2004 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

1. 设 $\angle XOY = 90°$, P 为 $\angle XOY$ 内的一点,且 $OP = 1$, $\angle XOP = 30°$,过点 P 任意作一条直线分别交射线 OX、OY 于点 M、N. 求 $OM + ON - MN$ 的最大值.

2. 设 u 为任一给定的正整数. 证明:方程 $n! = u^a - u^b$ 至多有有限多组正整数解 (n, a, b).

3. 设 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是 k ($k \geq 2$) 个正整数,且 $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$,正整数 a、b 满足

$$\left(1-\frac{1}{n_1}\right)\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n_k}\right) \leq \frac{a}{b} < \left(1-\frac{1}{n_1}\right)\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n_{k-1}}\right).$$

证明: $n_1 n_2 \cdots n_k \leq (4a)^{2^k - 1}$.

4. 点 D、E、F 分别在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上(均异于端点),满足 $EF \parallel BC$, D_1 是边 BC 上一点(异于 B、D、C),过 D_1 作 $D_1E_1 \parallel DE$, $D_1F_1 \parallel DF$,分别交边 AC、AB 于点 E_1、F_1,连结 E_1F_1,再在 BC 上方(与 A 同侧)作 $\triangle PBC$,使得 $\triangle PBC \backsim \triangle DEF$,连结 PD_1. 求证: EF、E_1F_1、PD_1 三线共点.

5. 已知 $p_1, p_2, \cdots, p_{25}$ 为给定的不超过 2 004 的 25 个互不相同的质数,求最大的正整数 T,使得任何不大于 T 的正整数,总可以表成 $(p_1 p_2 \cdots p_{25})^{2004}$ 的互不相同的正约数之和(如 1, p_1, $1 + p_1^2 + p_1 p_2 + p_3$ 等均是 $(p_1 p_2 \cdots p_{25})^{2004}$ 的互不相同的正约数之和).

6. 设 a、b、c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长. 证明: $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

参 考 答 案

1. 先作一 $\odot O_1$ 过点 P 且与射线 OX, OY 相切(切点为 A、B),且点 P 在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上.

分别以射线 OX、OY 为 x 轴、y 轴建立直角坐标系,如图 1. 则有 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 设 $O_1(a, a)$,则有

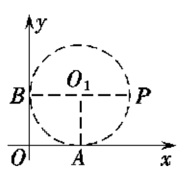

图 1

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = a^2,$$

即 $a^2 - (\sqrt{3} + 1)a + 1 = 0$.

所以, $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2 - 4 = 2\sqrt{3}$.

故 $a = \dfrac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}}{2}$ (取较小根).

因为 $30° < 45°$,且 $\frac{1}{2} > a = \dfrac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}}{2}$,所以,过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线与射线 OX、OY 都相交.

如图 2,设 MN 是过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线, M、N 分别在射线 OX、OY 上,设 M_1N_1 是过点 P 的任一直线,且与 $\odot O_1$ 相交, M_1、N_1 分别在射线 OX、OY 上.

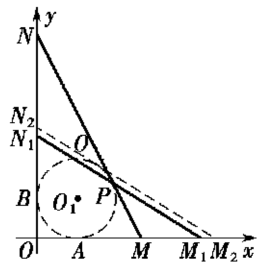

图 2

将 M_1N_1 朝远离点 O 的方向平移,直至与 $\odot O_1$ 相切所得直线为 M_2N_2 (切点为 Q), M_2、N_2 分别在射线 OX、OY 上.

由切线长定理有

$$OM_1 + ON_1 - M_1N_1 < OM_2 + ON_2 - M_2N_2$$
$$= (OB + BN_2) + (OA + AM_2) - (N_2Q + QM_2) = 2OA.$$

同理, $2OA = OM + ON - MN$.

综上可得,当 MN 是过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线时, $OM + ON - MN$ 取得最大值,且最大值为 $2OA = 2a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}$.

2. 先证明一个引理.

引理 设 p 是一个给定的奇质数, $p \nmid u$, d 是 u 模 p 的阶,并设 $u^d - 1 = p^v k$,这里 $v \geq 1$, $p \nmid k$. 又 m 是正整数, $p \nmid m$. 则对任意整数 t ($t \geq 0$),有 $u^{dmp^t} = 1 + p^{t+v}k_t$,其中 $p \nmid k_t$.

引理的证明:对 t 归纳. 当 $t = 0$ 时,由 $u^d = 1 + p^v k$ ($p \nmid k$) 及二项式定理知(注意 $p \nmid m$)

$$u^{md} = (1 + p^v k)^m = 1 + p^v km + p^{2v}k^2 C_m^2 + \cdots$$
$$= 1 + p^v(km + p^v k^2 C_m^2 + \cdots) = 1 + p^v k_1,$$

其中 $p \nmid k_1$.

若结论对 t 已成立,则由二项式定理可知

$$u^{dmp^{t+1}} = (1 + p^{t+v}k_t)^p$$
$$= 1 + p^{t+1+v}(k_t + C_p^2 p^{v+t-1}k_t^2 + \cdots) = 1 + p^{t+1+v}k_{t+1},$$

$p \nmid k_{t+1}$. (注意 p 是奇质数,故 $p \mid C_p^2$.) 这就完成了引理的证明.

下面证明原题.

首先,方程可化为

$$n! = u^r(u^s - 1),\ r、s \text{ 为正整数}. \quad ①$$

对引理中取定的奇质数 p,可设 $n > p$(否则结论已成立). 设 $p^{\alpha} \| n!$,则 $\alpha \geq 1$. 由 $p \nmid u$ 及式 ①知 $p^{\alpha} \| (u^{s}-1)$. 特别地 $p | (u^{s}-1)$.

由于 d 是 u 模 p 的阶,故 $d | s$.

设 $s = dmp^{t}$,其中 $t \geq 0$, $p \nmid m$. 由 $u^{s}-1 = p^{\alpha}M$, $p \nmid M$及引理知 $\alpha = t + v$,即 $t = \alpha - v$. 故

$$u^{s}-1 = u^{dmp^{\alpha - v}}-1. \qquad ②$$

熟知

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^{i}}\right] \geq \left[\frac{n}{p}\right] > an, \qquad ③$$

其中 a 是一个仅与 p 有关的正数.

记 $b = u^{dp^{-v}}$. 由于 d、p、u、v 现在均是固定的正整数,故 b 是大于 1 的正常数. 于是,由式 ②得

$$u^{s}-1 \geq u^{dp^{\alpha - v}}-1 > b^{p^{an}}-1. \qquad ④$$

但当 n 充分大时,易知

$$b^{p^{an}}-1 > n^{n}-1. \qquad ⑤$$

(此即 $b^{p^{an}} \geq n^{n}$,即 $p^{an} > n\log_{b} n$.)

因此,由 ②③④⑤知,当 n 充分大时,有 $u^{s}-1 > n!$,更有 $u^{r}(u^{s}-1) > n!$.

所以,n 充分大时,方程 ①无解. 从而,①的正整数解至多有有限多组.

注:$p^{\alpha} \| a$ 表示 $p^{\alpha} | a$,而 $p^{\alpha+1} \nmid a$,这里 p 是质数,$\alpha \in \mathbf{N}_{+}$.

3. 先证明一个引理.

引理　若正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 及 a、b 满足题设中的不等式,则必有一个 $r(1 \leq r \leq k)$,使得

$$n_1 n_2 \cdots n_r \leq (2^{r+1}a)^{r}.$$

引理的证明:我们先证明,存在 $n_i(1 \leq i \leq k)$,使得 $n_i \leq 2^{i+1}a$.

注意到 $\frac{a}{b} < \prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) < 1$ 及 a、b 为正整数,则有 $b \geq a+1$.

若所有的 n_i 均满足 $n_i > 2^{i+1}a$,易知

$$\frac{a}{a+1} \geq \frac{a}{b} \geq \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) > 1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$$

$$> 1-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{i+1}} > 1-\frac{1}{2a},$$

即 $$1-\frac{1}{a+1} > 1-\frac{1}{2a}.$$

则 $2a < a+1$. 这是不可能的. 故所证结论成立.

现在设 r 是最小的下标 i,使得 $n_i \leq 2^{i+1}a$.

由于 $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$,则

$$n_1 n_2 \cdots n_r \leq n_r^{r} \leq (2^{r+1}a)^{r}. \qquad ①$$

下面证明原题. 对 k 用数学归纳法.

对 $k=1$,我们要从

$$1-\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b} < 1 \qquad ②$$

导出 $n_1 \leq (4a)^{2^{1}-1}$.

这是显然的. 因为式 ②意味着 $b > a$,从而 $b \geq a+1$. 故 $1-\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{a+1} = 1-\frac{1}{a+1}$. 得 $n_1 \leq a+1 < 4a$.

假设在 k 换为任意较小的正整数时结论已成立,现证明在 k 时结论也成立.

设 r 是上述引理所确定的一个正整数,又设 $1 \leq r \leq k-1$. 由已知条件得

$$\prod_{i=r+1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{A}{B} < \prod_{i=r+1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n_i}\right),$$

这里 $A = a\prod_{i=1}^{r}n_i$, $B = b\prod_{i=1}^{r}(n_i-1)$.

由归纳假设知

$$\prod_{i=r+1}^{k} n_i \leq (4A)^{2^{k-r}-1}$$

$$= (4a)^{2^{k-r}-1}\left(\prod_{i=1}^{r}n_i\right)^{2^{k-r}-1}.$$

故由引理得出

$$\prod_{i=1}^{k}n_i \leq (4a)^{2^{k-r}-1}\left(\prod_{i=1}^{r}n_i\right)^{2^{k-r}} \leq (4a)^{2^{k-r}-1}(2^{r+1}a)^{r\cdot 2^{k-r}}. \qquad ③$$

注意,由引理知,上述不等式在 $r=k$ 时也成立(无需证明归纳假设的结论).

由 ③可见,为了完成归纳证明,只须证明

$$4^{2^{k-r}-1}\cdot 2^{r(r+1)2^{k-r}} \leq 4^{2^{k}-1}$$

及 $$a^{2^{k-r}-1}\cdot a^{r\cdot 2^{k-r}} \leq a^{2^{k}-1}.$$

利用 $2+r(r+1) \leq 2^{r+1}$及 $1+r \leq 2^{r}$(对 $r \geq 1$),易知上述两个不等式都成立. 这就完成了归纳证明.

4. 如图 3,记 PD_1、D_1E_1、D_1F_1 分别交 EF 于 D_2、E_2、F_2,则只须证明 E_1、D_2、F_1 三点共线. 因为 $\triangle E_1D_1C \backsim \triangle E_1E_2E$,所以,

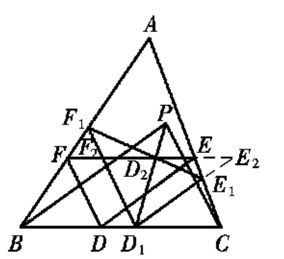

图3

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2} = \frac{D_1C}{EE_2}. \qquad ①$$

因为 $\triangle F_1FF_2 \backsim \triangle F_1BD_1$,所以,

$$\frac{F_2F_1}{F_1D_1} = \frac{FF_2}{BD_1}. \qquad ②$$

因为 $\triangle PBC$ 和 $\triangle D_1E_2F_2$ 都相似于 $\triangle DEF$,且它们的对应边平行,所以,$\triangle PBC \backsim \triangle D_1E_2F_2$,且对

应边互相平行.

而 PD_1 和 D_1D_2 是这对相似三角形中处于对应位置的线段,所以,

$$\frac{E_2D_2}{D_2F_2}=\frac{BD_1}{D_1C}. \quad ③$$

①×②×③,又因为 $EE_2=DD_1=FF_2$ (四边形 DD_1E_2E 和四边形 DD_1F_2F 都是平行四边形),则

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2}\cdot\frac{E_2D_2}{D_2F_2}\cdot\frac{F_2F_1}{F_1D_1}=\frac{D_1C}{EE_2}\cdot\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{FF_2}{BD_1}=\frac{FF_2}{EE_2}=1.$$

对 $\triangle D_1E_2F_2$,由梅涅劳斯定理的逆定理知 E_1、D_2、F_1 三点共线.

5. 当 $p_1>2$ 时,2 不能表成 $(p_1p_2\cdots p_{25})^{2\,004}$ 的不同正约数之和,此时 $T=1$.

设 $p_1=2$,我们证明如下更一般的结论:

如果 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为 k 个互不相同的质数, $p_i<p_{i+1}\leqslant p_i^{2\,005}$ $(i=1,2,\cdots,k)$, $p_1=2$,则能表成 $(p_1p_2\cdots p_k)^{2\,004}$ 的不同正约数之和的正整数所成集合为 $\{1,2,3,\cdots,T_k\}$,其中

$$T_k=\frac{p_1^{2\,005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2\,005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{2\,005}-1}{p_k-1}.$$

注意到 $(p_1p_2\cdots p_k)^{2\,004}$ 的所有正约数之和为 T_k. 只要证明,当 $1\leqslant n\leqslant T_k$ 时, n 可表成 $(p_1p_2\cdots p_k)^{2\,004}$ 的不同正约数之和.

当 $k=1$ 时,设 $1\leqslant n\leqslant T_1=1+2+2^2+\cdots+2^{2\,004}$.

由 n 可表成二进制知 n 可表成 $2^{2\,004}$ 的不同正约数之和.

假设结论对 k 成立,设 $1\leqslant n\leqslant T_{k+1}$. 由 $T_{k+1}=T_k(1+p_{k+1}+\cdots+P_{k+1}^{2\,004})$ 知存在 $0\leqslant i\leqslant 2\,004$,使得

$$T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004})$$
$$<n\leqslant T_k(p_{k+1}^{i}+p_{k+1}^{i+1}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004}).$$

当 $i=2\,004$ 时,不等式左边为 0. 于是,

$$1\leqslant n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004})\leqslant T_kp_{k+1}^{i}.$$

取整数 m_i,使得

$$0\leqslant n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004})-m_ip_{k+1}^{i}<p_{k+1}^{i}.$$

所以, $0\leqslant m_i\leqslant T_k$.

将 $n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004})-m_ip_{k+1}^{i}$ 表成 p_{k+1} 进制,则

$$n-T_k(p_{k+1}^{i+1}+p_{k+1}^{i+2}+\cdots+p_{k+1}^{2\,004})-m_ip_{k+1}^{i}$$
$$=m_0+m_1p_{k+1}+\cdots+m_{i-1}p_{k+1}^{i-1}.$$

当 $j\leqslant i-1$ 时,

$$0\leqslant m_j\leqslant p_{k+1}-1\leqslant p_k^{2\,005}-1$$
$$\leqslant\frac{p_1^{2\,005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2\,005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{2\,005}-1}{p_k-1}=T_k.$$

(这里用到了 $p_{u+1}-1\leqslant p_u^{2\,005}-1$, $p_1-1=1$.)

令 $m_{i+1}=m_{i+2}=\cdots=m_{2\,004}=T_k$,则 $n=m_0+m_1p_{k+1}+\cdots+m_{2\,004}p_{k+1}^{2\,004}$ $(0\leqslant m_i\leqslant T_k, 0\leqslant i\leqslant 2\,004)$.

由归纳假设知,每一个非零 m_i 均可表成 $(p_1p_2\cdots p_k)^{2\,004}$ 的不同正约数之和. 结论得证.

所以,当 $p_1>2$ 时, $T=1$;当 $p_1=2$ 时,

$$T=\frac{p_1^{2\,005}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{2\,005}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_{25}^{2\,005}-1}{p_{25}-1}.$$

6. 由题设得 $0<a、b、c<\pi$. 故

$\sin a>0$, $\sin b>0$, $\sin c>0$,

$|\cos a|<1$, $|\cos b|<1$, $|\cos c|<1$.

不妨设 $\sin a\leqslant\sin b\leqslant\sin c$.

若 $a=\frac{\pi}{2}$,则 $b=c=\frac{\pi}{2}$.

故 $\sin a=\sin b=\sin c=1$. 结论显然成立.

设 $a\neq\frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $a+b+c=2\pi$ 时,有

$$\sin c=\sin(2\pi-a-b)=-\sin(a+b)$$
$$\leqslant\sin a\cdot|\cos b|+\sin b\cdot|\cos a|<\sin a+\sin b.$$

(2) 当 $a+b+c<2\pi$ 时,由于 $a、b、c$ 构成三角形的三边,故存在一个三面角使得 $a、b、c$ 分别为其面角. 如图 4 所示.

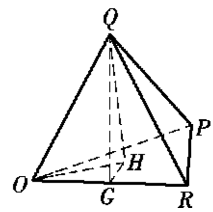

图 4

这里 $OR、OP、OQ$ 不在一平面上, $OQ=OP=OR=1$, $\angle QOR=a$, $\angle QOP=b$, $\angle POR=c$.

过点 Q 作平面 POQ 的垂线,垂足为 H. 过 H 作 OR 的垂线,垂足为 G. 设 $\angle QOH=\varphi$, $\angle HOR=\theta$,则

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta<2\pi.$$

由勾股定理得

$$\sin a=QG=\sqrt{QH^2+GH^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta}$$
$$\geqslant|\sin\theta|. \quad ①$$

类似有

$$\sin b=\sqrt{\sin^2(c-\theta)+\sin^2\varphi\cos^2(\theta-c)}\geqslant|\sin(c-\theta)|. \quad ②$$

我们断言,①和②中的等号不能同时成立. 若不然,由 $\sin^2\varphi\neq0$ 得 $\cos\theta=\cos(c-\theta)=0$. 故

$$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}, c-\theta=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}.$$

这与 $0<c<\pi$ 矛盾. 因此,

$$\sin a+\sin b>|\sin\theta|+|\sin(c-\theta)|$$
$$\geqslant|\sin(\theta+c-\theta)|=\sin c.$$

(2004 年 IMO 中国国家集训队命题组　提供)