2013年首届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛

参考答案

第二试

http://www.omaths.com

2013年7月13日　　9:40–12:10

一. (本题满分40分)

如图1, 已知$\triangle ABC$的外心为O, 其外接圆直径MN分别交AB, AC于点E, F. E, F关于O的对称点分别为E_1, F_1.

求证: 直线BF_1与CE_1的交点在$\triangle ABC$的外接圆上.　　(单　墫　供题)

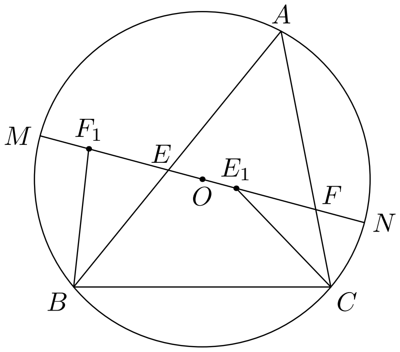

图 1

解答 (法一) 如图2, 设A, B, C关于直径MN的垂直平分线l的对称点分别为A_1, B_1, C_1, 则E_1, F_1分别在A_1B_1, A_1C_1上.

设CE_1交$\odot O$于点A', 联结$A'F_1$, $A'A_1$. 于是

$$\begin{aligned}
\angle A_1F_1E_1 &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NA_1}{}^\circ + \overset{\frown}{MC_1}{}^\circ\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NA_1}{}^\circ + \overset{\frown}{CN}{}^\circ\right) \ (\overset{\frown}{MC_1}\text{与}\overset{\frown}{CN}\text{关于直线}l\text{对称}) \\
&= \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA_1}{}^\circ = \angle A_1A'E_1
\end{aligned}$$

所以, A_1, F_1, E_1, A' 四点共圆. 于是$\angle A'F_1A_1 = \angle A'E_1A_1 = \angle CE_1B_1$.

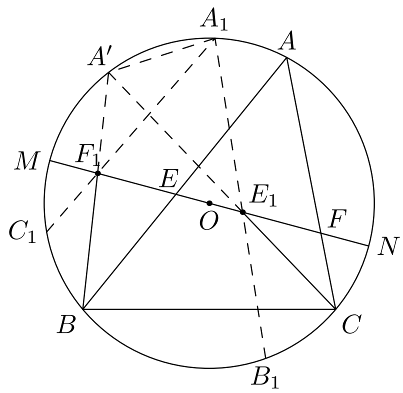

图 2

类似地,

$$\begin{aligned}
\angle BEM &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BM}{}^\circ + \overset{\frown}{AN}{}^\circ\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BM}{}^\circ + \overset{\frown}{MA_1}{}^\circ\right) \ (\overset{\frown}{AN}\text{与}\overset{\frown}{MA_1}\text{关于直线}l\text{对称}) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BNA_1}{}^\circ = 180^\circ - \angle F_1C_1B.
\end{aligned}$$

所以, B, F_1, E, C_1四点共圆, 于是$\angle C_1F_1B = \angle C_1EB$.

因为$\angle CE_1B_1=\angle C_1EB$ (两个角关于直线l对称) , 所以$\angle A'F_1A_1=\angle CE_1B_1=\angle C_1EB=\angle C_1F_1B$, 从而$A'$, F, B三点共线, 即直线BF_1, CE_1相交于$\odot O$上的点A'.

(法二) 如图3, 作点C关于直径MN的垂直平分线l的对称点C_1, 根据对称性知C_1在$\odot O$上. 设直线CE_1交$\odot O$于D, 联结BD交MN 于点F_2, 联结C_1E, C_1B, C_1F_2.

因为$OE=OE_1$, 根据对称性, 易知

$$\angle C_1EF_2=\angle CE_1F=\frac{\widehat{DM}^\circ+\widehat{CN}^\circ}{2}=\frac{\widehat{DM}^\circ+\widehat{C_1M}^\circ}{2}=180^\circ-\frac{\widehat{DAC_1}^\circ}{2}=180^\circ-\angle F_2BC,$$

所以F_2, B, C_1, E四点共圆, 所以$\angle F_2BE=\angle F_2C_1E=\angle FCE_1$, 又根据对称性知$C_1E=CE_1$, 所以$\triangle F_2C_1E\cong\triangle FCE_1$, 所以$EF_2=E_1F=EF_1$, 因此$F_2$与$F_1$重合, 所以$BF_1$, CE_1交于$\odot O$上的点D.

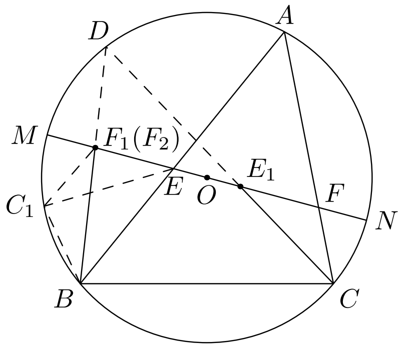

图 3

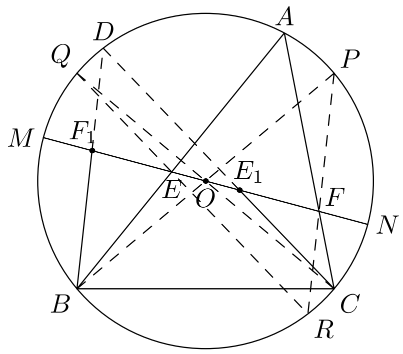

图 4

(法三) 如图4, 联结BO, CO并延长分别交$\odot O$于点P, Q, 联结QE, PF并延长交于点R. 根据帕斯卡定理知点R在$\odot O$上, 于是知$\angle QRP=\dfrac{\widehat{PQ}^\circ}{2}=\dfrac{\widehat{BC}^\circ}{2}=\angle BAC$.

设BF_1, CE_1交于点D. 因为$OE=OE_1$, $OQ=OC$, 所以$QR\parallel CD$. 同理可知$PR\parallel BD$, 所以$\angle BDC=\angle QRP=\angle BAC$, 所以点$D$在$\odot O$上.

二. (本题满分40分)

设M为所有小于1000的正整数组成的集合. M上的运算"$\circ$" 定义如下:

设a, $b\in M$, 若$ab\in M$, 则$a\circ b=ab$. 若$ab\notin M$, 设$ab=1000k+r$, 其中k为正整数, r为非负整数, 且$r<1000$. 当$k+r\in M$时, $a\circ b=k+r$; 当$k+r\notin M$时, 再设$k+r=1000+s$, $a\circ b=s+1$.

例如, $559\times297=166023$, 所以$599\circ297=166+23=189$. 再如$559\times983=549497$, $549+497=1046$, 所以$559\circ983=1+46=47$.

(1) 求$559\circ758$;

(2) 求$x\in M$, 使得$559\circ x=1$;

(3) 问: 该运算是否满足结合律? 即对于任意的a, b, $c\in M$, 是否一定有$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$? 如果成立, 请加以证明; 如果不成立, 请举出反例. (单 墫 供题)

解答 (1) $559\times758=423722$, $423+722=1145>1000$, 所以, $559\circ758=145+1=146$.

(2) 首先证明: 对a, $b\in M$,

$$a\circ b\equiv ab\pmod{999}. \qquad ①$$

当$ab\in M$时, 式①显然成立.

当$ab\notin M$时, $ab=1000k+r$. 若$k+r\in M$, 则$a\circ b=k+r\equiv1000k+r\equiv ab\pmod{999}$; 若$k+r\notin M$, 则$a\circ b=s+1=k+r-999\equiv k+r\equiv1000k+r\equiv ab\pmod{999}$. 此时均有式①成立.

其次证明: 对a, $b\in M$, $a\circ b<1000$.

对$a,b\in M$, $a\cdot b<1000000$, 设$ab=1000k+r$, 则$k<1000$, 又$0\leqslant r\leqslant 999$, 于是$k+r<1999$. 若$k+r<1000$, 则$a\circ b=k+r<1000$; 若$1000\leqslant k+r<1999$, 则$a\circ b=k+r-999<1000$.

由式①知$559\circ x=1\ (x\in M)$ 等价于$559x\equiv 1\pmod{999}\ (x\in M)$.

由$(559,999)=1$, 根据完全剩余系的性质知这样的x存在且惟一.

由$9\mid 999$及$37\mid 999$, 知$1\equiv 559x\equiv x\pmod 9$, 不妨设$x=9t+1\ (t\in\mathbf{N})$. 又由$1\equiv 559x\equiv 4x\equiv 36t+4\equiv 1\pmod{37}$, 知$t\equiv 3\pmod{37}$.

经检验可知, $x=361$.

(3) 由式①可知

$$a\circ(b\circ c)\equiv a\cdot(b\circ c)\equiv abc\pmod{999}.$$

同理,

$$(a\circ b)\circ c\equiv(a\circ b)\cdot c\equiv abc\pmod{999}.$$

所以满足结合律.

三. (本题满分50分)

已知正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$与非负实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足

(a) $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n=n$;

(b) $a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n=\dfrac{1}{2}$.

试求$a_1a_2\cdots a_n\left(\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$的最大值. (田开斌　褚小光　潘成华　供题)

解答 根据均值不等式知

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\leqslant\left[\frac{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)}{n}\right]^n=1.$$

于是

$$a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n+(b_1a_2a_3\cdots a_n+a_1b_2a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2a_3\cdots b_n)\leqslant 1.$$

即

$$a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)\leqslant 1-(a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n)=\frac{1}{2}.$$

取$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$, $a_n=\dfrac{1}{2}$, $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$, $b_n=\dfrac{1}{2}$, 满足题设条件. 且使得$a_1a_2\cdots a_n\left(\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

因此, $a_1a_2\cdots a_n\left(\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$的最大值为$\dfrac{1}{2}$.

四. (本题满分50分)

设实数$a_1,a_2,\cdots,a_{2013}$ (允许有相同的) 的算术平均值为m, 称满足

$$a_i+a_j+a_k\geqslant 3m\ (i<j<k)$$

的$\{i,j,k\}$为“优组” . 求优组个数的最小可能值. (林　常　供题)

解答 考虑$n=3k\ (k\in\mathbf{N}^*)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=3km$的情形.

将$a_1,a_2,\cdots,a_n$任意地划分为k个三元组, 由于k个和数之和等于$3km$, 其中至少有一个不少于$3m$, 即至少有一个优组.

$3k$个数的三元组划分共有$\dfrac{(3k)!}{(3!)^k\cdot k!}$种, 每种划分至少给出一个优组. 另一方面, 每个优组出现的次数是其余$3k-3$个数的三元划分种数$\dfrac{(3k-3)!}{(3!)^{k-1}\cdot(k-1)!}$, 因此, 优组的个数不少于

$$\frac{(3k)!}{(3!)^k\cdot k!}\div\frac{(3k-3)!}{(3!)^{k-1}\cdot(k-1)!}=\frac{(3k-1)(3k-2)}{2}=\mathrm{C}_{n-1}^2.$$

取$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = m - 1$, $a_n = m + n - 1$, 此时任一三元组为优组当且仅当它含a_n, 故优组的个数即为C_{n-1}^2, 达到最小值.

特别地, 取$n = 2013$, 得到本题的结果C_{2012}^2.