2002 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

一、设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在的直线分别交于 E、F 两点，两对角线的交点为 P，过 P 作 $PO\perp EF$ 于 O. 求证：$\angle BOC=\angle AOD$.

解：如图 1，只需证明 OP 既是 $\angle AOC$ 的平分线，也是 $\angle DOB$ 的平分线即可.

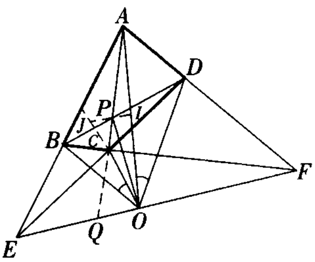


图 1

不妨设 AC 交 EF 于 Q，考虑 $\triangle AEC$ 和点 F，由塞瓦定理可得

$$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CD}{DE}=1. \quad ①$$

再考虑 $\triangle AEC$ 与截线 BPD，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{BE}=1. \quad ②$$

比较 ①、②两式可得

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}. \quad ③$$

过 P 作 EF 的平行线分别交 OA、OC 于 I、J，则有

$$\frac{PI}{QO}=\frac{AP}{AQ},\ \frac{JP}{QO}=\frac{PC}{QC}. \quad ④$$

由 ③、④可得

$$\frac{PI}{QO}=\frac{JP}{QO}\Rightarrow PI=PJ.$$

又 $OP\perp IJ$，则 OP 平分 $\angle IOJ$，

即 OP 平分 $\angle AOC$.

同理可证：当 BD 与 EF 相交时，OP 平分 $\angle DOB$；而当 $BD\parallel EF$ 时，过 B 作 ED 的平行线交 AC 于 G(如图 2)，则

$$\frac{AG}{AC}=\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}.$$

故 $GD\parallel CF$，

从而，$BCDG$ 为平行四边形.

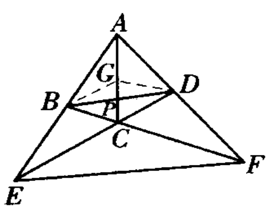


图 2

于是，P 为 BD 的中点.

因此，OP 平分 $\angle DOB$.

二、设 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{1}{4}(1+a_{n-1})^2$，$n\geq 2$. 求最小实数 λ，使得对任意非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2\,002}$，有

$$\sum_{k=1}^{2\,002}A_k\leq\lambda a_{2\,002}.$$

其中 $A_k=\dfrac{x_k-k}{\left(x_k+\cdots+x_{2\,002}+\frac{k(k-1)}{2}+1\right)^2}$，$k\geq 1$.

解：令 $\delta(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$. 首先证明几个引理.

引理 1　对任意实数 $a\geq 0$，$c>0$，$b>0$，函数

$$f(x)=\frac{a}{x+b}+\frac{x-c}{(x+b)^2}.$$

当 $x=\dfrac{(1-a)b+2c}{1+a}$ 时，取最大值 $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(1+a)^2}{b+c}$.

证明：令 $y=\dfrac{1}{x+b}$，则

$$f(x)=-(b+c)y^2+(1+a)y$$

$$=-(b+c)\left(y-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+a}{b+c}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

于是，当 $y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+a}{b+c}$，即 $x=\dfrac{(1-a)b+2c}{1+a}$ 时，

$$f(x)_{\max}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

引理 2　设 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_n=\frac{1}{4}(1+a_{n-1})^2$，$n\geq 2$. 则 a_n 满足 $0<a_n<1$.

引理 3　对任意 $n\geq 1$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_k\leq\frac{1}{\delta(n+1)+1}a_n$，且可以取等号.

证明：由引理 1，有

$$\frac{x_1-1}{(x_1+\cdots+x_n+1)^2}\leq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x_2+\cdots+x_n+2}$$

$$=\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}, \quad ①$$

且当 $x_1=x_2+\cdots+x_n+3$ 时，取最大值

$$\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}.$$

$$\frac{a_1}{x_2+\cdots+x_n+2}+\frac{x_2-2}{(x_2+\cdots+x_n+2)^2}$$

$$\leq\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_1)^2}{x_3+\cdots+x_n+4}=\frac{a_2}{x_3+\cdots+x_n+4}, \quad ②$$

且当 $x_2 = \frac{(1-a_1)(x_3+\cdots+x_n+4)+4}{1+a_1}$ 时，取最大值

$$\frac{a_2}{x_3+\cdots+x_n+4}.$$

……

$$\frac{a_{n-2}}{x_{n-1}+x_n+\delta(n-1)+1}+\frac{x_{n-1}-(n-1)}{(x_{n-1}+x_n+\delta(n-1)+1)^2}$$

$$\le\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_{n-2})^2}{x_n+\delta(n)+1}=\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1},$$

且当 $x_{n-1}=\frac{[(1-a_{n-2})(x_n+\delta(n-1)+1)+2(n-1)]}{1+a_{n-2}}$

时，取最大值 $\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1}$.

$$\frac{a_{n-1}}{x_n+\delta(n)+1}+\frac{x_n-n}{(x_n+\delta(n)+1)^2}$$

$$\le\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+a_{n-1})^2}{\delta(n+1)+1}=\frac{a_n}{\delta(n+1)+1}, \qquad ⓝ$$

且当 $x_n=\frac{(1-a_{n-1})(\delta(n)+1)+2n}{1+a_{n-1}}$ 时，取最大值

$$\frac{a_n}{\delta(n+1)+1}.$$

由①，②，…，ⓝ相加，得

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\le\frac{1}{\delta(n+1)+1}a_n,$$

且当 $x_n=\frac{(1-a_{n-1})(\delta(n)+1)+2n}{1+a_{n-1}}$，

$$x_{n-1}=\frac{(1-a_{n-2})(x_n+\delta(n-1)+1)+2(n-1)}{1+a_{n-2}},$$

……，

$$x_2=\frac{(1-a_1)(x_3+\cdots+x_n+4)+4}{1+a_1},$$

$$x_1=x_2+\cdots+x_n+3$$

时，等号成立.

由引理3，我们得到

$$\lambda=\frac{1}{\delta(2\,003)+1}=\frac{1}{2\,003\times1\,001+1}.$$

三、17名球迷计划去韩国观看世界杯足球赛，他们共选定17场球赛.预订门票的情况满足下列条件：

(i) 每人每场至多预订一张门票；

(ii) 每两人所预订的门票中，至多有一场相同；

(iii) 预订了6张门票的只有一人.

问这些球迷最多共能预订多少张门票？说明理由.

解：画一个 17×17 的方格表，17列分别代表17场球赛，17行分别表示17人.如果第 i 人预订了第 j 场的门票，则将方格表中第 i 行第 j 列之交的方格的中心涂成红点.于是，问题化为表中任何4个红点都不是一个边平行于网格线的矩形的4个顶点，且表中有一行有6个红点的条件下，表中最多能有多少个红点.

不妨设第1行的前6个方格中心都是红点.

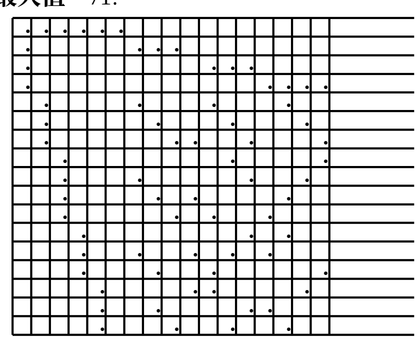
将 17×17 方格表分成 17×6 和 17×11 两部分.前一部分中第1行有6个红点，故另外16行中每行至多1个红点.所以，这部分中至多有22个红点.第2部分中第1行无红点，故实际上是讨论 16×11 的方格表中最多有多少个红点.

设第 i 行中共有 x_i 个红点，并将同行的两个红点称为一个"红点对".于是，第 i 行产生 $C_{x_i}^2$ 个"红点对"(这里认为 $C_1^2=C_0^2=0$).由于表中不许存在边平行于网格线的红顶点矩形，故应有

$$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_{16}}^2\le C_{11}^2=55. \qquad ①$$

容易看出，当 $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$ 尽量平均(至多相差1)时，上式左端和数最小，从而，$x_1+x_2+\cdots+x_{16}$ 最大.因此，当 $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$ 中有两个4和14个3时，$C_{x_1}^2+C_{x_2}^2+\cdots+C_{x_{16}}^2=54$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{16}=50$.易见，若这个表中有51个红点，则不可能满足要求.从而知 17×17 的方格表中至多有72个红点.

在下列方格表中，共有71个红点，第1行的前6个方格中心是红点，且任何4个红点都不是一个边平行于网格线的矩形的4个顶点.这表明所求的红点个数的最大值 ≥71.



这样，关键在于72个红点时能否满足题中要求.设有72个红点满足题中要求.于是，前6列中共有22个红点，后11列中共有50个红点.由式①及其后的推导可知50个红点在 16×11 表格中的分布只能有两种不同情形：

(1) 2行各4个红点，另14行各3个红点；

(2) 3行各4个红点、1行2个红点，另12行各3

个红点.

先看(1). 在 17×17 方格表中,用红点所在方格的列数为红点编号,设第1行的6个红点为1、2、3、4、5、6,第2行的5个红点为1、7、8、9、10. 第3行也有5个红点,后14行各4个红点.

考察7、8、9、10这4列的红点分布情况. 这时,后15行中每行4个方格中至多1个红点. 如果某行中有1个红点,则该行最后7个方格中的红点数为2或3(只有1行为3). 由于这4列中每列的红点与后7列只能组成7个不同的"红点对",故每列后15个方格中至多3个红点,这4列组成的 17×4 的方格表中至多16个红点.

去掉前2行与前10列,至多去掉 $22+16=38$ 个红点,余下的 15×7 的方格表中至少还有34个红点,$34=3\times4+2\times11$. 这些红点至少构成

$$3\times4+11=23$$

个不同的"红点对",$23>21=C_7^2$,必导致边平行于网格线的红顶点矩形,矛盾.

再看(2). 设第1行的6个红点为1、2、3、4、5、6,第2行的5个红点为1、7、8、9、10. 第3、4行各5个红点,最后一行3个红点,其余12行各4个红点.

还是考察7、8、9、10四列的红点分布情况. 如果仍是至多16个红点,则像(1)中那样可导出矛盾. 但是,由于最后一行只有3个红点,其中之一在前6个方格中. 如果7、8、9、10四格中没有,则只能是上述情形;如果7、8、9、10四格中有1个红点,则后7格中只有一个红点,这可导致7、8、9、10四列构成的 17×4 的方格表中共有17个红点,后7列的 15×7 的方格表中恰有33个红点,其中最后一行只有1个红点. 去掉最后一行,余下的 14×7 方格表中共有32个红点. $32=3\times4+2\times10$,形成的"红点对"个数至少为

$$3\times4+10=22>21=C_7^2.$$

矛盾.

综上可知,17人最多能预订71张门票.

四、(a) 求所有自然数 $n(n\geq2)$,使得存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足

$$\{|a_i-a_j|\mid 1\leq i<j\leq n\}=\left\{1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}\right\}.$$

(b) 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{7,8,9,\cdots,n\}$. 在 A 中取三个数、B 中取两个数组成五个元素的集合 A_i,$i=1,2,\cdots,20$,$|A_i\cap A_j|\leq2$,$1\leq i<j\leq20$. 求 n 的最小值.

解:(a) $a_1,\cdots,a_n$ 有如下性质:

(i) $a_1,\cdots,a_n$ 两两不等;

(ii) 它们差的绝对值两两不等.

于是,$n=2$,$a_1=0$,$a_2=1$;

$n=3$,$a_1=0$,$a_2=1$,$a_3=3$;

$n=4$,$a_1=0$,$a_2=2$,$a_3=5$,$a_4=6$.

下证当 $n\geq5$ 时,不存在 $a_1,\cdots,a_n$ 适合题设条件.

证法一:令 $0\leq a_1<a_2<\cdots<a_n$,$b_i=a_{i+1}-a_i$,$i=1,2,\cdots,n-1$. 则当 $i<j$ 时,

$$|a_i-a_j|=a_j-a_i=b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{j-1},$$

$1\leq i<j\leq n$.

显然,$\max\limits_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|=|a_1-a_n|=a_n$. 所以,

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2},$$

即 $a_n=a_n-a_1=b_1+\cdots+b_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}$.

注意到 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 两两不等,总和为 $1+2+\cdots+(n-1)$,且 $b_1,\cdots,b_n$ 都不等于零,所以,$b_1,\cdots,b_{n-1}$ 为 $1,2,\cdots,n-1$ 的一个排列. 注意到

$$b_i+\cdots+b_{j-1},1\leq i<j\leq n$$

为 $1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}$ 的一个排列,所以,

$$b_i+b_{i+1}\geq n,i=1,2,\cdots,n-1.$$

设 $b_i=1$,$2\leq i\leq n-2$,则 $b_{i-1}+b_i\geq n$,$b_{i+1}+b_i\geq n$. 这证明了 $b_{i-1},b_{i+1}\geq n-1$. 所以 $b_{i-1}=b_{i+1}=n-1$. 这导出矛盾. 因此,只有 $b_1=1$ 或 $b_{n-1}=1$,且 $b_2=n-1$ 或 $b_{n-2}=n-1$.

设 $b_1=1$,$b_2=n-1$,则 $b_1+b_2=n$. 所以,$b_i+b_{i+1}>n$,$i>1$. 已知存在指标 i,$b_{i+1}=2$. 于是,$b_i>n-2$. 所以,$b_i=n-1$. 这推出 $b_3=2$,$b_4=n-2$. 这时,$b_1+b_2=b_3+b_4$. 导出矛盾. 所以,当 $n-1\geq4$ 时,即 $n\geq5$ 时不存在 $a_1,\cdots,a_n$ 适合题设条件.

设 $b_{n-1}=1$,$b_{n-2}=n-1$. 同上法讨论仍得 $n\geq5$ 时不存在 $a_1,\cdots,a_n$ 适合题设条件.

证法二:令 $0=a_1<a_2<\cdots<a_n$,易知

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

这时,必存在某两个下标 $i<j$,使得 $|a_i-a_j|=a_n-1$. 所以,

$$a_n-1=a_{n-1}-a_1=a_{n-1}\text{或}\ a_n-1=a_n-a_2,$$

即 $a_2=1$.

所以,出现 $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$, $a_{n-1}=a_n-1$,或 $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$, $a_2=1$.

下面分情形讨论:

(i) 设 $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$, $a_{n-1}=a_n-1$.

考虑 a_n-2,有 $a_n-2=a_{n-2}$或 $a_n-2=a_n-a_2$,即 $a_2=2$.设 $a_{n-2}=a_n-2$,则 $a_{n-1}-a_{n-2}=1=a_n-a_{n-1}$.这导出矛盾.所以,只有 $a_2=2$.

考虑 a_n-3,有 $a_n-3=a_{n-2}$或 $a_n-3=a_n-a_3$,即 $a_3=3$.设 $a_{n-2}=a_n-3$,则 $a_{n-1}-a_{n-2}=2=a_2-a_0$.这推出矛盾.设 $a_3=3$,则 $a_n-a_{n-1}=1=a_3-a_2$,又推出矛盾.所以这种情形不出现,条件为 $a_{n-2}=a_2$,即 $n=4$.故当 $n\geqslant5$,不存在.

(ii) $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$, $a_2=1$.

考虑 a_n-2,有 $a_n-2=a_{n-1}$或 $a_n-2=a_n-a_3$,即 $a_3=2$.这时 $a_3-a_2=a_2-a_1$,推出矛盾.所以,

$a_{n-1}=a_n-2$.

考虑 a_n-3,有 $a_n-3=a_{n-2}$或 $a_n-3=a_n-a_3$,即 $a_3=3$.于是,$a_3-a_2=a_n-a_{n-1}$.矛盾.因此,$a_{n-2}=a_n-3$.所以,$a_{n-1}-a_{n-2}=1=a_2-a_1$.这又矛盾.所以只有 $a_{n-2}=a_2$,即 $n=4$.故当 $n\geqslant5$ 时,不存在.

证法三:考虑母函数 $x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n}$.由题设

$$(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n})(x^{-a_1}+x^{-a_2}+\cdots+x^{-a_n})$$
$$=n-1+x^{-\frac{n(n-1)}{2}}+\cdots+x^{-1}+1+x+\cdots+x^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$=n-1+\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}+1}-x^{-\frac{n(n-1)}{2}}}{x-1}.$$

取 $x=e^{2i\theta}=(\cos2\theta+i\sin2\theta)$, $x\neq1$.

由 $e^{-i\alpha}=\overline{e^{i\alpha}}$,所以,

$$|e^{2ia_1\theta}+\cdots+e^{2ia_n\theta}|^2$$
$$=n-1+\frac{e^{2i\theta}e^{in(n-1)\theta}-e^{-in(n-1)\theta}}{e^{2i\theta}-1}$$
$$=n-1+\frac{\sin(n^2-n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

取 $(n^2-n+1)\theta=\frac{3\pi}{2}$,则 $\theta=\frac{3\pi}{2(n^2-n+1)}$.

当 $n\geqslant5$ 时,

$$0<\theta<\frac{3\pi}{2(5^2-5+1)}=\frac{\pi}{14}<\frac{\pi}{2}.$$

这时,$\sin\theta<\theta$, $\sin(n^2-n+1)\theta=-1$.代入,得

$$|e^{2ia_1\theta}+\cdots+e^{2ia_n\theta}|^2=n-1-\frac{1}{\sin\theta}<n-1-\frac{1}{\theta}$$
$$=n-1-\frac{2(n^2-n+1)}{3\pi}<n-1-\frac{2(n^2-n)}{3\pi}$$
$$=(n-1)\left(1-\frac{2n}{3\pi}\right)\leqslant(n-1)\left(1-\frac{10}{3\pi}\right)<0.$$

这就导出矛盾.所以,当 $n\geqslant5$ 时,不存在 $a_1,\cdots,a_n$.

(b) n 的最小值是 16.

设 B 中每个数在所有 A_i 中最多重复出现 k 次,必有 $k\leqslant4$.若不然,数 m 出现 k 次,$k>4$,$3k>12$,在 m 出现的所有 A_i 中,至少有一个 A 的数出现 3 次.不妨设它是 1,就有集合$\{1,a_1,a_2,m,b_1\}$,$\{1,a_3,a_4,m,b_2\}$,$\{1,a_5,a_6,m,b_3\}$,其中 $a_i\in A$,$1\leqslant i\leqslant6$.为了满足题意,a_i 必须各不相同,但只能是 2,3,4,5,6 五个数.这是不可能的.

$k\leqslant4$,20 个 A_i,B 中数有 40 个,因此至少是 10 个不同的,$6+10=16$,有 $n\geqslant16$.当 $n=16$ 时,可作出如下 20 个集合:

$\{1,2,3,7,8\}$	$\{1,2,4,12,14\}$	$\{1,2,5,15,16\}$
$\{1,2,6,9,10\}$	$\{1,3,4,10,11\}$	$\{1,3,5,13,14\}$
$\{1,3,6,12,15\}$	$\{1,4,5,7,9\}$	$\{1,4,6,13,16\}$
$\{1,5,6,8,11\}$	$\{2,3,4,13,15\}$	$\{2,3,5,9,11\}$
$\{2,3,6,14,16\}$	$\{2,4,5,8,10\}$	$\{2,4,6,7,11\}$
$\{2,5,6,12,13\}$	$\{3,4,5,12,16\}$	$\{3,4,6,8,9\}$
$\{3,5,6,7,10\}$	$\{4,5,6,14,15\}$	

五、设 k 为给定的整数,$f(n)$ 是定义在负整数集上且取值为整数的函数,满足

$$f(n)f(n+1)=(f(n)+n-k)^2,$$
$$n=-2,-3,-4,\cdots.$$

求函数 $f(n)$ 的表达式.

解:引理　存在无穷多个不是形如 $5k\pm1$ 的素数.

证明:对任给正整数 n,考虑

$$N=5[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)]^2+2.$$

由于形如 $5k\pm1$ 的整数之积仍是形如 $5k\pm1$ 的数,$N\equiv2\pmod5$,故 N 有形如 $5k\pm2$ 的素因子,它大于 $2n+1$.引理得证.

取素数 $p>10(|k|+1)$,$p\not\equiv\pm1\pmod5$.先证明 $f(k-p)=p^2$.

由 $f(k-p)f(k-p+1)=[f(k-p)-p]^2$ 知 $f(k-p)\mid p^2$.

因此,$f(k-p)=\pm1,\pm p,\pm p^2$.

注意到

$$f(k-p-1)f(k-p)=[f(k-p-1)-p-1]^2.$$

考虑 $ax=(x-p-1)^2$,

即 $x^2-(2p+2+a)x+(p+1)^2=0$.

它的判别式

$\Delta(a)=(2p+2+a)^2-4(p+1)^2=a(a+4p+4)$.

因为 $\Delta(1)=4p+5\equiv\pm2 \pmod 5$,

$\Delta(-1)=-(4p+3)<0$,

$\Delta(p)=p(5p+4)$ 不是平方数,

$\Delta(-p)=-p(3p+4)<0$,

$\Delta(-p^2)=p^2(p^2-4p-4)\equiv\pm2 \pmod 5$,

由此推出 $\Delta(1)$, $\Delta(-1)$, $\Delta(p)$, $\Delta(-p)$, $\Delta(-p^2)$ 均不是平方数. 故

$f(k-p)=p^2$.

由 $f(k-p)f(k-p+1)=[f(k-p)-p]^2$ 知

$f(k-p+1)=(p-1)^2$.

由 $f(k-p+1)f(k-p+2)=[f(k-p+1)-p+1]^2$ 知

$f(k-p+2)=(p-2)^2$.

如此继续,得到

$f(k-p+t)=(p-t)^2$, $0\le t\le p$ 且 $t<p-k$,

即 $f(n)=(n-k)^2$, $k-p\le n\le k$ 且 $n<0$.

由于 p 可任意大,有

$f(n)=(n-k)^2$, $n\le k$ 且 $n<0$.

下面按 k 的大小讨论:

情形 1 $k\ge-1$. 由以上结论知

$f(n)=(n-k)^2$, $n=-1,-2,\cdots$.

情形 2 $k=-2$. 由以上结论知

$f(n)=(n-k)^2$, $n=-2,-3,\cdots$.

由 $f(-2)f(-1)=[f(-2)+0]^2$ 知 $f(-1)$ 可取任意整数. 此时

$$f(n)=\begin{cases}a, & n=-1,\\(n+2)^2, & n=-2,-3,\cdots.\end{cases}$$

其中 a 为任意整数.

情形 3 $k=-3$. 此时,

$f(n)=(n-k)^2$, $n=-3,-4,\cdots$.

又 $f(-3)f(-2)=[f(-3)+0]^2$,

$f(-2)f(-1)=[f(-2)+1]^2$,

故 $f(-2)=\pm1$.

若 $f(-2)=1$,则 $f(-1)=2^2$;

若 $f(-2)=-1$,则 $f(-1)=0$.

此时, $f(n)=\begin{cases}0, & n=-1,\\-1, & n=-2,\\(n+3)^2, & n\le-3\end{cases}$

或 $f(n)=\begin{cases}2^2, & n=-1,\\1, & n=-2,\\(n+3)^2, & n\le-3.\end{cases}$

情形 4 $k\le-4$.

由 $f(k+1)f(k+2)=[f(k+1)+1]^2$ ①

知 $f(k+1)=\pm1$.

假设 $f(k+1)=-1$,由①知 $f(k+2)=0$.

又 $f(k+2)f(k+3)=[f(k+2)+2]^2$,

则 $0=2^2$,矛盾. 因此, $f(k+1)=1$.

由①知 $f(k+2)=2^2$,

由 $f(k+2)f(k+3)=[f(k+2)+2]^2$ 知

$f(k+3)=3^2$.

如此下去,有

$f(k+t)=t^2$, $t\le-k-1$.

此时, $f(n)=(n-k)^2$, $n=-1,-2,\cdots$.

六、设 $f(x_1,x_2,x_3)=-2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+3[x_1^2\cdot(x_2+x_3)+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2)]-12x_1x_2x_3$.

对于任意实数 r、s、t,记

$g(r,s,t)=\max\limits_{t\le x_3\le t+2}|f(r,r+2,x_3)+s|$.

求函数 $g(r,s,t)$ 的最小值.

解:令 $x=x_3-(r+1)$,则

$f(r,r+2,x_3)$

$=-2[r^3+(r+2)^3+(x+r+1)^3]$

$\quad+3[r^2(x+2r+3)+(r+2)^2(x+2r+1)$

$\quad+(x+r+1)^2(2r+2)]-12r(r+2)(x+r+1)$

$=-2x^3+18x$.

令 $a=t-(r+1)$,则

$g(r,s,t)=\max\limits_{a\le x\le a+2}|-2x^3+18x+s|$.

由于 $\max\limits_{a\le x\le a+2}|-2x^3+18x+s|$

$\ge\frac{1}{2}\left[\max\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x+s)-\min\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x+s)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\max\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x)-\min\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x)\right]$,

所以, $g(r,s,t)$

$\ge\frac{1}{2}\left[\max\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x)-\min\limits_{a\le x\le a+2}(-2x^3+18x)\right]$. ①

记 $P(x)=-2x^3+18x$. 任取 $x<y$,则

$P(x)-P(y)=-2(x-y)[x^2+xy+y^2-9]$.

显然,当 $x<y\le-\sqrt3$ 时或当 $\sqrt3\le x<y$ 时,有

$x^2+xy+y^2-9>0$;

当 $-\sqrt3\le x<y\le\sqrt3$ 时,

$x^2+xy+y^2-9<0$.

从而,当 $x\le-\sqrt3$ 或 $x\ge\sqrt3$ 时,函数 $P(x)$ 严格单调减小;当 $-\sqrt3\le x\le\sqrt3$ 时, $P(x)$ 严格单调增加.

由于 $P(-\sqrt{3})=-12\sqrt{3}$，所以 $P(x)=-12\sqrt{3}$ 等价于 $P(x)=P(-\sqrt{3})$，即

$$-2(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3-9)$$
$$=-2(x+\sqrt{3})^2(x-2\sqrt{3})=0.$$

于是，$P(2\sqrt{3})=-12\sqrt{3}$.

同理，$P(-2\sqrt{3})=12\sqrt{3}$.

由此可知，在 $(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$ 内，$P(x)$ 有惟一的最小点 $x=-\sqrt{3}$ 和惟一的最大点 $x=\sqrt{3}$. 又 $P(-3)=P(0)=P(3)=0$，从而函数 $P(x)$ 的图像如图 3 所示.

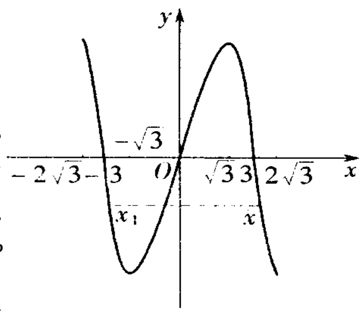


图 3

记 $W(a)=\max\limits_{a\le x\le a+2}P(x)-\min\limits_{a\le x\le a+2}P(x)$.

当 $a+2\le-\sqrt{3}$，即 $a\le-2-\sqrt{3}$ 时，由于 $P(x)$ 在 $[a,a+2]$ 严格单调减小，所以，

$$W(a)=P(a)-P(a+2)$$
$$=-2[a^3-(a+2)^3]+18[a-(a+2)]$$
$$=12a^2+24a-20=12(a+1)^2-32$$
$$\ge12(\sqrt{3}+1)^2-32=24\sqrt{3}+16.$$

同理，当 $a\ge\sqrt{3}$ 时，$W(a)\ge24\sqrt{3}+16$.

取 $\bar{x}>0$ 满足

$$P(x)=P(\bar{x})$$

有三个不同实根 $x_1<x_2<\bar{x}$ 且 $x_2-x_1=2$. 由于 $P(x)-P(\bar{x})=-2(x-\bar{x})(x^2+\bar{x}x+\bar{x}^2-9)$，从而 x_1、x_2 应为方程 $x^2+\bar{x}x+\bar{x}^2-9=0$ 的两个根. 又 $x_2-x_1=2$，所以，

$$\bar{x}^2-4(\bar{x}^2-9)=4,\quad 即\ 3\bar{x}^2=32.$$

于是，$\bar{x}=4\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,

$$P(\bar{x})=-2\times\frac{4}{3}\sqrt{6}\left(\frac{32}{3}-9\right)=-\frac{40\sqrt{6}}{9},$$

$$x_1=-\frac{\bar{x}}{2}-1=-\frac{2\sqrt{6}}{3}-1,$$

$$x_2=-\frac{\bar{x}}{2}+1=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+1.$$

显然，$-2\sqrt{3}<x_1<-\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}<x_2<0$，

且 $W(x_1)=P(x_1)-P(-\sqrt{3})=P(\bar{x})-P(-\sqrt{3})$

$$=12\sqrt{3}-\frac{40\sqrt{6}}{9}.$$

当 $-2-\sqrt{3}<a\le x_1$ 时，$-\sqrt{3}<a+2\le x_1+2=x_2$. 由于 $P(x)$ 在 $[a,x_1]$ 严格单减，从而 $P(a)\ge P(x_1)>P(-\sqrt{3})$. 又 $P(x)$ 在 $[-\sqrt{3},x_2]$ 严格单增，所以 $P(-\sqrt{3})<P(a+2)\le P(x_2)=P(x_1)$. 于是，可得

$$W(a)=P(a)-P(-\sqrt{3})\ge P(x_1)-P(-\sqrt{3})$$
$$=W(x_1).$$

当 $x_1<a\le-\sqrt{3}$ 时，则 $x_2=x_1+2<a+2\le2-\sqrt{3}<\sqrt{3}$. 从而，$P(a+2)>P(x_2)=P(x_1)>P(a)$.

于是可得

$$W(a)=P(a+2)-P(-\sqrt{3})$$
$$\ge P(x_1)-P(-\sqrt{3})=W(x_1).$$

由此可得当 $-2-\sqrt{3}<a\le-\sqrt{3}$ 时，$W(a)\ge W(x_1)$. 由 $P(x)$ 的图像关于原点的对称性可证当 $\sqrt{3}-2<a\le\sqrt{3}$ 时，$W(a)\ge W(-x_2)=W(x_1)$.

当 $-\sqrt{3}<a\le\sqrt{3}-2$ 时，则 $-\sqrt{3}<a<a+2\le\sqrt{3}$. 由于 $P(x)$ 单增，所以

$$W(a)=P(a+2)-P(a)=-12a^2-24a+20$$
$$=-12(a+1)^2+32\ge-12(1-\sqrt{3})^2+32$$
$$=24\sqrt{3}-16.$$

显然，$24\sqrt{3}+16>12\sqrt{3}-\frac{40\sqrt{6}}{9}$，$24\sqrt{3}-16\ge12\sqrt{3}-\frac{40\sqrt{6}}{9}$. 于是，

$$\min_{a\in\mathbf{R}}W(a)=W(x_1)=12\sqrt{3}-\frac{40\sqrt{6}}{9}.$$

由(1)可知 $g(r,s,t)\ge\frac{1}{2}W(x_1)=6\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{6}}{9}$.

由以上证明可知任取实数 r，

$$t=x_1+(r+1)=-\frac{2\sqrt{6}}{3}-1+(r+1),$$

$$s=-\frac{1}{2}\left[\max_{x_1\le x\le x_1+2}P(x)+\min_{x_1\le x\le x_1+2}P(x)\right],$$

易知 $g(r,s,t)=\frac{1}{2}W(x_1)=6\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{6}}{9}$.

于是，$\min\limits_{r,s,t\in\mathbf{R}}g(r,s,t)=6\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{6}}{9}$.

（李胜宏　提供）