2013年全国高中数学联合竞赛一试试题

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1．设集合，集合．则集合中所有元素的和为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．在平面直角坐标系中，点在抛物线上，满足，是抛物线的焦点. 则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

3．在中，已知，则的值为\_\_\_\_\_\_.

4．已知正三棱锥底面边长为，高为，则其内切球半径为\_\_\_\_\_\_\_\_.

5．设为实数，函数满足：对任意，有. 则的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

6．从中任取个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

7．若实数满足，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

8．已知数列共有项，其中，且对每个，均有

，则这样的数列的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

二、解答题：本大题共3小题，共56分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9．（本题满分16分）给定正数满足，这里. 证明：存在常数，使得

.

10．（本题满分20分）在平面直角坐标系中，椭圆的方程为，分别为椭圆的左、右顶点，分别为椭圆的左、右焦点，为椭圆上不同于和的任意一点. 若平面中两个点满足，试确定线段的长度与的大小关系，并给出证明.

11．（本题满分20分）求所有的正实数对，使得函数满足：对任意实数，有.