全国高中数学联赛模拟试题（一）

）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、方程 $6\times(5a^2+b^2)=5c^2$ 满足 $c\leqslant 20$ 的正整数解(a,b,c)的个数是

（A）1　（B）3　（C）4　（D）5

2、函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$（$x\in\mathbf{R}$，$x\neq 1$）的递增区间是

（A）$x\geqslant 2$　（B）$x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$　（C）$x\leqslant 0$　（D）$x\leqslant 1-\sqrt{2}$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$

3、过定点 $P(2,1)$作直线 l 分别交 x 轴正向和 y 轴正向于 A、B，使△AOB（O 为原点）的面积最小，则 l 的方程为

（A）$x+y-3=0$　（B）$x+3y-5=0$　（C）$2x+y-5=0$　（D）$x+2y-4=0$

4、方程 $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=a+1$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的实数解 x，则参数 a 的取值范围是

（A）$0\leqslant a<1$　（B）$-3\leqslant a<1$　（C）$a<1$　（D）$0<a<1$

5、数列 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,⋯的第 1000 项是

（A）42　（B）45　（C）48　（D）51

6、在 1,2,3,4,5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中，满足条件 $a_1<a_2$，$a_2>a_3$，$a_3<a_4$，$a_4>a_5$ 的排列的个数是

（A）8　（B）10　（C）14　（D）16

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、$[x]$表示不大于 x 的最大整数，则方程 $\dfrac{1}{2}\times[x^2+x]=19x+99$ 的实数解 x 是_____.

2、设 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n^2$，则通项公式 $a_n=$_____.

3、数 7^{99} 被 2550 除所得的余数是_____.

4、在△ABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，则 $\cos C=$_____.

5、设 k、θ是实数，使得关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+k^2-1=0$ 的两个根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，则θ 的取值范围是_____.

6、数$\left(5+\sqrt{24}\right)^{2n}$（$n\in\mathbf{N}$）的个位数字是_____.

三、（20 分）

已知 x、y、z 都是非负实数，且 $x+y+z=1$.

求证：$x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)\geqslant 0$，并确定等号成立的条件.

四、（20 分）

（1）求出所有的实数 a，使得关于 x 的方程 $x^2+(a+2002)x+a=0$ 的两根皆为整数.

（2）求出所有的实数 a，使得关于 x 的方程 $x^3+(-a^2+2a+2)x-2a^2-2a=0$ 有三个整数根.

五、（20 分）

试求正数 r 的最大值，使得点集 $\mathbf{T}=\{(x,y)|x、y\in\mathbf{R}，且\ x^2+(y-7)^2\leqslant r^2\}$一定被包含于另一个点集 $\mathbf{S}=\{(x,y)|x、y\in\mathbf{R}，且对任何\theta\in\mathbf{R}，都有\ \cos 2\theta+x\cos\theta+y\geqslant 0\}$之中.

第二试

一、（50 分）

设 a、b、$c\in\mathbf{R}$，$b\neq ac$，$a\neq -c$，z 是复数，且 $z^2-(a-c)z-b=0$．

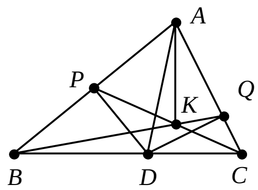
求证：$\left|\dfrac{a^2+b-(a+c)z}{ac-b}\right|=1$ 的充分必要条件是 $(a-c)^2+4b\leqslant 0$．

二、（50 分）

如图，在△ABC 中，∠ABC 和∠ACB 均是锐角，D 是 BC 边上的内点，且 AD 平分∠BAC，过点 D 分别向两条直线 AB、AC 作垂线 DP、DQ，其垂足是 P、Q，两条直线 CP 与 BQ 相交与点 K．求证：

（1）$AK\perp BC$；

（2）$AK<AP=AQ<\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$，其中 $S_{\triangle ABC}$ 表示△ABC 的面积．



三、（50 分）

给定一个正整数 n，设 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足下列 n 个方程：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i+j}=\frac{4}{2j+1}\ (j=1,2,3,\cdots,n).$$

确定和式 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{2i+1}$ 的值（写成关于 n 的最简式子）．

参考答案

第一试

一、选择题：

1、C；2、C；3、D；4、A；5、B；6、D

二、填空题：

1、$-\frac{181}{38}$或$\frac{1587}{38}$；　　2、$7\times2^{n-1}-n^2-2n-3$；

3、343；　　4、$\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$；

5、$\{\theta|\theta=2n\pi+\pi$或$2n\pi-\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}\}$；6、1（$n$为偶数）；7（$n$为奇数）.

三、证略，等号成立的条件是$x=y=z=\frac{1}{3}$或$\begin{cases}x=y=\frac{1}{2}\\z=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=z=\frac{1}{2}\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}y=z=\frac{1}{2}\\z=0\end{cases}$.

四、（1）a 的可能取值有 0，－1336，－1936，－1960，－2664，－4000，－2040；（2）a 的可能取值有－3，11，－1，9.

五、$r_{\max}=4\sqrt{2}$.

第二试

一、证略（提示：直接解出$z=\frac{a-c\pm\sqrt{-(a-c)^2-4b}\cdot \mathrm{i}}{2}$，通过变形即得充分性成立，然后利用反证法证明必要性）.

二、证略（提示：用同一法，作出BC边上的高AR，利用塞瓦定理证明AR、BQ、CP三线共点，从而$AK\perp BC$；记AR与PQ交于点T，则$\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=AR>AT>AQ=AP$，对于$AK<AP$，可证$\angle APK<\angle AKP$）.

三、$S=-\frac{1}{(2n+1)^2}+1$.