全国高中数学联赛模拟试题（四）

第一试

一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）：

1、函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\left|x+a\right|-a}$ 是奇函数的充要条件是

（A）$-1\leqslant a<0$ 或 $0<a\leqslant1$（B）$a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant1$（C）$a>0$（D）$a<0$

2、已知三点 $A(-2,1)$、$B(-3,-2)$、$C(-1,-3)$和动直线 l：$y=kx$．当点 A、B、C 到直线 l 的距离的平方和最小时，下列结论中，正确的是

（A）点 A 在直线 l 上 （B）点 B 在直线 l 上

（C）点 C 在直线 l 上 （C）点 A、B、C 均不在直线 l 上

3、在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，过顶点 A_1 在空间作直线 l，使 l 与直线 AC 和 BC_1 所成的角都等于 60°．这样的直线 l 可以做

（A）4 条（B）3 条（C）2 条（D）1 条

4、整数的 $n=\mathrm{C}_{200}^{100}$ 两位质因数的最大值是

（A）61（B）67（C）83（D）97

5、若正整数 a 使得函数 $y=f\left(x\right)=x+\sqrt{13-2ax}$ 的最大值也是整数，则这个最大值等于

（A）3（B）4（C）7 （D）8

6、在正整数数列中，由 1 开始依次按如下规则将某些数染成红色．先染 1，再染 2 个偶数 2、4；再染 4 后面最邻近的 3 个连续奇数 5、7、9；再染 9 后面最邻近的 4 个连续偶数 10、12、14、16；再染此后最邻近的 5 个连续奇数 17、19、21、23、25．按此规则一直染下去，得到一红色子数列 1，2，4，5，7，9，12，14，16，17，…．则在这个红色子数列中，由 1 开始的第 2003 个数是

（A）3844（B）3943（C）3945（D）4006

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）：

1、在复平面上，Rt△ABC 的顶点 A、B、C 分别对应于复数 $z+1$、$2z+1$、$(z+1)^2$，A 为直角顶点，且$|z|=2$．设集合 $M=\{m|z^m\in\mathbf{R}$，$m\in\mathbf{N}_+\}$，$P=\{x|x=\dfrac{1}{2^m}$，$m\in M\}$．则集合 P 所有元素之和等于_____．

2、函数 $f(x)=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|$的最大值与最小值之差等于_____．

3、关于 x 的不等式 $\dfrac{x^2+\left(2a^2+2\right)x-a^2+4a-7}{x^2+\left(a^2+4a-5\right)x-a^2+4a-7}<0$ 的解集是一些区间的并集，且这些区间的长度的和小于 4，则实数 a 的取值范围是_____．

4、银行计划将某项资金的 40%给项目 M 投资一年，其余的 60%给项目 N．预计项目 M 有可能获得 19%到 24%的年利润，N 有可能获得 29%到 34%的年利润．年终银行必须回笼资金，同时按一定的回扣率支付给储户．为使银行的年利润不少于给 M、N 总投资的 10%而不大于总投资的 15%，则给储户的回扣率的最小值是_____．

5、已知点(a,b)在曲线 $\arcsin x=\arccos y$ 上运动，且椭圆 $ax^2+by^2=1$ 在圆 $x^2+y^2=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的外部（包括二者相切的情形）．那么，$\arcsin b$ 的取值范围是_____．

6、同底的两个正三棱锥内接于同一个球．已知两个正三棱锥的底面边长为 a，球的半径为 R．设两个正三棱锥的侧面与底面所成的角分别为α、β，则 $\tan(\alpha+\beta)$的值是_____．

三、（20 分）

△ABC 的三边长 a、b、c（$a\leqslant b\leqslant c$）同时满足下列三个条件

（i）a、b、c 均为整数；

（ii）a、b、c 依次成等比数列；

（iii）a 与 c 中至少有一个等于 100．

求出(a,b,c)的所有可能的解．

四、（20 分）

在三棱锥 D-ABC 中，$AD=a$，$BD=b$，$AB=CD=c$，且$\angle DAB+\angle BAC+\angle DAC=180°$，$\angle DBA+\angle ABC+\angle DBC=180°$．求异面直线 AD 与 BC 所成的角．

五、（20 分）

设正系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根．证明：

（1）$\max\{a,b,c\}\geqslant\frac{4}{9}(a+b+c)$；

（2）$\min\{a,b,c\}\leqslant\frac{1}{4}(a+b+c)$．

第二试

一、(50 分)

已知△ABC 的外角∠EAC 平分线与△ABC 的外接圆交于 D，以 CD 为直径的圆分别交 BC、CA 于点 P、Q.

求证：线段 PQ 平分△ABC 的周长.

二、(50 分)

已知 $x_0=1$，$x_1=3$，$x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}$（$n\in\mathbf{N}_+$）.

求证：数列$\{x_n\}$中无完全平方数.

三、(50 分)

有 2002 名运动员，号码依次为 1，2，3，…，2002．从中选出若干名运动员参加仪仗队，但要使剩下的运动员中没有一个人的号码数等于另外两人的号码数的乘积. 那么被选为仪仗队的运动员至少能有多少人？给出你的选取方案，并简述理由.

参考答案

第一试

一、选择题：

1、C；2、C、D；3、B；4、A；5、C；6、B

二、填空题：

1、$\frac{1}{7}$；　2、$\sqrt{2}$；3、[1,3]；　4、10%；5、$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$；　6、$-\frac{4\sqrt{3}R}{3a}$.

三、可能解为(100,100,100)，(100,110,121)，(100,120,144)，(100,130,169)，(100,140,196)，(100,150,225)，(100,160,256)，(49,70,100)，(64,80,100)，(81,90,100)，(100,100,100).

四、$\arccos\frac{\left|b^2-c^2\right|}{a^2}$.

五、（1）证略（提示：令 $a+b+c=t$，分 $b\geqslant\frac{4}{9}t$ 和 $b<\frac{4}{9}t$ 讨论）;

（2）证略（提示：分 $a\leqslant\frac{1}{4}t$ 和 $a>\frac{1}{4}t$ 讨论）;

第二试

一、证略;

二、证略（提示：易由特征根法得 $x_n=\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$，设 $y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$，于是 $x_n^2-2y_n^2=1$，原结论等价于方程 $x^4-2y^2=1$ 无整数解，由数论只是可证）.

三、43.