

## 全国高中数学联赛模拟试题（六）

### 第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、在复平面上，非零复数  $z_1$ 、 $z_2$  在以  $i$  对应的点为圆心，1 为半径的圆上， $\overline{z_1} \cdot z_2$  的实部为零， $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$ ，则  $z_2 =$

- (A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$     (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$     (C)  $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$     (D)  $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2、已知函数  $f(x) = \log_a(ax^2 - x + \frac{1}{2})$  在  $[1, 2]$  上恒正，则实数  $a$  的取值范围是

- (A)  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$     (B)  $(\frac{3}{2}, +\infty)$     (C)  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$     (D)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$

3、已知双曲线过点  $M(-2, 4)$ ， $N(4, 4)$ ，它的一个焦点为  $F_1(1, 0)$ ，则另一个焦点  $F_2$  的轨迹方程是

(A)  $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$  ( $y \neq 0$ ) 或  $x=1$  ( $y \neq 0$ )

(B)  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$  ( $x \neq 0$ ) 或  $x=1$  ( $y \neq 0$ )

(C)  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$  ( $y \neq 0$ ) 或  $y=1$  ( $x \neq 0$ )

(D)  $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  ( $x \neq 0$ ) 或  $y=1$  ( $x \neq 0$ )

4、已知正实数  $a$ 、 $b$  满足  $a+b=1$ ，则  $M = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b}$  的整数部分是

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4

5、一条笔直的大街宽是 40 米，一条人行道穿过这条大街，并与大街成某一角度，人行道的宽度是 15 米，长度是 50 米，则人行道间的距离是

- (A) 9 米    (B) 10 米    (C) 12 米    (D) 15 米

6、一条铁路原有  $m$  个车站，为适应客运需要新增加  $n$  个车站 ( $n > 1$ )，则客运车票增加了 58 种（注：从甲站到乙站需要两种不同的车票），那么原有车站的个数是

- (A) 12    (B) 13    (C) 14    (D) 15

二、填空题：（每小题 6 分，共 36 分）

7、长方形  $ABCD$  的长  $AB$  是宽  $BC$  的  $2\sqrt{3}$  倍，把它折成无底的正三棱柱，使  $AD$  与  $BC$  重合折痕线  $EF$ 、 $GH$  分别交原对角线  $AC$  于  $M$ 、 $N$ ，则折后截面  $AMN$  与底面  $AFH$  所成的角是\_\_\_\_\_。

8、在  $\triangle ABC$  中， $a$ 、 $b$ 、 $c$  是角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边，且满足  $a^2 + b^2 = 2c^2$ ，则角  $C$  的最大值是\_\_\_\_\_。

9、从盛满  $a$  升 ( $a > 1$ ) 纯酒精的容器里倒出 1 升, 然后填满水, 再倒出 1 升混合溶液后又用水填满, 如此继续下去. 则第  $n$  次操作后溶液的浓度是\_\_\_\_\_.

10、已知函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域均为非负实数集, 对任意  $x \geq 0$ , 规定

$f(x) * g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ . 若  $f(x) = 3 - x$ ,  $g(x) = \sqrt{2x + 5}$ , 则  $f(x) * g(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

11、从 1 到 100 的自然数中, 每次取出不同的两个数, 使它们的和大于 100, 则可有\_\_\_\_\_不同的取法.

12、若实数  $a > 0$ , 则满足  $a^5 - a^3 + a = 2$  的  $a$  值属于区间: ①  $(0, \sqrt[3]{3})$ ; ②  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$ ; ③  $(\sqrt[3]{3}, +\infty)$ ;

④  $(0, \sqrt[3]{2})$ . 其中正确的是\_\_\_\_\_.

三、(20 分)

求证: 经过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体的一个侧面的面积

四、(20 分)

直线  $Ax + Bx + C = 0$  ( $A \cdot B \cdot C \neq 0$ ) 与椭圆  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  相交于  $P$ 、 $Q$  两点,  $O$  为坐标原点,

且  $OP \perp OQ$ . 求证:  $\frac{a^2b^2}{C^2} = \frac{a^2 + b^2}{A^2 + B^2}$ .

五、(20 分)

某新建商场建有百货部、服装部和家电部三个经营部, 共有 190 名售货员, 计划全商场日营业额 (指每日卖出商品的总金额) 为 60 万元, 根据经验, 各部商品每 1 万元营业额所需售货员人数如表 1, 每 1 万元营业额所得利润如表 2. 商场将计划日营业额分配给三个经营部, 同时适当安排各部的营业员人数, 若商场预计每日的总利润为  $c$  (万元) 且满足  $19 \leq c \leq 19.7$ , 又已知商场分配给经营部的日营业额均为正整数万元, 问这个商场怎样分配日营业额给三个部? 各部分别安排多少名售货员?

表 1 各部每 1 万元营业额所需人数表

部门	人数
百货部	5
服装部	4
家电部	2

表 2 各部每 1 万元营业额所得利润表

部门	利润
百货部	0.3 万元
服装部	0.5 万元
家电部	0.2 万元

## 第二试

一、(50分)

矩形  $ABCD$  的边  $AD = \lambda \cdot AB$ , 以  $AB$  为直径在矩形之外作半圆, 在半圆上任取不同于  $A$ 、 $B$  的一点  $P$ , 连  $PC$ 、 $PD$  交  $AB$  于  $E$ 、 $F$ , 若  $AE^2 + BF^2 = AB^2$ , 试求正实数  $\lambda$  的值.

二、(50分)

若  $a_i \in \mathbf{R}^+$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 且  $2 \leq n \in \mathbf{N}$ .

求证:  $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{S - a_k} \geq \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n a_k^2$ .

三、(50分)

无穷数列  $\{c_n\}$  可由如下法则定义:  $c_{n+1} = |1 - |1 - 2c_n||$ , 而  $0 \leq c_1 \leq 1$ .

(1) 证明: 仅当  $c_1$  是有理数时, 数列自某一项开始成为周期数列.

(2) 存在多少个不同的  $c_1$  值, 使得数列自某项之后以  $T$  为周期 (对于每个  $T=2, 3, \dots$ ) ?

参考答案

第一试

一、选择题:

1、A; 2、C; 3、A; 4、B; 5、C; 6、C

二、填空题:

1、 $\frac{\pi}{6}$ ; 2、 $\frac{\pi}{3}$ ; 3、 $(1-\frac{1}{a})^n$ ; 4、 $2\sqrt{3}-1$ ; 5、2500; 6、③④.

三、证略.

四、证略.

五、8, 23, 29 或 10, 20, 30 (万元), 对应 40, 92, 58 或 50, 80, 60 (人).

第二试

一、 $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

二、证略.

三、(1) 证略.

(2) 无穷个.