

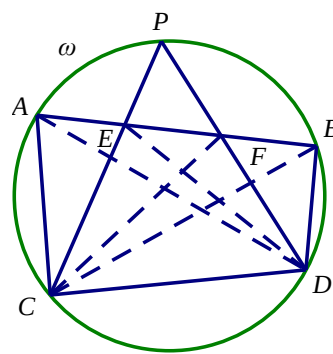
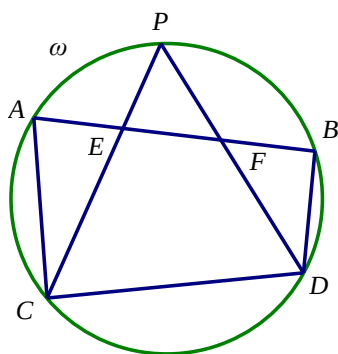
2013 年全国高中数学联合竞赛加试 试题参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分。
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、(本题满分 40 分) 如图， AB 是圆 ω 的一条弦， P 为弧 AB 内一点， E 、 F 为线段 AB 上两点，满足 $AE = EF = FB$ 。连接 PE 、 PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C 、 D 。求证：

$$EF \cdot CD = AC \cdot BD.$$



证明 连接 AD ， BC ， CF ， DE 。由于 $AE = EF = FB$ ，从而

$$\frac{BC \cdot \sin \angle BCE}{AC \cdot \sin \angle ACE} = \frac{\text{点 } B \text{ 到直线 } CP \text{ 的距离}}{\text{点 } A \text{ 到直线 } CP \text{ 的距离}} = \frac{BE}{AE} = 2. \quad (1)$$

.....10 分

同样

$$\frac{AD \cdot \sin \angle ADF}{BD \cdot \sin \angle BDF} = \frac{\text{点 } A \text{ 到直线 } PD \text{ 的距离}}{\text{点 } B \text{ 到直线 } PD \text{ 的距离}} = \frac{AF}{BF} = 2. \quad (2)$$

另一方面，由于

$$\angle BCE = \angle BCP = \angle BDP = \angle BDF,$$

$$\angle ACE = \angle ACP = \angle ADP = \angle ADF,$$

故将①，②两式相乘可得 $\frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} = 4$ ，即

$$BC \cdot AD = 4AC \cdot BD. \quad (3)$$

.....30 分

由托勒密定理

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD. \quad \textcircled{4}$$

故由③, ④得

$$AB \cdot CD = 3AC \cdot BD,$$

即

$$EF \cdot CD = AC \cdot BD. \quad \dots\dots\dots 40 \text{ 分}$$

二、(本题满分 40 分) 给定正整数 u, v . 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1 = u + v$, 对整数 $m \geq 1$,

$$\begin{cases} a_{2m} = a_m + u, \\ a_{2m+1} = a_m + v. \end{cases}$$

记 $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ($m = 1, 2, \dots$). 证明: 数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

证明 对正整数 n , 有

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{2^{n+1}-2} + a_{2^{n+1}-1}) \\ &= u + v + (a_1 + u + a_1 + v) + (a_2 + u + a_2 + v) + \dots + (a_{2^n-1} + u + a_{2^n-1} + v) \\ &= 2^n(u + v) + 2S_{2^n-1}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &= 2^{n-1}(u + v) + 2S_{2^{n-1}-1} = 2^{n-1}(u + v) + 2(2^{n-2}(u + v) + 2S_{2^{n-2}-1}) \\ &= 2 \cdot 2^{n-1}(u + v) + 2^2 S_{2^{n-2}-1} \\ &= \dots = (n-1) \cdot 2^{n-1}(u + v) + 2^{n-1}(u + v) \\ &= (u + v)n \cdot 2^{n-1}. \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分} \end{aligned}$$

设 $u + v = 2^k \cdot q$, 其中 k 是非负整数, q 是奇数. 取 $n = q \cdot l^2$, 其中 l 为满足

$l \equiv k-1 \pmod{2}$ 的任意正整数, 此时 $S_{2^n-1} = q^2 l^2 \cdot 2^{k-1+q \cdot l^2}$, 注意到 q 是奇数, 故

$$k-1+q \cdot l^2 \equiv k-1+l^2 \equiv k-1+(k-1)^2 = k(k-1) \equiv 0 \pmod{2},$$

所以, S_{2^n-1} 是完全平方数. 由于 l 有无穷多个, 故数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数. \dots\dots\dots 40 分

三、(本题满分 50 分) 一次考试共有 m 道试题, n 个学生参加, 其中 $m, n \geq 2$ 为给定的整数. 每道题的得分规则是: 若该题恰有 x 个学生没有答对, 则每个答对该题的学生得 x 分, 未答对的学生得零分. 每个学生的总分为其 m 道题的得分

总和. 将所有学生总分从高到低排列为 $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$, 求 $p_1 + p_n$ 的最大可能值.

解 对任意的 $k=1, 2, \cdots, m$, 设第 k 题没有答对者有 x_k 人, 则第 k 题答对者有 $n-x_k$ 人, 由得分规则知, 这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分. 设 n 个学生的得分之和为 S , 则有

$$\sum_{i=1}^n p_i = S = \sum_{k=1}^m x_k(n-x_k) = n \sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^m x_k^2.$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分, 故

$$p_1 \leq \sum_{k=1}^m x_k. \quad \cdots \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

由于 $p_2 \geq \cdots \geq p_n$, 故有 $p_n \leq \frac{p_2 + p_3 + \cdots + p_n}{n-1} = \frac{S-p_1}{n-1}$. 所以

$$\begin{aligned} p_1 + p_n &\leq p_1 + \frac{S-p_1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} p_1 + \frac{S}{n-1} \\ &\leq \frac{n-2}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^m x_k + \frac{1}{n-1} \cdot \left(n \sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^m x_k - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^m x_k^2. \quad \cdots \cdots \cdots 20 \text{ 分} \end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\sum_{k=1}^m x_k^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2,$$

于是

$$\begin{aligned} p_1 + p_n &\leq 2 \sum_{k=1}^m x_k - \frac{1}{m(n-1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \\ &= -\frac{1}{m(n-1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^m x_k - m(n-1) \right)^2 + m(n-1) \\ &\leq m(n-1). \quad \cdots \cdots \cdots 40 \text{ 分} \end{aligned}$$

另一方面, 若有一个学生全部答对, 其他 $n-1$ 个学生全部答错, 则

$$p_1 + p_n = p_1 = \sum_{k=1}^m (n-1) = m(n-1).$$

综上所述, $p_1 + p_n$ 的最大值为 $m(n-1)$. \cdots \cdots \cdots 50 \text{ 分}

四、(本题满分 50 分) 设 n, k 为大于 1 的整数, $n < 2^k$. 证明: 存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数, 若将它们任意分成两组, 则总有一组有若干个数的和被 n 整除.

证明 先考虑 n 为 2 的幂的情形.

设 $n = 2^r, r \geq 1$, 则 $r < k$. 取 3 个 2^{r-1} 及 $2k-3$ 个 1, 显然这些数均不被 n 整

除. 将这 $2k$ 个数任意分成两组, 则总有一组中含 2 个 2^{r-1} , 它们的和为 2^r , 被 n 整除.10 分

现在设 n 不是 2 的幂, 取 $2k$ 个数为

$$-1, -1, -2, -2^2, \dots, -2^{k-2}, 1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1},$$

因为 n 不是 2 的幂, 故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除.20 分

若可将这些数分成两组, 使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除. 不妨设 1 在第一组, 由于 $(-1)+1=0$, 被 n 整除, 故两个 -1 必须在第二组; 因 $(-1)+(-1)+2=0$, 被 n 整除, 故 2 在第一组, 进而推出 -2 在第二组.

现归纳假设 $1, 2, \dots, 2^l$ 均在第一组, 而 $-1, -1, -2, \dots, -2^l$ 均在第二组, 这里 $1 \leq l < k-2$, 由于 $(-1)+(-1)+(-2)+\dots+(-2^l)+2^{l+1}=0$, 被 n 整除, 故 2^{l+1} 在第一组, 从而 -2^{l+1} 在第二组. 故由数学归纳法可知, $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-2}$ 在第一组, $-1, -1, -2, -2^2, \dots, -2^{k-2}$ 在第二组. 最后, 由于

$$(-1)+(-1)+(-2)+\dots+(-2^{k-2})+2^{k-1}=0,$$

被 n 整除, 故 2^{k-1} 在第一组. 因此 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ 均在第一组, 由正整数的二进制表示可知, 每一个不超过 2^k-1 的正整数均可表示为 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ 中若干个数的和, 特别地, 因为 $n \leq 2^k-1$, 故第一组中有若干个数的和为 n , 当然被 n 整除, 矛盾!

因此, 将前述 $2k$ 个整数任意分成两组, 则总有一组中有若干个数的和被 n 整除.50 分