. 2013 年北京市中学生数学竞赛
初二年级竞赛试题及解答

2013 年 5 月 12 日 13:00～15:00

一、选择题（满分 25 分，每小题只有一个正确答案，答对得 5 分，将答案写在下面相应的空格中）

题 号	1	2	3	4	5
答 案	A	C	D	D	B

1．2013+2012−2011−2010+2009+2008−2007−2006+⋯+5+4−3−2+1 等于

（A）2013．（B）2012．（C）1．（D）0．

答：（A）

理由：易见，算式中符号呈现周期性规律．

从第一个数 2013 开始每四个数分成一组，一共分成 503 组，每一组的计算结果都是 4，剩下数 1，即

原式=(2013+2012−2011−2010)+(2009+2008−2007−2006)+⋯+(5+4−3−2)+1

=4+4+4+⋯+4+1=4×503+1=2013．

（也可以从第二个数开始每 4 个数分成一组，每一组的结果为 0，共 503 个 0，即原式= 2013）．

2．化简$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$的结果是

（A）$2\sqrt{5}$．（B）2．（C）1．（D）$\sqrt{5}$．

答：（C）

解：设$a=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$，易知 a＞0，

$$a^2=\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=3-2\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}=3-2\sqrt{\frac{9-5}{4}}=3-2=1,$$

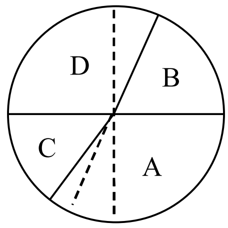
因为 a＞0，所以 a=1．

3．学生会选举有四个候选人 A, B, C, D，已知 D 得票比 B 得票多，A, B 得票之和超过 C, D 得票之和，A, C 得票之和与 B, D 得票之和相等，则四人得票数由高到低的排列次序是

（A）A, D, C, B．（B）D, B, A, C．（C）D, A, B, C．（D）A, D, B, C．

答：（D）

解：用圆形图表示，因 A, C 得票之和与 B, D 得票之和相等，作一直径分圆为两半，上部为 B, D；下部为 A, C；已知 D 得票比 B 得票多，画得扇形 D 大于扇形 B；由 A, B 得票之和超过 C, D 得票之和，画扇形 A 与 B 大于半圆；可见得票数由高到低的排列次序应为 A, D, B, C．



4. 某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多，那么发生这种情况的是下面四个年份中的

（A）2010．　　（B）2012．　　（C）2014．　　（D）2016．

答：（D）

理由：某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多，就是说，这个月里星期三、星期四、星期五、星期六、星期日的天数都不比星期二的天数多，一个月可以有 30 天, 31 天，28 天和 29 天．我们分类分析讨论：

（1）一个月有 30 天，如果这个月的 29 日是星期一，则 30 日是星期二，这个月星期一天数和星期二的天数相同；如果这个月的 30 日是星期一，则 29 日是星期日，则这月里除星期一的天数比星期二的天数多外，星期日的天数也比星期二的天数多，这与“某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多”的条件相矛盾. 所以，“某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多”的情况不会在 30 天的月份里发生.

（2）同样道理，一个月有 31 天，就不可能仅有星期一的天数比星期二的天数多.

（3）一个月 28 天，则星期一的天数和星期二的天数同样多. 也不会发生“仅有星期一的天数比星期二的天数多”的情况.

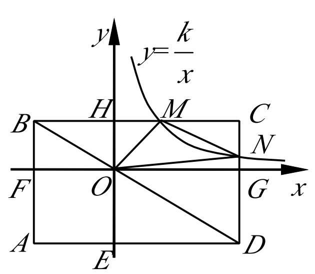
（4）一个月 29 天，1 日是星期一，29 日也是星期一，共有 5 个星期一，4 个星期二；所以“仅有星期一的天数比星期二的天数多”的情况只能在 29 日的月份里发生.

因此“某月里仅有星期一的天数比星期二的天数多”只能在闰年的 2 月份发生. 由于闰年年份数被 4 整除，所以 2010、2014 是平年，应排除（A）和（C）. 注意到 2 月里“仅有星期一的天数比星期二的天数多”时，2 月 1 日是星期一，该年的 1 月 1 日就是星期五，容易计算 2012 年 1 月 1 日是星期日，不合要求，故排除（B），所以应选（D）.

事实上，由今天（2013 年 5 月 12 日）是星期日，可以推算出 2016 年 1 月 1 月是星期五.

5．如图所示，矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 经过坐标原点 O, 矩形的边分别平行于坐标轴，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$的图像交 BC 于点 M，交 CD 于点 N，若 A 点的坐标为$(-2, -2)$，$\triangle OMN$ 的面积等于$\dfrac{3}{2}$，则 k 等于

（A）2.5．　（B）2．　（C）1.5．　（D）1．



答：（B）

解：根据矩形的对角线平分矩形的面积，易知

矩形 $CHOG$ 的面积=矩形 $OFAE$ 的面积$=|-2|\times|-2|=4$．

设 $OH=a$，$OG=b$，则 $ab=4$，$HM=\dfrac{k}{a}$，$GN=\dfrac{k}{b}$，$M\left(\dfrac{k}{a},a\right)$，$N\left(b,\dfrac{k}{b}\right)$，而

$CHOG$ 的面积$-\triangle OGN$ 的面积$-\triangle OHM$ 的面积$-\triangle MCN$ 的面积$=\triangle OMN$ 的面积$=\dfrac{3}{2}$，

所以，$4-\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot\dfrac{k}{b}-\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{k}{a}-\dfrac{1}{2}\left(b-\dfrac{k}{a}\right)\left(a-\dfrac{k}{b}\right)=\dfrac{3}{2}$，又已知 $k>0$，解得 $k=2$．

二、填空题（满分 35 分，每题 7 分，将答案写在下面相应的空格中）

题　号	1	2	3	4	5
答　案	4	8	24	140	1004.5

1．计算：$\dfrac{2013^2+2011}{2011^2-2013}\times\dfrac{4020^2-8040}{2011\times2014-4}=$_______．

答：4．

解：设 $a=2011$，则

原式$=\dfrac{(a+2)^2+a}{a^2-a-2}\times\dfrac{(2a-2)^2-4(a-1)}{a(a+3)-4}=\dfrac{(a+1)(a+4)}{(a-2)(a+1)}\times\dfrac{4(a-1)(a-2)}{(a+4)(a-1)}=4$．

2．一串数 $a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots$ 按如下规则构成：$a_1=7$，$a_k=(a_{k-1}^2$ 的数字和$)+1$，$(k=2, 3, 4, \cdots)$，如 $a_2=14$，$a_3=17$，依此类推，则 $a_{2013}=$_______．

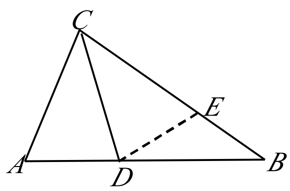
答：8．

解：以这串数的构成规则，有 $a_1=7$，$a_2=14$，$a_3=17$，$a_4=20$，$a_5=5$，$a_6=8$，$a_7=11$，$a_8=5$，显见，$a_8=a_5$，即从 a_5 开始，这串数以 3 为周期循环．

设 $b_k=a_{k-4}$，则 $b_1=5$，$b_2=8$，$b_3=11$，$b_4=5$，…是以 3 为周期的一串数，$a_{2013}=b_{2009}$，而 $2009=3\times669+2$，即 $b_{2009}=8$，所以 $a_{2013}=8$．

3．在△ABC 中，∠A=2∠B，CD 是∠C 的平分线.，AC=16，AD=8，则 BC=_______．

答：24．



解：因为∠A=2∠B，所以∠A>∠B，因此 BC>AC，

在 BC 上取点 E，使得 $EC=AC$，连接 DE，此时△CED≌△CAD，由此 $ED=AD$，且∠CED=∠CAD，

于是，∠BDE=∠CED−∠DBE=∠A−∠B=∠B=∠DBE，

所以△BDE 是等腰三角形，$BE=DE$．

因此，$BC=BE+CE=AD+AC=8+16=24$．

4．已知质数 p 和 q，使得 $p^3-q^5=(p+q)^2$，则 $\dfrac{8(p^{2013}-p^{2010}q^5)}{p^{2011}-p^{2009}q^2}=$_______．

答：140．

解：p 与 q 被 3 除的余数只能有相同与不同两种情况．

如果 p 与 q 被 3 除的余数相同，因 p 与 q 均为质数，若被 3 除余 0，只能 $p=q=3$，这时左边 $3^3-3^5<0$，右边 $(3+3)^2>0$，不满足 $p^3-q^5=(p+q)^2$．

如果 p 与 q 被 3 除同余 1 或同余 2，则左边的 p^3-q^5 被 3 除余 0，而右边 $(p+q)^2$ 被 3 除余 2 或余 1，不满足 $p^3-q^5=(p+q)^2$．

所以满足 $p^3-q^5=(p+q)^2$ 的质数 p 与 q 被 3 除的余数必不相同．

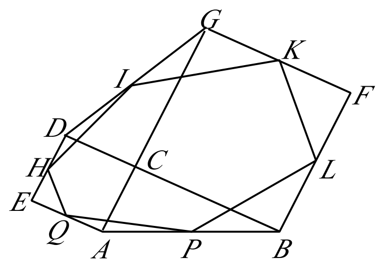
若 p 与 q 均不被 3 整除，且 p 与 q 一个被 3 除余 1，另一个被 3 除余 2，则左边 p^3-q^5 不被 3 整除，而右边被 3 整除，因此 $p^3-q^5=(p+q)^2$ 不成立，所以 p 与 q 中有一个且只有一个被 3 整除．

设 $p=3$，由等式 $3^3-q^5=(3+q)^2>0$，所以 $3^3>q^5$，即 $q^5<27$，这样的质数 q 不存在！因此只能 $q=3$，且 $p^3-243=(p+3)^2$，即 $p(p^2-p-6)=252=2^2\cdot3^2\cdot7$，所以 p 是 2，3，7 中的数，经检验，只有 $p=7$ 满足等式，因此 $p=7$，$q=3$，因此，

$$\frac{8(p^{2013}-p^{2010}q^5)}{p^{2011}-p^{2009}q^2}=\frac{8p^{2010}(p^3-q^5)}{p^{2009}(p^2-q^2)}=\frac{8p(p^3-q^5)}{(p-q)(p+q)}=\frac{8p(p+q)^2}{(p-q)(p+q)}=\frac{8p(p+q)}{p-q}$$

$$=\frac{8\times7\times(7+3)}{4}=\frac{560}{4}=140.$$

5．如图，在直角△ABC 的两直角边 AC、BC 上分别作正方形 $ACDE$ 和 $CBFG$，连接 DG，线段 AB、BF、FG、GD、DE 和 EA 的中点依次为 P、L、K、I、H 和 Q，若 $AC=14$，$BC=28$，则六边形 $HIKLPQ$ 的面积=_______．



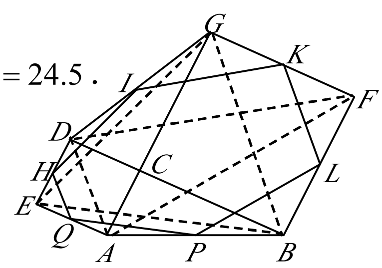
答：1004.5．

解：如图，连接 DF、FA、AD、EG、GB 和 BE．

六边形 $ABFGDE$ 的面积=1372．

△BLP 的面积=△FKL 的面积=△GKI 的面积=$\frac{1}{8}\times28^2=98$，

△DIH 的面积=△EHQ 的面积=△AQP 的面积=$\frac{1}{8}\times14^2=24.5$．



所以，六边形 $HIKLPQ$ 的面积

= 六边形 $ABFGDE$ 的面积

−△BLP 的面积−△FKL 的面积−△GKI 的面积

−△DIH 的面积−△EHQ 的面积−△AQP 的面积

=1372−3×98−3×24.5=1004.5．

三、（满分 10 分）（1）已知 a、b 是正整数，求证：$(a+b)\mid(a^3+b^3)$；

（2）设 $N=1^3+2^3+3^3+\cdots+2011^3+2012^3$，求证：$(2012\times2013)\mid N$．

证明：（1）由于 $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=(a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)$

$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

所以$(a+b)\mid(a^3+b^3)$.

（2）先将 N 按 $[i^3, (2013-i)^3]$ 分组：

$N=(1^3+2012^3)+(2^3+2011^3)+\cdots+(1005^3+1008^3)+(1006^3+1007^3)$

每一组都能被 2013 整除，所以 $2013 \mid N$;

再将 N 按$[i^3, (2012-i)^3]$分组：

$N=(1^3+2011^3)+(2^3+2010^3)+\cdots+(1005^3+1007^3)+1006^3+2012^3$

$=(1^3+2011^3)+(2^3+2010^3)+\cdots+(1005^3+1007^3)+2012\times(2\times503^2)+2012^3$

每一组都能被 2012 整除，所以 $2012 \mid N$.

因为$(2012，2013)=1$，

因此，$(2012\times2013)\mid N$.

四、（满分 15 分）市科普日，每位中学生可报名一项学科竞赛．记者与报名参赛的 33 位选手座谈，对其中每位选手问同样两个问题：在座有几个人与你的校籍相同？有几个人的参赛科目与你相同？结果发现，在所得到的回答中包含了由 0 到 10 的所有整数．求证：这 33 名选手中有至少两个人的校籍与参赛科目都相同.

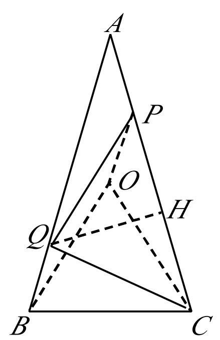
解：将 33 名选手分别按校籍与参赛科目分组（可能有的组仅由一个人组成，例如，来自某校的只有 1 人）．每个人都属于两个组，一个是按校籍分的组，一个是按学科分的组．由题意可知，这 33 名选手按上述两种分法一共分有 11 个组．事实上，依题意，存在分别由 1，2，…，11 个人所组成的组，所以总的组数不少于 11．另一方面，由于 1+2+3+…+11=66=2×33，而且已经把每个人都算了两遍，所以组数不可能多于 11．因此，这 33 名选手按上述两种分组法恰分有 11 个组.

我们来考察那个由 11 个人所组成的组 A（不妨设该组的人的校籍相同），由于所剩的组数，特别是按学科所分的组数，不超过 10 个，所以组 A 中至少有两个人属于同一个按学科所分的组．于是这两个人的校籍和参赛学科都相同.

五、（满分 15 分）如图，等腰△ABC的顶角 A 等于 30º，在 AB 和 AC 上分别取点 Q 和 P，使得∠QPC=45°，且 $PQ=BC$，求证：$BC=CQ$.

证明：如图，平移 QP 到 BO，连接 PO，则四边形 $QPOB$ 是平行四边形.

于是有 $BO=PQ=BC$，又因为∠QBO=∠AQP=45°−30º=15°，所以∠OBC=(180°−30º)÷2−15º=60°，即△OBC 是等边三角形，因此 $PQ=BC=CO$.



由 $QPOB$ 是平行四边形可得∠OPC=∠A，∠PCO=QBO=∠AQP，

所以△AQP≌△PCO（角、角、边).

所以 $AQ=CP$.

作 $QH\perp CP$ 于 H，则 $QH=HP$.

因为∠A=30°，$QH\perp CP$，所以 $CP=AQ=2QH=2HP$，即 H 为 PC 的中点，即 QH 为线段 PC 的垂直平分线，因此 $PQ=CQ$，再由已知，可得 $BC=PQ=CQ$.