 。由对称性知， $ac$  棒在  $B$  点的电势为  $U_1$ 。

由电势叠加原理得：

$$3U_1 = U_A \quad \text{①}$$

$$U_1 + 2U_2 = U_B \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②两式得： } U_1 = \frac{U_A}{3}, \quad U_2 = \frac{U_B - U_1}{2} = \frac{U_B - \frac{U_A}{3}}{2} = \frac{3U_B - U_A}{6}$$

将  $ac$  棒取走后， $A$ 、 $B$  两点的电势分别为：

$$U'_A = U_A - U_1 = \frac{2}{3} U_A$$

$$U'_B = U_B - U_2 = \frac{U_B}{2} + \frac{U_A}{6}$$

**例 12：**如图 7—12 所示为一块很大的接地导体板，在与导体板相距为  $d$  的  $A$  处放有带电量为  $-q$  的点电荷。

(1) 试求板上感应电荷在导体内  $P$  点产生的电场强度；

(2) 试求感应电荷在导体外  $P'$  点产生的电场强度 ( $P$  与  $P'$  点对导体板右表面是对称的)；

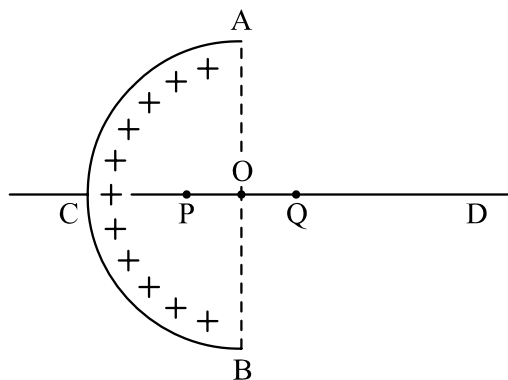


图 7—10

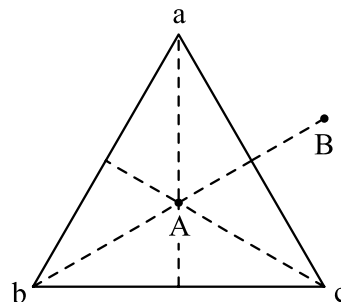


图 7—11

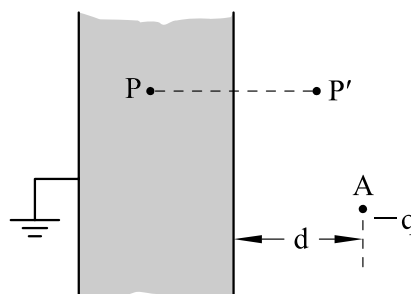


图 7—12

(3) 在本题情形, 试分析证明导体表面附近的电场强度的方向与导体表面垂直;

(4) 试求导体上的感应电荷对点电荷  $-q$  的作用力;

(5) 若在切断导体板与地的连线后, 再将  $+Q$  电荷置于导体板上, 试说明这部分电荷在导体板上如何分布可达到静电平衡 (略去边缘效应)。

**解析:** 在讨论一个点电荷受到面电荷 (如导体表面的感应电荷) 的作用时, 根据“镜像法”可以设想一个“像电荷”, 并使它的电场可以代替面电荷的电场, 从而把问题大大简化。

(1) 导体板静电平衡后有  $E_{\text{感}} = E_{\text{点}}$ , 且方向相反, 因此板上感应电荷在导体内  $P$  点产生的场强为  $E_P = \frac{kq}{r^2}$ , 其中  $r$  为  $AP$  间距离, 方向沿  $AP$ , 如图 7—12 甲所示。

(2) 因为导体接地, 感应电荷分布在右表面, 感应电荷在  $P$  点和  $P'$  点的电场具有对称性, 因此有  $E_{P'} = \frac{kq}{r^2}$ , 方向如图 7—12—甲所示。

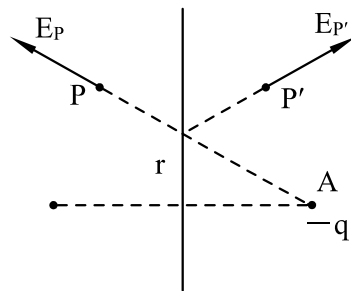


图 7—12甲

(3) 考察导体板在表面两侧很靠近表面的两点  $P_1$  和  $P'_1$ 。如前述分析, 在导体外  $P'_1$  点感应电荷产生的场强大小为  $E_{iP'_1} = \frac{kq}{r_1^2}$ 。点电荷  $q$  在  $P'_1$  点产生的场强大小也是  $E_{qP'_1} = \frac{kq}{r_1^2}$ 。

它们的方向如图 7—12 乙。

从图看出,  $P'_1$  点的场强为上述两个场强的矢量和, 即与导体表面垂直。

(4) 重复 (2) 的分析可知, 感应电荷在  $-q$  所在处  $A$  点的场强为  $E_{iA} = \frac{kq}{(2d)^2} = \frac{kq}{4d^2}$ , 方向垂直于导体板指向右方, 该

场作用于点电荷  $-q$  的电场力为  $F = -qE_{iA} = -\frac{kq^2}{4d^2}$ , 负号表示

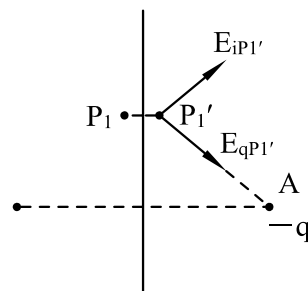


图 7—12乙

力的方向垂直于导体板指向左方。

(5) 切断接地线后, 导体板上原来的感应电荷仍保持原来的分布, 导体内场强为零。在此情况下再将  $+Q$  电荷加在导体板上, 只要新增加的电荷在导体内部各处的场强为零, 即可保持静电平衡, 我们知道电荷均匀分布在导体板的两侧表面时, 上述条件即可满足。显然这时  $+Q$  将均匀分布在导体板的两侧面上, 才能保证板内场强为零, 实现静电平衡。

**例 13:** 如图 7—13 所示, 在水平方向的匀强电场中, 用长为  $l$  的绝缘细线, 拴住质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的小球, 线的上端  $O$  固定, 开始时将线和球拉成水平, 松开后, 小球由静止开始向下摆动, 当摆过  $60^\circ$  角时, 速度又变为零。求:

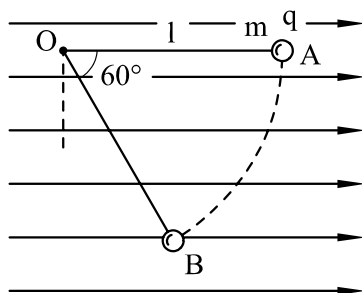


图 7—13

(1)  $A$ 、 $B$  两点的电势差  $U_{AB}$  多大?

(2) 电场强度多大?

**解析:** (1) 小球在  $A$ 、 $B$  间摆动, 根据能量守恒定律

有： $\epsilon_{PA} = \epsilon_{PB}$

取 A 点为零势能的参考点，即  $\epsilon_{PB} = 0$

则： $E_{PB} = -mgl\sin 60^\circ + qU_{BA} = 0$

所以： $U_{BA} = \frac{\sqrt{3}mgl}{2q}$ ， $U_{AB} = -\frac{\sqrt{3}mgl}{2q}$

(2) 小球在平衡位置的受力如图 7—13 甲。根据共点力的平衡条件：有： $qE = mg\tan 60^\circ$

解得电场强度： $E = \frac{\sqrt{3}mg}{q}$

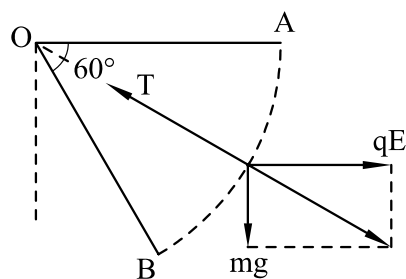


图 7—13甲

**例 14:** 如图 7—14 所示，ab 是半径为 R 的圆的一条直径，该圆处于匀强电场中，场强为 E，在圆周平面内，将一带正电 q 的小球从 a 点以相同的动能抛出，抛出方向不同时，小球会经过圆周上不同的点，在这些所有的点中，到达 c 点时小球的动能最大。已知  $\angle cab = 30^\circ$ ，若不计重力和空气阻力，试求：

(1) 电场方向与直径 ab 间的夹角  $\theta$ ；

(2) 若小球在 a 点时初速度方向与电场方向垂直，小球恰好能落在 c 点，则初动能为多少？

**解析:** 由于对 a 点以相同的初动能沿不同方向抛出的小球到达圆周上的各点时其中到达 c 点的小球动能最大，因此过 c 点的切线一定是等势线，由此可以确定电场线的方向，至于从 a 点垂直于电场线抛出的小球可按类平抛运动处理。

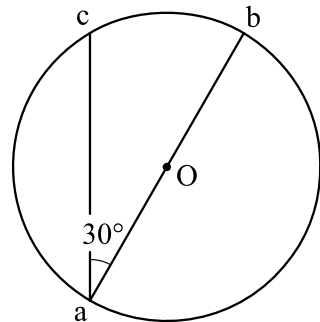


图 7—14

(1) 用对称性判断电场的方向：由题设条件，在圆周平面内，从 a 点以相同的动能向不同方向抛出带正电的小球，小球会经过圆周上不同的点，且以经过 c 点时小球的动能最大，可知，电场线平行于圆平面。又根据动能定理，电场力对到达 c 点的小球做功最多，为  $qU_{ac}$ 。因此， $U_{ac}$  最大。即 c 点的电势比圆周上任何一点的电势都低。又因为圆周平面处于匀强电场中，故连接 Oc，圆周上各点的电势对于 Oc 对称（或作过 c 点且与圆周相切的线 cf 是等势线），Oc 方向即为电场方向（如图 7—14—甲所示），它与直径 ab 的夹角为  $60^\circ$ 。

(2) 小球在匀强电场中做类平抛运动。小球沿垂直于电场方向抛出，设其初速度为  $v_0$ ，小球质量为 m。在垂直于电场线方向，有：

$$x = v_0 t \quad \text{①}$$

$$\text{在沿电场线方向，有：} y = \frac{1}{2} at^2 \quad \text{②}$$

由图中几何关系可得：

$$x = R\cos 30^\circ \quad \text{③}$$

$$y = R(1 + \cos 60^\circ) \quad \text{④}$$

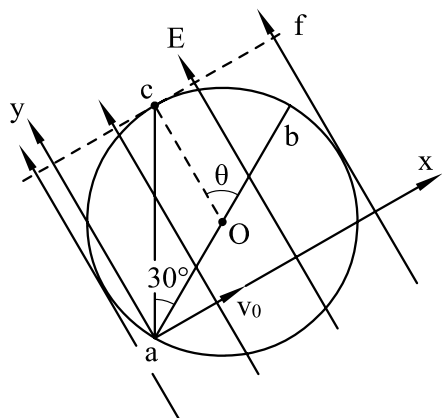


图 7—14甲



且：  $a = \frac{qE}{m}$  ⑤

将③、④、⑤式代入①、②两式解得：  $v_0^2 = \frac{qER}{4m}$

所以初动能：  $E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{qER}{8}$

**例 15：**如图 7—15 所示，两块竖直放置的平行金属板 A、B 之间距离为  $d$ ，两板间电压为  $U$ ，在两板间放一半径为  $R$  的金属球壳，球心到两板的距离相等，C 点为球壳上的一点，位置在垂直于两板的球直径的靠 A 板的一端，试求 A 板与点 C 间的电压大小为多少？

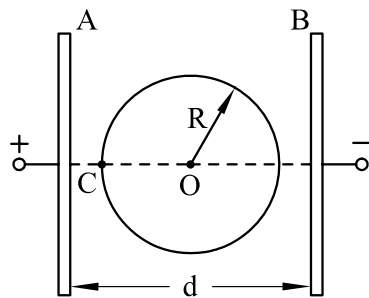


图 7—15

**解析：**将金属球壳放在电场中达到静电平衡后，球壳为等势体，两极板之间的电场由原来的匀强电场变为如图 7—15 甲所示的电场，这时 C 与 A 板间电势差就不能用公式  $U_{AC} = Ed_{AC}$  来计算。我们利用电场的对称性求解。

由于电场线和金属球关于球心 O 对称，所以 A 板与金属板的电势差  $U_{AO}$  和金属球与 B 板的电势差  $U_{OB}$  相等，即：

$$U_{AO} = U_{OB}$$

又 A、B 两板电势差保持不变为  $U$ ，即：

$$U_{AO} + U_{OB} = U$$

由以上两式解得：  $U_{AO} = U_{OB} = \frac{U}{2}$

所以得 A、C 两点间电势差：  $U_{AC} = U_{AO} = \frac{U}{2}$

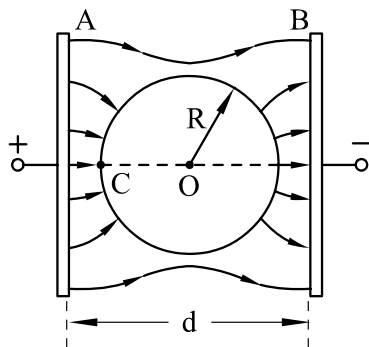


图 7—15甲

**例 16：**如图 7—16 所示，一静止的带电粒子  $q$ ，质量为  $m$ （不计重力），从 P 点经电场 E 加速，经 A 点进入中间磁场 B，方向垂直纸面向里，再穿过中间磁场进入右边足够大的空间磁场 B'（ $B' = B$ ），方向垂直于纸面向外，然后能够按某一路径再由 A 返回电场并回到出发点 P，然后再重复前述过程。已知  $l$  为 P 到 A 的距离，求中间磁场的宽度  $d$  和粒子运动的周期。（虚线表示磁场的分界线）

**解析：**由粒子能“重复前述过程”，可知粒子运动具有周期性；又由粒子经过 A 点进入磁场后能够按某一路径再返回 A 点，可知粒子的运动具有对称性。

粒子从 A 点进入中间磁场做匀速圆周运动，半径为  $R$ ，过 C 点进入右边磁场，于做半径为  $R$  的匀速圆周运动经点 F 到点 D，由于过 D 点后还做匀速圆周回到 A（如图 7—16 一甲所示），故  $\widehat{DA}$  和  $\widehat{CA}$  关于直线 OA 对称，且 OA 垂直于

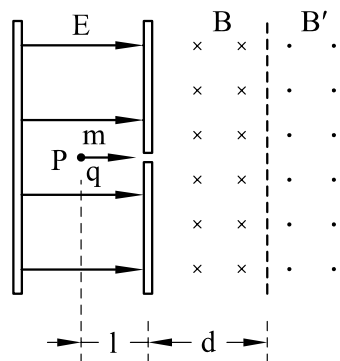


图 7—16

磁场的分界线。同理可知，OA 也同时是  $\widehat{CD}$  圆弧的对称轴。

因此粒子的运动轨迹是关于直线 OA 对称的。由于速度方向为切线方向，所以圆弧  $\widehat{AC}$ 、

$\widehat{CD}$ 、 $\widehat{DA}$  互相相切。

(1) 设中间磁场宽度为  $d$ ，粒子过  $A$  点的速度为  $v$ ，由圆周运动的对称性可得：

$$R\sin\theta = R - R\sin\theta, \text{ 则: } \theta = \frac{\pi}{6}$$

带电粒子在加速电场中有：

$$qEl = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

在中间和右边磁场中有：

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (2)$$

$$d = R\cos\theta \quad (3)$$

解①、②、③得：
$$d = \frac{\sqrt{6qEml}}{2qB}$$

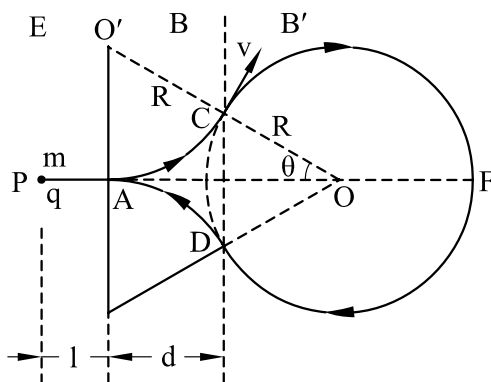


图 7—16甲

(2) 粒子运动周期  $T$  由三段时间组成，设在电场中做匀变速直线运动的时间为  $t_1$ ，

则：
$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2ml}{qE}}$$

设在中间磁场中运动的时间为  $t_2$ ，因为  $\widehat{AC}$  所对圆心角为  $\frac{\pi}{3}$ ，所以：

$$t_2 = 2 \times \frac{\pi}{3} \cdot \frac{T'}{2\pi} = 2 \times \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m}{3qB}$$

设在右边磁场中运动的时间为  $t_3$ ，因为  $\widehat{CD}$  所对圆心角为  $\frac{5\pi}{3}$ ，所以：

$$t_3 = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{T'}{2\pi} = 2 \times \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{5\pi m}{3qB}$$

所以周期为：
$$T = t_1 + t_2 + t_3 = 2\sqrt{\frac{2ml}{qE}} + \frac{7\pi m}{3qB}$$

### 针对训练

1. 从距地面高 19.6m 处的  $A$  点，以初速度为 5.0m/s 沿水平方向投出一小球。在距  $A$  点 5.0m 处有一光滑墙，小球与墙发生弹性碰撞（即入射角等于反射角，入射速率等于反射率），弹回后掉到地面  $B$  处。试求： $B$  点离墙的水平距离为多少？

2. 如图 7—17 所示，在边长为  $a$  的正方形四个顶点上分别固定电量均为  $Q$  的四个点电荷，在对角线交点上放一个质量为  $m$ ，电量为  $q$ （与  $Q$  同号）的自由点电荷。若将  $q$

沿着对角线移动一个小的距离，它是否会做周期性振动？若会，其周期是多少？

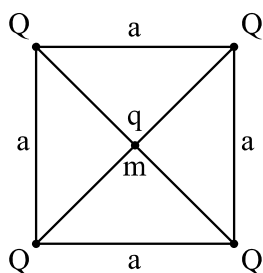


图 7—17

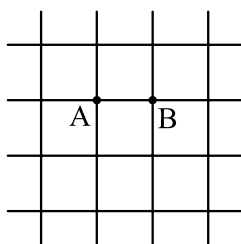


图 7—18

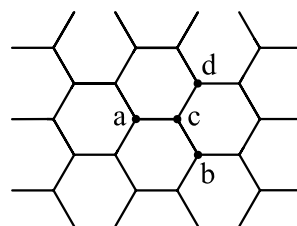


图 7—19

3. 如图 7—18 所示是一个由电阻丝构成的平面正方形无穷网络，当各小段电阻丝的电阻均为  $R$  时， $A$ 、 $B$  两点之间的等效电阻为  $R/2$ ，今将  $A$ 、 $B$  之间的一小段电阻丝换成电阻为  $R'$  的另一端电阻丝，试问调换后  $A$ 、 $B$  之间的等效电阻是多少？

4. 有一无限大平面导体网络，它由大小相同的正六角形网眼组成，如图 7—19 所示，所有六边形每边的电阻均为  $R_0$ ，求  $a$ 、 $b$  两结点间的等效电阻。

5. 如图 7—20 所示，某电路具有 8 个节点，每两个节点之间都连有一个阻值为  $2\Omega$  的电阻，在此电路的任意两个节点之间加上  $10V$  电压，求电路的总电流，各支路的电流以及电阻上消耗的总功率。

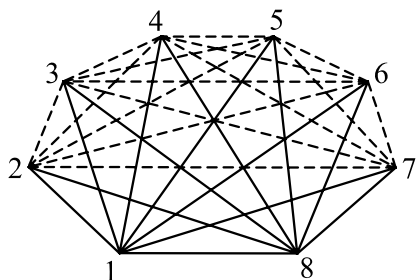


图 7—20

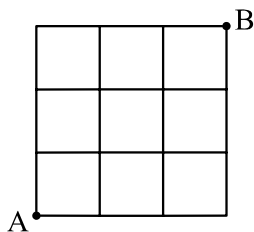


图 7—21

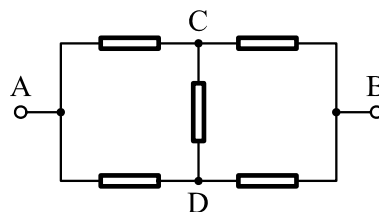


图 7—22

6. 电路如图 7—21 所示，每两个节点间电阻的阻值为  $R$ ，求  $A$ 、 $B$  间总电阻  $R_{AB}$ 。

7. 电路如图 7—22 所示，已知电阻阻值均为  $15\Omega$ ，求  $R_{AC}$ 、 $R_{AB}$  和  $R_{AD}$  各为多少欧？

8. 将 200 个电阻连成如图 7—23 所示的电路，图中各  $P$  点是各支路中连接两个电阻的导线上的点，所有导线的电阻都可忽略。现将一电动势为  $\varepsilon$ ，内阻为  $r$  的电源接到任意两个  $P$  点处，然后将任一没接电源的支路在  $P$  点处切断，发现流过电源的电流与没切断前一样，则这 200 个电阻  $R_1, R_2, \dots, R_{100}$  和  $r_1, r_2, \dots, r_{100}$  应有下列的普遍关系：

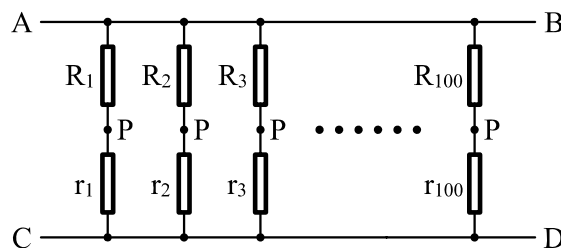


图 7—23

$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_3}{r_3} = \dots = \frac{R_{100}}{r_{100}}$ ，这时图中  $AB$

导线与  $CD$  导线之间的电压等于\_\_\_\_\_。

9. 电路如图 7—24 所示的电阻丝网络中，每一小段电阻丝的电阻值都为  $R$ ，试求图中  $A$ 、 $B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

10. 如图 7—25 所示的四面体框架由电阻同为  $R$  的 6 根电阻丝联结而成，求任意两个顶点  $A$ 、 $B$  间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

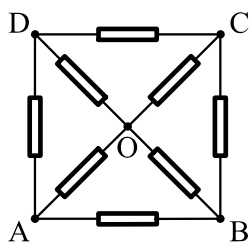


图 7—24

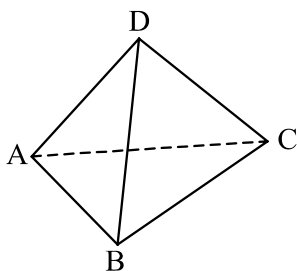


图 7—25

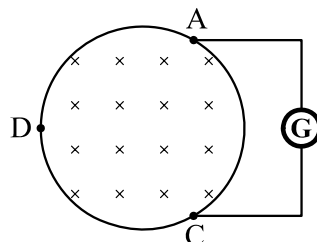


图 7—26

11. 一匀质细导线圆环，总电阻为  $R$ ，半径为  $a$ ，圆环内充满方向垂直于环面的匀强磁场，磁场以速率  $K$  均匀的随时间增强，环上的  $A$ 、 $D$ 、 $C$  三点位置对称。电流计  $G$  连接  $A$ 、 $C$  两点，如图 7—26 所示。若电流计内阻为  $R_G$ ，求通过电流计的电流大小。

### 参考答案

1、5.0m

2、会做周期性振动，周期为  $\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\sqrt{2}KqQ}}$

3、 $R_{AB} = \frac{RR'}{R+R'}$

4、 $R_{ab} = R_0$

5、 $I_{总} = 40A$ ，节点 1~8 之间支路电流  $I_1 = 5A$ ；其他支路电流 2.5A，总功率 400W

6、 $R_{AB} = 2R$

7、 $R_{AC} = \frac{75}{8} \Omega$ ， $R_{AB} = 15 \Omega$ ， $R_{AD} = \frac{75}{8} \Omega$

8、0

9、 $R_{AB} = \frac{16}{30} R$

10、 $R_{AB} = \frac{R}{2}$

11、 $\frac{\pi a^2 KR}{9R_c + 3R}$

## 八、作图法

### 方法简介

作图法是根据题意把抽象复杂的物理过程有针对性的表示成物理图像，将物理问题转化成一个几何问题，通过几何知识求解，作图法的优点是直观形象，便于定性分析，也可定性计算，灵活应用作图法会给解题带来很大方便。

### 赛题精析

**例 1:** 如图 8—1 所示，细绳跨过定滑轮，系住一个质量为  $m$  的球，球靠在光滑竖直墙上，当拉动细绳使球匀速上升时，球对墙的压力将 ( )

- A、增大      B、减小      C、先增大后减小      D、先减小后增大

**解析:** 球在三个力的作用下处于平衡。当球上升时， $\theta$  角增大，可用动态的三角形定性分析，作出圆球的受力图，如图 8—1 甲所示。从图可见，当球上升时， $\theta$  角增大，墙对球的支持力增大，从而球对墙的压力也增大。故选 A 正确。

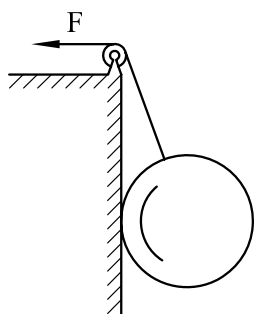


图 8—1

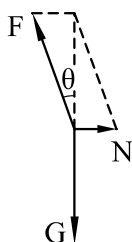


图 8—1甲

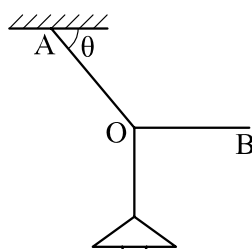


图 8—2

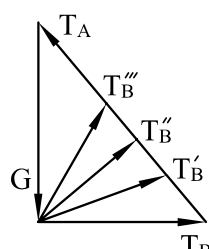


图 8—2甲

**例 2:** 用两根绳子系住一重物，如图 8—2 所示。绳 OA 与天花板间夹角  $\theta$  不变，当用手拉住绳子 OB，使绳 OB 由水平方向转向竖直方向的过程中，OB 绳所受的拉力将 ( )

- A、始终减小      B、始终增大      C、先减小后增大      D、先增大后减小

**解析:** 因物体所受重力的大小、方向始终不变，绳 OA 拉力的方向始终不变，又因为物体始终处于平衡状态，所受的力必然构成一个三角形，如图 8—2 甲所示，由图可知 OB 绳受的拉力是先减小后增大。可知答案选 C

**例 3:** 如图 8—3 所示，质量为  $m$  的小球 A 用细绳拴在天花板上，悬点为 O，小球靠在光滑的大球上，处于静止状态。已知：大球的球心  $O'$  在悬点的正下方，其中绳长为  $l$ ，大球的半径为  $R$ ，悬点到大球最高点的距离为  $h$ 。求对小球的拉力  $T$  和小球对大球的压力。

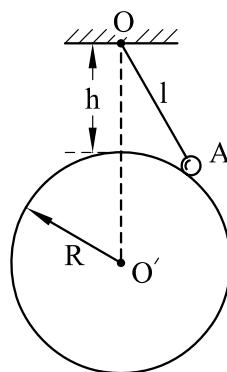


图 8—3

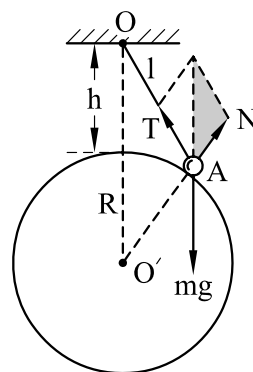


图 8—3甲

**解析:** 力的三角形图和几何三角形有联系，若两个三角形相似，则可以将力的三角

形与几何三角形联系起来，通过边边对应成比例求解。

以小球为研究对象，进行受力分析，如图 8—3 甲所示，小球受重力  $mg$ 、绳的拉力  $T$ 、大球的支持力  $N$ ，其中重力  $mg$  与拉力  $T$  的合力与支持力  $N$  平衡。观察图中的特点，可以看出力的矢量三角形（灰色）与几何三角形  $AOO'$  相似，即：

$$\frac{T}{l} = \frac{mg}{h+R}, \quad \frac{N}{R} = \frac{mg}{h+R}$$

$$\text{所以绳的拉力: } T = \frac{l}{h+R} mg$$

$$\text{小球对大球的压力: } N' = N = \frac{R}{h+R} mg$$

**例 4:** 如图 8—4 所示，质点自倾角为  $\alpha$  的斜面上方定点  $O$  沿光滑的斜槽从静止开始下滑，为使质点在最短时间内从  $O$  点到达斜面，斜槽与竖直方向的夹角  $\beta$  应等于多少？

**解析:** 如图 8—4 甲所示，以经过  $O$  点的竖直线上的一点  $O'$  为圆心， $OO'$  为半径作圆，并使该圆与斜面恰好相切于  $A$  点，与  $OO'$  延长线交于  $B$  点。已知从  $O$  点由静止出发沿倾角不同的光滑斜面下滑的质点，到达圆周上不同点所需时间相等，显然，质点沿  $OA$  方向从静止开始滑到斜面上所需时间比沿其他方向滑到斜面上所需时间短。

连接  $O'A$ ，由几何关系得：

$$\angle AO'B = \alpha$$

所以所用时间最短时，斜槽与竖直方向的夹角：

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

（所题也可用极限法求解，读者可试试。）

**例 5:** 一条小河，河水以  $v_1 = 5\text{m/s}$  的速度匀速流动，一条小船在静水中的速度为  $v_2 = 3\text{m/s}$ 。欲使小船渡河的航程最短，小船的船头应指向何方向？

**解析:** 若  $v_1 < v_2$ ，可垂直渡河，船程最短。但本题  $v_1 > v_2$ ，小船就不能垂直渡河。但欲使航程最短，则应使合速度方向与河岸夹角最大。

根据矢量合成的三角形法， $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_{\text{合}}$ ，构成封闭三角形，作图如 8—5 所示，作有向线段  $OA$  表示河水流速  $v_1$ ，以表示  $v_2$  的有向长度为半径，以  $A$  为圆心画圆，过  $O$  该圆的切线，切点为  $B$ ，作有向线段  $AB$ ，有向线段  $AB$  的方向就是所求的方向。由直角三角形  $AOB$ ，得：

$$\cos\theta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}$$

$$\text{所以: } \theta = 53^\circ$$

即小船的船头应指向上游并沿与上游的河岸成  $53^\circ$  角的方向。

**例 6:** 一木箱重为  $G$ ，与地面动摩擦因数为  $\mu$ ，现用斜向上的力  $F$  拉木箱使之沿水平地面匀速前进，如图 8—6 所示。求拉力  $F$  与水平方向夹角  $\theta$  为何值时拉力最小？这个最

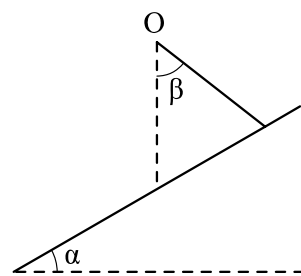


图 8—4

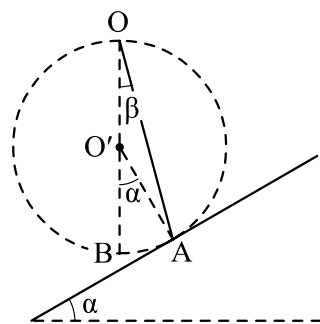


图 8—4甲

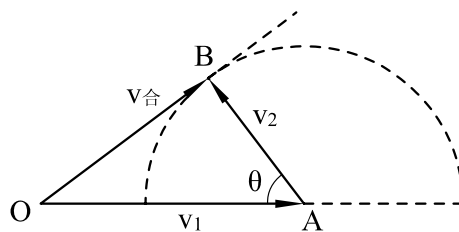


图 8—5

小值多大?

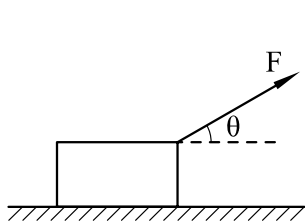


图 8—6

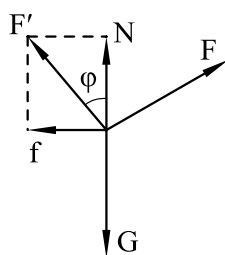


图 8—6甲

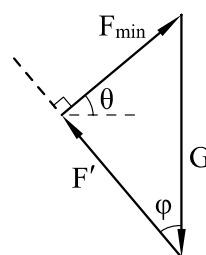


图 8—6乙

**解析:** 木箱受重力  $G$ 、弹力  $N$ 、摩擦力  $f$  及拉力  $F$  四个力的作用, 但此题也可以把木箱看做只受三个力作用, 即重力  $G$ 、拉力  $F$  和摩擦力  $f$  与支持力  $N$  的合力  $F'$ , 设  $F'$  与  $N$  的夹角为  $\varphi$ , 则  $\tan\varphi = \frac{f}{N} = \mu$ , 再应用矢量三角形求解。

木箱受力情况如图 8—6 甲所示, 已知  $G$  的大小和方向,  $F'$  的方向, 显然, 要使封闭的矢量三角形中  $F$  值最小, 只有由  $G$  的端点作  $F'$  的作用线的垂线时,  $F$  值最小, 如图 8—6 乙所示, 此时  $F$  的最小值为  $F_{\min} = G\sin\varphi$

其中  $\varphi = \arctan\mu$ , 所以最小的拉力  $F$  与水平方向的夹角为  $\theta = \varphi = \arctan\mu$ 。  $F$  的最小值可以表达为:  $F_{\min} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} G$ 。

**例 7:** 如图 8—7 所示, 一带电质点, 质量为  $m$ , 电量为  $q$ , 以平行于  $Ox$  轴的速度  $v$  从  $y$  轴上的  $a$  点射入图中第一象限所示的区域, 为了使该质点能从  $x$  轴上的  $b$  点以垂直于  $Ox$  轴的速度  $v$  射出, 可在适当的地方加一个垂直于  $xy$  平面、磁感应强度为  $B$  的匀强磁场。若此磁场仅分布在一个圆形区域内, 试求这圆形磁场区域的最小半径。重力忽略不计。

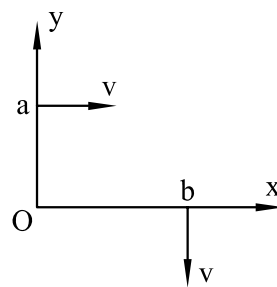


图 8—7

**解析:** 当带电质点以垂直于磁场方向的速度  $v$  进入磁场, 在磁场中将做匀速圆周运动, 由此要从  $a$  点进入从  $b$  点射出其圆轨道为  $\frac{1}{4}$  圆弧, 因而可用作图法求解。

过  $a$  点作平行  $Ox$  轴的直线, 过  $b$  作平行  $Oy$  的直线, 两直线相交于  $c$  点, 如图 8—7 甲所示, 可见只要能保证带电质点的  $\frac{1}{4}$  圆轨道处在匀强磁场中, 即可使带电质点从  $b$  点射出, 由此可知, 磁场区域有一最小值, 其最小半径为  $\frac{1}{4}$  圆形轨道两个端点连线的一半, 即:

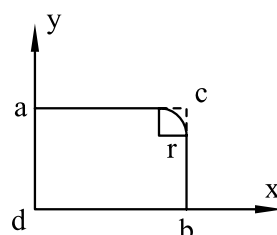



图 8—7甲

$$\text{由 } qvB = m\frac{v^2}{r} \text{ 可得粒子在磁场中的偏转半径为: } r = \frac{mv}{qB}$$

所加磁场的最小半径为： $R = \frac{\sqrt{2}}{2} r = \frac{\sqrt{2}mv}{2qB}$

**例 8:** 图 8—8 中 AB 表示一横放的平面镜， $P_1P_2$  是水平放置的米尺（有刻度的一面朝着平面镜），MN 是屏，三者互相平行，屏 MN 上的 ab 表示一条直缝（即 a、b 之间是透光的）。某人眼睛紧贴米尺上的小孔 S（其位置见图），可通过平面镜看到米尺上的一部分刻度。试在本题的图上用三角板作图求出可看到的部分，并在  $P_1P_2$  上把这部分涂以标志 。

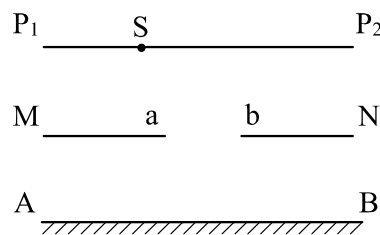


图 8—8

**解析:** 根据物像位置镜面对称可知：人眼通过平面镜看到的米尺刻度范围，好像人眼在平面镜中的像直接去看刻度范围，不过要受到挡板 MN 的像  $M'N'$  的阻挡，所以先将眼睛在平面镜中成像点  $S'$  作出，再作出挡板 MN 在平面镜中的像  $M'N'$ ，如图 8—8—甲，其中  $a'b'$  是挡板上的缝 ab 在平面镜中的像，连接  $S'a'$  并延长交 AB、 $P_1P_2$  于 c、d 两点，再作  $S'$  和 b 的连线交 AB 于 E 点，并延长后交  $P_1P_2$  于 F 点，则 dF 即为人眼通过平面镜和挡板后能看到的刻度范围。

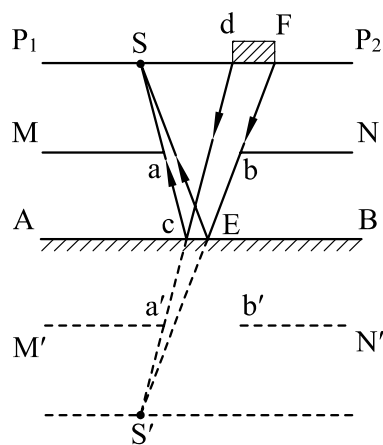


图 8—8甲

**例 9:** 光线透过空气中的平行平面厚玻璃板，问下图 8—9 所示四种情形中，哪一种是正确的？

**解析:** 根据光的折射定律，光由光疏介质进入光密介质时，光线要向着法线的方向偏折，相反时，向远离法线的方向偏折，且在传播中光路是可逆的。

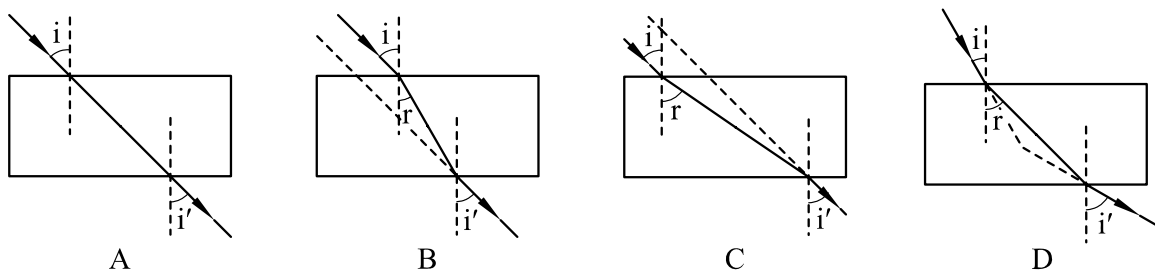


图 8—9

由上分析可知，B 图是正确的。

**例 10:** 某人通过焦距为 10cm，直径为 4.0cm 的薄凸透镜观看方格纸，每个方格的边长为 0.3cm。他使透镜的主轴与方格纸垂直 AB，透镜与纸面相距 10cm，眼睛位于透镜主轴上离透镜 5.0cm 处。问他至多能看到同一行上几个完整的方可格？

**解析:** 可以用光路的可逆性来做，若在

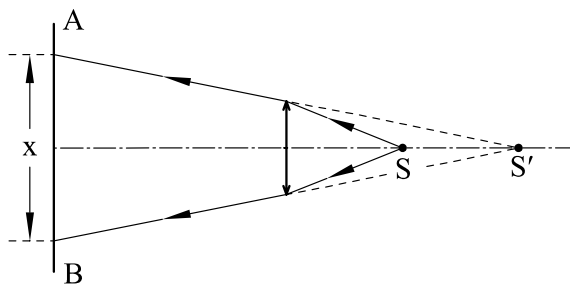


图 8—10



S 点放一点光源，则成像于 S' 点，能照亮方格纸上一定面积，其直径为 x，如图 8—10 所示，根据光路的可逆性，来自面积 x 上的方格的光经透镜折射后都能进入人眼，即能被人看到。

$$\text{由 } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \text{ 可得: } p' = -10\text{cm}$$

$$\text{由相似三角形对应边成比例得: } \frac{x}{d} = \frac{20}{10}, \text{ 所以 } x = 8\text{cm}, \text{ 格数 } n = \frac{x}{1} = \frac{8}{0.3} = 26.7$$

即最多能看到同一行上 26 个完整的方格。

**例 11:** 凸透镜 L<sub>1</sub> 与凹透镜 L<sub>2</sub> 同轴放置，L<sub>1</sub> 左侧媒质的折射率 n，L<sub>2</sub> 右侧媒质的折射率也是 n，两透镜之间的价质折射率为 n<sub>0</sub>，且 n < n<sub>0</sub>。F<sub>1</sub> 是 L<sub>1</sub> 的物方焦点，F<sub>2</sub> 是 L<sub>2</sub> 的物方焦点，F'<sub>2</sub> 是 L<sub>2</sub> 的像方焦点。有一物点 S 位于 L<sub>1</sub> 的物方焦平面上，如图 8—11 所示。

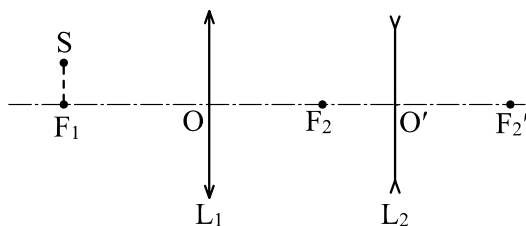


图 8—11

(1) 画出成像光路图，求出像点 S<sub>1</sub> 的位置。简述作图的依据；

(2) 若 L<sub>1</sub> 的物方焦距 f<sub>1</sub> = 20 厘米，L<sub>2</sub> 的物方焦距 f<sub>2</sub> = 10 厘米，物点 S 离光轴的距离为 2 厘米，问像点 S<sub>1</sub> 离光轴的距离为多少？

**解析:** 放于焦平面上的点光源发出的光经凸透镜折射后平行于副光轴，平行于副光轴的平行光经凹透镜发散后，反向延长线将交一凹透镜的副焦点，光路图如图 8—11—甲所示。

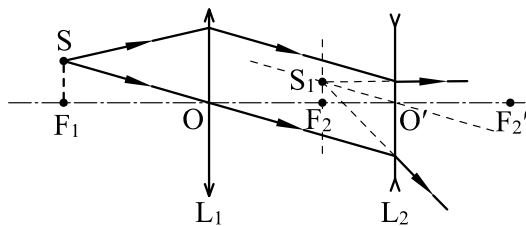


图 8—11甲

(1) 作法：①过 S 作过光心 O 点的光线，传播方向不改变；②过 O' 点作平行于 SO 的辅助线及过 F<sub>2</sub> 作垂直于主轴的直线（焦平面），两线相交于 S<sub>1</sub>（副焦点）。平行于副光轴的光线，经凹透镜折射后，折射线反向延长线将通过 S<sub>1</sub> 点，即 S<sub>1</sub> 为所求的像点。

$$(2) \text{ 由图可知: } \frac{\overline{SF_1}}{\overline{S_1F_2}} = \frac{f_1}{f_2}, \text{ 所以: } \overline{S_1F_2} = 1\text{cm}$$

即 S<sub>1</sub> 离主光轴的距离为 1cm。

### 针对训练

1. 如图 8—12 所示，一个重为 G 的匀质球，放在光滑的斜面上，斜面倾角为 α，在斜面上有一光滑的斜木板挡住球处于静止状态。如果挡板与斜面间的夹角 β 缓慢增大到挡板呈水平状态，此过程中挡板对球的弹力 N<sub>1</sub> 和斜面对球的弹力 N<sub>2</sub> 如何变化？

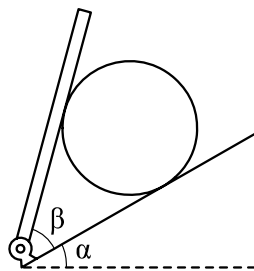


图 8—12

2. 一重为 G 的物块放在倾角为 α 的斜面上，物块与斜面间的摩擦因数为 μ，今在物块上的作用力为 F，F 可与斜面成任意夹角，如图 8—13 所示，求拉动物块沿斜面上升所需力 F 的最小值及对应的 θ 角。

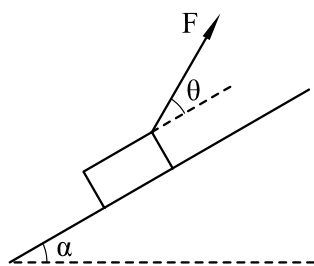


图 8—13

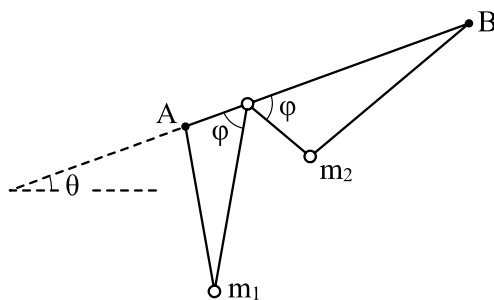


图 8—14

3. 如图 8—14 所示，小环  $m_1$ 、 $m_2$  能沿着一轻绳光滑地滑动，绳的两端固定于直杆 AB 的两端，杆与水平线成角度  $\theta$ 。在此杆上又套一轻小环，绳穿过轻环，并使  $m_1$ 、 $m_2$  在其两边，设环与直杆的接触是光滑的，当系统平衡时，直杆与轻环两边的绳夹角为  $\varphi$ ，试证明：
$$\frac{\tan \theta}{\tan \varphi} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}。$$

4. 一条在湖面上以恒定速度行驶的船上，有一与船固定的竖直光滑墙壁。有一个小球沿水平方向射到墙上。相对于岸，小球的速度大小为  $v_1$ ，方向与墙的法线成  $60^\circ$  角，小球自墙反弹时的速度方向正好与小球入射到墙上时的速度方向垂直。问船的速度应满足什么条件。设小球与墙壁的碰撞是完全弹性的。

5.  $F = 400\text{N}$  的力拖着小船，使它沿着河中心线运动。现甲、乙两人在河两岸共同拖船，已知甲拉力的方向与河中心线的夹角为  $30^\circ$ ，要使两人共同产生的效果与  $F$  单独作用的效果相同，乙拉力的最小值应为多少？方向如何？

6. 如图 8—15 所示，一储油圆桶，底面直径与桶高均为  $d$ 。当桶内无油时，从某点 A 恰能看到桶底边缘上的某点 B。当桶内油的深度等于桶高一半时，在 A 点沿 AB 方向看去，看到桶底上的 C 点，C、B 相距  $\frac{d}{4}$ 。由此可得油的折射率  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；光在油中传播的速度  $v = \underline{\hspace{2cm}}\text{m/s}$ （结果可用根式表示）。

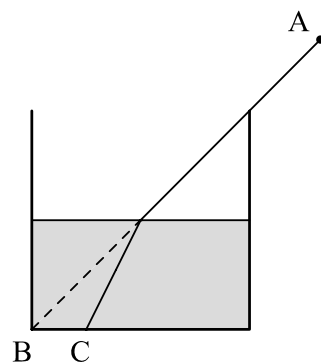


图 8—15

7. 要在一张照片上同时拍摄物体正面和几个不同侧面的像，可以在物体的后面放两个直立的大平面镜 AO 和 BO，使物体和它对两个平面镜所成的像都摄入照相机，如图 8—16 所示。图中带箭头的圆圈 P 代表一个人的头部，白色半圆代表人的脸部，此人正面对着照相机的镜头；有斜线的半圆代表脑后的头发；箭头表示头顶上的帽子。图 8—16 甲为俯视图。若两平面镜的夹角  $\angle AOB = 72^\circ$ ，设人头的中心恰好位于角平分线 OC 上，且照相机到人的距离远大于人到平面镜的距离。

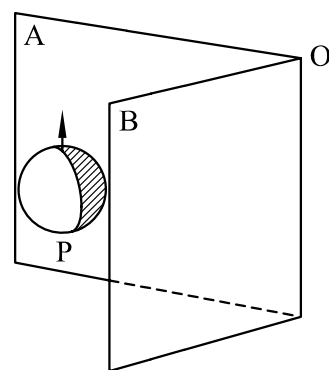


图 8—16

(1) 试在图 8—16 甲画出 P 的所有的像的位置并用空白和斜线分别表示人脸和头发，以表明各个像的方位。

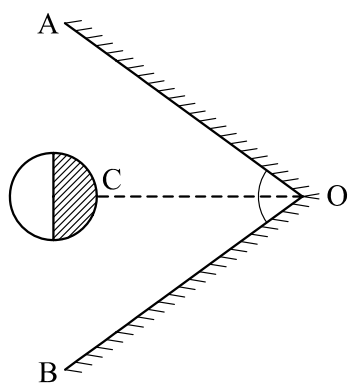


图 8—16甲

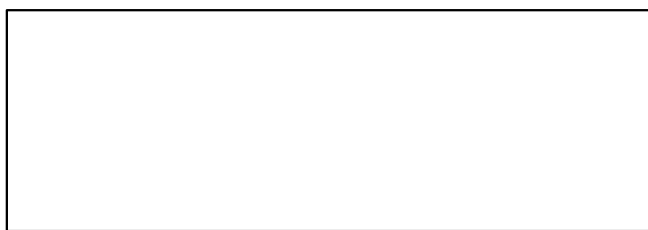


图 8—16乙

(2) 在图 8—16 乙的方框中画出照片上得到所有的像（分别用空白和斜线表示人脸和头发，用箭头表示头顶上的帽子）。

8. 图 8—17 中所示是一潜望镜壳体的示意图。MN 为光线的入口。在上方 AB 处已放置一块与纸面垂直的平面镜，它和与纸面垂直的竖直面之间的夹角为  $45^\circ$ 。眼睛在观察孔 S 处观察，在 CD（与垂直面的夹角也是  $45^\circ$ ）处放置一块平面镜。今要使观察到的视场不受 CD 处的平面镜的限制，则平面镜 CD 至少要有多大的线度才行？要求直接在图上用作图法画出即可，但要说明作图的步骤。

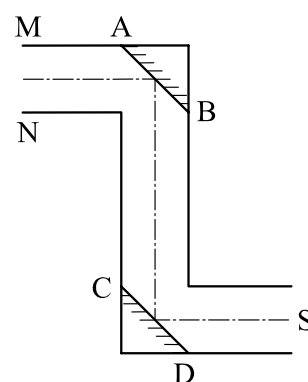


图 8—17

9. 图 8—18 中 MN 是薄透镜的主轴，S 是发光点，S' 是它的像点。

- (1) 用作图法求出薄透镜的位置，标在图上；
- (2) 分别作光路图求出两个焦点的位置，标在图上。再标明透镜的类别。

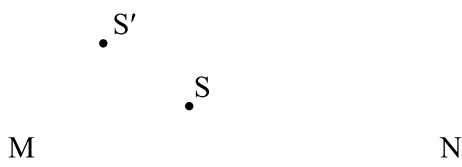


图 8—18

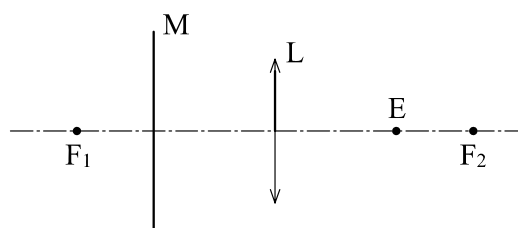


图 8—19

10. 如图 8—19 所示，某人的眼睛在 E 处通过放大镜 L 观察标尺 M， $F_1$  和  $F_2$  为 L 的焦点。他既能通过 L 看到 M 上的一部分刻度，又能直接从镜外看到一部分刻度值的范围。在作图进用①、②、… 标明你画的光线，并写出作图步骤。

11. 如图 8—20 所示，凸透镜 L 的主轴与 x 轴重合，光心 O 就是坐标原点，凸透镜的焦距为 10 厘米。有一平面镜 M 放在  $y = -2$  厘米、 $x > 0$  的位置，眼睛从平面镜反射的光中看到光点 A 的像位于  $A_2$  处， $A_2$  的坐标见图。

- (1) 求出此发光点 A 的位置；
- (2) 写出用作图法确定 A 的位置的步骤并作图。

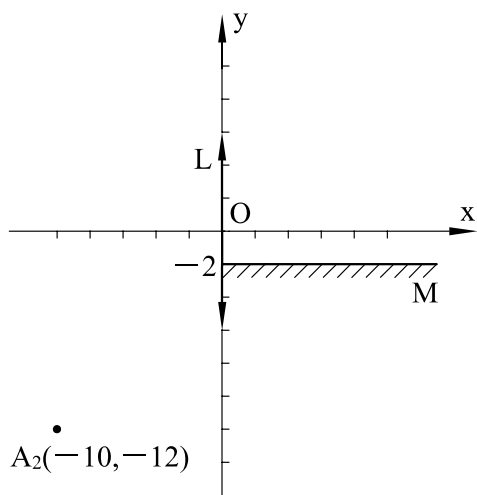


图 8—20

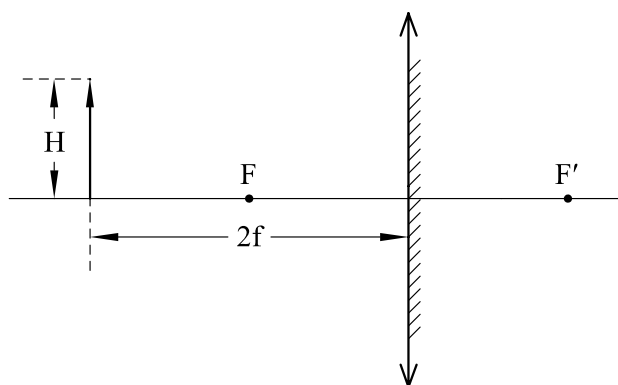


图 8—21

12. 一平凸透镜焦距为  $f$ ，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它  $2f$  处，垂直于主轴放置一高为  $H$  的物，其下端在透镜的主轴上，如图 8—21 所示。

- (1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚、是实；
- (2) 用计算法求出此像的位置和大小。

13. 焦距均为  $f$  的两个凸透镜  $L_1$ 、 $L_2$  与两个平面镜  $M_1$ 、 $M_2$  放置在如图 8—22 所示的位置。两透镜共轴，透镜的主轴与二平面镜垂直，并通过两平面镜的中心，四镜的直径相同，在主轴上有一点光源  $O$ 。

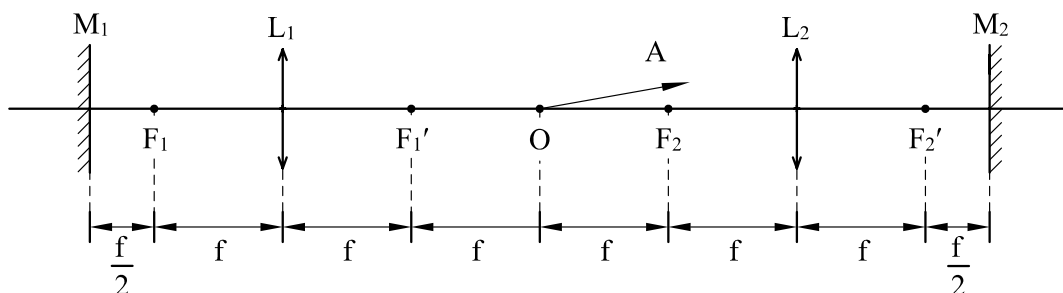


图 8—22

- (1) 画出由光源向右的一条光线  $OA$ ，在此光学系统中的光路；
- (2) 分别说出由光源向右发出的光线和向左发出的光线各在哪些位置（ $O$  点除外）？形成光源  $O$  的能看到的像，哪些是实像？哪些是虚像？

14. 已知两透镜组合系统如图 8—23 所示，物经整个系统成像，像的位置大小如图所示。试用作图法求物经  $L_1$  所成的像的位置与大小，作出  $L_1$  的焦点及系统的焦点位置。说明  $L_1$  和  $L_2$  是什么透镜？

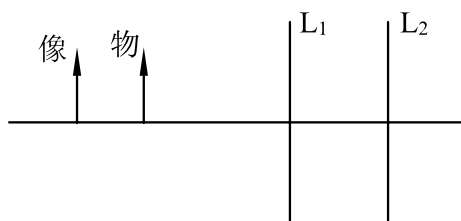


图 8—23

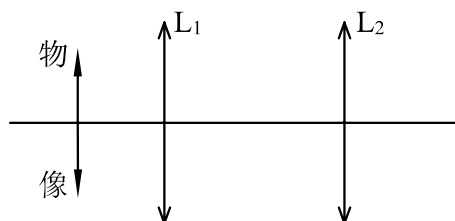


图 8—24

15. 有两个焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$  的凸透镜，如果把这两个透镜做适当的配置，则可使一垂直于光轴的小物体在原位置成一等大、倒立的像，如图 8—24 所示，试求出满足上述要求的配置方案中各透镜的位置。

### 参考答案

1、 $N_1$  先减小后增大， $N_2$  减小。

2、 $F = \frac{mg}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ ， $\theta = \arctan\mu$

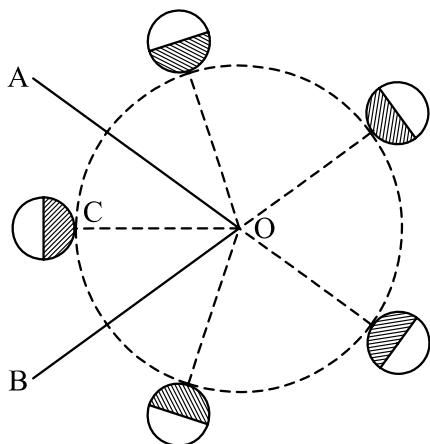
3、证明过程略。

4、船的行驶速度必须有沿  $y$  方向的分速度，亦即具有沿墙壁平面法线方向的分速度，其大小为  $\frac{1}{2}v_1$ ，而沿  $x$  方向的分速度不受限制，可取包括零在内的任意值。

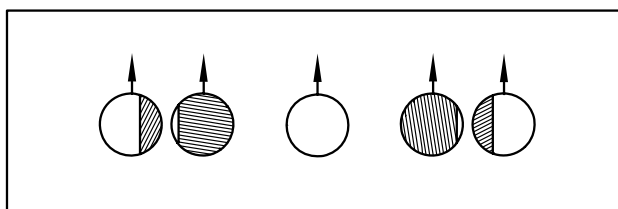
5、200N，方向与河中心线夹角  $60^\circ$

6、 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ， $\frac{3\sqrt{10}}{5} \times 10^8$

7、(1) 如图所示——



第7题 (1)



第7题 (2)

8、①先作出 MN 在 AB 镜中的虚像  $M' N'$ ；②再作出眼睛在 CD 处镜中的虚像  $S'$ ；③将  $S'$  与  $M' N'$  相连，与 CD 面交于  $C' D'$  处。 $C' D'$  即为所求的结果。

9、如图所示——

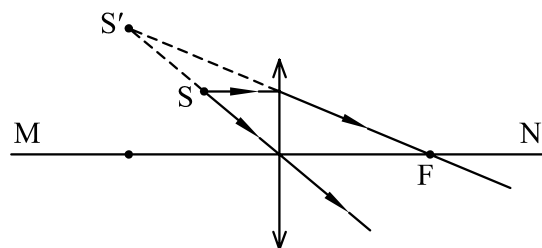
10. (1) 作放大镜 L 端点和 E 点的连线并交 M 于 A 点；

(2) 过 L 中心点作 LE 线的平行线  $OO'$ ；

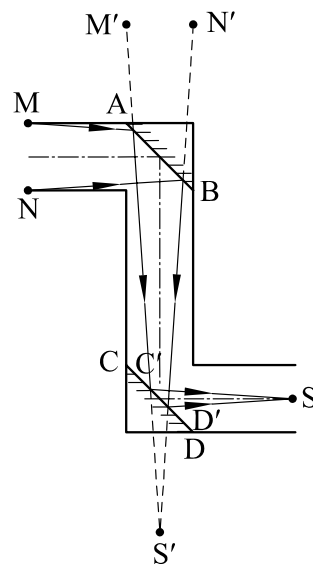
(3) 过  $F_1$  作垂直于主光轴的直线（焦平面）交  $OO'$  直线于 B 点；

(4) 连接 BL 交 M 于 C 点；

(5) 作 A、B、C 三点关于主光轴对称

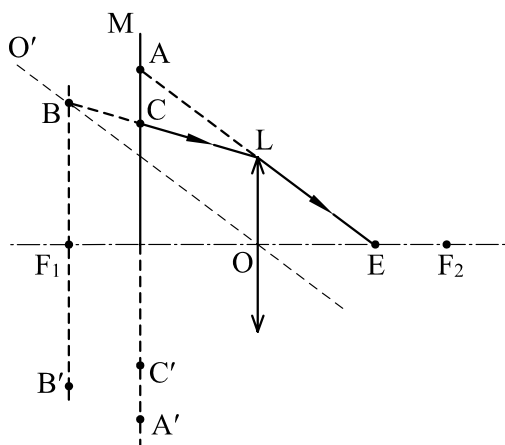


第9题

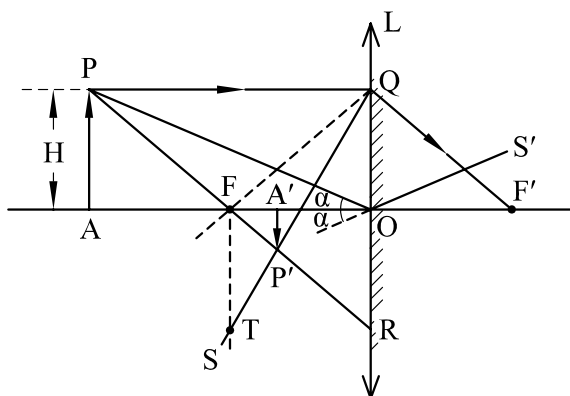


第8题

点, 可通过作图得  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ 。可见  $AA'$  以外的刻度可直接看到,  $CC'$  之间的刻度可通过放大镜  $L$  看到,  $AC$ 、 $A' C'$  之间的刻度无法看到。



第10题



第12题

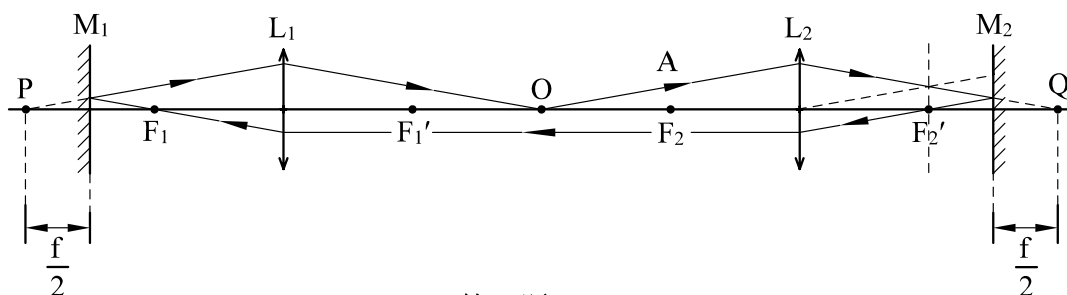
11、(1)  $x = -5\text{cm}$ ,  $y = 4\text{cm}$ ; (2) 略。

12、(1) 如图所示——

提示:(1) 平凸薄透镜平面上镀银后构成一个由会聚透镜  $L$  和与它密接的平面镜  $M$  的组合  $LM$ , 图中  $O$  为  $L$  的光心  $O$ ,  $AOF'$  为主轴,  $F$  和  $F'$  为  $L$  的两个焦点,  $AP$  为物, 作图时利用了三条特征光线。

(2) 在透镜左方距离  $\frac{2}{3}f$  处, 大小为  $\frac{1}{3}H$ 。

13、(1) 如图所示——



第13题 (1)

(2) 向右发出的光线:  $F_2'$  处成实像; 右方无限处成虚像,  $F_2$  处成实像;  $P$  处 ( $M_1$  左方  $\frac{f}{2}$  处主轴上) 成虚像。向左发出的光线:  $F_1$  处成实像; 左方无穷远处成虚像;  $F_1'$  处成实像;  $Q$  处 ( $M_2$  右方  $\frac{f}{2}$  处主轴上) 成虚像。

14、略。

15、略。



## 九、估算法

### 方法简介

有些物理问题本身的结果，并不一定需要有一个很准确的答案，但是，往往需要我们对事物有一个预测的估计值；有些物理问题的提出，由于本身条件的限制，或者实验中尚未观察到必要的结果，使我们解决问题缺乏必要的已知条件，无法用常规的方法来求出物理问题的准确答案，采用“估算”的方法就能忽略次要因素，抓住问题的主要本质，充分应用物理知识进行快速数量级的计算。近几年来，竞赛试题中频频出现的各类估算题，的确是判断学生思维能力的好题型。

### 赛题精析

**例 1** 已知地球半径约为  $6.4 \times 10^6 \text{m}$ ，又知月球绕地球的运动可近似看做匀速圆周运动，则可估算出月球到地心的距离约为\_\_\_\_\_m。（结果只何留一位有效数字）

**解析** 因为月球绕地球的运动可近似看做匀速圆周运动，所以可根据月球所受的万有引力提供月球做匀速圆周运动所需要的向心力及月球公转周期求解此问题，也可根据地球上的光经月球反射 2 秒后返回地球的知识估算。

根据运动定律及万有引力定律得：

$$\frac{GMm}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{GMm'}{R^2} = m'g$$

由①、②两式代入数据可得  $r = 4.1 \times 10^8 \text{m}$ （其中  $T$  是月球绕地球旋转周期， $T = 30$  天）

**例 2** 估算在室温下，真空度达  $1.33 \times 10^{-1} \text{Pa}$  时，容器内空气分子的平均距离。（取一位有效数字即可）

**解析** 要想求容器内空气分子的平均距离，则可以根据克拉珀龙方程求出每个空气分子所占的体积，由此即可求解。

取 1 摩尔空气作为研究对象，

视每个空气分子所占的空间是以分子间的平均距离  $a$  为边长的立方体，每个分子处在立方体的中心。则每个空气分子占据的空间的体积为  $V_0 = a^3$

根据克拉珀龙方程，1 摩尔空气占据的总体积  $V = RT/p = N_0 V_0 = N_0 a^3$

所以空气分子间平均距离  $a = \sqrt[3]{RT / N_0 p}$ ，近似地取室温  $T = 300 \text{K}$ ，代入数据可算得：

分子间平均距离为： $a = 1 \times 10^{-5} m$

**例 3** 密闭容器的气体压强为  $p = 10^{-2} Pa$ ，温度为  $27^\circ C$ ，估算其中分子的间距（保留一位有效数字）。

**解析** 以密闭容器内的一定量气体为研究对象，选取标准状况为该气体的一个已知状态，根据理想气体状态方程可求解。

取 1 摩尔气体作为研究对象，在标准状态下为  $V_0 = 22.4 \times 10^{-3} m^3$ ，所包含的分子数为  $N_A = 6.023 \times 10^{23}$  个。在题设条件下，设其体积为  $V$ ，则根据气态方程：

$$\text{有 } \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$$

每个分子所占的空间体积为  $V' = \frac{V}{N_A}$ ，分子间的距离为  $d = \sqrt[3]{V'} = 7 \times 10^{-7} m$ 。

**例 4** 已知一密闭容器内的气体分子平均距离为  $d = 3 \times 10^{-9} m$ ，温度为  $27^\circ C$ ，试估算容器内气体的压强多大？（保留一位有效数字）

**解析** 要想估算容器内气体的压强，则可根据理想气体状态方程求解，其中选一个标准状态为已知状态。

一个分子占扰的体积为  $V' = d^3 = 27 \times 10^{-27} m^3$ ，

1 摩尔分子占据的体积为  $V = n_0 V'$

$$\text{由 } \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}, \text{ 解得 } p = \frac{V_0 T}{V T_0} \cdot p_0 = 2 \times 10^5 Pa$$

**例 5** 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器中能在某一外界条件下处于三态平衡共存（容器内无任何其他物质），这种状态称为水的三相点，其三相点温度为  $0.01^\circ C$ ，三相点压强为  $4.58 mmHg$ 。现有冰、水和水蒸气各  $1g$  处于三相点，若在保持总体积不变的情况下对此系统缓慢加热，输入热量  $Q = 2.25 \times 10^5 J$ ，试估算系统再达平衡后冰、水和水蒸气的质量。已知水的密度和冰的密度分别为  $1 \times 10^3 kg/m^3$  和  $0.9 \times 10^3 kg/m^3$ ，冰在三相点时的升华热  $L_{升} = 2.83 \times 10^6 J/kg$ ，水在三相点的汽化热  $L_{汽} = 2.49 \times 10^6 J/kg$ 。

**解析** 由题给数据可利用以下近似关系求得冰的熔化热

$$L_{熔} = L_{升} - L_{汽} = 0.34 \times 10^6 J/kg \quad \text{①}$$

因为缓缓加给系统的热  $Q < L_{熔}$ ，所以冰不能全部熔化，系统在物态变化过程中始终是三态共存且接近平衡，因此系统的温度和压强均不变。



现在估算在题给温度、压强条件下水蒸气的密度  $\rho_{\text{气}}$ ，用理想气体状态方程可得

$$\rho_{\text{气}} = \mu p_t / RT_t, \mu \text{ 为水蒸气的摩尔质量}$$

代入数值  $\mu = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}, p_t = 4.58 \text{ mmHg} = 610 \text{ Pa}$  得

$$T_t = 273 \text{ K}$$

估算可得  $\rho_{\text{气}} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$

在同样的条件下，水的密度  $\rho_{\text{水}} \approx 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，冰的密度  $\rho_{\text{冰}} \approx 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。由

此可知，水蒸气的体积远远大于水和冰的体积之和，又由于冰熔化为水时体积变化不大，在总体积保持不变的条件下，完全可以认为物态变化过程中水蒸气的体积不变，也就是再达到平衡时，水蒸气的质量仍为  $1 \text{ g}$ ，物态变化过程几乎完全是冰熔为水的过程。

设后来冰、水、水蒸气的质量分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，则有

$$z = 1 \text{ g} \quad \text{②}$$

$$x + y = 2 \text{ g} \quad \text{③}$$

$$\text{根据能量守恒定律，有 } (1-x) L_{\text{熔}} = Q \quad \text{④}$$

$$\text{由②③④式可得 } x = 0.25 \text{ g} \quad y = 1.75 \text{ g} \quad z = 1 \text{ g}$$

**例 6** 假想有一水平方向的匀强磁场，磁感强度  $B$  很大，有一半径为  $R$ ，厚度为  $d$  ( $d \ll R$ ) 的金属圆盘在此磁场中竖直下落，盘面始终位于竖直平面内并与磁场方向平行，如图 2—9—1 所示，若要使圆盘在磁场中下落的加速度比没有磁场时减小千分之一（不计空气阻力），试估算所需磁感强度的数值，假定金属盘的电阻为零，并设金属的密度

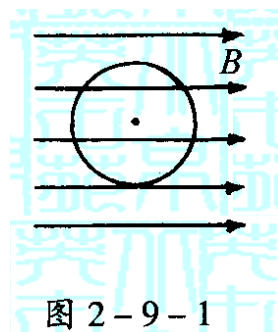


图 2—9—1

$\rho = 9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，介电常数  $\varepsilon = 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$ 。

**解析** 当盘在磁场中下落速度为  $v$  时，盘中的感应电动势  $E = Bvd$ ，在感应电动势的作用下，圆盘两个表面上将带有等量异号的电荷 ( $\pm Q$ ) 因为盘电阻为零，所以电荷 ( $\pm Q$ ) 引起的两表面间的电压  $U$  等于盘中感应电动势的数值，即  $U = Bvd$ 。

圆盘上的  $Q$  与  $U$  之间的关系跟一个同样尺寸的带电电容器上的  $Q$  与  $U$  的关系相同，此电容器的电容  $C = \varepsilon \cdot S / d = \varepsilon \cdot \pi R^2 / d$ ，故圆盘表面所带电量  $Q = CU = \varepsilon \cdot \pi R^2 Bv$ 。

在盘下落过程中，盘的速度  $v$  随时间增大，盘面上的电量  $Q$  也随时间增大，由此可求出盘中电流  $I = \Delta Q / \Delta t = \varepsilon \cdot \pi R^2 B \Delta v / \Delta t$ ，磁场对此电流的作用力  $F$  的方向向上，大小为

$F = BId = \varepsilon \cdot \pi R^2 B \Delta v / \Delta t$ 。若盘的质量为  $m$ ，则盘受到的力为  $F$  和重力  $mg$ ，盘的加速度

$a = \Delta v / \Delta t$  可由下式求出

$$mg - F = ma = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\text{由此得盘的加速度 } a = \frac{mg}{m + \varepsilon \pi R^2 B^2 d}$$

$$\text{按题意 } a = g - (1/1000)g, \text{ 由此得 } \frac{\varepsilon B^2}{\rho} = \frac{1}{1000}$$

$$\text{所以磁感应强度 } B = \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon} \times 10^{-3}} = 10^{-6}$$

### 针对训练

- 估算地球大气总质量  $M$  和分子数  $N$ .
- 已知铜的  $8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 原子量为 64. 通过估算可知铜中每个铜原子所占的体积为 ( )  
 A.  $7 \times 10^{-6} \text{ m}^3$       B.  $1 \times 10^{-29} \text{ m}^3$       C.  $1 \times 10^{-26} \text{ m}^3$       D.  $8 \times 10^{-24} \text{ m}^3$
- 只要知道下列哪一组物理量, 就可以估算出气体中分子间的平均距离? ( )  
 A. 阿伏伽德罗常数、该气体的摩尔质量和质量  
 B. 阿伏伽德罗常数、该气体的摩尔质量和密度  
 C. 阿伏伽德罗常数、该气体的质量和体积  
 D. 该气体的密度、体积和摩尔质量
- 已知油酸的密度为  $6.37 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ , 油酸的原子量为 282. 试估算油酸分子的直径有多大? (结果保留一位有效数字)

## 九、估算法

- $M \approx 10^{18} \text{ kg}$        $N \approx 10^{44}$       2. B      3. B      4. B



## 十、假设法

### 方法简介

假设法是对于待求解的问题，在与原题所给条件不相违的前提下，人为的加上或减去某些条件，以使原题方便求解。求解物理试题常用的有假设物理情景，假设物理过程，假设物理量等，利用假设法处理某些物理问题，往往能突破思维障碍，找出新的解题途径，化难为易，化繁为简。

### 赛题精析

例 1 如图 2—10—1 所示，一根轻质弹簧上端固定，下端挂一质量为  $m_0$  的平盘，盘中有一物体，质量为  $m$ 。当盘静止时，弹簧的长度比其自然长度伸长了  $L$ 。今向下拉盘使弹簧再伸长  $\Delta L$  后停止，然后松手放开。设弹簧总处在弹性限度以内，则刚松开手时盘对物体的支持力等于（ ）

- A.  $(1+\Delta L/L)mg$
- B.  $(1+\Delta L/L)(m+m_0)g$
- C.  $\Delta Lmg$
- D.  $(\Delta L/L)(m+m_0)g$

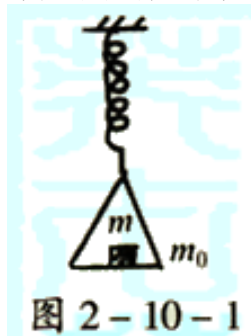


图 2-10-1

**解析** 此题可以盘内物体为研究对象受力分析，根据牛顿第二定律列出一个式子，然后再以整体为研究对象受力分析，根据牛顿第二定律再列一个式子和根据平衡位置的平衡条件联立求解，求解过程较麻烦。若采用假设法，本题将变得非常简单。

假设题中所给条件  $\Delta L=0$ ，其意义是没有将盘往下拉，则松手放开，弹簧长度不会变化，盘仍静止，盘对物体的支持力的大小应为  $mg$ 。以  $\Delta L=0$  代入四个选项中，只有答案 A 能得到  $mg$ 。由上述分析可知，此题答案应为 A。

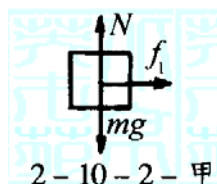
例 2 如图 2—10—2 所示，甲、乙两物体质量分别为  $m_1=2\text{kg}$ ， $m_2=3\text{kg}$ ，叠放在水平桌面上。已知甲、乙间的动摩擦因数为  $\mu_1=0.6$ ，物体乙与平面间的动摩擦因数为  $\mu_2=0.5$ ，现用水平拉力  $F$  作用于物体乙上，使两物体一起沿水平方向向右做匀速直线运动，如果运动中  $F$  突然变为零，则物体甲在水平方向上的受力情况（ $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ）

- A. 大小为 12N，方向向右
- B. 大小为 12N，方向向左
- C. 大小为 10N，方向向右
- D. 大小为 10N，方向向左

**解析** 当  $F$  突变为零时，可假设甲、乙两



图 2-10-2



2-10-2-甲

物体一起沿水平方向运动，则它们运动的加速度可由牛顿第二定律求出。由此可以求出甲所受的摩擦力，若此摩擦力小于它所受的滑动摩擦力，则假设成立。反之不成立。

如图 2—10—2—甲所示。假设甲、乙两物体一起沿水平方向运动，则由 2—10—2—甲由牛顿第二定律得：

$$f_2 = (m_1 + m_2)a \quad \text{①}$$

$$f_2 = \mu N_2 = \mu_2(m_1 + m_2)g \quad \text{②}$$

由①、②得： $a = 5\text{m/s}^2$

可得甲受的摩擦力为  $f_1 = m_1 a = 10\text{N}$

因为  $f = \mu_1 m_1 = 12\text{N}$

$f_1 < f$

所以假设成立，甲受的摩擦力为 10N，方向向左。应选 D。

例 3 一升降机在箱底装有若干个弹簧，如图 2—10—3 所示，设在某次事故中，升降机吊索在空中断裂，忽略摩擦力，则升降机在从弹簧下端触地后直到最低点的一段运动过程中 ( )

- A. 升降机的速度不断减小
- B. 升降机的速度不断变大
- C. 先是弹力做的负功小于重力做的正功，然后是弹力做的负功大于重力做的正功

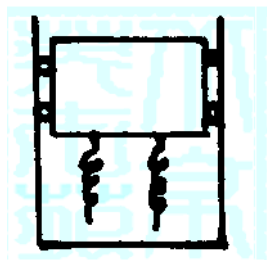


图 2 - 10 - 3

- D. 到最低点时，升降机加速度的值一定大于重力加速度的值

解析 升降机在从弹簧下端触地后直到最低点的一段运动过程，它受重力、弹簧弹力两个力作用。当重力大于弹力时速度继续增大，当重力等于弹力时速度增大到最大，当重力小于弹力时，速度开始减小，最后减为零，因而速度是先增大后减小，所以选项 C 正确。

假设升降机前一运动阶段只受重力作用，做初速度为零的匀加速直线运动，它下降了  $h$  高度，末速度为  $v$ ，则

$$v^2 = 2gh$$

后一运动阶段升降机只受弹力作用，做初速度为  $v$ 、末速度为零的匀减速直线运动，把弹簧压缩了  $x$ ，则

$$v^2 = 2ax$$

所以  $2gh = 2ax$

$$\text{而 } a = \frac{\sum F}{m} = \frac{0 + kx}{m}, \text{ 所以 } 2hg = 2\left(\frac{kx}{m}\right)x, \text{ 即 } \frac{kx}{mg} = \frac{2h}{x}$$

因为  $h > x$ , 所以  $\frac{kx}{mg} > 2$ , 即  $a_{\text{低}} = \frac{kx - mg}{m} > \frac{2mg - mg}{m} = g$ , 所以选项 D 也正确.

例 4 一个光滑的圆锥体固定在水平桌面上, 其轴线沿竖直方向, 母线与轴线之间的夹角为  $\theta = 30^\circ$ , 如图 2—10—4 所示。一长为  $L$  的绳 (质量不计), 一端固定在圆锥体的顶点  $O$  处, 另一端拴着一个质量为  $m$  的小物体 (可看做质点)。物体以速度  $v$  绕圆锥体的轴线在水平面内做匀速圆周运动。

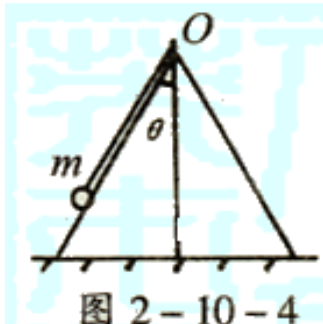


图 2-10-4

(1) 当  $v_1 = \sqrt{\frac{gL}{6}}$  时, 求绳对物体的拉力;

(2)  $v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}gL}$ , 求绳对物体的拉力。

**解析** 当物体以某一速率绕圆锥体的轴线做水平匀面内的匀速圆周运动时, 可能存在圆锥体对物体的弹力为零的临界状况, 此时物体刚好与圆锥面接触但不发生形变。而当速率变大时, 物体将脱离圆锥面, 从而导致绳对物体的拉力大小和方向都要变化。因此, 此题的关键是先求出临界状态下线速度的值。

以小物体为研究对象, 假设它与圆锥面接触, 而没有弹力作用。受力如图 2—10—4—甲所示, 根据运动定律得:

$$T \cos \theta = mg \quad (1)$$

$$T \sin \theta = \frac{mv^2}{L \sin \theta} \quad (2)$$

$$\text{解得: } v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}gL}{6}}$$

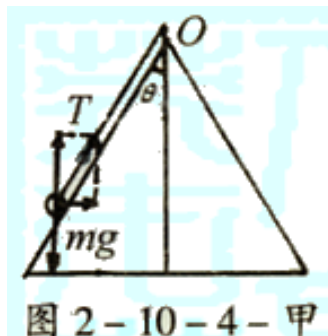


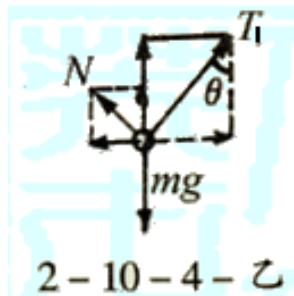
图 2-10-4-甲

(1) 因为  $v_1 = \sqrt{\frac{gL}{6}} < v$  所以物体  $m$  与圆锥面接触且有压力, 受力如图 2—10—4—乙所示, 由运动定律得

$$T_1 \cos \theta + N \sin \theta = mg \quad (1)$$

$$T_1 \sin \theta - N \cos \theta = m \frac{v_1^2}{L \sin \theta} \quad (2)$$

$$\text{解得拉力: } T_1 = \frac{mg}{6} (3\sqrt{3} + 1)$$



2-10-4-乙

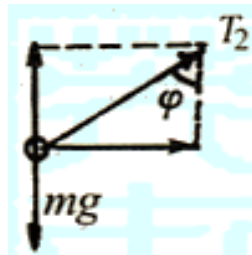
(2) 因为  $v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}gL} > v$ , 所以物体  $m$  脱离圆锥面, 设绳子与轴线的夹角为  $\varphi$ , 受力

如图 2—10—4—丙所示, 由运动定律得:

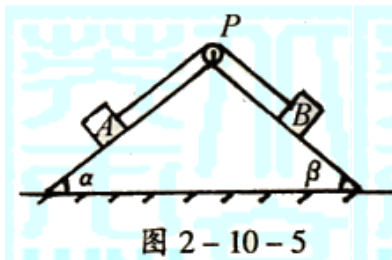
$$T_2 \sin \varphi = m \frac{v_2^2}{L \sin \varphi} \quad (1)$$

$$T_2 \cos \varphi = mg \quad (2)$$

解得绳子拉力:  $T_2 = 2mg$



例 5 如图 2—10—5 所示, 倾角为  $\alpha$  的斜面和倾角为  $\beta$  的斜面具有共同的顶点  $P$ , 在顶点上安装一个轻质小滑轮, 重量均为  $W$  的两物块  $A$ 、 $B$  分别放在两斜面上, 由一根跨过滑轮的细线连接着, 已知倾角为  $\alpha$  的斜面粗糙, 物块与斜面间摩擦因数为  $\mu$ ; 倾角为  $\beta$  的斜面光滑, 为了使两物块能静止在斜面上, 试列出  $\alpha$ 、 $\beta$  必须满足的关系式。



**解析** 因题目中没有给出具体数值, 所以粗糙斜面上物块的运动趋势就不能确定, 应考虑两种可能。

令细线的张力为  $T$ , 假设物块  $A$  有沿斜面向上运动的趋势时, 对  $A$  物块有

$$T - \mu W \cos \alpha = W \sin \alpha$$

$$\text{对 } B \text{ 物块有: } T = W \sin \beta$$

$$\text{两式联立解得: } \sin \beta = \sin \alpha + \mu \cos \alpha$$

同理, 假设物块  $A$  有沿斜面向下运动的趋势时, 可解得

$$\sin \beta = \sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

因此, 物块静止在斜面上时两倾角的关系为  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq \sin \beta \leq \sin \alpha + \mu \cos \alpha$

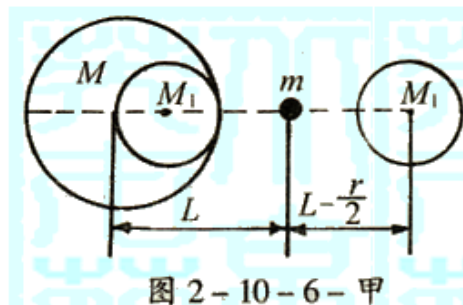
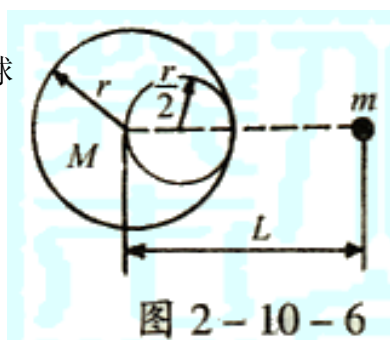
例 6 如图 2—10—6 所示, 半径为  $r$  的铅球内有一半径为  $\frac{r}{2}$  的球形空腔, 其表面与球面相切, 此铅球的质量为  $M$ , 在铅球和空腔

的中心连线上, 距离铅球中心  $L$  处有一质量为  $m$  的小球 (可以看成质点), 求铅球小球的引力。

**解析** 设想把挖去部分用与铅球同密度的材料填充, 填充部分铅球的质量为  $M_1$ . 为了抵消填充球体产生的引力, 我们在右边等距离处又放置一个等质量的球体。如图 2—10—6 甲所示。

设放置的球体的质量为  $M_1$ ,

$$\text{则 } M_1 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} M_0 = \frac{1}{7} M$$

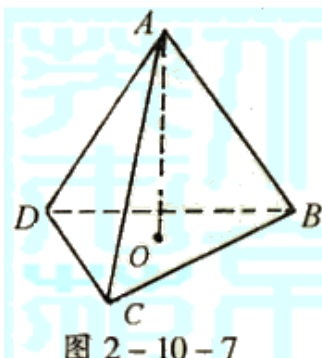


填补后的铅球质量： $M_0=M+M_1=8M/7$ .

则原铅球对小球引力为

$$\begin{aligned} F &= F_0 - F_1 \\ &= GM_0m/L^2 - GM_1m(L-\frac{r}{2})^2 \\ &= 8GMm/7L^2 - 4GMm/7(2L-r)^2 \\ &= (4GMm/7)[2/L^2 - 1/(2L-r)^2] \end{aligned}$$

例 7 三个半径为  $r$ 、质量相等的球放在一个半球形碗内，现把第四个半径也为  $r$ ，质量也相等的相同球放在这三个球的正上方，要使四个球都能静止，大的半球形碗的半径应满足什么条件？不考虑各处摩擦。



**解析** 假设碗的球面半径很大，把碗面变成平面。因为各接触面是光滑的，当放上第四个球后，下面的三个球会散开，所以临界情况是放上第四个球后，下面三个球之间刚好无弹力。把上面的球记为 A，下面三个球分别记为 B、C、D，则四个球的球心连起来构成一个正四面体，正四面体的边长均  $2r$ ，如图 2—10—7 所示。

设 A、B 球心的连线与竖直方向的夹角为  $\alpha$ ，设碗面球心为 O，O 与 B 球心的连线与竖直方向的夹角为  $\beta$ ，碗面对上面三个球的作用力都为  $F$ ，如图 2—10—7—甲所示。先以整体为研究对象，受重力、碗面对三个球的弹力  $F$ ，在竖直方向上有

$$3F\cos\beta=4mg \quad (1)$$

再以 B 球为研究对象，受重力  $mg$ 、碗面对 B 球的作用力  $F$ 、A 球对 B 的压力  $F_N$ ，根据共点力平衡条件，有

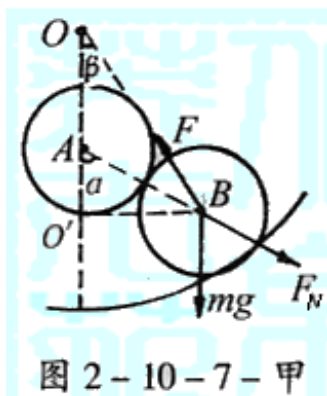
$$\begin{cases} F\cos\beta=mg+F_N\cos\alpha \\ F\sin\beta=F_N\sin\alpha \end{cases}$$

消去  $F_N$ ，得：

$$\tan\beta=\frac{F\sin\beta}{F\cos\beta-mg} \quad (2)$$

①、②联立，消去  $F$  得：

$$\tan\beta=\frac{1}{4}\tan\alpha \quad (3)$$



因为四个球的球心构成一个边长为  $2r$  正四面体，如图 2—10—7 所示，根据几何关系，可以知道：

$$\tan \alpha = \frac{BO'}{AO'} = \frac{BO'}{\sqrt{AB^2 - BO'^2}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r}{\sqrt{(2r)^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3}r)^2}} = \frac{1}{2}$$

代入③式得:  $\tan \beta = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

于是碗面的半径为  $R = BO + r = \frac{BO'}{\sin \beta} + r = BO' \sqrt{1 + \cot^2 \beta} + r = 7.633r$

所以半球形碗的半径需满足  $R \leq 7.633r$ .

例 8 如图 2—10—8 所示, 一根全长为  $L$ 、粗细均匀的铁链, 对称地挂在轻小光滑的定滑轮上, 当受到轻微的扰动, 铁链开始滑动, 当铁链下降  $L_1 (L_1 \leq L/2)$  的瞬间, 铁链的速度多大?

**解析** 在铁链下降时, 只有重力做功, 机械能守恒。当铁链下降  $L_1$  时, 如图 2—10—8—甲所示, 假设此位置是把左侧铁链下端  $AB=L_1$  段剪下来再接到右侧铁链的下端  $CD$  处实现的。

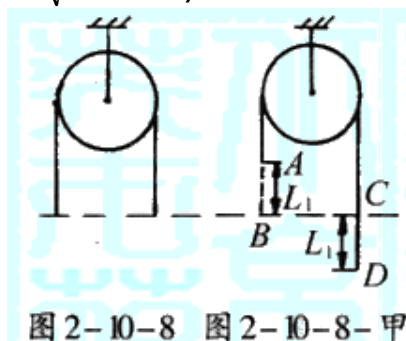


图 2—10—8 图 2—10—8—甲

设铁链的总质量为  $m$ , 铁链下降到  $L_1$  时,  $L_1$  段中心下降  $L_1$  高, 所以重力做功

$$W = \frac{m}{L} L_1 g L_1 = \frac{mgL_1^2}{L}$$

根据机械能守恒定律:  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mgL_1^2}{L}$

解得铁链的速度:  $v = \sqrt{\frac{2g}{L}} L_1$

例 9 如图 2—10—9 所示, 大小不等的两个容器被一根细玻璃管连通, 玻璃管中有一段水银柱将容器内气体隔开 (温度相同), 当玻璃管竖直放置时, 大容器在上, 小容器在下, 水银柱刚好在玻璃管的正中间, 现将两容器同时降低同样的温度, 若不考虑容器的变化, 则细管中水银柱的移动情况是 ( )

- A. 不动                      B. 上升                      C. 下降                      D. 先上升后下降

**解析** 只要假设水银柱不动, 分析气体压强随温度的变化情况, 就可判定水银柱怎样移动。

假设水银柱不移动, 则两部气体的体积都不变, 根据查理定律, 有:



$$\frac{p}{T} = \frac{p - \Delta p}{T - \Delta T}$$

$$\text{化简为: } \Delta p = \frac{\Delta T}{T} p$$

$$\text{有 } \Delta p_A = \frac{\Delta T}{T} p_A, \Delta p_B = \frac{\Delta T}{T} p_B$$

由于  $p_A < p_B$ , 所以  $\Delta p_A < \Delta p_B$ , 水银柱向下移动故选 C.

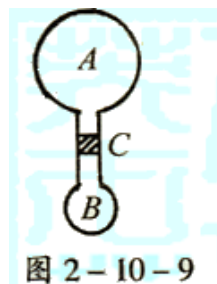


图 2-10-9

例 10 如图 2—10—10 所示, 将一定量的水银灌入竖直放置的 U 形管中, 管的内径均匀, 内直径  $d=1.2\text{cm}$ . 水银灌完后, 两管的水银在平衡位置附近做简谐振动, 振动周期  $T=3.43\text{s}$ . 已知水银的密度  $\rho=1.36 \times 10^4 \text{kg/m}^3$ . 试求水银的质量  $m$ .

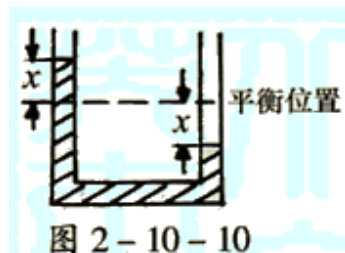


图 2-10-10

**解析** 题中水银做简谐振动, 已知振动周期要求水银的质量  $m$ . 根据简谐振动的周期

公式  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $T$  已知, 关键是求出  $k$ . 简谐振动的物体受的回复力  $F = -kx$ , 找出  $F$  与  $x$

的关系, 求出  $k$ , 问题就可以求解.

如图 2—10—10 所示, 设水银离开平衡位置的距离为  $x\text{cm}$ , 则回复力为

$$F = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2x \cdot \rho g$$

$$\text{由回复力的大小 } F=kx, \text{ 得: } k = \frac{F}{x} = \frac{\pi}{2} d^2 \rho g$$

$$\text{根据 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

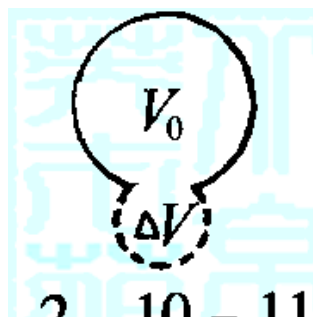
解得水银的质量

$$m = \frac{T^2 k}{4\pi^2} = \frac{T^2 d^2 \rho g}{8\pi} = \frac{(3.43)^2 \times (0.012)^2 \times (1.36 \times 10^4) \times 9.8}{8 \times 3.14} = 9\text{kg}$$

例 11 热气球是靠加热气球内部空气排除部分气体而获得上升动力的装置, 现外界气体温度是  $15^\circ\text{C}$ , 密度为  $1.2\text{kg/m}^3$ , 气球内、外气压相等, 要用容积  $1000\text{m}^3$  的气球吊起  $200\text{kg}$  的重物, 必须把气球内的空气温度加热到多少才行? (取  $g=10\text{m/s}^2$ )

**解析** 加热气球内的气体时, 气体被排出, 质量减少, 在浮力不变的情况下, 使  $F_{\text{浮}} \geq G_{\text{总}}$  时, 热气球升空. 这里出现了气体质量减小的变质量问题, 为应用三大实验定律只有依靠假设法, 在此, 为应用等压变化规律, 假设升温后排出去的气体与留在热气球内的气体状态相同, 如图 2—10—11 所示.

初态体积  $V_1 = V_0$ , 末态体积  $V_2 = V_0 + \Delta V_0$



2-10-11

气体质量  $m = \rho V_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3 \times 1000 \text{ m}^3 = 1.2 \times 10^3 \text{ kg}$

$$F_{\text{浮}} = \rho_{\text{空}} g V_0 \geq G_{\text{总}} = (m' + m_{\text{物}})g$$

代入已知数据:  $1.2 \times 10^3 \times 10^3 \geq (m' + 200) \times 10$

得  $m' \leq 1.0 \times 10^3 \text{ (kg)}$

其中  $m$  是加热前热气球内空气质量,  $m'$  为加热后热气球内空气质量.

$$\Delta m = m - m' = 1.2 \times 10^3 \text{ kg} - 1.0 \times 10^3 \text{ kg} = 200 \text{ kg}$$

当密度相同时,  $\frac{\Delta m}{m'} = \frac{\Delta V}{V_0}$ , 所以  $\Delta V = \frac{\Delta m}{m'} V_0 = 200 \text{ m}^3$

对等质量、等压的气体应用盖·吕萨克定律

初态  $V = V_0 = 10^3 \text{ m}^3$

$$T_1 = 273 + 15 = 288 \text{ K}$$

末态  $V_2 = V_0 + \Delta V = 1.2 \times 10^3 \text{ m}^3$

根据:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$

解得加热后气体温度:  $T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 345.6 \text{ K} = 72.6^\circ \text{C}$ .

例 12 0.2L 的氧气瓶内, 装有 4g 氧气, 在室温为  $0^\circ \text{C}$  时, 瓶内氧气的压强是多少?

解析 本题乍一看似乎缺少已知量, 更无法利用理想气体状态方程, 但当我们假设这些氧气的标准状态为初态时, 则问题就可以解决了.

假设这些氧气的初态为标准状态, 则有

$$V_1 = \frac{4}{32} \times 22.4 \text{ L}$$

$$p_1 = 1 \text{ atm}$$

$$T_1 = 273 \text{ K}$$

由已知该氧气的末状态为  $V_2 = 0.2 \text{ L}$ ,  $T_2 = 273 \text{ K}$ ,  $p_2$  未知,

由于  $T_1 = T_2$ , 所以根据玻意耳定律  $p_1 V_1 = p_2 V_2$

解得  $p_2 = 1.4 \text{ atm}$

例 13 如图 2—10—12 所示, 用导热材料制成的两端开口的 U 型管 ABCD, 其中 AB 高  $L_1 = 24 \text{ cm}$ , CD 高  $L_2 = 20 \text{ cm}$ , 截面积分别为  $S_{AB} = 1 \text{ cm}^2$ ,  $S_{CD} = 2 \text{ cm}^2$ , 开始时两管均有高  $h = 16 \text{ cm}$  的水银柱, 现用两个橡皮帽将两个管口封闭, 打开下方的阀门 K, 有注射器从底部缓慢抽出水银, 当其中的一个管内的水银被抽干时立即关闭阀门 K. (已知大气压强为  $p_0 = 75 \text{ cmHg}$ )

(1) 请你判断首先被抽干的是哪一管中的水银?

(2) 另一只管中剩余的水银柱高度为多少?

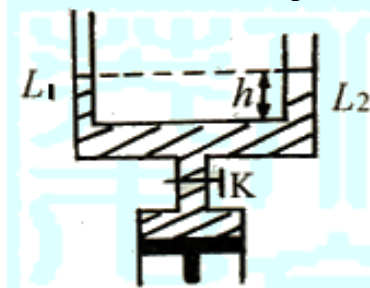


图 2—10—12

**解析** 求解这一类题时, 应根据可解的情况先做出必要的假设, 然后按着所做出的假设进行推理, 在推理过程中, 对所做假设做出否定或认同即可求解.

假设左管内水银先被抽干, 并设这时右管内剩余水银柱的高度为  $x$ , 对左管内封闭气体用玻意耳定律有  $p_1 V_1 = p_1' V_1'$

$$\text{可得 } p_1' = \frac{V_1}{V_1'} p_1 = \frac{(24-16)S}{24S} \times 75 = 25 \text{ cmHg}$$

所以右管内气体压强为  $p_2' = (25-x) \text{ cmHg}$

再对右管内被封气体, 根据玻意耳定律得:

$$75(20-16)S_{CD} = (25-x)(20-x)S_{CD}$$

整理得:  $x^2 - 45x + 200 = 0$

解得:  $x = 5 \text{ cm}$  或  $40 \text{ cm}$  (不合题意舍去)

在根据以上假设列的方程中, 有满足题设的实数解, 故所做假设成立, 即左管内水银先抽干, 且此时右管内剩余水银柱高度为  $5 \text{ cm}$ .

**例 14** 如图 2—10—13 所示, 正四面体 ABCD 各面均为导体, 但又彼此绝缘, 已知带电后四个面的电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , 求四面体中心点的电势.

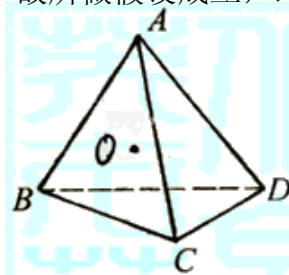


图 2-10-13

**解析** 保持四面体不动, 假设按照一定方式调换四个面上的电荷, 即假设四个面的电荷绕中心 O 转动, 结果会得到正四面体的四个面的若干带电模式, 由于转动时并未改变各面电荷之间的相对位置, 所以各种模式在中心 O 点的电势  $\varphi_0$  都相同。现假设将四种模式叠加, 则 O 点电势应为  $4\varphi_0$ 。另一方面, 四处模式叠加后, 正四面体的每个面的电势皆为  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ , 这时正四面体构成一近似封闭的等势面, 它所包围的空间 (其中无电荷) 就近似为一等势体, 因此 O 点的电势为  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ 。

所以上分析得出:  $4\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$

$$\text{所以中心点的电势 } \varphi_0 = \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

**例 15** 有一半径为 R 的不导电的半球薄壳, 均匀带电, 倒扣在 xOy 平面上, 如图 2—10—14 所示, 图中 O 为球心, ABCD 为球壳边缘, AOC 为直径。有一电量为 q 的点电荷位于 OC 上的 E 点, OE=r。已知将此点电荷由 E 点缓慢移至球壳顶点 T 时, 外力需要做功 W (W>0), 不计重力影响。

(1) 试求将此点电荷由 E 点缓慢移至 A 点外力需做功的正负、大小, 并说明理由;

(2) P 为球心正下方的一点, OP=R。试求将此点电荷由 E 点缓慢移至 P 点, 外力需做功的正负及大小, 并说明理由。

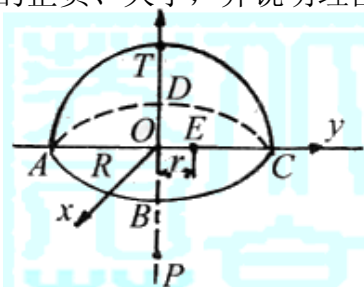


图 2-10-14

**解析** (1) 假设取另一完全相同的带电半球壳扣在题给的半球壳下面, 构成一个完整的地均匀带电球壳, 则球壳及其内部各点电势都相等, 令  $U$  表示此电势。根据对称性可知, 上下两个半球壳分别在圆面  $ABCD$  上各点引起的电势是相等的, 再由电势叠加原理可知, 当只有上半球壳存在时, 圆面  $ABCD$  上各点的电势都应为完整球壳内电势的一半, 即  $U/2$ , 所以将电荷由  $E$  点移至  $A$  点的过程中, 外力做功为零。

(2) 对完整球壳,  $E$  点与  $T$  点等势, 电势差为零。由电势叠加原理可知, 若上半球壳在  $T$ 、 $E$  两点形成的电势差为  $(U_T - U_E)$ , 则下半球壳在  $T$ 、 $E$  两点形成的电势差必为  $-(U_T - U_E)$ 。已知  $W = q(U_T - U_E)$ , 所以在下半球壳产生的电场中,  $q$  由  $E$  到  $T$  外力做功必为  $-W$ 。由对称性可知, 在上半球壳产生的电场中,  $q$  由  $E$  到  $P$  外力的功必为  $-W$ 。

**例 16** 无穷方格电阻丝网络如图 2—10—15 所示, 其中每一小段电阻丝的电阻均为  $r$ , 试求相邻两个格点  $A$ 、 $B$  间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

**解析** 假设从  $A$  点注入电流  $I$ , 根据对称性, 追踪一条支路, 再根据欧姆定律可求出  $R_{AB}$ 。

假设电流  $I$  从  $A$  点流入, 不从  $B$  点流出,  $I$  将分流到无穷远处。据对称性, 其中有  $\frac{I}{4}$  流经  $AB$  段。

再假设电流  $I$  不是从  $A$  点流入, 而是从无穷远处流向  $B$  点, 从  $B$  点流出, 据对称性, 其中也有  $I/4$  流经  $AB$  段。现在假设电流  $I$  从  $A$  点流入, 经过足够长的时间达稳定后, 从  $B$  点流出的电流也应为  $I$ , 经  $AB$  段的电流为两个  $I/4$  的叠加, 如图 2—10—15—甲所示, 即为  $\frac{I}{2}$ , 于是有  $U_{AB} = (\frac{I}{2})r$ 。所以  $AB$  间的等效电阻  $R_{AB} = U_{AB}/I = r/2$ 。

**例 17** 如图 2—10—16 所示, 在半径为  $r$  的圆柱形区域内, 充满与圆柱轴线平行的匀强磁场, 一长为  $\sqrt{3}r$  的金属棒  $MN$  与磁场方向垂直地放在磁场区域内, 棒的端点  $M$ 、 $N$  恰在磁场边界的圆周上, 已知磁感应强度  $B$  随时间均匀变化, 其变化率为  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ , 求  $MN$  中产生的电动势为多大?

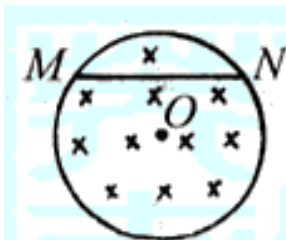


图 2-10-16



2-10-16-甲

**解析** 由题可知,  $MN$  上有感应电动势, 这种感应电动势无法直接计算。但如果注意

MN 的长为  $\sqrt{3}r$ , 结合题意, 可虚构两根与 NM 完全相同的金属棒与 MN 棒一起刚好构成圆的内接正三角形, 如图 2—10—16—甲所示. 由法拉第电磁感应定律, 这一回路中的感应电动势  $\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot S = \frac{3}{4}\sqrt{3}kr^2$ . MN 上的感应电动势是整个回路中电动势的 1/3, 所以

$$\varepsilon_{MN} = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}kr^2$$

## 针对训练

1. 两个物体 A 和 B, 质量分别为 M 和 m, 用跨过定滑轮的轻绳相连, A 静止于水平地面上, 如图 2—10—17 所示, 不计摩擦, A 对绳的作用力的大小与地面对 A 的作用力的大小分别为 ( )

A.  $mg, (M-m)g$     B.  $mg, Mg$   
C.  $(M-m)g, Mg$     D.  $(M+m)g, (M-m)g$

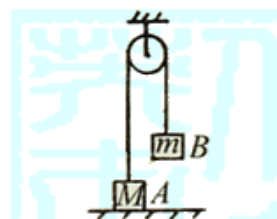


图 2-10-17

2. 如 2—10—18 所示, A、B 是静止在水平地面上完全相同的两块长木板, A 的左端和 B 的右端相接触, 两板的质量皆为  $M=2.0\text{kg}$ , 长度皆为  $L=1.0\text{m}$ , C 是质量为  $m=1.0\text{kg}$  的小物块. 现给它一个初速度  $v_0=2.0\text{m/s}$ , 使它从板 B 的左端向右滑动, 已知地面是光滑的, 而 C 与板 A、B 之间的动摩擦因数皆为  $\mu=0.10$ , 求最后 A、B、C 各以多大的速度做匀速运动. 取重力加速度  $g=10\text{m/s}^2$ .

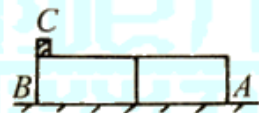


图 2-10-18

3. 质量为 m 的物体 A 置于质量为 M、倾角为  $\theta$  的斜面体 B 上, A、B 之间光滑接触, B 的底面与水平地面也是光滑接触. 设开始时 A 与 B 均静止, 而后 A 以某初速度沿 B 的斜面向上运动, 如图 2—10—19 所示, 试问 A 在到达斜面顶部前是否会离开斜面? 为什么? 讨论中不必考虑 B 向前倾倒的可能性.

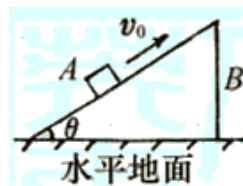


图 2-10-19

4. 半径为  $r$ 、质量为  $m$  的三个相同的球放在水平桌面上, 两两互相接触. 用一个高为  $1.5r$  的圆柱形圆筒 (上下均无底) 将此三球套在筒内, 圆筒的内径取适当值, 使得各球间以及球与筒壁之间均保持无形变接触. 现取一质量亦为  $m$ 、半径为  $R$  的第四个球, 放在三球的上方正中. 设四个球的表面、圆筒的内壁表现均由相同物质构成, 其相互之间的最大静摩擦系数为  $\mu=3/\sqrt{15}$  (约等于 0.775), 问  $R$  取何值时, 用手缓慢竖直向上提起圆筒即能将四个球一起提起来?

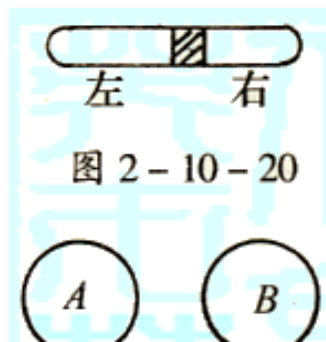


图 2-10-20

5. 如图 12—10—20 所示的一段封闭、水平放置

的粗细均匀的玻璃管中，有水银柱将气体隔成了体积不同的左右两部分，初温  $T_{左} > T_{右}$ ，当两部分气体升高相同的温度时，判断水银柱如何移动。（提示：假设用一装置将水银柱固定住，两边气体作等容变化。）

6. 如图 2—10—21 所示，A、B 两容器容积相等，用粗细均匀的细玻璃管相连，容器内装有不同气体，细管中央有一段水银且保持平衡，此时 A 中气体的温度为  $0^{\circ}\text{C}$ ，B 中气体温度为  $20^{\circ}\text{C}$ ，若将它们的温度都降低  $10^{\circ}\text{C}$ ，则水银柱将

- A. 向 A 移动      B. 向 B 移动  
C. 不动            D. 不能确定

( )

7. 如图 2—10—22 所示，半径为  $R$  的大球  $O$  被内切地挖去半径为  $R/2$  的小球  $O'$ ，大球余下的部分均匀带电量为  $Q$ ，试求距大球球心  $O$  点  $r$  处 ( $r > R$ )  $P$  点的场强。已知  $OP$  的连线经过小球球心。

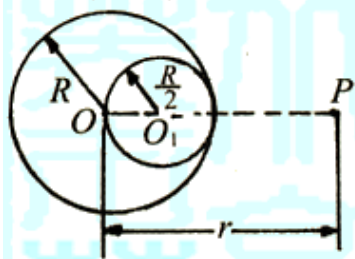


图 2-10-22

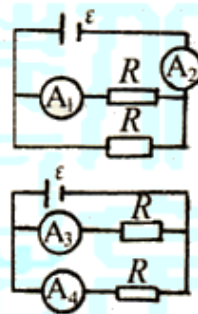


图 2-10-23

8. 如图 2—10—23 所示，两种电路中电源相同，各电阻器阻值相等，各电流表的内阻相等且不可忽略，电流表  $A_1$ ， $A_2$ ， $A_3$ ，和  $A_4$  读出的电流值分别为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  和  $I_4$ 。下列关系式中正确的是

- A.  $I_1 = I_3$       B.  $I_1 < I_4$       C.  $I_2 = 2I_1$       D.  $I_2 < I_3 + I_4$

9. 如图 2—10—24 所示，匀强磁场的磁感应强度为  $B$ ，方向垂直纸面向里，质量为  $m$ 、电量为  $+q$  的微粒在磁场中由静止开始下落，空气阻力不计。求微粒下落的最大高度和最大速度。

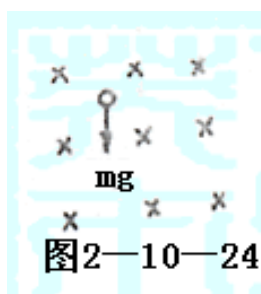


图 2-10-24

10. 两根相距  $d = 0.2\text{m}$  的平行光滑金属长轨道与水平方向成  $30^{\circ}$  角固定，匀强磁场的磁感应强度  $B = 0.2\text{T}$ ，方向垂直两导轨组成的平面。两根金属棒  $ab$ 、 $cd$  互相平行且始终与导轨垂直地放在导轨上，它们的质量  $m_1 = 0.1\text{kg}$ ， $m_2 = 0.02\text{kg}$ ，两棒电阻均为  $0.02\Omega$ ，导轨的电阻不计。如图 2—10—25 所示， $ab$  棒在平行于导轨平面斜向上的外力作用下，以  $v = 1.5\text{m/s}$  的速度沿斜面匀速向上运动，求在此过程中金属棒  $cd$  运动的最大速度。

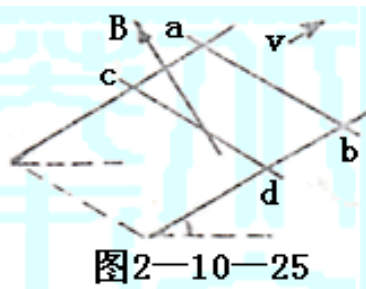


图 2-10-25



# 十一、图象法

## 方法简介

图象法是根据题意把抽象复杂的物理过程有针对性地表示成物理图象，将物理量间的代数关系转变为几何关系，运用图象直观、形象、简明的特点，来分析解决物理问题，由此达到化难为易，化繁为简的目的，图象法在处理某些运动问题，变力做功问题时是一种非常有效的方法。

## 赛题精讲

**例 1:** 一火车沿直线轨道从静止发出由 A 地驶向 B 地，并停止在 B 地。A、B 两地相距  $s$ ，火车做加速运动时，其加速度最大为  $a_1$ ，做减速运动时，其加速度的绝对值最大为  $a_2$ ，由此可以判断出该火车由 A 到 B 所需的最短时间为\_\_\_\_\_。

**解析:** 整个过程中火车先做匀加速运动，后做匀减速运动，加速度最大时，所用时间最短，分段运动可用图象法来解。

根据题意作  $v-t$  图，如图 11—1 所示。

$$\text{由图可得: } a_1 = \frac{v}{t_1} \quad \text{①}$$

$$a_2 = \frac{v}{t_2} \quad \text{②}$$

$$s = \frac{1}{2}v(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}vt \quad \text{③}$$

$$\text{由①、②、③解得: } t = \sqrt{\frac{2s(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}}$$

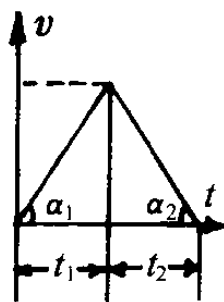


图 11—1

**例 2:** 两辆完全相同的汽车，沿水平直路一前一后匀速行驶，速度为  $v_0$ ，若前车突然以恒定的加速度刹车，在它刚停住时，后车以前车刹车时的加速度开始刹车。已知前车在刹车过程中所行的距离为  $s$ ，若要保证两辆车在上述情况中不相碰，则两车在做匀速行驶时保持的距离至少为 ( )

- A、 $s$       B、 $2s$       C、 $3s$       D、 $4s$

**解析:** 物体做直线运动时，其位移可用速度—时间图象中的面积来表示，故可用图象法做。

作两物体运动的  $v-t$  图象如图 11—2 所示，前车发生的位移  $s$  为三角形  $v_0Ot$  的面积，由于前后两车的刹车加速度相同，根据对称性，后车发生的位移为梯形的面积  $S' = 3S$ ，两车的位移之差应为不相碰时，两车匀速行驶时保持的最小车距  $2s$ 。

所以应选 B。

**例 3:** 一只老鼠从老鼠洞沿直线爬出，已知爬出速度  $v$  的大小与距老鼠洞中心的距离  $s$  成反比，当老鼠到达距老鼠洞中心距离  $s_1 = 1\text{m}$  的 A 点时，速度大小为  $v_1 = 20\text{cm/s}$ ，问

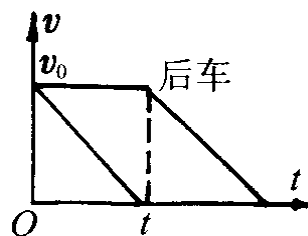


图 11—2



当老鼠到达距老鼠洞中心  $s_2 = 2\text{m}$  的 B 点时, 其速度大小  $v_2 = ?$  老鼠从 A 点到达 B 点所用的时间  $t = ?$

**解析:** 因为老鼠从老鼠洞沿直线爬出, 已知爬出的速度与通过的距离成反比, 则不能通过匀速运动、匀变速运动公式直接求解, 但可以通过图象法求解, 因为在  $\frac{1}{v}$ — $s$  图象中, 所围面积即为所求的时间。以距离  $s$  为横轴,  $\frac{1}{v}$  为纵轴建立直角坐标系, 则  $s$  与  $\frac{1}{v}$  成正比, 作  $\frac{1}{v}$ — $s$  图象如图 11—3 所示, 由图

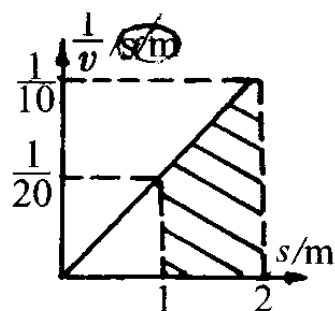


图 11—3

可得  $s = 2\text{m}$  时, 老鼠的速度为  $10\text{cm/s}$ 。在  $1\text{m}$  到  $2\text{m}$  之间图象与横轴包围的面积即为所求的时间, 所以老鼠从 A 到 B 爬行的时间为:  $t = (\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.1}) \times \frac{1}{2} = 7.5\text{s}$ 。

**例 4:** 在一汽缸的活塞下面封闭有  $\mu$  摩尔理想气, 由于受到骤然加热, 气体迅速膨胀, 且膨胀过程中其热力学温度与其体积的平方成正比, 即  $T = KV^2$ 。在其体积由  $V_1$  膨胀至  $V_2$  的过程中, 气体从外界吸收的热量为  $Q_1$ , 试求此过程中气体的内能增加了多少?

**解析:** 求此过程中气体的内能增加了多少, 要用热力学第一定律, 由已知条件可知, 关键是要求出气体对外做了多少功, 而功可用  $p$ — $V$  图象中所围的面积来计算。

以缸内气体为研究对象, 根据克拉珀龙方程:

$$pV = \mu R t \quad (1)$$

$$\text{又由已知条件有: } T = KV^2 \quad (2)$$

$$\text{①、②两式可得: } p = \mu R K V$$

可见气体膨胀时, 其压强  $p$  与体积  $V$  成正比例。

因此作  $p$ — $V$  图, 如图 11—4 所示, 图中阴影区的面积表示气体在此过程中, 对外所做的功  $W$ 。

$$W = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \mu R K (V_2^2 - V_1^2)$$

再由热力学第一定律, 可知此过程中气体内能的增加量为:

$$\Delta E = Q_1 - W = Q_1 - \frac{1}{2} \mu R K (V_2^2 - V_1^2)$$

**例 5:** 如图 11—5 所示, 在一个开有小孔的原来不带电的导体球壳中心 O 点, 有一个点电荷  $Q$ , 球壳的内外表面半径分别为  $a$  和  $b$ , 欲将电荷  $Q$  通过小孔缓慢地从 O 点移到无穷远处, 应当做功多少?

**解析:** 球内、外表面上的感应电荷的电量随着放在球心的电荷电量的改变而改变, 感应电荷在球心处产生的电势  $U = KQ_{\text{感}} (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$ , 也与感应电荷的电量  $Q_{\text{感}}$  成正比, 利用  $U$ — $Q_{\text{感}}$  的图象也可以求出外力做的功。

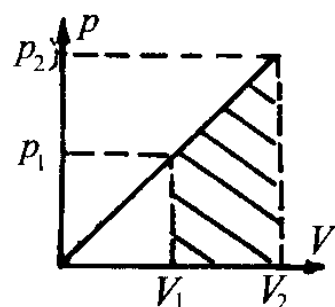


图 11—4

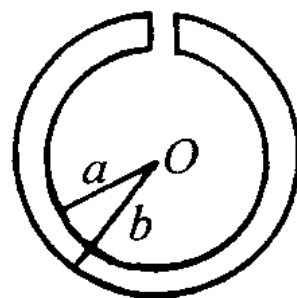


图 11—5

感应电荷在球心 O 处产生的电势为  $U_0$ ，则：

$$U_0 = KQ_{\text{感}} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

作出  $U-Q_{\text{感}}$  的图象如图 11—5 甲所示，假设电量  $Q$  是一份一份地从无穷远处移到球心，而球内外表面上的感应电荷  $Q_{\text{感}}$  随球心处的电荷增加而增加，在此过程中移动电荷所做的功就应等于  $U_1-Q_{\text{感}}$  图象中阴影部分所示的三角形的面积，则有：

$$W = \frac{1}{2} Q_{\text{感}} U$$

$$\text{当 } Q_{\text{感}} = Q \text{ 时, } U = U_0 = KQ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{那么移走 } Q \text{ 时所做的功应为 } \frac{KQ^2}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \text{ 所以: } W = \frac{KQ^2}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

**例 6:** 电源电动势为  $\varepsilon$ ，内电阻为  $r$ ，试求其外电阻为何值时，电源的输出功率最大？

**解析:** 根据全电路欧姆定律得  $\varepsilon = U + Ir$ ，由此可知当  $\varepsilon$ 、 $r$  不变时， $U$  随  $I$  线性变化，作  $U-I$  图，图中所围面积为功率。

设电源的输出电流为  $I$ ，路端电压为  $U$ ，由于  $U = \varepsilon - Ir$ ，故作  $U-I$  图如图 11—6 所示，以  $AB$  线上任意一点和坐标原点为相对顶点所围成的矩形的面积为：

$$S = IU$$

显然  $S$  表示此时电源对应的输出功率，要使电源的输出功率最大，即要此矩形的面积最大，由几何知识得，当一个顶点位于  $AB$  线段中点  $C$  处的矩形面积最大，从图中可得：

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{①}$$

$$\text{根据欧姆定律有: } U = \frac{\varepsilon}{R+r} R \quad \text{②}$$

由①、②解得： $R = r$

即当外电阻  $R=r$  时，电源的输出功率最大，其最大值为： $\frac{\varepsilon^2}{4r}$

**例 7:** 在 11—7 图中，安培表的读数为  $I_1 = 20\text{mA}$ 。如果电池  $\varepsilon_x$  反向联结，电流增加到  $I_2 = 35\text{mA}$ 。如果电灯发生短路时，电路中的电流  $I$  等于多少？灯泡的伏安特性曲线如图 11—7 甲所示。

**解析:** 题目中给出  $\varepsilon_1$  的数值为  $9\text{V}$ ， $\varepsilon_x$  的大小不确定。当  $\varepsilon_x$  从正向变为反向联结时，回路的总电动势增大，在  $\varepsilon_x < \varepsilon_1$  和  $\varepsilon_x > \varepsilon_1$  的两种情况下， $I_2$  都有可能增加。所以要分两种情况讨论。

由灯泡的伏安特性曲线可知：当  $I_1 =$

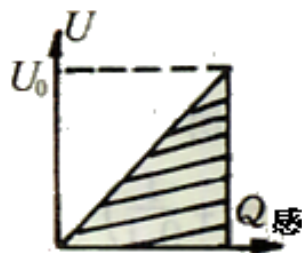


图 11—5 甲

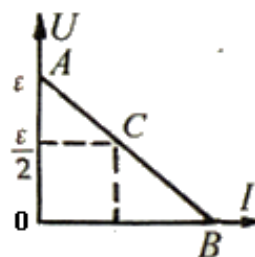


图 11—6

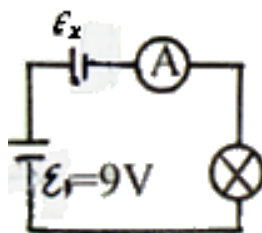


图 11—7

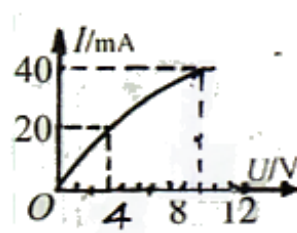


图 11—7 甲

20mA 时, 有  $U_{灯1} = 3V$ ,  $I_2 = 35mA$  时,  $U_{灯2} = 9V$ 。

设两个电源的内阻与电流表内阻总和为  $R_{内}$ , 根据回路电压方程有:

$$(1) \text{ 当 } \varepsilon_1 > \varepsilon_x \text{ 时, 有: } \varepsilon_1 - \varepsilon_x - U_{灯1} = I_1 R_{内} \quad (1)$$

$$\varepsilon_x \text{ 反向时, 有: } \varepsilon_1 + \varepsilon_x - U_{灯2} = I_2 R_{内} \quad (2)$$

$$\text{由 } (1)+(2) \text{ 得: } 2\varepsilon_1 - U_{灯1} - U_{灯2} = (I_1 + I_2)R_{内}$$

$$\text{所以: } R_{内} = \frac{6}{0.055} \Omega$$

$$\text{将 } (3) \text{ 式代入 } (1) \text{ 式得: } \varepsilon_x = 3.8V \quad (3)$$

短路瞬间, 可视电灯两端电压为零, 所以原电路中的电流:

$$I'_1 = 0.048A$$

$$(2) \text{ 当 } \varepsilon_1 < \varepsilon_x \text{ 时, 有: } \varepsilon_x - \varepsilon_1 - U_{灯1} = I_1 R_{内} \quad (4)$$

$$\varepsilon_x \text{ 反向时, 有: } \varepsilon_x + \varepsilon_1 - U_{灯2} = I_2 R_{内} \quad (5)$$

$$(5)-(4) \text{ 得: } 2\varepsilon_1 - 2U_{灯2} + U_{灯1} = (I_2 - I_1)R_{内}$$

$$\text{所以: } R_{内} = \frac{12000}{15} \Omega \quad (6)$$

$$\text{将 } (6) \text{ 式代入 } (4) \text{ 式得: } \varepsilon_x = 28V$$

$$\text{当回路短路时, 电流为: } I'_2 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_1}{R_{内}} = 0.024A$$

**例 8:** 如图 11—8 所示, 电源  $\varepsilon = 12.0V$ , 内电阻  $r = 0.6\Omega$ , 滑动变阻器与定值电阻  $R_0$  ( $R_0 = 2.4\Omega$ ) 串联, 当滑动变阻器的滑片 P 滑到适当位置时, 滑动变阻器的发热功率为  $9.0W$ , 求这时滑动变阻器 aP 部分的阻值  $R_x$ 。

**解析:** 由闭合电路欧姆定律作 aP 两端的  $U_{ap}-I$  图象, 因图上任意一点的  $U_{ap}$  与 I 所对应的矩形面积是外电路电阻  $R_x$  的输出功率, 从而由已知  $R_x$  的功率求出对应的  $R_x$  值。

根据闭合电路欧姆定律  $U = \varepsilon - Ir$  得:

$$U_{ap} = 12 - (0.6 + 2.4)I = 12 - 3I$$

作  $U_{ap}-I$  图象如图 11—8 甲所示,

由图可分析找到滑动变阻器的发热功率为  $9W$  的 A 点和 B 点, 所以  $R_x$  有两个值:

$$R_{x1} = 90\Omega, R_{x2} = 90\Omega$$

**例 9:** 如图 11—9 所示, 一宽  $40cm$  的匀强磁场区域, 磁场方向垂直纸面向里。一边长为  $20cm$  的正方形导线框位于纸面内, 以垂直于磁场边界的恒定速度  $v = 20cm/s$  通过磁场区域, 在运动过程中, 线框有一边始终与磁场区域的边界平行。取它刚进入磁场的时刻  $t = 0$ , 在下列图线中, 正确反映感应电流随时间变化规律的是图 11—9 甲中的哪一个 ( )

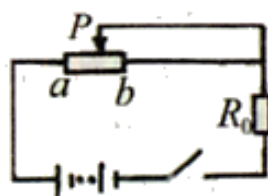


图 11—8

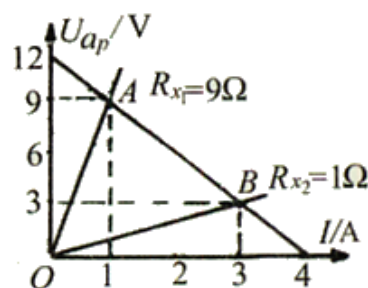


图 11—8 甲

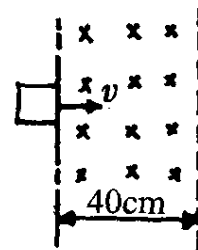


图 11—9

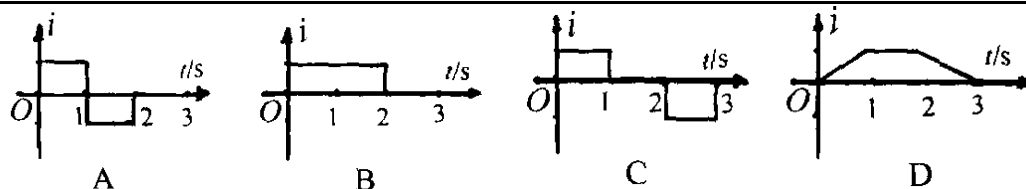


图 11—9 甲

**解析：**可将切割磁感应线的导体等效为电源按闭合电路来考虑，也可以直接用法拉第电磁感应定律按闭合电路来考虑。

半导线框部分进入磁场时，有恒定的感应电流，当整体全部进入磁场时，无感应电流，当导线框部分离开磁场时，又能产生相反方向的感应电流。所以应选 C。

**例 10：**LC 振荡回路中电容器两端的电压  $U$  随时间  $t$  变化的关系如图 11—10 所示，则 ( )

- A、在时刻  $t_1$ ，电路中的电流最大
- B、在时刻  $t_2$ ，电路中磁场能最大
- C、从时刻  $t_2$  至  $t_3$ ，电路中的电场能不断增大
- D、从时刻  $t_3$  至  $t_4$ ，电容的带电量不断增大

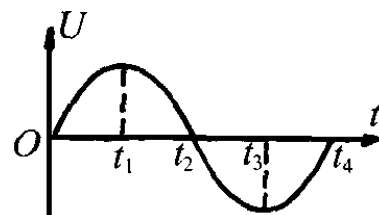


图 11—10

**解析：**在电磁振荡中，电路中的电流、磁场能、电容器的带电量、电场能都随时间做周期性的变化，但步调不同。

电流和磁场能总是同步调变化，电压、电量和电场能也是同步调变化的。但电流和电容器的带电量步调不同。电流为零时电量最大，故 BC 正确。

### 针对训练

1. 汽车甲沿着平直的公路以速度  $v_0$  做匀速直线运动。当它路过某处的同时，该处有一辆汽车乙开始做初速为零的匀加速运动去追赶甲车。根据上述的已知条件 ( )

- A、可求出乙车追上甲车时乙车的速度
- B、可求出乙车追上甲车时乙车所走的路程
- C、可求出乙车从开始起动到追上甲车时所用的时间
- D、不能求出上述三者中任何一个

2. 一物体做匀变速直线运动，某时刻速度的大小为 4 米/秒，1 秒钟后速度的大小变为 10 米/秒。在这 1 秒钟内该物体的 ( )

- A、位移的大小可能小于 4 米
- B、位移的大小可能大于 10 米
- C、加速度的大小可能小于 4 米/秒<sup>2</sup>
- D、加速度的大小可能大于 10 米/秒<sup>2</sup>

3. 在有空气阻力的情况下，以初速  $v_1$  竖直上抛一个物体，经过时间  $t_1$  到达最高点。又经过时间  $t_2$ ，物体由最高点落回到抛出点，这时物体的速度为  $v_2$ ，则 ( )

- A、 $v_2 = v_1$ ， $t_2 = t_1$
- B、 $v_2 > v_1$ ， $t_2 > t_1$
- C、 $v_2 < v_1$ ， $t_2 > t_1$
- D、 $v_2 < v_1$ ， $t_2 < t_1$

4. 一质点沿  $x$  轴做直线运动，其中  $v$  随时间  $t$  的变化如图 11—11 (a) 所示，设  $t=0$  时，质点位于坐标原点  $O$  处。试根据  $v-t$  图分别在 11—11 (b) 及图 11—11 (c) 中尽可能准确地画出 ( )

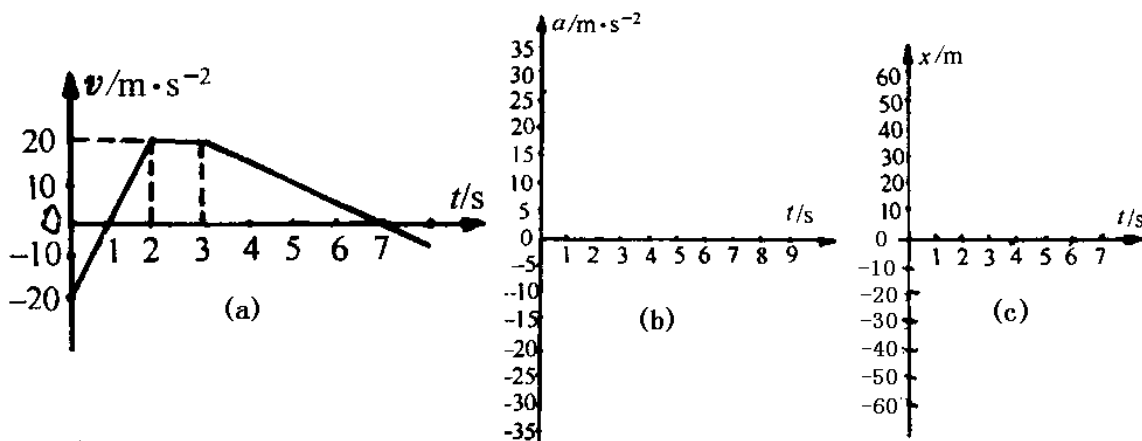


图 11—11

(1) 表示质点运动的加速度  $a$  随时间  $t$  变化关系的  $a-t$  图;

(2) 表示质点运动的位移  $x$  随时间  $t$  变化关系的  $x-t$  图。

5. 物体从某一高度由静止开始滑下, 第一次经光滑斜面滑至底端时间为  $t_1$ , 第二次经过光滑曲面  $ACD$  滑至底端时间为  $t_2$ , 如图 11—12 所示, 设两次通过的路程相等, 试比较  $t_1$  与  $t_2$  的大小关系。

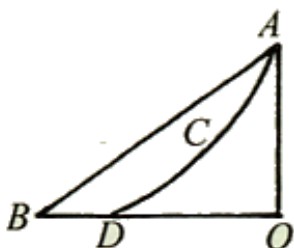


图 11—12

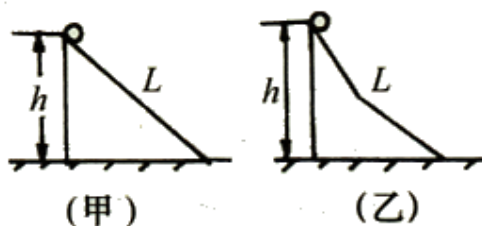


图 11—13

6. 两光滑斜面高度相等, 乙斜面的总长度和甲斜面的总长度相等, 只是由两部分接成, 如图 11—13 所示。将两个相同的小球从斜面的顶端同时释放, 不计在接头处的能量损失, 问哪个先滑到底端。

7.  $A$ 、 $B$  两点相距  $s$ , 将  $s$  平分为  $n$  等份。今让一物体 (可视为质点) 从  $A$  点由静止开始向  $B$  做加速运动, 但每过一个等分点, 加速度都增加  $\frac{a}{n}$ , 试求该物体到达  $B$  点的速度。

8. 质量  $m = 1\text{kg}$  的物体  $A$  开始时静止在光滑水平地面上, 在第 1、3、5、... 奇数秒内, 给  $A$  施加同向的  $2\text{N}$  的水平推力  $F$ , 在 2、4、6、... 偶数秒内, 不给施加力的作用, 问经多少时间,  $A$  可完成  $s = 100\text{m}$  的位移。

9. 沿光滑水平面在同一条直线上运动的  $A$ 、 $B$  两物体相碰后共同运动, 该过程的位移图象如图 11—14 所示。可以得出  $A$ 、 $B$  的质量比为\_\_\_\_\_。

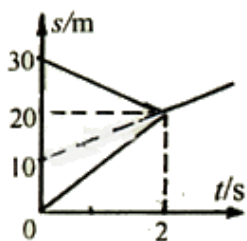


图 11—14

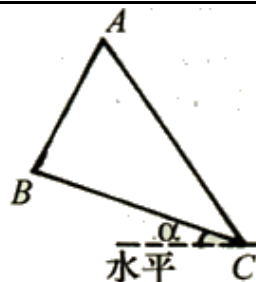


图 11—15

10. 一均匀的直角三角形木板 ABC，可绕垂直纸面通过 C 点的水平转动，如图 11—15 所示。现用一始终沿直角边 AB 的、作用于 A 点的力 F 使 BC 边缓慢地由水平位置转至竖直位置，在此过程中，力 F 的大小随角  $\alpha$  变化的图线是图 11—15 甲中的 ( )

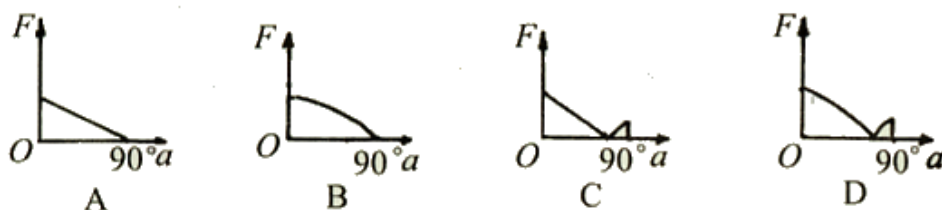


图 11—15 甲

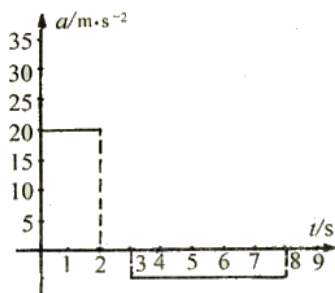
11. 火车重为 G，恒定牵引力为 F，阻力为 f。当它从静止出发，由车站沿直线驶过 s 距离到另一站停止，如果途中不用刹车。

- (1) 求车行驶的最少时间是多少？
- (2) 途中最大速度是多少？

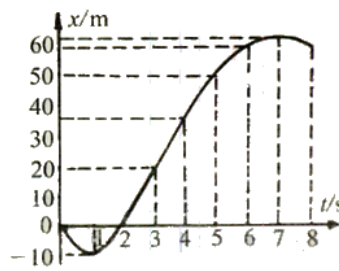
### 参考答案

- 1、A
- 2、AD
- 3、C
- 4、如图所示：
- 5、 $t_1 > t_2$
- 6、乙图中小球先到底端
- 7、 $v_B = \sqrt{2a \frac{s}{n} (n + \frac{n-1}{2})}$   
 $= \sqrt{as(3 - \frac{1}{n})}$
- 8、13.64s
- 9、2 : 1
- 10、D

$$11、t = \sqrt{\frac{2sFG}{g(F-f)f}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{2gfs(F-f)}{FG}}$$



第4题 (b)



第4题 (c)

## 十二、类比法

### 方法简介

类比法是根据两个研究对象或两个系统在某些属性上类似而推出其他属性也类似的思维方法，是一种由个别到个别的推理形式。其结论必须由实验来检验，类比对象间共有的属性越多，则类比结论的可靠性越大。

在研究物理问题时，经常会发现某些不同问题在一定范围内具有形式上的相似性，其中包括数学表达式上的相似性和物理图像上的相似性。类比法就是在于发现和探索这一相似性，从而利用已知系统的物理规律去寻找未知系统的物理规律。

### 赛题精讲

**例 1:** 图 12—1 中 AOB 是一内表面光滑的楔形槽，固定在水平桌面（图中纸面）上，夹角  $\alpha = 1^\circ$ （为了能看清楚，图中画的是夸大的了）。现将一质点在 BOA 面内从 A 处以速度  $v = 5\text{m/s}$  射出，其方向与 AO 间的夹角  $\theta = 60^\circ$ ， $OA = 10\text{m}$ 。设质点与桌面间的摩擦可忽略不计，质点与 OB 面及 OA 面的碰撞都是弹性碰撞，且每次碰撞时间极短，可忽略不计，试求：

(1) 经过几次碰撞质点又回到 A 处与 OA 相碰？（计算次数时包括在 A 处的碰撞）

(2) 共用多少时间？

(3) 在这过程中，质点离 O 点的最短距离是多少？

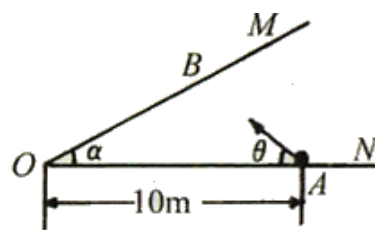


图12-1

**解析:** 由于此质点弹性碰撞时的运动轨迹所满足的规律和光的反射定律相同，所以可用类比法通过几何光学的规律进行求解。即可用光在平面镜上反射时，物像关于镜面对称的规律和光路是可逆的规律求解。

(1) 第一次，第二次碰撞如图 12—1—甲所示，由三角形的外角等于不相邻的一两个内角和可知  $\angle MBA = 60^\circ + 1^\circ = 61^\circ$ ，故第一次碰撞的入射角为  $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$ 。

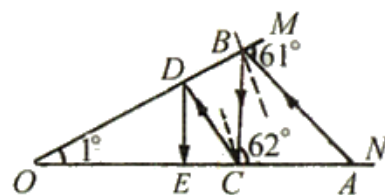


图12-1-甲

第二次碰撞， $\angle BCA = 61^\circ + 1^\circ = 62^\circ$ ，故第二次碰撞的入射角为  $90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$ 。

因此，每碰一次，入射角要减少  $1^\circ$ ，即入射角为  $29^\circ$ 、 $28^\circ$ 、 $\dots$ 、 $0^\circ$ ，当入射角为  $0^\circ$  时，质点碰后沿原路返回。包括最后在 A 处的碰撞在内，往返总共 60 次碰撞。

(2) 如图 12—1—乙所示，从 O 依次作出与 OB 边成  $1^\circ$ 、 $2^\circ$ 、 $3^\circ$ 、 $\dots$  的射线，从对称规律可推知，在 AB 的延长线上， $BC'$ 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 $\dots$  分别和 BC、CD、DE、 $\dots$  相等，它们和各射线的交角即为各次碰撞的入射角与直角之和。碰撞入射角为  $0^\circ$  时，即交角为  $90^\circ$  时开始返回。故质点运动的总路程

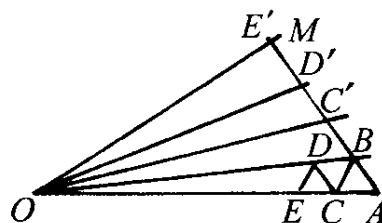


图 12—1—乙

为一锐角为  $60^\circ$  的  $\text{Rt}\triangle\text{AMO}$  的较小直角边  $\text{AM}$  的二倍。

$$\text{即: } s = 2\text{AM} = 2\text{AO} \cdot \cos 60^\circ = 10\text{m}$$

$$\text{所用总时间: } t = \frac{s}{v} = \frac{10}{5} = 2\text{s}$$

(3) 碰撞过程中离  $O$  的最近距离为另一直角边长:  $\text{OM} = \text{AO} \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}\text{m}$

(此题也可以用递推法求解, 读者可自己试解。)

**例 2:** 有一个很大的湖, 岸边(可视湖岸为直线)停放着一艘小船, 缆绳突然断开, 小船被风刮跑, 其方向与湖岸成  $15^\circ$  角, 速度为  $2.5\text{km/h}$ 。同时岸上一人从停放点起追赶小船, 已知他在岸上跑的速度为  $4.0\text{km/h}$ , 在水中游的速度为  $2.0\text{km/h}$ , 问此人能否追及小船?

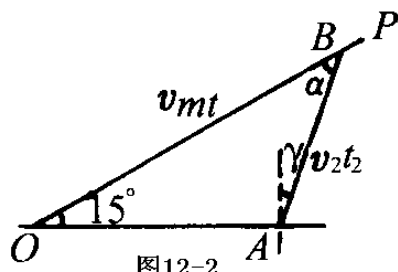
**解析:** 费马原理指出: 光总是沿着光程为极小值的路径传播。据此可以证明, 光在平面分界面上的折射是以时间为极小值的路程传播。本题求最短时间问题, 可类比类在平面分界面上的折射情况, 这样就把一个运动问题通过类比可转化为光的折射问题求解。

如图 12—2 所示, 船沿  $OP$  方向被刮跑, 设人从  $O$  点出发先沿湖岸跑, 在  $A$  点入水游到  $OP$  的  $B$  点, 如果符合光的折射定律, 则所用时间最短。根据折射定律:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \gamma} = \frac{4.0}{2.0}, \text{ 解得: } \gamma = 30^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 15^\circ - (90^\circ + \gamma) = 45^\circ$$

在这最短时间内, 若船还未到达  $B$  点, 则人能追上小船, 若船已经通过了  $B$  点, 则人不能追上小船, 所以船刚好能到达  $B$  点所对应的船速就是小船能被追及的最大船速  $v_m$ 。



$$\text{根据正弦定理: } \frac{v_m t}{\sin 120^\circ} = \frac{v_1 t_1}{\sin 45^\circ} = \frac{v_2 t_2}{\sin 15^\circ} \quad (1)$$

$$\text{又: } t = t_1 + t_2$$

$$\text{由以上两式可解得: } v_m = \frac{v_1 v_2 \sin 120^\circ}{v_1 \sin 15^\circ + v_2 \sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}\text{ km/h} \quad (2)$$

此即小船能被人追上的最大速度, 而小船实际速度只有  $2.5\text{km/h}$ , 小于  $2\sqrt{2}\text{ km/h}$ , 所以人能追上小船。

**例 3:** 一只蚂蚁洞沿直线爬出, 已知爬出速度  $v$  的大小与距蚂蚁洞中心的距离  $L$  成反比, 当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心距离  $L_1 = 1\text{m}$  的  $A$  点时, 速度大小为  $v_1 = 20\text{cm/s}$ , 问当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心  $L_2 = 2\text{m}$  的  $B$  点时, 其速度大小  $v_2 = ?$  蚂蚁从  $A$  点到达  $B$  点所用的时间  $t = ?$

**解析:** 虽然蚂蚁的运动我们不能直接用已学过的运动学公式求解, 但只要能找到描述蚂蚁运动的公式和学过的公式的形式相同, 便可借助学过的公式形式使问题得以解决。

由已知得: 蚂蚁在距离巢中心  $\Delta$  处的速度为  $v = k \frac{1}{L}$ , 代入已知得:  $k = vL = 0.2 \times 1 =$

$0.2\text{m}^2/\text{s}$ , 所以当  $L_2 = 2\text{m}$  时, 其速度  $v_2 = \frac{k}{L_2} = 0.1\text{m/s}$



由速度的定义得蚂蚁从  $L$  到  $L + \Delta L$  所需时间为  $\Delta t$

$$\text{所以: } \Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{1}{k} \cdot \Delta L \cdot L \quad \text{①}$$

类比初速  $v_0 = 0$  的匀加速直线运动的两个基本公式  $\begin{cases} \Delta s = v\Delta t \\ v = at \end{cases}$

在  $t$  到  $\Delta t$  时刻所经位移  $\Delta s$  为:  $\Delta s = a \cdot \Delta t \cdot t$  ②

比较①、②两式可以看出两式的表述形式相同。

据此, 可得蚂蚁问题中的参量  $t$  和  $L$  分别类比为初速为零的匀加速直线运动中的  $s$  和

$t$ 。而  $\frac{1}{k}$  相当于加速度  $a$ , 于是可得: 在此蚂蚁问题中  $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot L^2$

$$\text{令 } t_1 \text{ 对应 } L_1, t_2 \text{ 对应 } L_2, \text{ 则所求时间为: } \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2k} L_1^2 \\ t_2 = \frac{1}{2k} L_2^2 \end{cases}$$

代入已知可得从  $A$  到  $B$  所用的时间为:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{2k} L_2^2 - \frac{1}{2k} L_1^2 = \frac{2^2}{2 \times 0.2} - \frac{1^2}{2 \times 0.2} = 0.75\text{s}$$

(此题也可以用图象法、等效法求解, 读者可试试。)

**例 4:** 如图 12—3 所示为一很大的接地导体板, 在与导体板相距为  $d$  的  $A$  处放一带电量为  $-q$  的点电荷。

- (1) 试求板上感应电荷在导体内  $P$  点产生的电场强度;
- (2) 试求感应电荷在导体外  $P'$  点产生的电场强度,  $P$  与  $P'$  对导体板右表面对称;
- (3) 在本题情形中根据场强分析证明导体表面附近的电场强度的方向与导体表面垂直;
- (4) 试求导体上的感应电荷对点电荷  $-q$  的作用力;

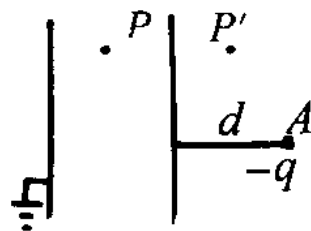


图 12—3

- (5) 若在切断导体板与地的连线后, 再将  $+Q$  电荷置于导体板上, 试说明这部分电荷在导体板上如何分布可达到静电平衡。(略去边缘效应)

**解析:** 面电荷问题有时可用点电荷场来类比, 使问题大大简化。(1) 因导体处于静电平衡状态, 内部场强为零, 因此感应电荷在  $P$  点产生的场强可用点电荷场类比, 若在  $A$  点放  $+q$  在导体中  $P$  点产生的场和感应电荷

在  $P$  点产生的场相同, 因此有  $E = k \frac{q}{r^2}$ ,

方向如图 12—3—甲所示。(  $r$  为  $AP$  间距离)

(2) 同理, 感应电荷在导体外  $P'$  点产生的电场跟把  $+q$  放在与  $A$  关于导体右表面对称的  $A'$  点产生的电场相同, 即

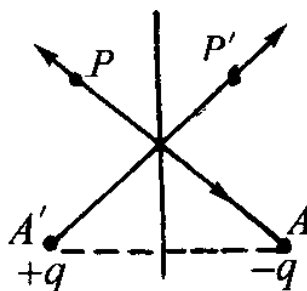


图 12—3—甲

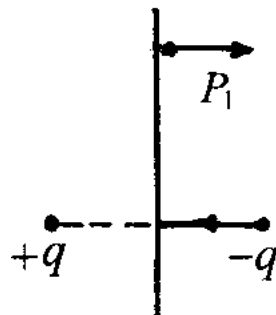


图 12—3—乙

$E'_p = k \frac{q}{r^2}$ ，方向如图 12—3 甲所示。

(3) 取导体外极靠近导体表面的一点  $P_1$ ，此处电场由感应电荷和  $-q$  共同产生，可类比等量异号点电荷形成的电场，导体表面可类比为等势面，场强和等势面是垂直的，因此  $P_1$  点的场强方向跟导体表面垂直。如图 12—3—乙所示。

(4) 感应电荷对  $-q$  的作用力也可类比在  $A'$  点放的  $+q$  对它的库仑力来求。如图 12—3—乙所示。

$$F = \frac{kq}{(2d)^2} \cdot q = \frac{kq^2}{4d^2}$$

(5) 切断接地线后，感应电荷分布不变，感应电荷和  $-q$  在导体中产生的电场强度为零（相当于不带电情况），将  $+Q$  置于导体板上时，类比孤立无限大带电平板，电荷将均匀分布

**例 5：**如图 12—4 所示为一无限多电容器连成的网络，若其中每个电容器的电容均为  $C$ ，求此网络 A、B 间的等效电容  $C_{AB}$ 。

解析：电容器两极板间所加电压为  $U$ ，正极板上的电量为  $Q$  时，电容为： $C = \frac{Q}{U}$ 。

电阻器两端所加电压为  $U$ ，通过的电流为  $I$  时，电阻为  $R = \frac{U}{I}$ 。

在  $C$ 、 $R$  表达式中  $U$  相同， $Q$  与  $I$  类比，但两个式子显然有颠倒的关系，若为电容器引入  $C^* = \frac{1}{C} = \frac{U}{Q}$ ， $C^*$  便可与  $R$  类比，通过对  $R$  的求解，求出  $C^*$ ，再求出它的倒数即为  $C$ 。

当将阻值为  $R$  的电阻替换电容  $C$  时，可以求得：AB 间的总电阻为： $R_{AB} = (\sqrt{3} + 1)R$

现在用  $C^*$  取代  $R$ ，可解得： $C_{AB}^* = (\sqrt{3} + 1)C^*$

$$\text{也即：} \frac{1}{C_{AB}} = (\sqrt{3} + 1) \frac{1}{C}$$

$$\text{所以 AB 间的等效电容为：} C_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} C$$

**例 6：**电容器网络如图 12—5 所示，各电容器以  $\mu\text{F}$  为单位的电容量数值已在图中标出。求 A、B 两点之间的等效电容  $C_{AB}$ 。

**解析：**同样用类比法为电容器引入辅助参量  $C^* = \frac{1}{C}$ ，则  $C^*$  的串并联公式与电阻  $R$  的串并联公式完全一样，而且如图 12—5—甲中两个电容网络元之间有完全类似于电阻网络元的 Y— $\Delta$  变换。

$$\text{变换公式为：} C_a^* = \frac{C_{AB}^* C_{CA}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}, C_b^* = \frac{C_{AB}^* C_{BC}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}, C_c^* = \frac{C_{BC}^* C_{CA}^*}{C_{AB}^* + C_{BC}^* + C_{CA}^*}$$

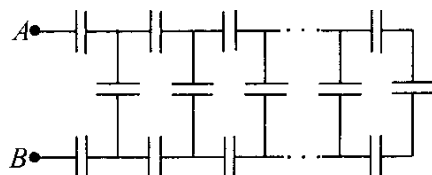


图 12—4

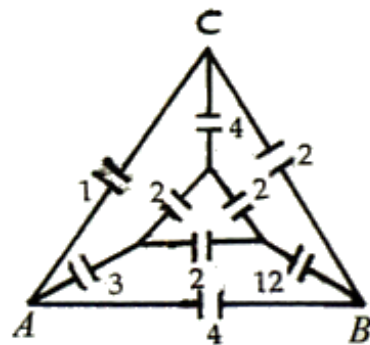


图 12—5

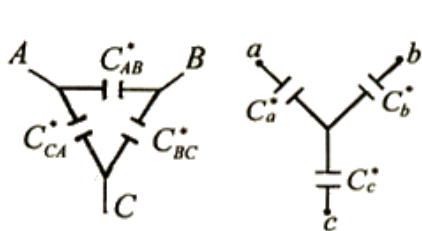


图12-5-甲

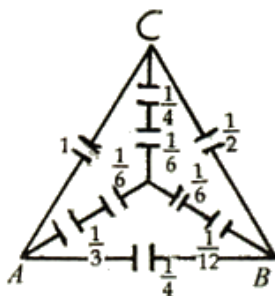


图 12—5—乙

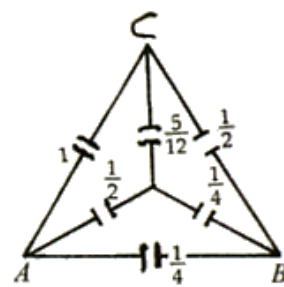


图 12—5—丙

通过变换公式对题中的网络进行交换，从而求解。

$$\text{设 } C^* = \frac{1}{C}$$

将中间同为  $C = 2\mu\text{F}$  的电容变为  $C^* = \frac{1}{2}(\mu\text{F})^{-1}$ ，再将三个  $C^*$  组成的  $\Delta$  网络元变换为

$$C^* = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(\mu\text{F})^{-1} \text{ 的三个 Y 网络元，于是将原网络等效为如图 12—5—乙网络，图}$$

12—5—乙中所标数值均为  $C^*$  值，为此网络可等效如图 12—5—丙网络，图中所标数值仍是  $C^*$  值。

因为此网络中没有电流图 12—5—丙可当作平衡的桥式电路，中间的  $\frac{5}{12}$  电容可拆去，此网络又可等效为图 12—5—丁，再类比电阻串并联公式可得：

$$C_{AB}^* = \frac{1}{6}(\mu\text{F})^{-1}$$

故原网络 A、B 间的等效电容为： $C_{AB} = \frac{1}{C_{AB}^*} = 6\mu\text{F}$

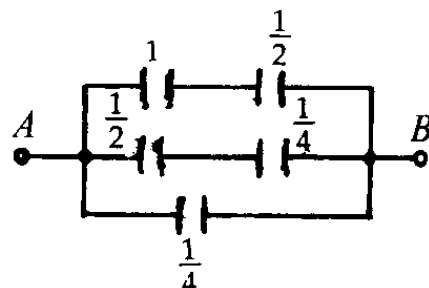


图 12—5—丁

**例 7：**如图 12—6 所示，一个由绝缘细线构成的刚性圆形轨道，其半径为  $R$ 。此轨道水平放置，圆心在  $O$  点，一个金属小珠  $P$  穿在此轨道上，可沿轨道无摩擦地滑动，小珠  $P$  带电荷  $Q$ 。已知在轨道平面内  $A$  点 ( $OA = r < R$ ) 放有一电荷  $q$ 。若在  $OA$  连线上某一点  $A_1$  放电荷  $q_1$ ，则给  $P$  一个初速度，它就沿轨道做匀速圆周运动。求  $A_1$  点位置及电荷  $q_1$  之值。

**解析：**因为  $P$  可沿圆轨道做匀速圆周运动，说明此圆轨道是一等势线，将此等势线看成一个球面镜的一部分。已知半径为  $R$ ，所以此球面镜的焦距为  $\frac{R}{2}$ 。

$$\text{由成像公式 } \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f}$$

若  $q$  为物点， $q_1$  为像点不成立，只能是  $q_1$  为物点成虚像于

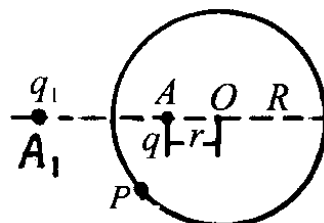


图 12—6

q，所以有：

$$\frac{1}{P'} - \frac{1}{R-r} = \frac{-2}{R}, \text{ 得到: } P' = \frac{R(R-r)}{2r-R}$$

$$\text{又因为 } \frac{q}{q_1} = \frac{|P|}{|P'|} = \frac{(R-r)(R-2r)}{R(R-r)} = \frac{R-2r}{R}$$

$$\text{解得: } q_1 = \frac{R}{R-2r} q$$

**例 8：**将焦距为 10cm 的一块双凸透镜沿其表面的垂直方向切割成相同的两部分，把这两部分沿垂直于主轴的方向移开一段距离  $\delta = 1\text{cm}$ ，并用不透明的材料将其挡住。若在原透镜左侧主轴上，距透镜光心 20cm 处放一点光源 M，如图 12—7 所示，点光源能射出波长为  $0.5\mu\text{m}$  的单色光，那么在透镜另一侧距透镜 50cm 的屏幕（垂直于透镜主轴放置）上，将出现多少亮条纹？

**解析：**由透镜成像规律可知，单色点光源 M，经切割成的两个半透镜分别成两个像  $M_1$ ， $M_2$ （此时每个半透镜相当于一个透镜）。这两个像距相等，关于主光轴对称，形成相干光源，从而在屏幕上可看到干涉条纹，屏幕中央是零级亮条纹，两侧依次分布着各级干涉条纹。

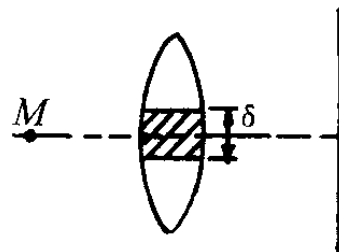


图 12—7

$$\text{根据透镜成像公式 } \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{f} \text{ 得: } P' = \frac{Pf}{P-f} \quad \text{①}$$

设两个像之间的距离  $M_1M_2 = d$

$$\text{由图 12—7—甲中的几何关系可知: } \frac{d}{\delta} = \frac{P+P'}{P} \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②两式得: } d = \frac{\delta}{P} \left( P + \frac{Pf}{P-f} \right) = \frac{\delta P}{P-f} \quad \text{③}$$

由图 12—7—甲知：

$$L = H - P' = H - \frac{Pf}{P-f} = \frac{H(P-f) - P'f}{P-f} \quad \text{④}$$

类比光的双缝干涉作图 12—7—乙。设屏幕上 Q 为一级亮条纹，则光程差为：

$$\Delta\delta = M_2Q - M_1Q \approx d \sin\alpha = \lambda \quad \text{⑤}$$

$$\text{因为 } \alpha \text{ 解很小, 所以有: } \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{S}{L}$$

$$\text{将其代入⑤式得: } S = \frac{\lambda L}{d} \quad \text{⑥}$$

$$\text{将③、④代入⑥式得: } S = \frac{\lambda}{P\delta} [H(P-f) - P'f] \quad \text{⑦}$$

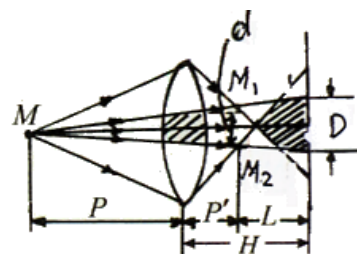


图12-7-甲

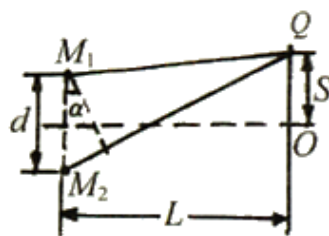


图12-7-乙

$$\text{由于干涉条纹是等间距的, 所以屏幕上出现的亮条纹数目为: } N = \frac{D}{S} \quad \text{⑧}$$

由图 12—7—甲中几何关系得：
$$\frac{\delta}{D} = \frac{P}{P+H}$$

解得：
$$D = \frac{\delta(H+P)}{P} \tag{9}$$

将⑨代入⑧式得：
$$N = \frac{\delta(H+P)}{P} \cdot \frac{P\delta}{\lambda[H(P-f)-Pf]} = \frac{\delta^2(H+P)}{\lambda[H(P-f)-Pf]} \tag{10}$$

将已知代入⑩得： $N = 46.6$ ，所以亮条纹的条数为 46 条。

**例 9：**如图 12—8 所示，半径  $R = 10\text{cm}$  的光滑凹球面容器固定在地面上，有一小物块在与容器最低点  $P$  相距  $5\text{mm}$  的  $C$  点由静止无摩擦滑下，则物块自静止下滑到第二次通过  $P$  点时所经历的时间是多少？若此装置放在以加速度  $a$  向上运动的实验舱中，上述所求的时间又是多少？

**解析：**本题中的小物块是在重力、弹力作用下做变速曲线运动，我们若抓住物体受力做  $\theta < 5^\circ$  往复运动的本质特征，便可以进行模型等效，即把小物块在凹球面上的运动等效为单摆模型。

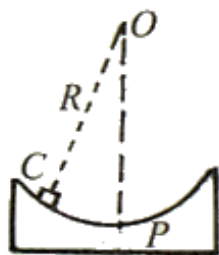


图 12—8

将上述装置等效为单摆，根据单摆的周期公式  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

得：
$$t = \frac{3}{4}T = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

若此装置放在以加速度  $a$  向上运动的实验舱中，比较两种情形中物体受力运动的特征，可以等效为单摆的重力加速度为  $g' = g + a$  的情形，经类比推理可得：

$$t' = \frac{3}{4}T' = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g+a}}$$

### 针对训练

1. 宇航员站在一星球表面上的某高处，沿水平方向抛出一个小球，经过时间  $t$ ，小球落到星球表面，测得抛出点与落地点之间的距离为  $L$ 。若抛出时的初速度增大到 2 倍，则抛出点与落地点之间的距离为  $\sqrt{3}L$ 。已知两落地点在同一水平面上，该星球的半径为  $R$ ，万有引力常数为  $G$ 。求该星球的质量  $M$ 。

2. 如图 12—9 所示，有一半径为  $R$  的接地导体球，在距离球心  $a$  处放有一点电荷  $Q$ ，由于静电感应，球的表面出现感应电荷，求点电荷  $Q$  和导体球之间的相互作用力。

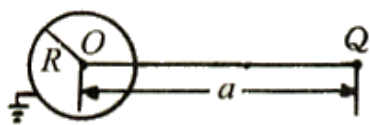


图 12—9

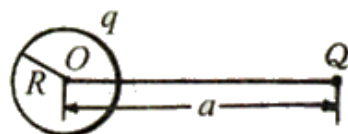


图 12—10

3. 如图 12—10 所示，如果导体球不接地，且与外界绝缘，带电量为  $q$ ，则点电荷  $Q$

和导体球之间的作用力大小是多少？

4. 已知,  $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1\mu\text{F}$ ,  $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2\mu\text{F}$ ,  $C_8 = C_{10} = 3\mu\text{F}$ , 试求如图 12—11 所示的电路中 A、B 间的等效电容  $C_{AB}$ 。

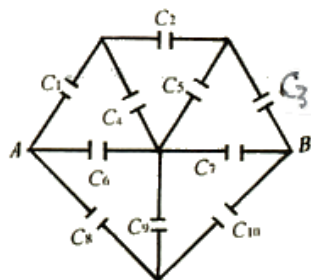


图 12-11

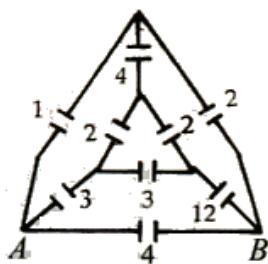


图 12-12

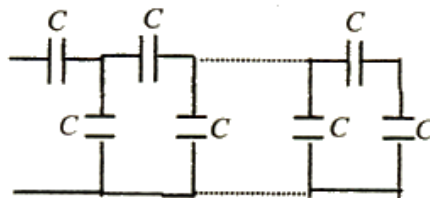


图 12-13

5. 电容器网络如图 12—12 所示, 各电容器以  $\mu\text{F}$  为单位的电容量数值已在图中标出, 试求 A、B 两点间的等效电容  $C_{AB}$ 。

6. 许多电容量都为 C 的电容器组成一个多级网络, 如图 12—13 所示。

(1) 问在最后一级右边的电容器上并联一个多大的电容  $C'$ , 可使整个网络的总电容也等于 C?

(2) 如不加  $C'$ , 但无限增加级数, 问整个网路的总电容是多少?

(3) 当电路中的级数足够多时, 如果在最后一级右边的电容器上并联一个任意大小的电容  $C_x$ , 问整个网路的总电容是多少?

7. 将焦距为 f 的一块透镜沿其表面的垂直方向切割成两部分。如图 12—14 所示, 把两块半透镜移开一小段距离, 如果在透镜的一方距离  $l > f$  处放置一个单色点光源, 问在透镜的另一方距 H 处的屏幕上, 将出现多少条干涉条纹?

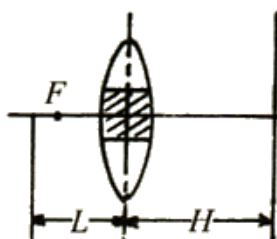


图 12-14



图 12-15



图 12-15-甲

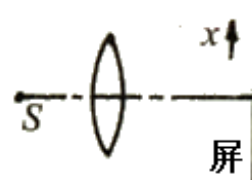


图 12-15-乙

8. 将焦距  $f = 20\text{cm}$  的凸薄透镜从正中切去宽度为 a 的小部分, 如图 12—15 所示, 再将剩下两半粘在一起, 构成一个“粘合透镜”, 见图 12—15 甲中  $D = 2\text{cm}$ 。在粘合透镜一侧的中心轴线上距镜 20cm 处, 置一波长  $\lambda = 0.5 \times 10^{-6}\text{m}$  的单色点光源 S, 另一侧垂直于中心轴线处放置屏幕, 见图 12—15—乙。屏幕上出现干涉条纹, 条纹间距  $\Delta x = 0.2\text{cm}$ 。试问:

(1) 切去部分的宽度 a 是多少?

(2) 为获得最多的干涉条纹, 屏幕应离透镜多远?

### 参考答案

1、  $\frac{2\sqrt{3}LR^2}{3Gt^2}$

2、  $\frac{kQ^2aR}{(a^2 - R^2)^2}$

3、  $\frac{kQ(\frac{R}{a}Q+q)}{a^2} - \frac{kQ^2aR}{(a^2 - R^2)^2}$

4、  $C_{AB} = 2.9\mu\text{F}$

5、  $C_{AB} = 6.0\mu\text{F}$

6、 (1)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$  ; (2)  $C_{\text{总}} = C'$  ; (3)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$

7、  $N = \frac{\Delta L^2(H+t)}{\lambda[H(t-f)-tf]}$  (注：将“两块半透镜移开一小段距离”后加“ $\Delta L$ ”。在“ $t > f$

处放置一个”与“单色点光源”之间加“波长为 $\lambda$ 的”)

8、 (1)  $a = 0.5 \times 10^{-3}\text{m}$  ; (2)  $d = 4\text{m}$

# 十三、降维法

## 方法简介

降维法是将一个三维图变成几个二维图，即应选两个合适的平面去观察，当遇到一个空间受力问题时，将物体受到的力分解到两个不同平面上再求解。由于三维问题不好想像，选取适当的角度，可用降维法求解。降维的优点是把不易观察的空间物理量的关系在二维图中表示出来，使我们很容易找到各物理量之间的关系，从而正确解决问题。

## 赛题精讲

**例 1:** 如图 13—1 所示，倾角  $\theta = 30^\circ$  的粗糙斜面上放一物体，物体重为  $G$ ，静止在斜面上。现用与斜面底边平行的力  $F = G/2$  推该物体，物体恰好在斜面内做匀速直线运动，则物体与斜面间的动摩擦因数  $\mu$  等于多少？物体匀速运动的方向如何？

**解析:** 物体在重力、推力、斜面给的支持力和摩擦力四个力的作用下做匀速直线运动，所以受力平衡。但这四个力不在同一平面内，不容易看出它们之间的关系。我们把这些力分解在两个平面内，就可以将空间问题变为平面问题，使问题得到解决。

将重力沿斜面、垂直于斜面分解。我们从上面、侧面观察，图 13—1—甲、图 13—1—乙所示。

如图 13—1—甲所示，推力  $F$  与重力沿斜面的分力  $G_1$  的合力  $F'$  为：

$$F' = \sqrt{F^2 + G_1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} G$$

$F'$  的方向沿斜面向下与推力成  $\alpha$  角，

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{G_1}{F} = 1 \quad \therefore \alpha = 45^\circ$$

这就是物体做匀速运动的方向

物体受到的滑动摩擦力与  $F'$  平衡，即  $f = F' = \sqrt{2}G/2$

$$\text{所以摩擦因数: } \mu = \frac{f}{F_N} = \frac{\sqrt{2}G/2}{G \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**例 2:** 如图 13—2 所示，一个直径为  $D$  的圆柱体，其侧面刻有螺距为  $h$  的光滑的螺旋形凹槽，槽内有一小球，为使小球能自由下落，必须要以多大的加速度来拉缠在圆柱体侧面的

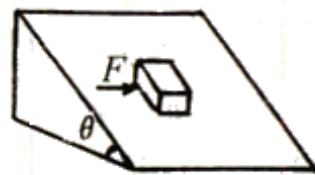


图 13—1

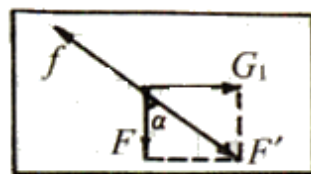


图 13—1—甲

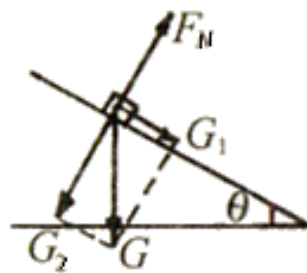


图 13—1—乙



绳子？

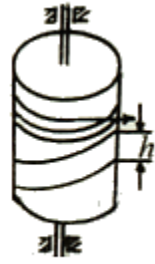


图13-2

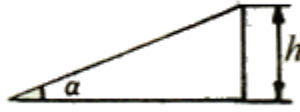


图13-2-甲

**解析：**将圆柱体的侧面等距螺旋形凹槽展开成为平面上的斜槽，如图13—2—甲所示，当圆柱体转一周，相当于沿斜槽下降一个螺距  $h$ ，当圆柱转  $n$  周时，外侧面上一共移动的水平距离为  $2\pi \frac{D}{2} n = \frac{1}{2} at^2$  ①

$$2\pi \frac{D}{2} n = \frac{1}{2} at^2 \quad ①$$

$$圆弧槽内小球下降的高度为 nh = \frac{1}{2} gt^2 \quad ②$$

解①、②两式，可得，为使螺旋形槽内小球能自由下落，圆柱体侧面绳子拉动的加速度

$$应为 a = \frac{\pi Dg}{h}$$

**例3：**如图13—3所示，表面光滑的实心圆球B的半径  $R=20\text{cm}$ ，质量  $M=20\text{kg}$ ，悬线长  $L=30\text{cm}$ 。正方形物块A的厚度  $\Delta h=10\text{cm}$ ，质量  $m=2\text{kg}$ ，物体A与墙之间的动摩擦因数  $\mu=0.2$ ，取  $g=10\text{m/s}^2$ 。求：

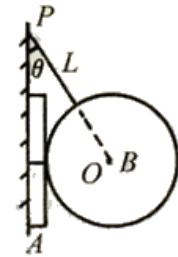


图13-3

(1) 墙对物块A的摩擦力为多大？

(2) 如果要物体A上施加一个与墙平行的外力，使物体A在未脱离圆球前贴着墙沿水平方向做加速度  $a=5\text{m/s}^2$  匀加速直线运动，那么这个外力大小方向如何？

**解析：**这里物体A、B所受的力也不在一个平面内，混起来考虑比较复杂，可以在垂直于墙的竖直平面内分析A、B间压力和A对墙的压力；在与墙面平行的平面内分析A物体沿墙水平运动时的受力情况。

(1) 通过受力分析可知墙对物块A的静摩擦力大小等于物块A的重力。(2) 由于物体A贴着墙沿水平方向做匀加速直线运动，所以摩擦力沿水平方向，合力也沿水平方向且与摩擦力方向相反。又因为物体受竖直向下的重力，所以推力F方向应斜向上。

设物体A对墙的压力为  $N$ ，则沿垂直于墙的方向，物体B受到物体A的支持力大小也为  $N$ ，有  $f = \mu N$ ，而  $N = Mg \tan \theta$

$$又因为 \sin \theta = \frac{\Delta h + R}{L + R} = \frac{3}{5} \quad 所以 \tan \theta = \frac{3}{4}$$

在与墙面平行的平面内，对物体A沿竖直方向做受力分析，如图13—3—甲所示有

$$F \sin \alpha = mg$$

沿水平方向做受力分析，有  $F \cos \alpha - f = ma$

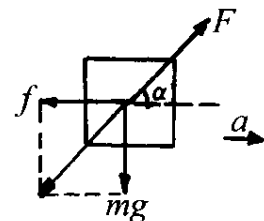


图13-3-甲

由以上各式，解得  $F = \sqrt{(mg)^2 + (f + ma)^2} = 20\sqrt{5}N, a = \arcsin(\sqrt{5}/5)$

因此，对物体 A 施加的外力 F 的大小为  $20\sqrt{5}N$ ，方向沿墙面斜向上且与物体 A 水平运动方向的夹角为  $\arcsin(\sqrt{5}/5)$ 。

**例 4：**一质量  $m=20\text{kg}$  的钢件，架在两根完全相同的平行长直圆柱上，如图 13—4 所示，钢件的重心与两柱等距，两柱的轴线在同一水平面内，圆柱的半径  $r=0.025\text{m}$ ，钢件与圆柱间的动摩擦因数  $\mu=0.20$ 。两圆柱各绕自己的轴线做转向相反的转动，角速度  $\omega = 40\text{rad/s}$ 。若沿平行于柱轴的方向施力推着钢件做速度为  $v_0 = 0.050\text{m/s}$  的匀速运动，

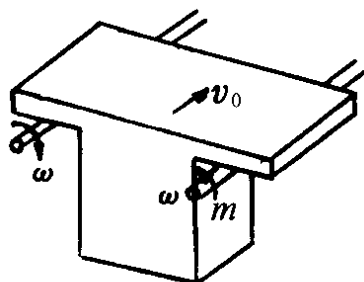


图 13—4

求推力是多大？（设钢件不发生横向运动）

**解析：**本题关键是弄清滑动摩擦力的方向，滑动摩擦力的方向与相对运动的方向相反，由于钢件和圆柱都相对地面在运动，直接不易观察到相对地面在运动，直接不易观察到相对运动的方向，而且钢件的受力不在同一平面内，所以考虑“降维”，即选一个合适的角度观察。我们从上往上看，画出俯视图，如图 13—4—甲所示。

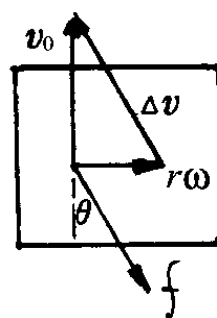


图 13—4—甲

我们选考虑左边圆柱与钢件之间的摩擦力，先分析相对运动的方向，钢件有向前的速度  $v_0$ ，左边圆柱有向右的速度  $r\omega$ ，则钢件相对于圆柱的速度是  $v_0$  与  $r\omega$  的矢量差，如图中  $\Delta v$ ，即为钢件相对于圆柱的速度，所以滑动摩擦力  $f$  的方向与  $\Delta v$ ，的方向相反，如图 13—4—甲所示。

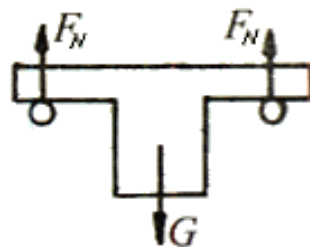
以钢件为研究对象，在水平面上受到推力  $F$  和两个摩擦力  $f$  的作用，设  $f$  与圆柱轴线的夹角为  $\theta$ ，当推钢件沿圆柱轴线匀速运动时，应有

$$F = 2f \cos\theta = 2f \frac{v_0}{\Delta v} = 2f \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2}} \quad \text{①}$$

再从正面看钢件在竖直平面内的受力可以求出  $F_N$ ，如图 13—4—乙所示，钢件受重力  $G$  和两个向上的支持力  $F_N$ ，且  $G=2F_N$ ，

所以把  $F_N = \frac{G}{2}$ ， $f = \mu F_N$  代入①式，得

$$\text{推力 } F = 2\mu F_N \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2}} = 2\mu \frac{mg}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2}} = 2N$$



**例 5：**如图 13—5 所示，将质量为  $M$  的匀质链条套在一个表面光滑的圆锥上，圆锥顶角为  $\alpha$ ，设圆锥底面水平，链条静止时也水平，求链条内的张力。

**解析：**要求张力，应在链条上取一段质量元  $\Delta m$  进行研究。因为该问题是三维问题，各力不在同一平面内，所以用“降维法”作出不同角度的平面图进行研究。

作出俯视图 13—5—甲，设质量元  $\Delta m$  两端所受张力为  $T$ ，其合力为  $F$ ，因为它所对的圆心角  $\theta$  很小，所以  $F = 2T \sin \frac{\theta}{2}$ ，即  $F = T \theta$ 。

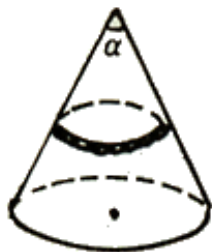


图 13-5

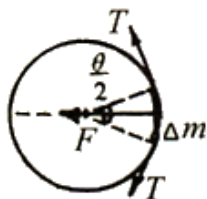


图 13-5-甲

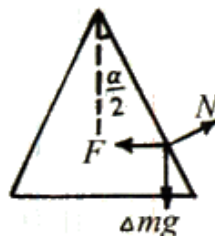


图 13-5-乙

再作出正视图 13—5—乙，质量元受重力  $\Delta m g$ 、支持力  $N$  和张力的合力  $F$  而处于平衡状态，由几何知识可得： $F = \Delta m g \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2\pi} M g \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$

$$\text{所以链条内的张力 } T = \frac{F}{2} = \frac{Mg}{2\pi} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

**例 6：**杂技演员在圆筒形建筑物内表演飞车走壁。演员骑摩托车从底部开始运动，随着速度增加，圈子越兜越大，最后在竖直圆筒壁上匀速率行驶，如图 13—6 所示。如果演员和摩托车的总质量为  $M$ ，直壁半径为  $R$ ，匀速率行驶的速率为  $v$ ，每绕一周上升的距离为  $h$ ，求摩托车匀速走壁时的向心力。

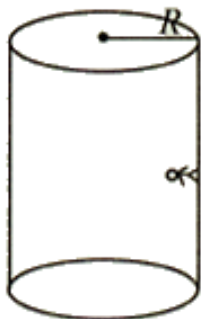


图 13-6

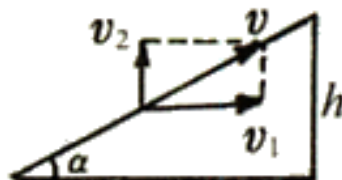


图 13-6-甲

**解析：**摩托车的运动速度  $v$ ，可分解为水平速度  $v_1$  和竖直分速度为  $v_2$ ，则向心力速度为

$$a = \frac{v_1^2}{R}。 \text{处理这个问题的关键是将螺旋线展开为一个斜面，其倾角的余弦为}$$

$$\cos a = \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}, \text{如图 13—6—甲所示。}$$

$$\text{所以有 } v_1 = v \cos a = \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}} v$$

向心加速度为：
$$a = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R} \left( \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}} \right)^2$$

向心力 
$$F = Ma = Mv^2 \frac{4\pi^2 R}{(4\pi^2 R^2 + h^2)}$$

**例 7:** A、B、C 为三个完全相同的表面光滑的小球，B、C 两球各被一长为  $L=2.00\text{m}$  的不可伸和的轻线悬挂于天花板上，两球刚好接触，以接触点 O 为原点作一直角坐标系  $Oxyz$ ,  $z$  轴竖直向上， $Ox$  与两球的连心线重合，如图 13—7 所示。今让 A 球射向 B、C 两球，并与两球同时发生碰撞。碰撞前，A 球速度方向沿  $y$  轴正方向，速率为  $v_{A_0} = 4.00\text{m/s}$ 。相碰后，A 球沿  $y$  轴负方向反弹，速率  $v_A = 0.40\text{m/s}$ 。

(1) 求 B、C 两球被碰后偏离 O 点的最大位移量；

(2) 讨论长时间内 B、C 两球的运动情况。(忽略空气阻力，取  $g=10\text{m/s}^2$ )

**解析:** (1) A、B、C 三球在碰撞前、后的运动发生

在  $Oxy$  平面内，设刚碰完后，A 的速度大小为  $v_A$ ，B、

C 两球的速度分别为  $v_B$  与  $v_C$ ，在  $x$  方向和  $y$  方向的分速

度的大小分别为  $v_{Bx}$ ， $v_{By}$  和  $v_{Cx}$ ， $v_{Cy}$ ，如图 13—7—甲所示，

由动量守恒定律，有  $mv_{Cx} - mv_{Bx} = 0$  ①

$$mv_{Ax} = mv_{By} + mv_{Cy} - mv_A \quad ②$$

由于球面是光滑的，在碰撞过程中，A 球对 B 球的作用力方向沿 A、B 两球的连心线，A 球对 C 球的作用力方向沿 A、C 两球的连心线，由几何关系，得

$$\left. \begin{aligned} v_{Bx} &= v_{By} \tan \frac{\pi}{6} \\ v_{Cx} &= v_{Cy} \tan \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad ③$$

由对称关系可知  $v_{Bx} = v_{Cx}$  ④

解①、②、③、④式可得  $v_{Bx} = v_{Cx} = 1.27\text{m/s}$

$$v_{By} = v_{Cy} = 2.20\text{m/s}$$

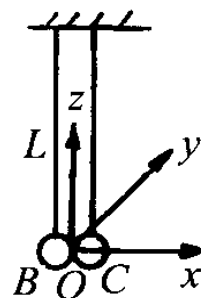


图 13—7

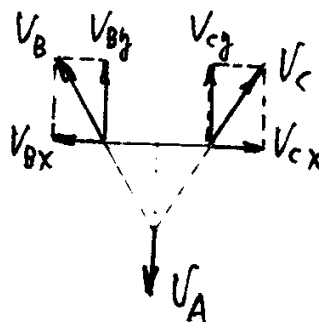


图 13—7 甲

由此解得  $v_{Bx} = v_{Cy} = 2.54m/s$

设 C 球在  $x>0, y>0, z>0$  的空间中的最大位移为  $\overline{OQ}$ , Q 点的 z 坐标为  $z_Q$ , 则由机械能守

恒定律可写出  $\frac{1}{2}mv_C^2 = mgz_Q$  ⑤

所以  $z_Q = \frac{v_C^2}{2g}$  代入数值解得  $z_Q=0.32m$

而 Q 点到  $O_z$  轴的距离为  $\overline{QD} = \sqrt{L^2 - (L - z_Q)^2} = \sqrt{z_Q(2L - z_Q)}$

所以 C 球离 O 点的最大位移量  $\overline{OQ} = \sqrt{z_Q^2 + \overline{QD}^2} = \sqrt{2Lz_Q}$  ⑥

代入数值, 得  $\overline{OQ} = 1.13m$  ⑦

由对称性, 可得 B 球在  $x < 0, y > 0, z > 0$  的空间的最大位移量  $\overline{OP}$  为

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = 1.13m \quad \text{⑧}$$

(2) 当 B、C 两球各达到最大位移后, 便做回到原点的摆动, 并发生两球间的碰撞, 两球第一次返回 O 点碰撞前速度的大小和方向分别为

$$v_{Bx} = 1.27m/s \quad \text{方向沿正 } x \text{ 轴方向}$$

$$v_{By} = 2.20m/s \quad \text{方向沿 } y \text{ 轴方向}$$

$$v_{Cx} = 1.27m/s \quad \text{方向沿正 } x \text{ 轴方向}$$

$$v_{Cy} = 2.20m/s \quad \text{方向沿 } y \text{ 轴方向}$$

设碰撞后的速度分别为  $v_{B_1}$  和  $v_{C_1}$ , 对应的分速度的大小分别为  $v_{B_1x}$ 、 $v_{B_1y}$ 、 $v_{C_1x}$  和  $v_{C_1y}$ ,

由于两球在碰撞过程中的相互作用力只可能沿 x 轴方向, 故碰撞后, 沿 y 轴方向的速度大小和方向均保持不变 (因为小球都是光滑的), 即

$$v_{B_1y} = v_{By} \quad \text{方向沿负 } y \text{ 轴方向} \quad \text{⑨}$$

$$v_{C_1y} = v_{Cy} \quad \text{方向沿负 } y \text{ 轴方向} \quad \text{⑩}$$

碰撞过程中, 沿 x 轴方向的动量守恒, 则  $mv_{C_1x} - mv_{B_1x} = mv_{Bx} - mv_{Cx}$

因为  $v_{Bx} = v_{Cx}$  所以  $v_{C1x} = v_{B1x}$

即碰撞后两球在  $x$  方向的分速度大小也相等，方向相反，具体数值取决于碰撞过程中是否机械能损失。在 A 球与 B、C 两球同时碰撞的过程中，碰撞前，三者的机械能

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{AD}^2 = 8m \quad \text{碰撞后三者的机械能}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = 6.59m \quad E_2 < E_1$$

表明在碰撞过程中有机械能损失，小球的材料不是完全弹性体，故 B、C 两球在碰撞过程中也有机械能损失，即

$$\frac{1}{2}m(v_{B1x}^2 + v_{B1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{C1x}^2 + v_{C1y}^2) < \frac{1}{2}m(v_{Bx}^2 + v_{By}^2) \quad \text{⑩}$$

$$\text{由⑨、⑩和⑪三式，和 } v_{B1x} = v_{C1x} < v_{Bx} = v_{Cx} \quad \text{⑫}$$

$$\text{或 } v_{B1} = v_{C1} < v_B = v_C$$

当 B、C 两球第二次返回 O 点时，两球发生第二次碰撞，设碰撞后两球的速度分别为  $v_{B2}$  和  $v_{C2}$ ，对应的分速度的大小分别为  $v_{B2x}$ 、 $v_{B2y}$ 、 $v_{C2x}$  和  $v_{C2y}$ ，

$$\text{则有 } v_{B2y} = v_{C2y} = v_{B1y} = v_{C1y} \quad v_{B2x} = v_{C2x} < v_{B1x} = v_{C1x}$$

$$\text{或 } v_{B2} < v_{B1} \quad v_{C2} < v_{C1}$$

由此可见，B、C 两球每经过一次碰撞，沿  $x$  方向的分速度都要变小，即

$$v_{Bx} = v_{Cx} > v_{B1x} = v_{C1x} > v_{B2x} = v_{C2x} > v_{B3x} = v_{C3x} \quad \dots\dots$$

而  $y$  方向的分速度的大小保持不变，即

$$v_{By} = v_{Cy} = v_{B1y} = v_{C1y} = v_{B2y} = v_{C2y} = v_{B3y} = v_{C3y} \quad \dots\dots$$

当两球反复碰撞足够多次数后，沿  $x$  方向的分速度为零，只有  $y$  方向的分速度。设足够的次数为  $n$ ，则有  $v_{Bnx} = v_{Cnx} = 0 \quad \text{⑬}$

$$v_{Bny} = v_{Cny} = v_{By} = 2.20m/s \quad \text{⑭}$$

即最后，B、C 两球一起的 Oyz 平面内摆动，经过最低点 O 的速度由⑭式给出，设最高

点的  $z$  轴坐标为  $z_{Qn}$ ，则  $\frac{1}{2}mv_{Cny}^2 = mgz_{Qn}$  得  $z_{Qn} = \frac{v_{Cny}^2}{2g}$

$$\text{代入数值，得 } z_{Qn} = 0.24m \quad \text{⑮}$$

最高点的  $y$  坐标由下式给出:  $y_{Q_n} = \pm\sqrt{L^2 - (L - z_{Q_n})^2} = \pm\sqrt{(2L - z_{Q_n})z_{Q_n}}$

代入数值, 得:  $y_{Q_n} = \pm 0.95\text{m}$  ⑥

**例 8:** 一半径  $R=1.00\text{m}$  的水平光滑圆桌面, 圆心为  $O$ , 有一竖直的立柱固定在桌面上的圆心附近, 立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线  $C$ , 如图 13—8 所示。一根不可伸长的柔软的细轻绳, 一端固定在封闭曲线上某一点, 另一端系一质量为  $m=7.5 \times 10^{-2}\text{kg}$  的小物块。将小物块放在桌面上

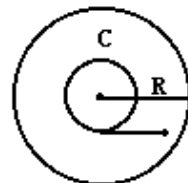


图 13—8

并把绳拉直, 再给小物块一个方向与绳垂直、大小为  $v_0 = 4.0\text{m/s}$  的初速度, 物块在桌面上运动时, 绳将缠绕在立柱上。已知当绳的张力为  $T_0=2.0\text{N}$  时, 绳即断开, 在绳断开前物块始终在桌面上运动。

(1) 问绳刚要断开时, 绳的伸直部分的长度为多少?

(2) 若绳刚要断开时, 桌面圆心  $O$  到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直, 问物块的落地点到桌面圆心  $O$  的水平距离为多少? 已知桌面高度  $H=0.80\text{m}$ , 物块在桌面上运动时未与立柱相碰。取重力加速度大小为  $10\text{m/s}^2$ 。

**解析:** (1) 这一问题比较简单。绳断开前, 绳的张力即为物块所受的向心力, 因为初速度与绳垂直, 所以绳的张力只改变物块的速度方向, 而速度大小不变, 绳刚要断开时, 绳的伸直部分的长度可求出。

设绳的伸直部分长为  $x$ , 则由牛顿第二定律得:  $T_0 = m \frac{v_0^2}{x}$

代入已知数值得:  $x=0.60\text{m}$

(2) 选取桌面为分析平面, 将物块的落地点投影到此分析平面上, 然后由平抛运动的知识求解。

如图 13—8—甲所示, 设绳刚要断开时物块位于桌面上的  $P$  点, 并用  $A$  点表示物块离开桌面时的位置, 先取桌面为分析平面, 将物块的落地点投影到此分析平面上, 其位置用  $D$  点表示, 易知  $D$  点应在直线  $PA$  的延长线上,  $\overline{OD}$  即等于物块落地点与桌面圆心  $O$  的

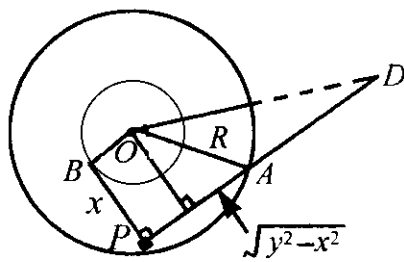


图 13—8—甲

水平距离, 而  $\overline{AD}$  等于物块离开桌面后做平抛运动的水平射程。

即  $\overline{AD} = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$  故  $\overline{OD} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{R^2 - x^2} + v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}})^2}$

代入已知数值得物块落地点到桌面圆心  $O$  的水平距离  $\overline{OD} = 2.47\text{m}$

**例 9:** 如图 13—9 所示是一种记录地震装置的水平摆, 摆球  $m$  固定在边长为  $L$ , 质量可忽略不计的等边三角形的顶点  $A$  上。它的对边  $BC$  跟竖直线成不大的夹角  $\alpha$ , 摆球可以绕固定轴  $BC$  摆动。求摆做微小振动的周期。

**解析:** 若  $m$  做微小振动, 则其轨迹一定在过  $A$  点, 垂直于  $BC$  的平面内的以  $O$  为圆心,  $OA$  为半径的圆弧上。因此我们可以作一个过  $A$  点垂直于  $BC$  的平面  $M$ , 如图 13—9—甲所示, 将重力  $mg$  沿  $M$  平面和垂直于  $M$  平面方向分解, 则在平面  $M$  内,  $m$  的振动等效于一个

只在重力  $mg' = mg \sin \alpha$  作用下简谐运动, 摆长  $L' = L \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} L$ 。

所以周期 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}L}{2g \sin \alpha}}$$

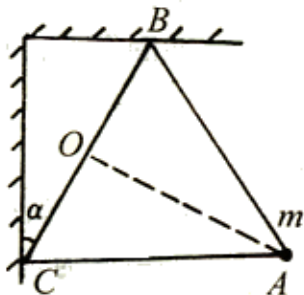


图 13—9

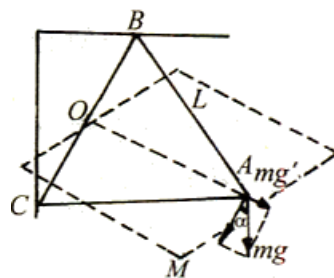


图 13—9—甲

**例 10:** 六个相同的电阻 (阻值均为  $R$ ) 连成一个电阻环, 六个结点依次为 1、2、3、4、5 和 6, 如图 13—10 所示。现有五个完全相同的这样的电阻环, 分别称为  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $\dots$ 、 $D_5$ 。现将  $D_1$  的 1、3、5 三点分别与  $D_2$  的 2、4、6 三点用导线连接, 如图 13—10—甲所示。然后将  $D_2$  的 1、3、5 三点分别与  $D_3$  的 2、4、6 三点用导线连接……依次类推, 最后将  $D_5$  的 1、3、5 三点分别连接到  $D_4$  的 2、4、6 三点上。

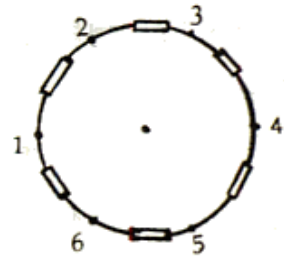


图 13—10

证明: 全部接好后, 在  $D_1$  上的 1、3、两点间的等效是电阻为  $\frac{724}{627} R$ 。

**解析:** 由于连接电阻  $R$  的导线, 连接环  $D$  之间的导线均不计电阻, 因此, 可改变环的半径, 使五个环的大小满足:  $D_1 < D_2 < \dots < D_5$ 。

将图 13—10—甲所示的圆柱形网络变成圆台形网络, 在沿与底面垂直的方向将此圆台形网络压缩成一个平面, 如图 13—10—乙所示的平面电路图。

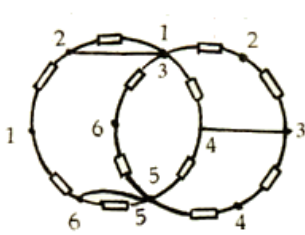


图 13—10—甲

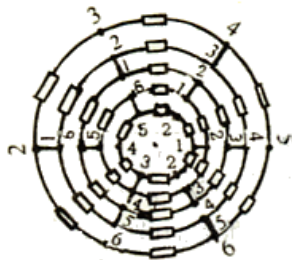


图 13—10—乙

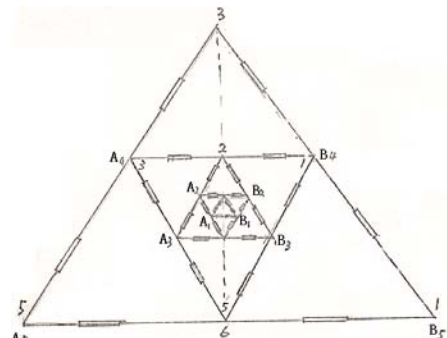


图 13—10—丙



现将圆形电阻环变成三角形，1、3、5 三点为三角形的顶点，2、4、6 三点为三角形三边的中点，图 13—10—乙又变为如图 13—10—丙所示电路图。不难发现，图 13—10—丙所示的电路相对虚直线 3、6 具有左右对称性。

可以用多种解法求。如将电路等效为图 13—10—丁。

$A_1B_1$  以内的电阻

$$R_{A_1B_1} = \frac{4}{5}R$$

$A_2B_2$  以内的电阻

$$R_{A_2B_2} = \frac{(R_{A_1B_1} + 2R)R}{(R_{A_1B_1} + 2R) + R}$$

$$= \frac{14}{19}R$$

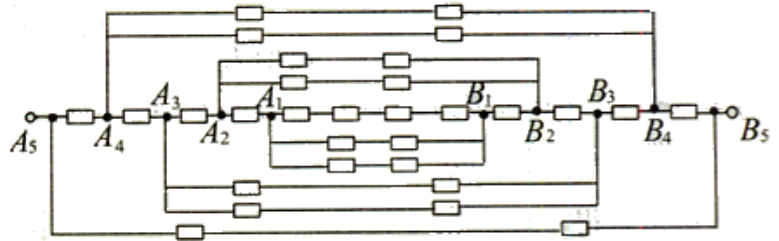


图 13—10—丁

$$A_3B_3 \text{ 以内的电阻 } R_{A_3B_3} = \frac{(R_{A_2B_2} + 2R) \cdot R}{(R_{A_2B_2} + 2R) + R} = \frac{52}{71}R$$

$$A_4B_4 \text{ 以内的电阻 } R_{A_4B_4} = \frac{(R_{A_3B_3} + 2R) \cdot R}{(R_{A_3B_3} + 2R) + R} = \frac{194}{265}R$$

$$A_5B_5 \text{ 以内的电阻 } R_{A_5B_5} = \frac{(R_{A_4B_4} + 2R) \cdot R}{(R_{A_4B_4} + 2R) + R} = \frac{724}{627}R$$

即为  $D_1$  环上 1、3 两点间的等效电阻。

**例 11:** 如图 13—11 所示，用 12 根阻值均为  $r$  的相同的电阻丝构成正立方体框架。试求 AG 两点间的等效电阻。

**解析:** 该电路是立体电路，我们可以将该立体电路“压扁”，使其变成平面电路，如图 13—11—甲所示。

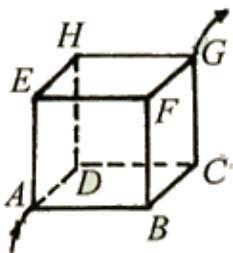


图 13—11

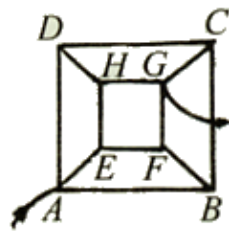


图 13—11—甲

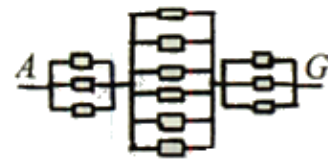


图 13—11—乙

考虑到 D、E、B 三点等势，C、F、H 三点等势，则电路图可等效为如图 13—11—乙所示的电路图，所以 AG 间总电阻为

$$R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r$$

**例 12:** 如图 13—12 所示，倾角为  $\theta$  的斜面上放一木制圆制，其质量  $m=0.2\text{kg}$ ，半径为  $r$ ，长度  $L=0.1\text{m}$ ，圆柱上顺着轴线  $OO'$  绕有  $N=10$  匝的线圈，线圈平面与斜面

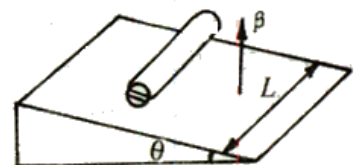


图 13—12

平行，斜面处于竖直向上的匀强磁场中，磁感应强度  $B=0.5\text{T}$ ，当通入多大电流时，圆柱才不致往下滚动？

**解析：**要准确地表达各物理量之间的关系，最好画出正视图，问题就比较容易求解了。如图 13—12—甲所示，磁场力  $F_m$  对线圈的力矩为  $M_B=NBIL \cdot 2r \cdot \sin \theta$ ，重力对 D 点的力矩为：

$M_G=mgsin \theta$ ，平衡时有： $M_B=M_G$

$$\text{则可解得： } I = \frac{mg}{2NBL} = 1.96\text{A}$$

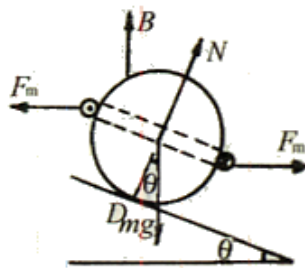


图 13-12-甲

**例 13：**空间由电阻丝组成的无穷网络如图 13—13 所示，每段电阻丝的电阻均为  $r$ ，试求 A、B 间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

**解析：**设想电流 A 点流入，从 B 点流出，由对称性可知，网络中背面那一根无限长电阻丝中各点等电势，故可撤去这根电阻丝，而把空间网络等效为图 13—13—甲所示的电路。

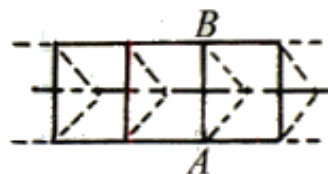


图 13-13

(1) 其中竖直线电阻  $r'$  分别为两个  $r$  串联和一个  $r$  并联后的电阻值，

$$\text{所以 } r' = \frac{2r \cdot r}{3r} = \frac{2}{3}r$$

横线每根电阻仍为  $r$ ，此时将立体网络变成平面网络。

(2) 由于此网络具有左右对称性，所以以 AB 为轴对折，此时网络变为如图 13—13—乙所示的网络。

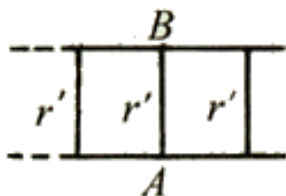


图 13-13-甲

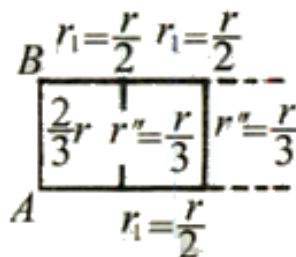


图 13-13-乙

其中横线每根电阻为  $r_1 = \frac{r}{2}$

竖线每根电阻为  $r'' = \frac{r'}{2} = \frac{r}{3}$

AB 对应那根的电阻为  $r' = \frac{2}{3}r$

此时由左右无限大变为右边无限大。

(3) 设第二个网络的结点为 CD，此后均有相同的网络，去掉 AB 时电路为图 13—13—丙所示。再设  $R_{CD}=R_{n-1}$  (不包含 CD 所对应的竖线电阻)

则  $R_{AB'} = R_N$ ，网络如图 13—13—丁所示。

$$\text{此时 } R_n = 2r_1 + \frac{r''R_{n-1}}{r'' + R_{n-1}} = 2 \cdot \frac{r}{2} + \frac{\frac{r}{3} \cdot R_{n-1}}{\frac{r}{3} + R_{n-1}} = r + \frac{rR_{n-1}}{r + 3R_{n-1}}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $R_n = R_{n-1}$   $\therefore$  上式变为  $R_n = r + \frac{rR_n}{r+3R_n} = \frac{r^2 + 4rR_n}{r+3R_n}$

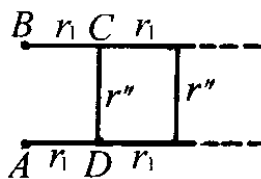


图 13-13-丙



图 13-13-丁

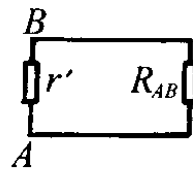


图 13-13-戊

由此解得:  $R_n = \frac{3 + \sqrt{21}r}{6} r$  即  $R_{AB'} = \frac{3 + \sqrt{21}r}{6} r$

补上 AB 竖线对应的电阻  $\frac{2}{3}r$ , 网络变为如图 13—13—戊所示的电路。

$$R_{AB} = \frac{\frac{2}{3}r \cdot R_{AB'}}{\frac{2}{3}r + R_{AB'}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3 + \sqrt{21}}{6} r^2}{\frac{2}{3}r + \frac{3 + \sqrt{21}}{6} r} = \frac{2(3 + \sqrt{21})r}{21 + 3\sqrt{21}} = \frac{2(3 + \sqrt{21})}{\sqrt{21}(\sqrt{21} + 3)} r = \frac{2\sqrt{21}}{21} r$$

**例 14:** 设在地面上方的真空室内, 存在匀强电场和匀强磁场, 已知电场强度和磁感应强度的方向是相同的, 电场强度的大小  $E=4.0\text{V/m}$ , 磁感应强度的大小  $B=0.15\text{T}$ , 今有一个带负电的质点以  $v=20\text{m/s}$  的速度在此区域内沿垂直场强方向做匀速直线运动, 求此带电质点的电量与质量之比  $q/m$  以及磁场的有可能方向 (角度可用反三角函数表)。

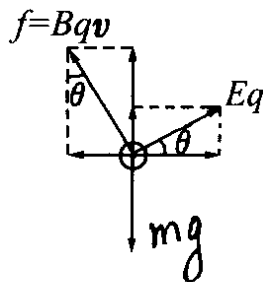


图 13-14

**解析:** 因为带负电的质点做匀速直线运动, 说明此质点所受的合外力为零。又因为电场强度和磁感应强度的方向相同, 所以该带电质点所受的电场力和洛伦兹力的方向垂直共面, 且必受重力作用, 否则所受合外力不可能为零, 设质点速度方向垂直纸面向里。由此该带电质点的受力图如图 13—14 所示。由平衡条件有

有水平方向:  $Eq \cos \theta = Bqv \sin \theta$  ①

在竖直方向:  $Eq \sin \theta + Bqv \cos \theta = mg$  ②

解得:  $\tan \theta = \frac{4}{3}$   $\theta = \arctan \frac{4}{3}$   $q/m=2$

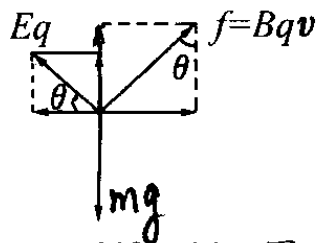


图 13-14-甲

同理, 当质点速度方向垂直纸面向外时受力情况如图 13—14—甲, 由平衡条件可解出  $\theta$  值与上式解出的一样, 只是与纸平面的夹角不同, 故此带电质点的电量与质量之比为 2。

磁场的有可能方向与水平方向的夹角都是  $\theta = \arctan \frac{4}{3}$  或  $\tan \theta = \frac{4}{3}$

## 针对训练

1. 如图 13—15 所示，一个重 1000N 的物体放在倾角为  $30^\circ$  的斜面上，物体与斜面间的摩擦系数  $\mu$  为  $1/3$ 。今有一个与斜面最大倾斜线成  $30^\circ$  角的力  $F$  作用于物体上，使物体在斜面上保持静止，求力  $F$  的大小。

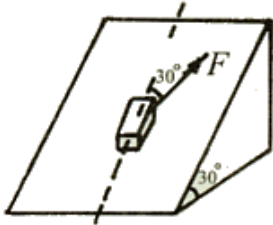


图 13-15

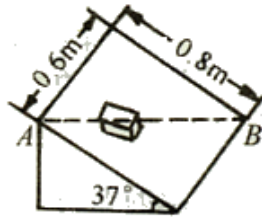


图 13-16

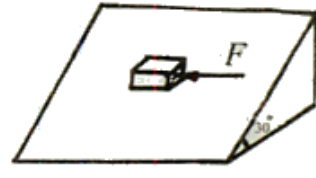


图 13-17

2. 斜面倾角  $\theta = 37^\circ$ ，斜面长为 0.8m，宽为 0.6m，如图 13—16 所示。质量为 2kg 的木块与斜面间的动摩擦因数为  $\mu = 0.5$ ，在平行于斜面方向的恒力  $F$  的作用下，沿斜面对角线从 A 点运动到 B 点 ( $g = 10\text{m/s}^2$ ,  $\sin 37^\circ = 0.6$ )。求：
- (1) 力  $F$  的最小值是多大？
  - (2) 力  $F$  取最小值时木块的加速度。
3. 质量为 0.8kg 的长方形木块静止在倾角为  $30^\circ$  的斜面上，若用平行于斜面沿水平方向大小等于 3N 的力推物体，它仍保持静止，如图 13—17 所示，则木块所受摩擦力大小为 \_\_\_\_\_，方向为 \_\_\_\_\_。
4. 如图 13—18，四面体框架由电阻同为  $R$  的 6 个电阻连接而成，试求任意两个顶点 AB 间的等效电阻。

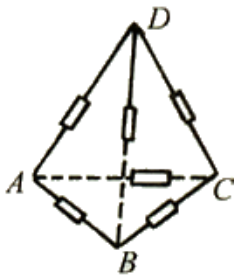


图 13-18

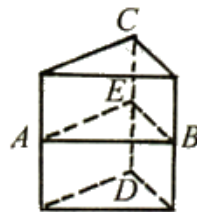


图 13-19

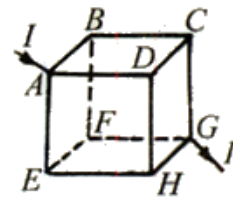


图 13-20

5. 如图 13—19 所示三棱柱由电阻同为  $R$  的电阻线连接而成，试求 AB 两个顶点间的等效电阻。
6. 将同种材料粗细均匀的电阻丝连接成立方体的形状，如图 13—20 所示，每段电阻丝电阻均为  $r$ 。试求：
- (1) AB 两点间等效电阻  $R_{AB}$ ；
  - (2) AD 两点间等效电阻  $R_{AD}$ 。

## 十四、近似法

### 方法简介

近似法是在观察物理现象、进行物理实验、建立物理模型、推导物理规律和求解物理问题时，为了分析认识所研究问题的本质属性，往往突出实际问题的主要方面，忽略某些次要因素，进行近似处理。在求解物理问题时，采用近似处理的手段简化求解过程的方法叫近似法。近似法是研究物理问题的基本思想方法之一，具有广泛的应用。善于对实际问题进行合理的近似处理，是从事创造性研究的重要能力之一。纵观近几年的物理竞赛试题和高考试题，越来越多地注重这种能力的考查。

### 赛题精讲

**例 1:** 一只狐狸以不变的速度  $v_1$  沿着直线 AB 逃跑，一只猎犬以不变的速率  $v_2$  追击，其运动方向始终对准狐狸。某时刻狐狸在 F 处，猎犬在 D 处， $FD \perp AB$ ，且  $FD=L$ ，如图 14—1 所示，求猎犬的加速度的大小。

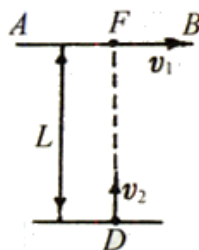


图 14—1

**解析:** 猎犬的运动方向始终对准狐狸且速度大小不变，

故猎犬做匀速率曲线运动，根据向心加速度  $a = \frac{v_2^2}{r}$ ， $r$  为猎

犬所在处的曲率半径，因为  $r$  不断变化，故猎犬的加速度的大小、方向都在不断变化，题目要求猎犬在 D 处的加

速度大小，由于  $v_2$  大小不变，如果求出 D 点的曲率半径，

此时猎犬的加速度大小也就求得了。

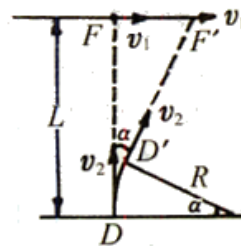


图 14—2—甲

猎犬做匀速率曲线运动，其加速度的大小和方向都在不断改变。在所求时刻开始的一段很短的时间  $\Delta t$  内，猎犬运动的轨迹可近似看做是一段圆弧，设其半径为  $R$ ，则加速度

$$a = \frac{v_2^2}{R}$$

其方向与速度方向垂直，如图 14—1—甲所示。在  $\Delta t$  时间内，设狐狸与猎犬分别到达  $F'$  与  $D'$ ，猎犬的速度方向转过的角度为  $\alpha = v_2 \Delta t / R$

而狐狸跑过的距离是： $v_1 \Delta t \approx \alpha L$  因而  $v_2 \Delta t / R \approx v_1 \Delta t / L$ ， $R = L v_2 / v_1$

所以猎犬的加速度大小为  $a = \frac{v_2^2}{R} = v_1 v_2 / L$

**例 2** 如图 14—2 所示, 岸高为  $h$ , 人用绳经滑轮拉船靠岸, 若当绳与水平方向为  $\theta$  时, 收绳速率为  $v$ , 则该位置船的速率为多大?

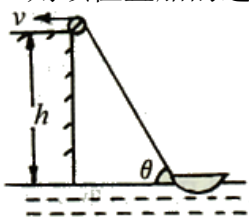


图 14—2

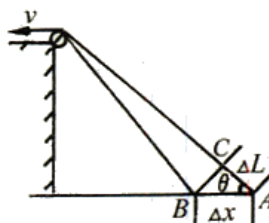


图 14—2—甲

**解析** 要求船在该位置的速率即为瞬时速率, 需从该时刻起取一小段时间求它的平均速率, 当这一小段时间趋于零时, 该平均速率就为所求速率.

设船在  $\theta$  角位置经  $\Delta t$  时间向左行驶  $\Delta x$  距离, 滑轮右侧的绳长缩短  $\Delta L$ , 如图 14—2—甲所示, 当绳与水平方向的角度变化很小时,  $\triangle ABC$  可近似看做是一直角三角形, 因而有  $\Delta L = \Delta x \cos \theta$

两边同除以  $\Delta t$  得:  $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos \theta$ , 即收绳速率  $v = v_{\text{船}} \cos \theta$

因此船的速率为  $v_{\text{船}} = \frac{v}{\cos \theta}$

**例 3** 如图 14—3 所示, 半径为  $R$ , 质量为  $m$  的圆形绳圈, 以角速率  $\omega$  绕中心轴  $O$  在光滑水平面上匀速转动时, 绳中的张力为多大?

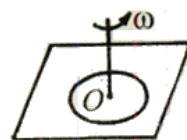


图 14—3

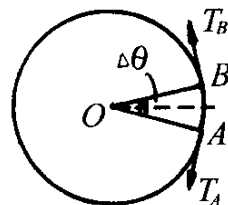
**解析** 取绳上一小段来研究, 当此段弧长对应的圆心角  $\Delta \theta$  很小时, 有近似关系式  $\Delta \theta \approx \sin \Delta \theta$ .

若取绳圈上很短的一小段绳  $AB = \Delta L$  为研究对象, 设这段绳所对应的圆心角为  $\Delta \theta$ , 这段绳两端所受的张力分别为  $T_A$  和  $T_B$  (方向见图 14—3—甲), 因为绳圈匀速转动, 无切向加速度, 所以  $T_A$  和  $T_B$  的大小相等, 均等于  $T$ .  $T_A$  和  $T_B$  在半径方向上的合力提供这一段绳做匀速圆周运动的向心力, 设这段绳子的质量为  $\Delta m$ , 根据牛顿第二定律有:  $2T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = \Delta m \omega^2 R$ ;

因为  $\Delta L$  段很短, 它所对应的圆心角  $\Delta \theta$  很小所以  $\sin \frac{\Delta \theta}{2} = \frac{\Delta \theta}{2}$

将此近似关系和  $\Delta m = R \cdot \Delta \theta \cdot \frac{m}{2\pi R} = \frac{m \Delta \theta}{2\pi}$

代入上式得绳中的张力为  $T = \frac{m \omega^2 R}{2\pi}$



图—14—3—甲

**例 4** 在某铅垂面上有一固定的光滑直角三角形细管轨道 ABC, 光滑小球从顶点 A 处沿斜边轨道自静止出发自由地滑到端点 C 处所需时间, 恰好等于小球从顶点 A 处自静止出发自

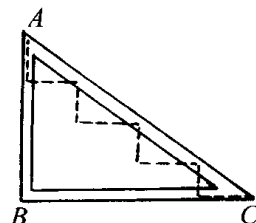


图 14—4

由地经两直角边轨道滑到端点 C 处所需的时间. 这里假设铅垂轨道 AB 与水平轨道 BC 的交接处 B 有极小的圆弧, 可确保小球无碰撞的拐弯, 且拐弯时间可忽略不计.

在此直角三角形范围内可构建一系列如图 14—4 中虚线所示的光滑轨道, 每一轨道是由若干铅垂线轨道与水平轨道交接而成, 交接处都有极小圆弧 (作用同上), 轨道均从 A 点出发到 C 点终止, 且不超出该直角三角形的边界, 试求小球在各条轨道中, 由静止出发自由地从 A 点滑行到 C 点所经时间的上限与下限之比值.

**解析** 直角三角形 AB、BC、CA 三边的长分别记为

$l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ , 如图 14—4—甲所示, 小球从 A 到 B 的时间

记为  $T_1$ , 再从 B 到 C 的时间为  $T_2$ , 而从 A 直接沿斜边到 C

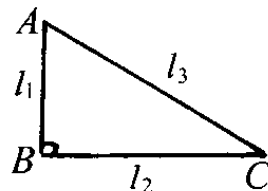


图 14—4—甲

所经历的时间记为  $T_3$ , 由题意知  $T_1 + T_2 = T_3$ , 可得  $l_1 : l_2 : l_3 = 3 : 4 : 5$ ,

由此能得  $T_1$  与  $T_2$  的关系.

$$\text{因为 } l_1 = \frac{1}{2} g T_1^2 \quad l_1 = g T_1 T_2$$

$$\text{所以 } \frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1}{2T_2}$$

$$\text{因为 } l_1 : l_2 = 3 : 4, \text{ 所以 } T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

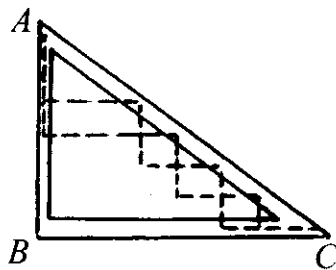


图 14—4—乙

小球在图 14—4—乙中每一虚线所示的轨道中, 经各垂直线段所需时间之和为  $t_1 = T_1$ ,

经各水平段所需时间之和记为  $t_2$ , 则从 A 到 C 所经时间总和为  $t = T_1 + t_2$ , 最短的  $t_2$  对应  $t$  的下限  $t_{\min}$ , 最长的  $t_2$  对应  $t$  的上限  $t_{\max}$ .

小球在各水平段内的运动分别为匀速运动, 同一水平段路程放在低处运动速度大, 所需时间短, 因此, 所有水平段均处在最低位置 (即与 BC 重合) 时  $t_2$  最短, 其值即为  $T_2$ , 故

$$t_{\min} = T_1 + T_2 = \frac{5}{3} T_1.$$

$t_2$  的上限显然对应各水平段处在各自可达到的最高位置, 实现它的方案是垂直段每下降小量  $\Delta l_1$ , 便接一段水平小量  $\Delta l_2$ , 这两个小量之间恒有  $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cot \alpha$ , 角  $\alpha$  即为  $\angle ACB$ , 水平段到达斜边边界后, 再下降一小量并接一相应的水平量, 如此继续下去, 构成如图所示

的微齿形轨道, 由于  $\Delta l_1$ 、 $\Delta l_2$  均为小量, 小球在其中的运动可处理为匀速率运动, 分别所经的时间小量  $\Delta t_1(i)$  与  $\Delta t_2(i)$  之间有如下关联:

$$\frac{\Delta t_2(i)}{\Delta t_1(i)} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \cot \alpha$$

于是作为  $\Delta t_2(i)$  之和的  $t_2$  上限与作为  $\Delta t_1(i)$  之和的  $T_1$  之比也为  $\cot \alpha$ . 故  $t_2$  的上限必为  $T_1 \cot \alpha$ , 即得:  $t_{\max} = T_1 + T_1 \cot \alpha = \frac{7}{3} T_1$ .

这样  $t_{\max} : t_{\min} = 7:5$

**例 5** 在光滑的水平面上有两个质量可忽略的相同弹簧, 它们的一对端点共同连接着一个光滑的小物体, 另外一对端点 A、B 固定在水平面上, 并恰使两弹簧均处于自由长度状态且在同一直线上, 如图 14—5 所示. 如果小物体在此平面上沿着垂直于 A、B 连线的方向稍稍偏离初始位置, 试分析判断它是否将做简谐运动?



图 14—5

**解析** 因为一个物体是否做简谐运动就是要看它所受的回复力是否是一个线性力, 即回复力的大小与位移大小成正比, 方向相反. 因此分析判断该题中的小物体是否做简谐运动, 关键是求出所受的回复力的表达式 (即此题中所受合外力的表达式).

以 AB 中点为原点, 过中点且垂直于 AB 的直线为  $x$  轴, 如图 14—5—甲所示, 取  $x$  轴正方向为正方向, 小物体所受回复力为:  $F_x = -2k(l - l_0) \sin \theta$  ①

其中  $k$  为弹簧的劲度系数,  $l_0$  为弹簧的自由长度,  $l$  为弹簧伸长后的长度,  $\theta$  为弹簧伸长后与 AB 直线的夹角. 由几何知识可得

$$\sin \theta = \frac{x}{l} \quad ②$$

$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2} \quad ③$$

将②、③代入①式得:

$$F_x = -2k \left[ 1 - \left( \frac{l_0}{l_0^2 + x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] x = -2k \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l_0^2} \right) \right] x = -\frac{kx^3}{l_0^2}$$

由此可见, 小物体受的合外力是一个非线性回复力, 因此小物体将不做简谐运动. 同时本题表明, 平衡位置附近的小振动未必都是简谐运动.

**例 6** 三根长度均为  $2m$ , 质量均匀的直杆, 构成一正三角形框架 ABC, C 点悬挂在一

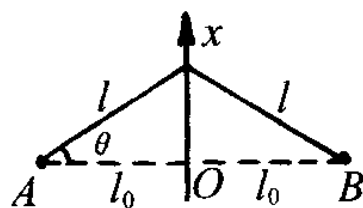


图 14—5—甲



光滑水平转轴上, 整个框架可绕转轴转动. 杆 AB 是一导轨, 一电动玩具松鼠可在导轨上运动, 如图 14—6 所示, 现观察到松鼠正在导轨上运动, 而框架却静止不动, 试论证松鼠的运动是一种什么样的运动.

**解析** 松鼠在 AB 轨道运动, 当框架不动时, 松鼠受到轨道给它的水平力  $F'$  作用, 框架也受到松鼠给它的水平力  $F$  作用, 设在某一时刻, 松鼠离杆 AB 的中点 O 的距离为  $x$ , 如图 14—6 所示, 松鼠在竖直方向对导轨的作用力等于松鼠受到的重力  $mg$ ,  $m$  为松鼠的质量. 以 C 点为轴, 要使框架平衡, 必须满足

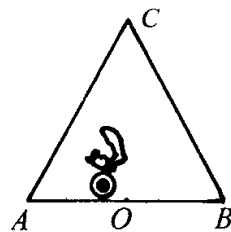


图 14-6

条件  $mgx = FL \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} FL$ , 松鼠对 AB 杆的水平力为

$F = 2mgx/(\sqrt{3}L)$ , 式中  $L$  为杆的长度. 所以对松鼠而言, 在其运动过程中, 沿竖直方向受到的合力为零, 在水平方向受到杆 AB 的作用力为  $F'$ , 由牛顿第三定律可知  $F' = F$ , 即

$$F' = -2mgx/(\sqrt{3}L) = kx$$

$$\text{其中 } k = -\frac{2m}{\sqrt{3}L}$$

即松鼠在水平方向受到的作用力  $F'$  作用下的运动应是以 O 点为平衡位置的简谐运动,

其振动的周期为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\sqrt{3}L/2g} = 2.64s$ .

当松鼠运动到杆 AB 的两端时, 它应反向运动, 按简谐运动规律, 速度必须为零, 所以松鼠做简谐运动的振幅小于或等于  $L/2=1m$ .

由以上论证可知, 当框架保持静止时, 松鼠在导轨 AB 上的运动是以 AB 的中点 O 为平衡位置, 振幅不大于 1m、周期为 2.64s 的简谐运动.

**例 7** 在一个横截面面积为  $S$  的密闭容器中, 有一个质量为  $m$  的活塞把容器中的气体分成两部分. 活塞可在容器中无摩擦地滑动, 活塞两边气体的温度相同, 压强都是  $p$ , 体积分别是  $V_1$  和  $V_2$ , 如图 14—7 所示. 现用某种方法使活塞稍微偏离平衡位置, 然后放开, 活塞将在两边气体压力的作用下来回运动. 容器保持静止, 整个系统可看做是恒温的.

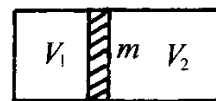


图 14-7

(1) 求活塞运动的周期, 将结果用  $p$ 、 $V_1$ 、 $V_2$ 、 $m$  和  $S$  表示;

(2) 求气体温度  $t = 0^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau$  与气体温度  $\tau' = 30^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau'$  之比值.

**解析** (1) 活塞处于平衡时的位置 O 为坐标原点  $x = 0$ . 当活塞运动到右边距 O 点  $x$  处时, 左边气体的体积由  $V_1$  变为  $V_1 + Sx$ , 右边气体的体积由  $V_2$  变为  $V_2 - Sx$ , 设此时两边气体的压强分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 因系统的温度恒定不变, 根据玻意耳定律有:

$$p_1(V_1 + Sx) = pV_1 \quad p_2(V_2 - Sx) = pV_2$$

$$\text{而以上两式解出: } p_1 = \frac{pV_1}{V_1(1 + \frac{Sx}{V_1})}, p_2 = \frac{pV_2}{2V_2(1 + \frac{Sx}{V_2})} \quad \textcircled{1}$$

按题意, 活塞只稍许离开平衡位置, 故上式可近似为:  $p_1 \approx p(1 - \frac{S}{V_1}x)$ ,

$p_2 \approx p(1 + \frac{S}{V_2}x)$ , 于是活塞受的合力为  $(p_1 - p_2)S = -pS^2(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})x$ . 所以活塞的运动方

$$\text{程是 } ma = -pS^2(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})x = -pS^2 \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} x$$

其中  $a$  是加速度, 由此说明活塞做简谐运动, 周期为  $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{pS^2(V_1 + V_2)}}$

(2) 设温度为  $t$  时, 周期为  $\tau$ , 温度为  $t'$  时, 周期为  $\tau'$ . 由于  $\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'}$ , 得出

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{p'S^2(V_1 + V_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1 V_2}{pS^2(V_1 + V_2) \cdot \frac{T}{T'}}} = \tau \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

所以  $\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{T}{T'}}$ , 将数值代入得  $\tau':\tau = 0.95$

**例 8** 如图 14-8 所示, 在边长为  $a$  的正三角形三个顶点 A、B、C 处分别固定电量为  $Q$  的正点电荷, 在其中三条中线的交点 O 上放置一个质量为  $m$ , 电量为  $q$  的带正电质点, O 点显然为带电质点的平衡位置, 设该质点沿某一中线稍稍偏离平衡位置, 试证明它将做简谐运动, 并求其振动周期.

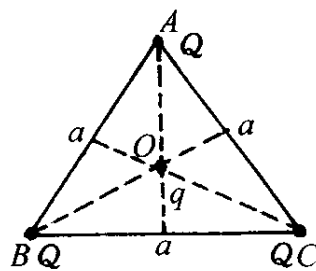


图 14-8

**解析** 要想证明带电质点是否做简谐运动, 则需证明该带电质点沿某一中线稍稍偏离平衡位置时, 所受的回复力是否与其位移大小成正比, 方向相反. 因此该题的关键是求出它所受回复力的表达式, 在此题也就是合外力的表达式.

以 O 为坐标原点, 以 AOD 中线为坐标  $x$  轴, 如图

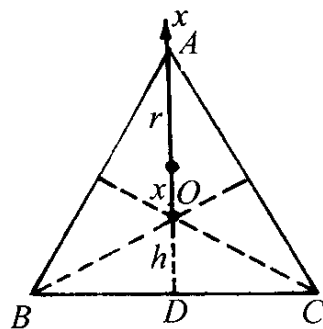


图 14-8-甲

14—8—甲所示，设带电质点在该轴上偏移  $x$ ，A 处 Q 对

其作用力为  $F_1$ ，B、C 处两个 Q 对其作用的合力为  $F_2$ ，取  $x$  轴方向为正方向。有

$$F_1 = -\frac{kQq}{(r-x)^2} = -\frac{kQq}{r^2} \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2}$$

$$\text{因为 } r = OA = OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2} = 1 + \frac{2x}{r} + \dots \text{当 } x \text{ 很小时可忽略高次项所以 } F_1 = -3k \frac{Qq}{a^2} \left(1 + \frac{6x}{\sqrt{3}a}\right)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= 2 \left( \frac{kQq}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2} \cdot \frac{h+x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2}} \right) \\ &= 2kQq(h+x) \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h+x)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{4} + h^2 + 2hx \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{略去 } x^2 \text{ 项}) \\ &= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}ax \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 2kQq(h+x) \left( \frac{a^2}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{a}x \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 6\sqrt{3}kQq \frac{h+x}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{a}x \right) \\ &= 6\sqrt{3}k \frac{Qq}{a^3} \left( h - \frac{3\sqrt{3}}{2a}hx + x \right) \quad (\text{略去 } x^2 \text{ 项}) \\ &= 6\sqrt{3}k \frac{Qq}{a^3} h \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2a}x + \frac{x}{h} \right) \end{aligned}$$

$$= 3k \frac{Qq}{a^3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2a} x\right)$$

$$\text{因此带电质点所受合力为 } F_x = F_1 + F_2 = -3k \frac{Q}{a^2} q \left(\frac{6x}{\sqrt{3}a} - \frac{\sqrt{3}}{2a} x\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} k \frac{Q}{a^3} qx$$

由此可知，合外力  $F_x$  与  $x$  大小成正比，方向相反。

$$\text{即该带电质点将做简谐运动，其振动周期为 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi a}{3} \sqrt{\frac{2am}{3kQq}}$$

**例 9** 欲测电阻  $R$  的阻值，现有几个标准电阻、一个电池和一个未经标定的电流计，连成如图 14—9 所示的电路。第一次与电流计并联的电阻  $r$  为  $50.00 \Omega$ ，电流计的示数为 3.9 格；第二次  $r$  为  $100.00 \Omega$ ，电流计的示数为 5.2 格；第三次  $r$  为  $10.00 \Omega$ ，同时将待测电阻  $R$  换成一个  $20.00 \text{ k}\Omega$  的标准电阻，结果电流计的示数为 7.8 格。已知电流计的示数与所通过的电流成正比，求电阻  $R$  的阻值。

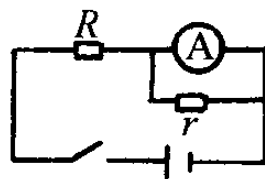


图 14—9

**解析** 在测试中，除待求量  $R$  外，电源电动势  $E$ ，电源内阻  $r$ ，电流计内阻  $R_g$  以及电流计每偏转一格的电流  $I_0$ ，均属未知。本题数据不足，且电流计读数只有两位有效数字，故本题需要用近似方法求解。

设电源电动势为  $E$ ，电流计内阻为  $R_g$ ，电流计每偏转一格的电流为  $I_0$ ，用欧姆定律对三次测量的结果列式如下：

$$\frac{E}{\frac{50R_g}{50 + R_g} + R + r} \cdot \frac{50R_g}{50 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 3.9I_0$$

$$\frac{E}{\frac{100R_g}{100 + R_g} + R + r} \cdot \frac{100R_g}{100 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 5.2I_0$$

$$\frac{E}{\frac{10R_g}{10 + R_g} + 20000 + r} \cdot \frac{10R_g}{10 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 7.8I_0$$

从第三次测量数据可知，当用  $20 \text{ k}\Omega$  电阻取代  $R$ ，而且  $r$  阻值减小时电流计偏转格数明

显增大，可推知  $R$  的阻值明显大于  $20\text{k}\Omega$ ，因此电源内阻完全可以忽略不计，与  $R$  相比，电流计内阻  $R_g$  与  $r$  的并联值对干路电流的影响同样也可以忽略不计，故以上三式可近似为：

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{50}{50 + R_g} = 3.9I_0 \quad (1)$$

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{100}{100 + R_g} = 5.2I_0 \quad (2)$$

$$\frac{E}{20000} \cdot \frac{10}{10 + R_g} = 7.8I_0 \quad (3)$$

待测电阻  $R=120\text{k}\Omega$

解①、②、③三式，可得  $R_g=50\Omega$

**例 10** 如图 14—10 所示，两个带正电的点电荷 A、B 带电量均为  $Q$ ，固定放在  $x$  轴上的两处，离原点都等于  $r$ 。若在原点  $O$  放另一正点电荷  $P$ ，其带电量为  $q$ ，质量为  $m$ ，限制  $P$  在哪些方向上运动时，它在原点  $O$  才是稳定的？

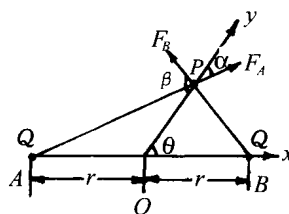


图 14—10

**解析** 设  $y$  轴与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ ，正电点电荷  $P$  在原点沿  $y$  轴方向有微小的位移  $s$  时，

A、B 两处的点电荷对  $P$  的库仑力分别为  $F_A$ 、 $F_B$ ，方向如图 14—10 所示， $P$  所受的库仑力

在  $y$  轴上的分量为  $F_y = F_A \cos \alpha - F_B \cos \beta$  (1)

根据库仑定律和余弦定理得  $F_A = \frac{kqQ}{r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta}$  (2)

$$F_B = \frac{kqQ}{r^2 - s^2 + 2rs \cos \theta} \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{r \cos \theta + s}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta}} \quad (4)$$

$$\cos \beta = \frac{r \cos \theta - s}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta}} \quad (5)$$

将②、③、④、⑤式代入①得：

$$F_y = \frac{kqQ(r \cos \theta + s)}{(r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta)^{3/2}} - \frac{kqQ(r \cos \theta - s)}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta)^{3/2}}$$

因为  $s$  很小, 忽略  $s^2$  得:

$$F_y = \frac{kqQ}{r^3} \left[ \frac{r \cos \theta + s}{\left(1 + \frac{2s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{r \cos \theta - s}{\left(1 - \frac{2s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \right]$$

又因为  $s \leq r$ ,  $\frac{2s}{r} \cos \theta < 1$

所以利用近似计算  $(1 \pm x)^{\frac{3}{2}} \approx 1 \mp \frac{3}{2}x$  得

$$F_y \approx \frac{kqQ}{r^3} \left[ (r \cos \theta + s) \left(1 + \frac{3s}{r} \cos \theta\right) - (r \cos \theta - s) \left(1 + \frac{3s}{r} \cos \theta\right) \right]$$

忽略  $s^2$  得  $F_y = -\frac{kqQs}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$

当  $(3 \cos^2 \theta - 1) > 0$  时  $F_y$  具有恢复线性形式, 所以在  $\cos^2 \theta > \frac{1}{3}$  范围内, P 可围绕原点做微小振动, 所以 P 在 原点处是稳定的。

**例 11** 某水池的实际深度为  $h$ , 垂直于水面往下看, 水池底的视深为多少? (设水的折射率为  $n$ )

解析 如图 14—11 所示, 设 S 为水池底的点光源, 在由 S 点发出的光线中选取一条垂直于面 MN 的光线, 由 O 点垂直射出, 由于观察者在 S 正上方, 所以另一条光线与光线 SO 成极小的角度从点 S 射向水面点 A, 由点 A 远离法线折射到空气中, 因入射角极小, 故折射角也很小, 进入人眼的两条折射光线的反向延长线交于点 S', 该点即为我们看到水池底光源 S 的像, 像点 S' 到水面的距离  $h'$ , 即为视深。

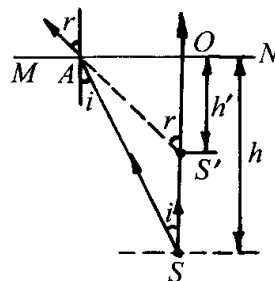


图 14-11

由几何关系有  $\tan r = \overline{AB}/h'$ ,  $\tan i = \overline{AO}/h$ , 所以  $\tan r / \tan i = h/h'$ , 因为  $r$ 、 $i$  均很

小, 则有  $\tan r \approx \sin r$ ,  $\tan i \approx \sin i$ , 所以  $\sin r / \sin i \approx h/h'$  又因  $n = \frac{\sin r}{\sin i}$

所以视深  $h' = h/n$

## 针对训练

1. 活塞把密闭气缸分成左、右两个气室，每室各与 U 形管压强计的一臂相连，压强计的两臂截面处处相同. U 形管内盛有密度为  $\rho = 7.5 \times 10^2 \text{kg/m}^3$  的液体. 开始时左、右两气室的体积都为  $V_0 = 1.2 \times 10^{-2} \text{m}^3$ ，气压都为  $p_0 = 4.0 \times 10^3 \text{Pa}$ ，且液体的液面处在同一高度，如图 14—12 所示. 现缓缓向左推动活塞，直到液体在 U 形管中的高度差  $h = 40 \text{cm}$ . 求此时左、右气室的体积  $V_1$ 、 $V_2$ . 假定两气室的温度保持不变. 计算时可以不计 U 形管和连接管道中气体的体积. 取  $g = 10 \text{m/s}^2$ .

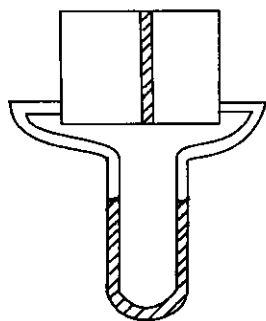


图 14—12

2. 一气缸的初始体积为  $V_0$ ，其中盛有  $2 \text{mol}$  的空气和少量的水（水的体积可忽略），其平衡时气体的总压强是  $3.0$  大气压. 经过等温膨胀使其体积加倍，在膨胀过程结束时，其中的水刚好全部消失，此时的总压强为  $2.0$  大气压. 若让其继续作等温膨胀，使其体积再次加倍，试计算此时：
- (1) 气缸中气体的温度；
  - (2) 气缸中水蒸气的摩尔数；
  - (3) 气缸中气体的总压强.（假定空气和水蒸气均可当做理想气体处理）

3. 1964 年制成了世界上第一盏用海浪发电的航标灯，它的气室示意图如图 14—13 所示. 利用海浪上下起伏力量，空气能被吸进来，压缩后再推入工作室，推动涡轮机带动发电机发电. 当海水下降时，阀门  $S_1$  关闭， $S_2$  打开，设每次吸入压强为  $1.0 \times 10^6 \text{Pa}$ 、温度为  $7^\circ\text{C}$  的空气  $0.233 \text{m}^3$ （空气可视为理想气体），当海上升时， $S_2$  关闭，海水推动活塞

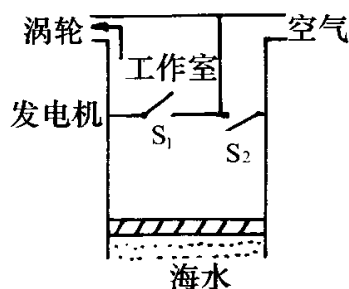


图 14—13

绝热压缩空气，空气压强达到  $\sqrt{32} \times 10^5 \text{Pa}$  时，阀门  $S_1$  才

打开.  $S_1$  打开后，活塞继续推动空气，直到气体全部推入工

作室为止，同时工作室的空气推动涡轮机工作. 设打开  $S_1$  后，活塞附近的压强近似保持不变，活塞的质量及活塞筒壁间的摩擦忽略不计. 问海水每次上升时所做的功是多少？已知空气从压强为  $p_1$ 、体积为  $V_1$  的状态绝热的改变到压强为  $p_2$ 、体积为  $V_2$  的状态过程中，近似遵循关系式  $p_1/p_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$ ， $1 \text{mol}$  理想气体温度升高  $1 \text{K}$  时，内能改变为  $3R/2$ . [ $R = 8.31 \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ]

4. 如图 14—14 所示，在  $Ox$  轴的坐标原点  $O$  处，有一固定的电量为  $Q (Q > 0)$  的点电荷，在  $x = -L$  处，有一固定的、电量为  $-2Q$  的点电荷，今有一正试探电荷  $q$  放在  $x$  轴上  $x > 0$  的位置，并设斥力为正，引力为负.

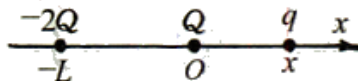


图 14—14

- (1) 当  $q$  的位置限制在  $Ox$  轴上变化时, 求  $q$  的受力平衡的位置, 并讨论平衡的稳定性;  
 (2) 试定性地画出试探电荷  $q$  所受的合力  $F$  与  $q$  在  $Ox$  轴上的位置  $x$  的关系图线.

5. 如图 14—15 所示, 一人站在水面平静的湖岸边, 观察到离岸边有一段距离的水下的一条鱼, 此人看到鱼的位置与鱼在水下的真实位置相比较, 应处于什么方位.

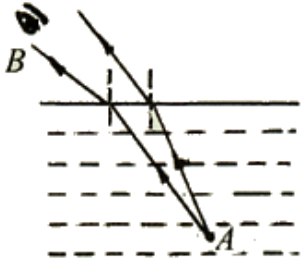


图 14—15

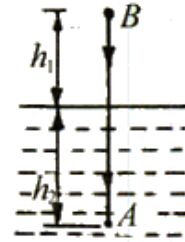


图 14—16

6. 如图 14—16 所示, 天空中有一小鸟  $B$ , 距水面高  $h_1 = 3m$ , 其正下方距水面深  $h_2 = 4m$  处的水中有一条小鱼  $A$ . 已知水的折射率为  $4/3$ , 则小鸟看水中的鱼距离自己是多远? 小鱼看到鸟距离自己又是多远?

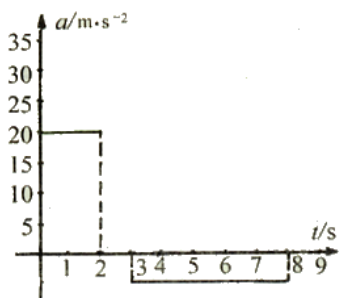


## 参考答案

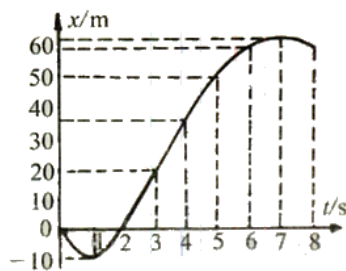
### 十一、图象法

1. A 2. A、D 3. C

4.



第4题 (b)



第4题 (c)

5.  $t_1 > t_2$     6. 乙图中小球先到底端    7.  $v_B = \sqrt{2a \frac{s}{n} (n + \frac{n-1}{2})} = \sqrt{as(3 - \frac{1}{n})}$     8. 13.64s

9. 2:1    10. D    11.  $t = \sqrt{\frac{2sFG}{g(F-f)f}}$      $v_m = \sqrt{\frac{2gfs(F-f)}{FG}}$

### 十二、类比法

1.  $2\sqrt{3}LR^2 / 3Gt^2$     2.  $\frac{kQ^2 aR}{(a^2 - R^2)^2}$     3.  $\frac{kQ(\frac{R}{a}Q + q)}{a^2} - \frac{kQ^2 aR}{(a^2 - R^2)^2}$

4.  $C_{AB} = 2.9\mu F$     5.  $C_{AB} = 6\mu F$

6. (1)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$     (2)  $C_{\text{总}} = C'$     (3)  $C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$

7.  $N = \frac{\Delta L^2(H+t)}{\lambda[H(t-f)-tf]}$  (注: 将“两块半透镜移开一小段距离”后加“ $\Delta L$ ”在“ $t > f$

处放置一个”与“单色点光源”之间加“波长为 $\lambda$ 的”.)

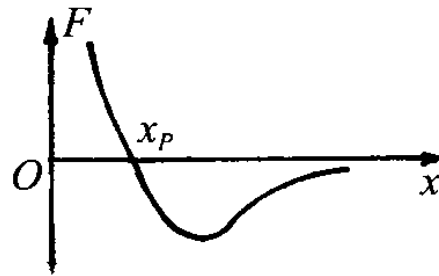
8. (1)  $a = 0.5 \times 10^{-3}m$     (2)  $d = 4m$

## 十三、降维法

1.  $0.288 \times 10^3 \text{N} \leq F \leq 0.577 \times 10^3 \text{N}$     2. (1) 7.2N    (2)  $0.8 \text{m/s}^2$   
 3. 5N 沿斜面指向右上方水平方向的夹角为  $53^\circ$   
 4.  $R_{AB} = \frac{R}{2}$     5.  $R_{AB} = \frac{4}{9}R$     6. (1)  $R_{AG} = \frac{5}{6}r$     (2)  $R_{AD} = \frac{7}{12}r$

## 十四、近似法

1.  $V_1 = 0.8 \times 10^{-2} \text{m}^3$  ,  $V_2 = 1.6 \times 10^{-2} \text{m}^3$     2. (1) 373K    (2) 2mol    (3) 1.0 大气压  
 3.  $8.15 \times 10^4 \text{J}$     4. (1) 平衡是稳定的    (2)  
 5. 应在鱼的右上方  
 6. 6m, 8m



第 4 题(2)