

第30届全国中学生物理竞赛决赛考试试题、解答与评分标准

2013年10月26日

一、(15分) 一质量为 m 的小球在距水平地面 h 高处以水平速度 $\sqrt{2gh}$ 抛出, 空气阻力不计. 小球每次落地反弹时水平速度不变, 竖直速度大小按同样的比率减小. 若自第一次反弹开始小球的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积总和为 $\frac{8}{21}h^2$, 求小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量.

提示: 小球每次做斜抛运动(从水平地面射出又落至地面)的轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积等于其最大高度和水平射程乘积的 $\frac{2}{3}$.

参考解答:

设小球每次落地反弹时, 反弹后的竖直速度大小是反弹前的 λ 倍. 第一次落地时竖直速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

第一次反弹竖直速度大小为

$$v_1 = \lambda\sqrt{2gh}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (2)$$

第一次反弹高度为

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \lambda^2 h. \quad (3)$$

第一次反弹后飞行时间为

$$t_1 = 2\frac{v_1}{g} = 2\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4)$$

第一次反弹至第二次反弹时水平方向的位移为

$$x_1 = \sqrt{2gh} t_1 = 4\lambda h. \quad (5)$$

小球在第一次反弹至第二次反弹之间的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积为

$$S_1 = \frac{2}{3} h_1 x_1 = \frac{8}{3} \lambda^3 h^2. \quad (6)$$

设第 n 次反弹后至 $n+1$ 次反弹前的最大竖直速度大小和上升的最大高度分别为 v_n 和 h_n . 由题意和上述论证知

$$v_{n+1} = \lambda v_n, \quad (7)$$

$$h_{n+1} = \lambda^2 h_n, \quad (8)$$

$$t_{n+1} = \lambda t_n, \quad (9)$$

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \quad (10)$$

$$S_{n+1} = \lambda^3 S_n. \quad (11)$$

S_1, S_2, \dots 构成一无穷递缩等比数列, 其总和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1(1 + \lambda^3 + \lambda^6 + \dots) = \frac{S_1}{1 - \lambda^3} = \frac{8}{21} h^2 \quad (12)$$

由(6)、(12)式有

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (13)$$

设 I_n 表示小球在第 n ($n \geq 1$) 次碰撞过程中小球受到的作用力的冲量, 由动量定理有

$$I_n = mv_n - m(-v_{n-1}) = m(1 + \lambda)v_{n-1} \quad (14)$$

由于小球每次反弹前后速度的水平分量不变, 小球每次碰撞过程中受到的沿水平方向的冲量为零. 小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量为

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = (mv_0)(1 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = mv_0 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \quad (15)$$

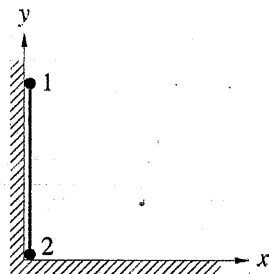
方向向上. 将(13)式代入(15)式得

$$I = 3mv_0 = 3m\sqrt{2gh} \quad (16)$$

评分标准: 本题 15 分.

(1)至(6)式各 1 分, (11)式 4 分, (12)至(16)式各 1 分.

二、(15 分) 质量均为 m 的小球 1 和 2 由一质量可忽略、长度为 l 的刚性轻杆连接, 竖直地靠在墙角, 小球 1 在杆的上端, 如图所示. 假设墙和地面都是光滑的. 初始时给小球 2 一个微小的向右初速度. 问在系统运动过程中, 当杆与竖直墙面之间的夹角等于何值时, 小球 1 开始离开竖直墙面?



参考解答: 如图, 在小球 1 未离开竖直墙面之前, 杆与竖直墙面之间夹角为 θ 时, 小球 1 的坐标为

$$x_1 = 0, y_1 = l \cos \theta, \quad (1)$$

小球 2 的坐标为

$$x_2 = l \sin \theta, y_2 = 0. \quad (2)$$

小球 1 的速度为

$$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} = 0, v_{1y} = \frac{dy_1}{dt} = -\omega l \sin \theta, \quad (3)$$

式中 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 是杆的转动角速度. 小球 2 的速度为

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt} = \omega l \cos \theta, v_{2y} = \frac{dy_2}{dt} = 0. \quad (4)$$

由机械能守恒, 有

$$mgl = \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl \cos \theta. \quad (5)$$

由上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \theta)}{l}}. \quad (6)$$

这里考虑到随着时间 t 的增加, θ 变大, 因此 $\omega > 0$, 从而舍去负根.

系统质心 c 的 x 坐标为

$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{1}{2}l \sin \theta. \quad (7)$$

质心速度的 x 分量为

$$v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = \frac{1}{2}\omega l \cos \theta. \quad (8)$$

质心加速度的 x 分量为

$$a_{cx} = \frac{dv_{cx}}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2 l \sin \theta + \frac{1}{2}l \cos \theta \frac{d\omega}{dt}. \quad (9)$$

由(6)式得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\omega \sin \theta \sqrt{\frac{2g}{l(1 - \cos \theta)}} = \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (10)$$

在得到上述结果时又利用了(6)式. 把(6)、(10)式代入(9)式, 得

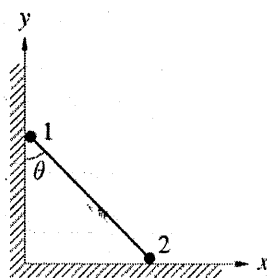
$$a_{cx} = \frac{dv_{cx}}{dt} = -g \sin \theta (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}g \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta \left(\frac{3}{2} \cos \theta - 1 \right). \quad (11)$$

设竖直墙面对小球 1 的正压力为 T , 质心 c 在 x 方向的运动满足

$$T = 2ma_{cx}. \quad (12)$$

由(12)式可知, 当 $a_{cx} = 0$ 时,

$$T = 0, \quad (13)$$



小球 1 开始离开竖直墙面. 由(11)式得, 小球 1 开始离开竖直墙面时, 夹角 θ 满足方程

$$\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta-1\right)=0. \quad (14)$$

方程(13)的一个解满足 $\sin\theta=0$, 故 $\theta=0$, 此角度对应初始位置; 方程(13)的另一个解满足 $\frac{3}{2}\cos\theta-1=0$, 故

$$\theta=\arccos\frac{2}{3}. \quad (15)$$

此即小球 1 开始离开竖直墙面时杆与竖直墙面之间的夹角.

评分标准: 本题 15 分. (1)至(15)式各 1 分.

三、(25 分) 太空中有一飞行器靠其自身动力维持在地球赤道的正上方 $L=\alpha R_e$ 处, 相对于赤道上的地面物资供应站保持静止. 这里, R_e 为地球的半径, α 为常数, $\alpha>\alpha_m$, 而

$$\alpha_m=\left(\frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/3}-1,$$

M_e 和 ω_e 分别为地球的质量和自转角速度, G 为引力常数. 设想从供应站到飞行器有一根用于运送物资的刚性、管壁匀质、质量为 m_p 的竖直输送管, 输送管下端固定在地面上, 并设法保持输送管与地面始终垂直. 推送物资时, 把物资放进输送管下端内的平底托盘上, 沿管壁向上推进, 并保持托盘运行速度不致过大. 忽略托盘与管壁之间的摩擦力, 考虑地球的自转, 但不考虑地球的公转. 设某次所推送物资和托盘的总质量为 m .

1. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中, 地球引力和惯性离心力做的功分别是多少?
2. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中, 外推力至少需要做多少正功?
3. 当飞行器离地面的高度 (记为 L_0) 为多少时, 在把物资送到飞行器的过程中, 地球引力和惯性离心力所做功的和为零?
4. 如果通过适当控制飞行器的动力, 使飞行器在不运送物资时对输送管的作用力恒为零, 在不运送物资的情况下, 计算当飞行器离地面的高度为 $L=\alpha R_e$ ($\alpha>\alpha_m$) 时, 地面供应站对输送管的作用力; 并对 $L>L_0$ 、 $L=L_0$ 、 $\alpha_m R_e < L < L_0$ 三种情形, 分别给出供应站对输送管作用力的大小和方向.

参考解答:

1. 当物资 (包括托盘, 以下类似) m 距地心 r 处时, 物资 m 与地球系统的引力势能 U_G 和物资 m 受到的由于地球自转引起的惯性离心力 F_L 分别为

$$U_G=-\frac{GM_em}{r}, \quad F_L=m\omega_e^2 r. \quad (1)$$

这里已取由地心向外的方向为力的正向. 先计算地球引力对物资 m 所做的功. 当物资 m 分别在供应站和飞行器处时, 物资 m 与地球系统的引力势能为

$$U_G(R_e)=-\frac{GM_em}{R_e}, \quad U_G(L+R_e)=-\frac{GM_em}{L+R_e}=-\frac{GM_em}{(\alpha+1)R_e}. \quad (2)$$

由功能原理, 地球引力对物资 m 所做的功为

$$W_G=U_G(R_e)-U_G(L+R_e)=-\frac{GM_em}{R_e}\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)=-\frac{\alpha GM_em}{(\alpha+1)R_e}. \quad (3)$$

再计算惯性离心力对物资 m 所做的功 W_L . 由于惯性离心力与 r 成正比, 可用物资在供应站处的惯性离心力和物资在飞行器处的惯性离心力的平均值来计算惯性离心力的功. 于是

$$W_L=\frac{1}{2}[F_L(R_e)+F_L(L+R_e)]L=\frac{1}{2}m\omega_e^2[R_e+(L+R_e)]L=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2)m\omega_e^2 R_e^2. \quad (4)$$

2. 物资离开供应站后, 地球吸引力变小而惯性离心力变大. 当惯性离心力大于地球吸引力时, 就不再需要推动物资做功了. 因此, 需要外力做正功的路程为从出发点地球吸引力等于惯性离心力之处. 令 r_0 为地球吸引力等于惯性离心力之处到地心的距离, 则有

$$\frac{GM_e m}{r_0^2} = m\omega_e^2 r_0,$$

或

$$r_0 = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

物资到 r_0 处时, 地球引力所做的功为

$$W_G(r_0) = U_G(R_e) - U_G(r_0) = -\frac{GM_e m}{R_e} + \frac{GM_e m}{r_0} = -\frac{GM_e m}{R_e} \left(1 - \frac{R_e}{r_0} \right), \quad (6)$$

惯性离心力所做的功为

$$W_L(r_0) = \frac{1}{2} [F_L(r_0) + F_L(R_e)] (r_0 - R_e) = \frac{1}{2} m\omega_e^2 (r_0^2 - R_e^2). \quad (7)$$

因此, 为了把物资从供应站推送到飞行器, 外推力至少需要做的正功为

$$\begin{aligned} W_{\min} &= -[W_G(r_0) + W_L(r_0)] = \frac{GM_e m}{R_e} \left(1 - \frac{R_e}{r_0} \right) - \frac{1}{2} m\omega_e^2 (r_0^2 - R_e^2) \\ &= \frac{GM_e m}{R_e} \left[1 - \frac{3R_e}{2r_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{r_0} \right)^3 \right] > 0. \end{aligned}$$

这里, 利用了(5)式. 再将(5)式代入上式得

$$W_{\min} = \frac{GM_e m}{R_e} + \frac{1}{2} m\omega_e^2 R_e^2 - \frac{3}{2} m(GM_e \omega_e^2)^{2/3}. \quad (8)$$

3. 令(3)式和(4)式之和等于零, 则有

$$-\frac{\alpha GM_e m}{(\alpha+1)R_e} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha+2)m\omega_e^2 R_e^2 = 0,$$

即

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 \left(1 - \frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right) = 0, \quad (9)$$

其解为

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-3 \pm \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right]. \quad (10)$$

舍去 α 的负根并令

$$\alpha_0 \equiv \alpha_+ = \frac{1}{2} \left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right], \quad (11)$$

则飞行器到地面的距离为

$$L_0 = \alpha_0 R_e = \frac{R_e}{2} \left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right]. \quad (12)$$

4. 为求供应站对输送管的作用力, 先计算在输送管向下运动无限小距离 Δl 过程中, 地球引力、惯性离心力、地面供应站对输送管作用力所做的功. 由于输送管处于平衡状态, 因此这三个力对任何无限小位移所做功的和为零. 为计算地球引力、惯性离心力所做的功, 可以把输送管向下运动无限小距离 Δl 想象成输送管最上面无限小的一段 Δl (质量为 $\Delta m = m_p \Delta l / L$) 无限缓慢地移动到最下面. 在此过程中地球引力和惯性离心力所做的功可从类似于上面(3)式和(4)式中的结果求出. 这一无限小的一段 Δl 在距地心 r 处时, 地球引力势能和惯性离心力分别为

$$U_G = -\frac{GM_e \Delta m}{r} = -\frac{GM_e m_p \Delta l}{Lr}, \quad F_L = \Delta m \omega_e^2 r = \frac{1}{L} m_p \omega_e^2 r \Delta l. \quad (13)$$

在输送管最上面无限小的一段 Δl 无限缓慢地移动到最下面的过程中, 地球引力所做的功为

$$\Delta W_G = U_G(L + R_e) - U_G(R_e) = \frac{GM_e m_p}{LR_e} \left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right) \Delta l = \frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} \Delta l, \quad (14)$$

惯性离心力所做的功为

$$\Delta W_L = -\frac{1}{2} [F_L(R_e) + F_L(L + R_e)] L = -\frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e \Delta l. \quad (15)$$

取供应站对输送管的作用力 F_{base} 向下为正向. 在输送管向下运动无限小距离 Δl 过程中, F_{base} 所做的功为

$$\Delta W_{\text{base}} = F_{\text{base}} \Delta l. \quad (16)$$

由 $\Delta W_G + \Delta W_L + \Delta W_{\text{base}} = 0$, 有

$$\frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} \Delta l - \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e \Delta l + F_{\text{base}} \Delta l = 0. \quad (17)$$

于是,

$$F_{\text{base}} = -\frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} + \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e. \quad (18)$$

若 $F_{\text{base}} < 0$, 则供应站对输送管作用力的方向向上.

为便于讨论 $L > L_0$ 、 $L = L_0$ 、 $\alpha_m R_e < L < L_0$ 三种情形, 将(18)式改写为

$$\begin{aligned} F_{\text{base}} &= -\frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} + \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e = \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha + 1)} \left[(\alpha + 1)(\alpha + 2) - \frac{2GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right] \\ &= \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha + 1)} (\alpha - \alpha_+) (\alpha - \alpha_-) = \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha + 1)} (\alpha - \alpha_0) (\alpha - \alpha_-). \end{aligned} \quad (19)$$

式中, α_+ 由(10)式给出, α_0 由(11)式给出.

对于 $L > L_0$, 亦即 $\alpha > \alpha_0$, 供应站对输送管作用力的大小由(18)式或(19)式给出, 方向向下. 对于 $L = L_0$, 亦即 $\alpha = \alpha_0$, 由(19)式有

$$F_{\text{base}} = 0 \quad (L = L_0). \quad (20)$$

对于 $\alpha_m R_e < L < L_0$, 亦即 $\alpha_m < \alpha < \alpha_0$, 由(19)式可知 $F_{\text{base}} < 0$. 在此情形下, 供应站对输送管作用力的大小为

$$|F_{\text{base}}| = \frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} - \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e. \quad (21)$$

方向向上.

评分标准: 本题 25 分.

第 1 问 6 分,

(1)、(3)、(4)式各 2 分.

第 2 问 6 分,

(5)式 2 分, (6)、(7)式各 1 分, (8)式 2 分.

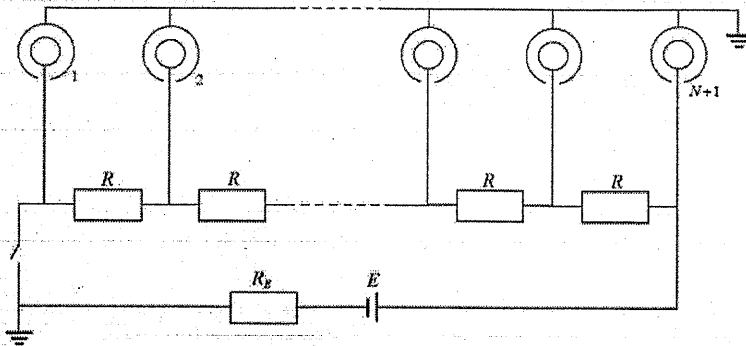
第 3 问 4 分,

(9)式 2 分, (10)式 1 分, (11) 或(12)式 1 分.

第 4 问 9 分,

(13)至(16)式各 1 分, (18)式 1 分, (19)式 2 分, (20)、(21)式各 1 分.

四、(20 分) 一电路包含内阻为 R_e 、电动势为 E 的直流电源和 N 个阻值均为 R 的相同电阻, 有 $N+1$ 个半径为 r 的相同导体球通过细长导线与电路连接起来. 为消除导体球之间的互相影响, 每个导体球的外边都用内半径为 $r_0 (> r)$ 的同心接地导体薄球壳包围起来, 球壳上有小缺口容许细长导线进入但与其绝缘, 如图所示. 把导体球按照从左向右的顺序依次编号为 1 到 $N+1$. 所有导体球起初不带电, 开关闭合并达到稳定状态后, 导体球上所带的总电量为 Q . 问导体球的半径是多少? 已知静电力常量为 k .



参考解答:

开关闭合经过较长时间后, 电路中将流过稳定的直流电流, 导体球上也将有稳定的电荷分布. 设第 i 个导体球所带电量为 Q_i , 那么包围它的导体球壳就带有电荷 $-Q_i$, 这些电荷必定分别均匀地分布在两个球面上, 因而导体球和外球壳之间的电势差为

$$\Delta U_i = kQ_i \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad (1)$$

而外面的导体球壳是接地的, 所以第 i 个导体球本身的电势就是

$$U_i = kQ_i \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (2)$$

将(2)式两边对所有的导体球求和, 得

$$k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) Q = \sum_{i=1}^{N+1} U_i, \quad (3)$$

其中

$$Q = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i \quad (4)$$

是导体球上所带的总电量. 同时, 电路中的直流电流为

$$I = \frac{E}{NR + R_E}. \quad (5)$$

于是第 i 个导体球的电势为

$$U_i = (i-1)IR = \frac{(i-1)ER}{NR + R_E}. \quad (6)$$

把(6)式代入(3)式得

$$k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) Q = \frac{ER}{NR + R_E} \sum_{i=1}^{N+1} (i-1) = \frac{1}{2} N(N+1) \frac{ER}{NR + R_E}. \quad (7)$$

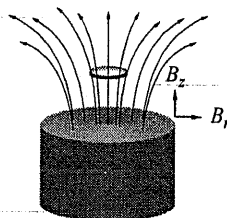
由(7)式可解得

$$r = \left(\frac{N(N+1)ER}{2kQ(NR + R_E)} + \frac{1}{r_0} \right)^{-1}. \quad (8)$$

评分标准: 本题 20 分.

(1)式 4 分, (2)、(3)式各 2 分, (4)式 1 分, (5)、(6)、(7)式各 3 分, (8)式 2 分.

五、(20 分) 如图, 处于超导态、半径为 r_0 、质量为 m 、自感为 L 的超导细圆环处在竖直放置的柱形磁棒上方, 其对称轴与磁棒的对称轴重合. 圆环附近的磁场具有柱对称性, 磁感应强度 B 可用一个竖直分量 $B_z = B_0(1 - 2\alpha z)$ 和一个径向分量 $B_r = B_0\alpha r$ 近似地描述. 这里 B_0 、 α 为大于零的常量, z 、 r 分别为竖直和径向位置坐标. 在 $t=0$ 时刻, 环心的坐标为 $z=0$ 、 $r=0$, 环上电流为 I_0 . (规定圆环中电流的正向与 z 轴正向



满足右手规则)。此时把圆环释放，圆环开始向下运动，其对称轴仍然保持竖直。处于超导态的超导细圆环具有这样的性质：穿过超导细圆环的磁通量保持不变。

1. 圆环作何种运动？给出环心的 z 坐标与时间的依赖关系。
2. 求 t 时刻圆环中电流 I 的表达式。

参考解答：

1. 超导细圆环上有电流 I 时，穿过超导圆环的磁通量为

$$\Phi = \pi r_0^2 B_z + LI \quad (1)$$

把 $B_z = B_0(1 - 2\alpha z)$ 代入上式，得

$$\Phi = \pi r_0^2 B_0(1 - 2\alpha z) + LI. \quad (2)$$

由于穿过超导圆环的磁通量保持不变，因此 Φ 为常量。由初始条件： $t=0$ 时， $z=0$ 、 $r=0$ ， $I=I_0$ ，有

$$\Phi_0 = \pi r_0^2 B_0 + LI_0. \quad (3)$$

于是

$$I = \frac{2}{L} \pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0 \equiv I(z). \quad (4)$$

现在考虑作用在圆环上的安培力。由于磁场为非均匀磁场，因此作用在圆环上的安培力不为零。由于轴对称性，安培力的方向沿轴线。作用在圆环上的安培力为

$$\begin{aligned} F_A(z) &= -B_r(z)I(z)2\pi r_0 \\ &= -B_0 \alpha r_0 \left(\frac{2}{L} \pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0 \right) 2\pi r_0 \\ &= -kz - F_0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{L} \pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4, \\ F_0 &= 2\pi \alpha B_0 r_0^2 I_0. \end{aligned} \quad (6)$$

再考虑到作用在圆环上的重力 $F_g(z) = -mg$ ，作用在圆环上的合力为

$$F(z) = F_A(z) + F_g(z) = -kz - (mg + F_0). \quad (7)$$

在平衡位置 z_0 处， $F(z_0) = 0$ 。由上式，得平衡位置为

$$z_0 = -\frac{mg + F_0}{k} = -\frac{(mg + 2\pi \alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4}. \quad (8)$$

由(7)式可知，圆环的运动为在其平衡位置附近的简谐振动，振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi \alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}, \quad (9)$$

圆环在 t 时刻的 z 坐标的一般形式为

$$z(t) = z_0 + A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10)$$

其中振幅 A 和初始相位 φ_0 由初始条件

$$z(t=0) = 0, \quad v_z(t=0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

决定。由(10)、(11)式得

$$z_0 + A \cos \varphi_0 = 0, \quad \omega A \sin \varphi_0 = 0$$

因此，

$$A = -z_0, \quad \varphi_0 = 0. \quad (12)$$

于是，

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z_0 - z_0 \cos(\omega t) \\
 &= -z_0 [\cos(\omega t) - 1] \\
 &= \frac{(mg + 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4} \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - 1 \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

2. 把(13)式代入(4)式, 得 t 时刻圆环中电流的表达式

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0 \right) \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - 1 \right] + I_0 \\
 &= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0 \right) \cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - \frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

评分标准: 本题 20 分.

第 1 问 18 分,

(1) 式 2 分, (2) 至 (4) 式各 1 分,

(5) 式 2 分, (6)、(7)、(8) 式各 1 分,

(9)、(10) 式各 2 分, (11) 式 1 分,

(12) 式 2 分, (13) 式 1 分.

第 2 问 2 分,

(14) 式 2 分.

六、(15 分) 一厚度为 t 的薄金属盘悬吊在温度为 300.0K 的空气中, 其上表面受太阳直射, 温度为 360.0K , 下表面的温度为 340.0K . 空气的温度保持不变, 单位时间内金属盘每个表面散失到空气中的能量与此表面和空气的温度差以及此表面的面积成正比, 忽略金属盘侧面的能量损失. 若金属盘的厚度变为原来的 2 倍, 求金属盘上、下表面的温度.

参考解答: 设金属盘上、下表面的温度分别为 T_t 、 T_b , 空气的温度为 T_0 . 根据题意, 金属盘上、下表面单位时间内向空气散失的能量分别为

$$cA(T_t - T_0), cA(T_b - T_0), \tag{1}$$

其中 c 为常量, A 为金属盘表面的面积. 设上表面单位时间内吸收的太阳光的能量为 P_a . 根据能量守恒有

$$P_a = cA(T_t - T_0) + cA(T_b - T_0). \tag{2}$$

因此,

$$T_t + T_b = \frac{P_a + 2cAT_0}{cA} = \frac{P_a}{cA} + 2T_0. \tag{3}$$

可见金属盘上、下表面温度的和为常量. 由题给数据, 有

$$T_t + T_b = 360.0\text{K} + 340.0\text{K} = 700.0\text{K}. \tag{4}$$

当金属盘的厚度为 t 时, 根据热传导定律, 单位时间内从金属盘的上表面传导到下表面的热量为

$$P_c = kA \frac{T_t - T_b}{t}, \tag{5}$$

其中 k 为热传导系数. 从金属盘的上表面传导到下表面的热量通过下表面散失到空气中, 故

$$kA \frac{T_t - T_b}{t} = cA(T_b - T_0). \tag{6}$$

当金属盘的厚度为 $2t$ 时, 设其上、下表面的温度分别为 T'_t 、 T'_b , 同理有

$$kA \frac{T'_t - T'_b}{2t} = cA(T'_b - T_0). \tag{7}$$

用(6)式去除(7)式, 并利用(4)式以及

$$T'_t + T'_b = 700.0\text{K}, \tag{8}$$

有

$$\frac{700.0\text{K} - 2T'_b}{2 \times (700.0\text{K} - 2T'_b)} = \frac{T'_b - T_0}{T_b - T_0}. \tag{9}$$

由上式, 得

$$T'_b = \frac{700.0 \text{ K} (T_b + T_0) - 4T_b T_0}{1400.0 \text{ K} - 2T_b - 2T_0} \approx 333.3 \text{ K}. \quad (10)$$

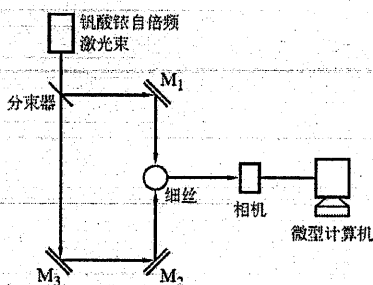
由(8)式, 有

$$T'_t = 700 \text{ K} - T'_b \approx 366.7 \text{ K}. \quad (11)$$

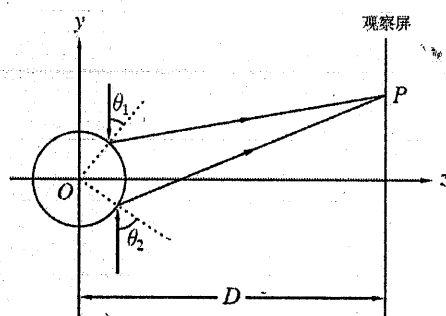
评分标准: 本题 15 分.

- (1)、(2)式各 2 分, (3)、(4)式各 1 分,
(5)、(6)式各 2 分, (7)至(11)式各 1 分.

七、(15 分) 亚毫米细丝直径的双光束干涉测量装置如图(a)所示, 其中 M_1 、 M_2 、 M_3 为全反射镜, 相机为 CCD (电荷耦合装置) 相机. 来自钷酸铷自倍频激光器的激光束被分束器分成两束, 一束经全反射镜 M_1 反射后从上侧入射到细丝上; 另一束经全反射镜 M_3 和 M_2 相继反射后从下侧入射到细丝上. 图(b)给出了两条反射光线产生干涉的光路, 其中 θ_1 、 θ_2 分别为上、下两侧的入射角, D 为细丝轴线到观察屏(即相机感光片)的距离, P 为两条反射线在观察屏上的交点. 已建立这样的直角坐标系: 坐标原点 O 位于细丝的轴线上, x 轴(未画出)沿细丝轴线、指向纸面内, y 轴与入射到细丝上的光线平行(y 轴的正向向上), z 轴指向观察屏并与其垂直. 已知光波长为 λ , 屏上干涉条纹的间距为 a . 由于 D 远大于细丝直径和观察屏的尺寸, 可假设投射到屏上的只有非常接近平行于 z 轴的细光束.



图(a)



图(b)

1. 由于细丝到观察屏的距离远大于观察屏的尺寸, 因而上、下两侧的入射光只有 45° 入射角附近的细光束经细丝反射到屏上, 上、下两侧的反射光束分别形成两个虚像. 试求这两个虚像的位置. (注: 当 $x \sim 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$)
2. 求细丝的直径 d .

参考解答:

1. 考虑上侧以 45° 角入射到细丝外表面的细光束 AP , 它被经细丝外表面反射后成方向平行于 z 轴正向的反射光 PB , 其反向延长线与 y 轴交于 Q 点, 如图所示. 由几何关系可知, 光线 PB 离 xz 平面的距离为

$$OQ = +\frac{\sqrt{2}}{4}d = y_+ \quad (1)$$

考虑上侧以 $45^\circ + \Delta\theta$ ($\Delta\theta$ 很小) 角入射到细丝外表面的细光束 A_+P_+ , 它被经细丝外表面反射后的反射光 P_+B_+ , 其反向延长线与 y 轴交于 E 点, 如图所示. 由反射定律可知

$$\angle A_+P_+B_+ = 2 \times (45^\circ + \Delta\theta) \quad (2)$$

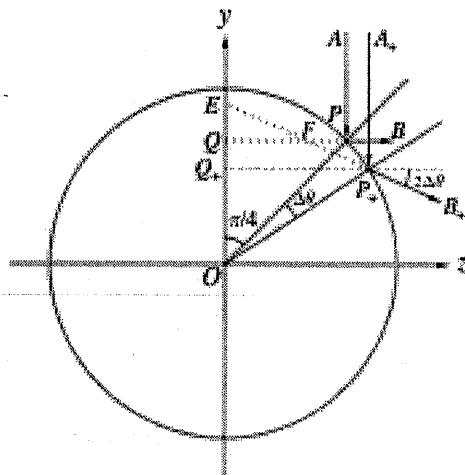
因而, 反射光 P_+B_+ 与 z 轴的夹角为

$$2\Delta\theta \quad (3)$$

考虑 $\triangle EOP_+$, 由几何关系可知

$$\angle EP_+O = 45^\circ + \Delta\theta = \angle EOP_+$$

于是



$$OE = P_+E \quad (4)$$

由于 $OP_+ = d/2$, 所以

$$\frac{d}{4} = OE \cos(45^\circ + \Delta\theta)$$

利用

$$\cos(45^\circ + \Delta\theta) = \cos 45^\circ \cos \Delta\theta - \sin 45^\circ \sin \Delta\theta$$

和

$$\cos \Delta\theta \sim 1, \quad \sin \Delta\theta \sim \Delta\theta, \quad \text{当 } \Delta\theta \sim 0$$

可得

$$\cos(45^\circ + \Delta\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \Delta\theta)$$

所以

$$OE = \frac{\sqrt{2}d}{4(1 - \Delta\theta)} \approx \frac{\sqrt{2}d}{4}(1 + \Delta\theta) \quad (5)$$

因而由(1)、(5)式得

$$QE = OE - OQ = \frac{\sqrt{2}d}{4}\Delta\theta \quad (6)$$

进而, 设 EB_+ 交 QB 于 F (设其 z 坐标为 z_+), 则在直角三角形 EQF 中有

$$z_+ = QF = \frac{QE}{\tan(2\Delta\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{4}d \frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{8}d \quad (7)$$

因此, 上侧入射角在 $\pi/4$ 附近的入射光线虚像的位置为

$$y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d, \quad z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \quad (8)$$

利用对称性可见, 下侧入射角在 $\pi/4$ 附近的入射光线虚像的位置为

$$y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, \quad z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \quad (9)$$

[另解二:

(前解答中由开始到“夹角为 $2\Delta\theta$ ”全部保留).

$$PP_+ = r\Delta\theta, \quad PQ = OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad (4)$$

进而, 由于 PP_+ 与 QB 的夹角为 45° , 可得

$$Q_+P_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta.$$

反向延长 P_+B_+ 交 y 轴于 E , 在直角三角形 EQ_+P_+ 中

$$\begin{aligned} Q_+E &= Q_+P_+ \cdot \tan(2\Delta\theta) \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{2}r(1 + \Delta\theta) \cdot 2\Delta\theta \\ &\approx \sqrt{2}r\Delta\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

考虑到 $QQ_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta$, 所以精确到 $\Delta\theta$

$$Q_+E = 2QQ_+ \quad (6)$$

由 $\triangle EQF \sim \triangle EQ_+P_+$ 有

$$z_+ = QF = \frac{1}{2}P_+Q_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}r = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \quad (7)$$

F 是 PB 、 P_+B_+ 两条反射光线反向延长线的交点, 即为虚像.

对于 $\Delta\theta < 0$ 的情形, 得到虚像位置不变. 由对称性可知, 下侧虚像位置与上侧虚像以 z

轴为对称.

$$\text{上虚像: } y_+ = +\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d, \quad (8)$$

$$\text{下虚像: } y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \quad (9)$$

]

2. 本问题可视为由上、下两侧的反射光束分别形成的虚光源所发出的光线之间的干涉, 相当于双缝位置分别在 $y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d, z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ 和 $y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ 的双缝干涉. 双缝屏与观察屏之间的距离为

$D - \frac{\sqrt{2}d}{8} \approx D$, 双缝间距为 $\frac{\sqrt{2}}{2}d$. 故条纹间距

$$a = \lambda \frac{D}{(\sqrt{2}/2)d} = \frac{\sqrt{2}\lambda D}{d} \quad (10)$$

由此得, 细丝的直径 d 为

$$d = \frac{\sqrt{2}\lambda D}{a} \quad (11)$$

评分标准: 本题 15 分.

第 1 问 10 分,

(1)、(2)式各 1 分, (3)式 2 分, (4)至(9)式各 1 分.

第 2 问 5 分,

(10)式 3 分, (11)式 2 分.

八、(15 分) 相对于站立在地面的李同学, 张同学以相对论速率 v 向右运动, 王同学以同样的速率 v 向左运动. 当张同学和王同学相遇时, 三位同学各自把自己时钟的读数调整到零. 当张同学和王同学之间的距离为 L 时(在地面参考系中观察), 张同学拍一下手. 已知张同学和王同学之间的相对速率为

$$v_r = \frac{2\beta c}{1+\beta^2},$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$, c 为真空中的光速.

1. 求张同学拍手时其随身携带的时钟的读数.
2. 从王同学自身静止的参考系看, 在张同学拍手这一事件发生的时刻, 王同学也拍一下手. 从张同学自身静止的参考系看, 在王同学拍手这一事件发生的时刻, 张同学第二次拍一下手. 从王同学自身静止的参考系看, 在张同学第二次拍手这一事件发生的时刻, 王同学第二次拍一下手. 照此继续下去. 求当张同学第 n 次拍手时地面参考系中张、王同学之间的距离.
3. 从李同学自身静止的参考系看, 张同学和王同学依次拍手的时刻为多少? 并指出这些时刻的顺序.

参考解答:

1. 在地面参考系 S 中, 从张同学和王同学相遇, 到他们之间的距离为 L 时, 时间间隔为

$$\Delta t = \frac{L}{2v}. \quad (1)$$

在张同学自身静止的参考系 S' 中, 张同学开始两次读其随身携带的时钟的两个事件发生在同一地点, 因此张同学拍手时其随身携带的时钟的读数 T 为固有时间或原时. 利用时间的相对论效应得

$$T = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L}{2v} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

2. 在参考系 S' 中, 张同学第一次拍手这一事件 1 发生的时刻和位置分别是 $t'_1 = T$ 和 $x'_1 = 0$. 已设张、王同学分别位于各自参考系中直角坐标系的坐标原点, 两参考系中直角坐标系的原点在 $t' = t'' = 0$ 时重合、 x'

和 x'' 轴重合且同向. 而在王同学自身静止的参考系 S'' 中, 张同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应, 在参考系 S'' 中事件 1 发生的时刻 t_1'' (此即王同学随身携带的时钟的读数) 为

$$t_1'' = \gamma t_1' = \gamma T, \quad (3)$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}, \quad (4)$$

推导中已应用了张同学相对于王同学做匀速直线运动的速率 v_r 的表达式. 注意: 在参考系 S'' 中事件 1 发生的位置并不在王同学自身所在处或原点, 而在 $x_2'' \neq 0$.

依题意, 王同学在时刻

$$t_2'' = t_1'' = \gamma T \quad (5)$$

拍手, 这一事件在参考系 S'' 中发生的时刻和位置分别是 $t_2'' = t_1''$ 和原点 $x_2'' = 0$, 是和事件 1 不同的另一事件, 记为事件 2. 而在张同学自身静止的参考系 S' 中, 王同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应, 在参考系 S' 中事件 2 发生的时刻 t_2' 为

$$t_2' = \gamma t_2'' = \gamma(\gamma T) = \gamma^2 T, \quad (6)$$

依题意, 张同学在时刻

$$t_3' = t_2' = \gamma^2 T \quad (7)$$

第二次拍手(事件 3), t_3' 即为其随身携带的时钟的读数.

照此继续下去. 当张同学第 n 次拍手时, 第 $2n-1$ 个事件在参考系 S' 中发生的时刻 t_{2n-1}' (或张同学随身携带的时钟的读数) 为

$$t_{2n-1}' = \gamma^{2(n-1)} T. \quad (8)$$

由于在张同学每次观察到的时间间隔 T 内, 张、王同学之间在地面参考系中的距离增加 L . 于是, 张同学第 n 次拍手时, 张、王同学之间在地面参考系中的距离为

$$d_n = \gamma^{2(n-1)} L = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^{2(n-1)} L. \quad (9)$$

3. 利用时间的相对论效应, 从李同学自身静止的参考系看, 张同学和王同学依次拍手的时刻为

$$t_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_1' = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} T = \frac{L}{2v}, \quad (10)$$

$$t_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_2'' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma T) = \gamma \frac{L}{2v} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \frac{L}{2v}, \quad (11)$$

$$t_3 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_3' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma^2 T) = \gamma^2 \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 \frac{L}{2v}, \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$t_{2n-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_{2n-1}' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\gamma^{2(n-1)} T) = \gamma^{2(n-1)} \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{2(n-1)} \frac{L}{2v}. \quad (13)$$

由(10)至(13)式可直接看出

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{2n-1} \quad (14)$$

评分标准: 本题 15 分.

第 1 问 3 分,

(1)式 1 分, (2)式 2 分.

第 2 问 8 分,

(3)至(6)式各 1 分, (8)、(9)式各 2 分.

第 3 问 4 分,

(10)、(11)、(13)、(14)式各 1 分.

实验题目一 用超声光栅测定水中的声速题解与评分标准

【问题 1】搭建光路观察声光效应。

1. 画出光路布置示意图，简要说明各元件的作用。(4 分)

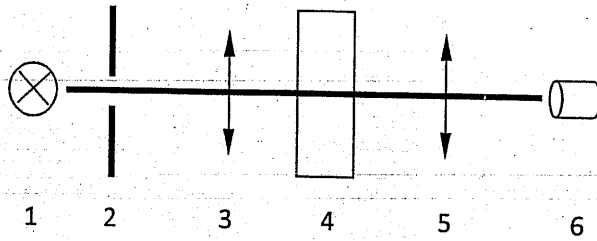


图 1 实验光路图

序号	名称	作用
1	钠光灯	提供波长 589.3 nm 的光源
2	单缝	钠灯光经单缝可视其为发光物体
3	薄透镜	使单缝光源处于透镜的焦平面上，形成平行光
4	超声池	形成超声光栅
5	薄透镜	超声光栅出射的平行光经过此透镜汇聚，将成像在其焦平面上
6	测微目镜	用于观察和测量衍射条纹间距

评分标准：

(1) 光路图各元件位置正确 2 分；

(2) 元件作用阐述正确 2 分。

2. 搭建并调节光路，说明实验步骤和调节要求，观察超声光栅衍射现象。(9 分)

(1) 调钠光灯与狭缝等高。

(2) 透镜 L_2 (元件 5) 与狭缝的等高共轴粗调及两次成像法细调。即物与像大于 4 倍的焦距时，固定物屏和像屏，调节透镜位置会呈现一大一小的两个像，调整中心重合即可。并通过自准直法测其焦距后连同滑块一起从导轨上取下。

(3) 同理对透镜 L_1 进行粗调和细调等高共轴并通过自准直法产生平行光。

(4) 安装透镜 L_2 及测微目镜，调节等高共轴，调清晰测微目镜分划板，并使测微目镜看到清晰的狭缝像。

(5) 安装超声池，调整合适高度并使光线垂直入射。

(6) 观察到衍射条纹。

评分标准:

- (1) 0.5分;
- (2) 3分, 等高共轴粗调 0.5分, 细调 1分。测量焦距 1.5分, ($150.0 \pm 2.0\text{mm}$ 以内 1.5分; $150.0 \pm 4.0\text{mm}$ 以内 1分; $150.0 \pm 6.0\text{mm}$ 以内 0.5分)。
- (3) 2分 (粗、细调节共轴 0.5分, 产生平行光 1.5分);
- (4) 1.5分 (调等高、调分划板、调狭缝像各 0.5分);
- (5) 1分 (调高度 0.5分, 调垂直入射 0.5分);
- (6) 1分。

注: 如果只用一块透镜自准直调焦、测焦距, 而认为两个透镜焦距一致 (即不测 5 的焦距, 只测 3 也可以)

3. 调整衍射系统, 得到至少三级 ($k=\pm 3$) 对称的衍射条纹; 改变超声波频率时, 描述并解释测微目镜视场中条纹的变化规律, 记录最佳状态的超声波频率。(3分)

当超声波频率增大时, 光衍射条纹间距增大; 反之频率减小时, 条纹间距随之减小。这是因为当超声频率变大时, 超声波长变小, 即光栅常数 d 变小, 由 $d \sin \theta = k \lambda$ 知 $\sin \theta$ 会变大, 而在小角度下 $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{S}{f}$, 条纹间距 S 变大; 反之条纹间距变小。

记录最佳状态的超声频率。

评分标准: 文字表述正确 2分;

超声波频率以具体仪器备案资料为准, 正确得 1分。

【问题 2】测定超声光栅的光栅常数和超声波在水中传播的声速。

1. 给出所用公式, 说明公式中各个量的物理意义。(5分)

光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$

式中 d 为光栅常数, θ 为衍射角

若 L_k 为 k 级条纹至零级条纹的距离, f 为透镜焦距, 由于 $L_k \ll f$,

$$\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{L_k}{f}$$

则 $\sin \theta = \frac{L_k}{f}$

所以有 $d = \frac{k\lambda f}{L_k} = \frac{\lambda f}{\Delta L_k}$ ，光栅常数即为超声波长

因此超声波声速

$$V = dv$$

其中 v 为超声波频率， f 为透镜焦距， λ 为钠光波波长， ΔL_k 为衍射条纹间距。

评分标准：

(1) 光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$ 1分；

(2) $\sin \theta = \frac{L_k}{f}$ 1分；

(3) $d = \frac{k\lambda f}{L_k} = \frac{\lambda f}{\Delta L_k}$ ，光栅常数即为超声波长 1分；

(4) 超声波的速度 $V = dv$ 1分；

(5) 各量物理意义共计 1分。

2. 测量至少三级 ($k=\pm 3$) 对称的衍射条纹，记录并处理数据 (4分)

评分标准：

(1) 列表、标明单位 0.5分；

(2) 有效数字合理 0.5分；

(3) 测出 7 条条纹 2分；测出 5 条得 1分；测三条得 0.5分。

(4) 处理数据 1分；

3. 计算超声光栅的光栅常数和超声波在水中的声速。 (5分)

评分标准：

(1) 公式代入数据 0.5分；

(2) 有效数字正确 0.5分；

(3) 结果在 标准值 $\pm 20\text{m/s}$ 得 4分；

标准值 $\pm 30\text{m/s}$ 得 3分；

标准值 $\pm 40\text{m/s}$ 得 2 分;

标准值 $\pm 100\text{m/s}$ 得 1 分;

超出以上范围不得分。

数据处理参考示例

测量至少三级 ($k=\pm 3$) 对称的衍射条纹, 记录并处理数据

方法一: 逐差法——去掉 L_0 分组逐差

k	X_k (mm)	$X_{k+4} - X_k$ (mm)	ΔL_k (mm)
-3	2.053	2.602	0.6505
-2	2.710	2.595	0.6487
-1	3.360	2.579	0.6448
0	4.012		
1	4.655		
2	5.305		
3	5.939		

$$\bar{L}_k = 0.6480 \text{ mm}$$

方法二:

k	X_k (mm)	$X_{+3} - X_{-3}$ (mm)	$X_{+2} - X_{-2}$ (mm)	$X_{+1} - X_{-1}$ (mm)
-3	2.053	3.886	2.595	1.295
-2	2.710			
-1	3.360			
0	4.012			
1	4.655			
2	5.305			
3	5.939			

$$\overline{\Delta L}_k = \frac{1}{3} \left(\frac{3.866}{6} + \frac{2.595}{4} + \frac{1.295}{2} \right) = 0.6469 \text{ (mm)}$$

计算超声光栅的光栅常数和超声波在水中的声速。

方法一:

透镜焦距: $f = 149.80 \text{ mm}$,

超声波频率为 $\nu = 10.718 \text{ MHz}$, 室温 17.5°C

超声光栅常数 $d = \frac{\lambda f}{\Delta L_k} = \frac{589.3 \times 10^{-9} \times 149.80}{0.6480 \times 10^{-3}} = 0.1362 \text{ mm}$

超声声速

$$V = d\nu = 0.1362 \times 10.718 \times 10^6 = 1460 \text{ m/s}$$

方法二

透镜焦距为 $f = 149.80 \text{ mm}$

超声波频率为 $\nu = 10.718 \text{ MHz}$ 室温 17.5°C

超声光栅常数

$$d = \frac{\lambda f}{\Delta L_k} = \frac{589.3 \times 10^{-9} \times 149.80}{0.6469 \times 10^{-3}} = 0.1365 \text{ mm}$$

超声声速

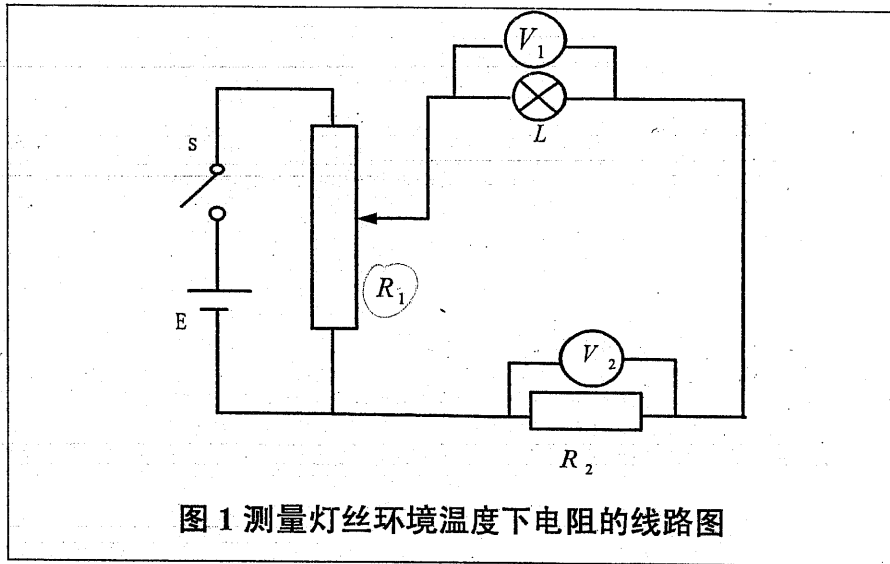
$$V = \frac{\lambda f \nu}{\Delta L_k} = d\nu = 0.1365 \times 10.718 \times 10^6 = 1463 \text{ m/s}$$

实验题目二 “研究小灯泡的发光问题”题解与评分标准

13.5

【问题 1】确定灯泡灯丝温度与其电阻的关系 (18 分)

1. 1 设计出确定环境温度下灯泡灯丝电阻 R_0 的线路图 (3 分) (若申请了提示卡 1, 扣除 6 分)
测量原理电路图如图 1 所示。



2.5

线路图评分标准:

- (1). 电路原理正确 2 分
- (2). 元件符号使用正确 0.5 分, 连线无断点 0.5 分。

1. 2 简述测量原理及步骤 (6 分) . 2

测量原理(4.5 分):

通过测量在环境温度(室温)下灯泡的灯丝电阻, 由公式 $T=aR^{0.83}$ 计算得出 a , 即可确定灯泡的灯丝温度与其电阻的关系。小灯泡由于其通电之后的热效应, 其环境温度下的电阻不能直接测量。(在原理部分, 可能出现以下三种答案)

答案 1:

利用小功率下的灯丝电阻与电功率关系外推到零功率的情况下获得, 此部分测量线路如图 1 所示。图中 R_1 为电位器, R_2 为标准电阻, L 是小灯泡。记录灯丝电压及标阻电压, 从而获得灯丝电阻与其电功率的关系, 画出他们的关系曲线, 外推到功率为零即可获得环境温度下的电阻。

为测出环境温度下的灯丝电阻, 可不必进行大功率范围的测量, 只测量小功率下的即可。

答案 2.

利用低电流下的灯丝电阻与电流关系外推到零电流的情况下获得, 此部分测量线路如图 1 所示。图中 R_1 为电位器, R_2 为标准电阻, L 是小灯泡。记录灯丝电压及标阻电压, 从而获得灯丝电阻与其电流的关系, 画出他们的关系曲线, 外推到电流为零即可获得环境温度下的电阻。

为测出环境温度下的灯丝电阻, 可不必进行大电流范围的测量, 只测量小电流下的即可。

答案 3.

利用低电压下的灯丝电阻与电压关系外推到零电压的情况下获得, 此部分测量线路如图 1 所示。图中 R_1 为电位器, R_2 为标准电阻, L 是小灯泡。记录灯丝电压及标阻电压, 从

而获得灯丝电阻与其电压的关系，画出他们的关系曲线，外推到电压为零即可获得环境温度下的电阻。

为测出环境温度下的灯丝电阻，可不必进行大电压范围的测量，只测量低电压下的即可。

原理部分评分标准：

- (1) 明确需要测量室温下的电阻，利用测量到的室内温度和电阻来确定 a ，1分 ✓
- (2) ① 由于小灯泡的热效应直接与其电功率相对应，因此用功率为零来获得室温下的电阻较为合理，得3分。
② 当功率为零时，电流或者电压也会为零，因此解法2和3也有道理。但鉴于灯丝电阻与电流、电压呈现明显的非线性；受测量仪器精度限制，小电流（或低电压）区域的数值误差大。因此利用电流（或电压）外推方法不可取。解法2和3得2分。
- (3) 此部分只测量小功率范围（电压、电流）0.5分。 ✓

实验步骤：（1.5分）

- (1) 连接线路，将电位器 R_1 滑到图1中的下端，使与灯泡部分并联的电阻较小。
 - (2) 检查无误后，按下开关。
 - (3) 记录灯泡电压与标值电阻的电压。 ✓
- 每个过程0.5分。

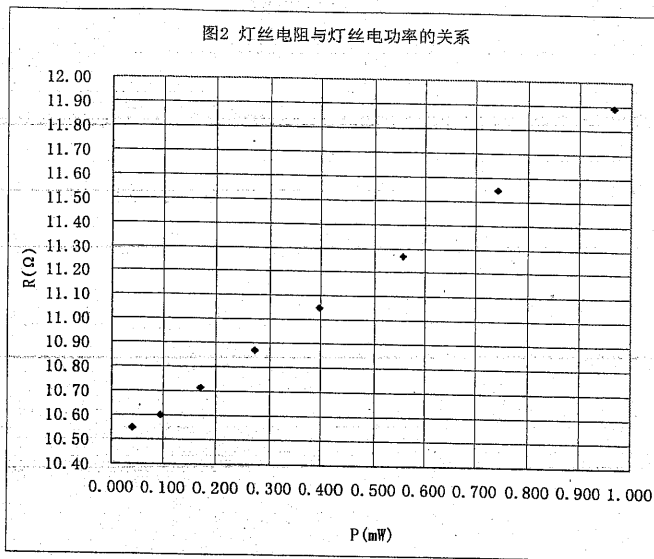
1. 3 自行设计表格，将所获得的数据列入表格，并用作图法给出 R_0 （9分） 3 ✓

- 1) ✓ 直流稳压电源的输出电压=1.0V（可自行设定固定电压的数值，但应能够满足测量要求）。
- 2) ✓ 室温 $t_0=17.9^\circ\text{C}$
- 3) 标准电阻阻值=20.0Ω(或 100Ω，此时标阻电压是下面列表的5倍) X

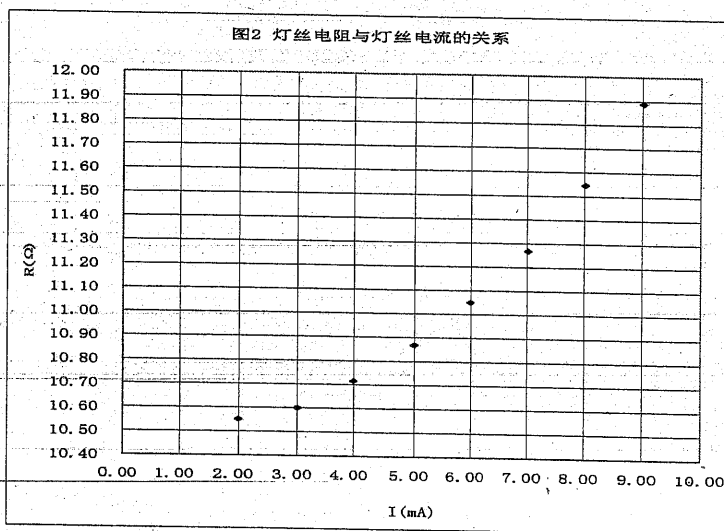
表1 测量环境温度下电阻 R_0

序号	测量数据		计算所得数据		
	灯丝电压 (mV)	标阻电压 (mV)	灯丝电流 (mA)	灯丝电阻(Ω)	灯丝电功率 (mW)
1	21.1	40.0	2.00	10.55	0.042
2	31.8	60.0	3.00	10.60	0.095
3	42.8	79.9	4.00	10.71	0.171
4	54.4	100.1	5.01	10.87	0.272
5	66.3	120.0	6.00	11.05	0.398
6	79.1	140.4	7.02	11.27	0.555
7	92.6	160.4	8.02	11.55	0.743
8	107.3	180.5	9.03	11.89	0.968
9					
10					

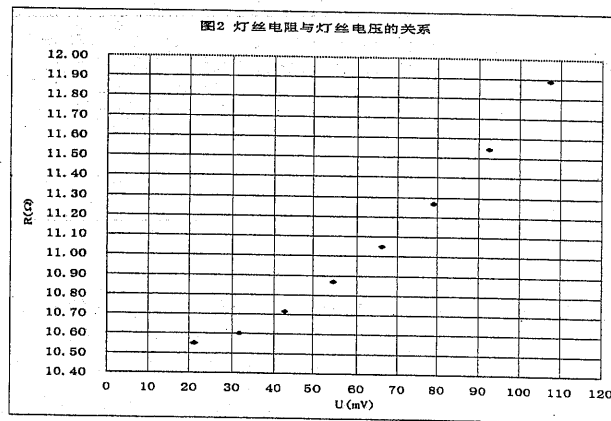
解答一： 测量电阻与功率的关系



解答二： 测量电阻与电流的关系



解答三： 测量电阻与电压的关系



$R_0=10.45\Omega$ (由灯丝电阻与电功率关系外推得出)。

室内温度为 17.9°C ，由 $290.9=a\cdot 10.45^{0.83}$ ，可计算得 $a=41.48$ ，故而有小灯泡温度与电阻的关系为 $T=41.48\cdot R^{0.83}$ ，当我们测得小灯泡的电阻即可获得其温度值。

评分标准:

1. 设计的表格及数据记录清晰合理、数据不缺项 1分 (含实验测量数据、有效数字、电压固

定电压、温度等参数)

2. 测量数据区间适合 1 分 (测量的灯泡电阻阻值区间应在小阻值区间)
3. 测量数据足量能够给出结论 (实验点不少于 8 个), 1 分
4. 从绘制的数据曲线观察, 数据点具有很好的规律, 无明显离散满分 1 分, 如离散较大扣 1 分, 说明电源电压选择不合理, 在操作中可能出现了反复调整小灯泡电压的情况。
5. 坐标轴的比例能够可靠表示有效数字位 1 分 (分度合理)
6. 图名、坐标轴方向、坐标轴参量名、数据单位、数据点、外推直线, 1 分 (错 3 个以下扣 0.5 分, 3 个以上扣 1 分)
7. 外推求出 R_0 , 记录温度, 计算出 a , 共 3 分
 - 1) R_0 的范围: 在标准答案 $\pm 0.5\Omega$ 以内, 满分 2 分
在标准答案 $\pm 0.8\Omega$ 以内, 得 1 分 (即扣 1 分)
在标准答案 $\pm 1.0\Omega$ 以内, 得 0.5 分 (即扣 1.5 分)
以上范围以外, 不得分, 如不是上述方法, 而直接给出 R_0 则不给分。
 - 2) a 值范围: 在标准答案 ± 2 以内, 满分 1 分
在标准答案 ± 3 以内, 得 0.5 分 (即扣 0.5 分)
以上范围以外, 不得分

【问题 2】研究灯泡发光强度与灯丝温度的关系 (12 分)

2.1 画出你实验用的线路图、简述其工作原理及实验步骤 (5 分) (若申请了提示卡二, 扣 6 分)
线路图如下

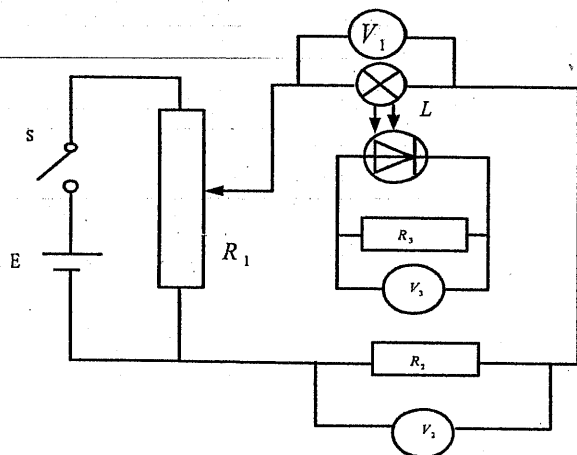


图 3 测量灯泡发光强度与灯丝温度关系的线路图

工作原理: (1) 由 V_3 和 R_3 可得出光电流, 虽然光电池不能接收到灯泡发出的所有光线, 但光电流仍可以线性地反映出灯泡发光强度; (2) 而由 V_2 和 R_2 可知通过小灯泡的电流, 利用 V_1 的测量值可进而得出此时的灯泡电阻, 由 $T = aR^{0.83}$ 可求出灯泡的温度, 最终可获得灯泡的温度与其发光强度的关系。

步骤:

(1) 用文具夹子将样品板与光电池板固定好, 保持两者之间位置不变。

- (2)在未闭合开关之前,记录下 V_3 ,并在计算中扣除本底电流。
 (3)调节电位器增大标阻电压,从灯泡发光开始测量。
 (4)调节电位器,记录灯泡灯丝的电压、标准电阻的电压、光电池的电压。

线路图评分标准:(2分)

- (1).光电流采用电压测量 1分。
 (2).其余部分连接正确 1分。

工作原理: 1分

步骤: 2分,每个步骤 0.5分。

2.2 用作图法研究灯泡发光强度与灯丝温度的关系,给出你的结论。(6分)

相关参数:

直流电源电压值=15.0V

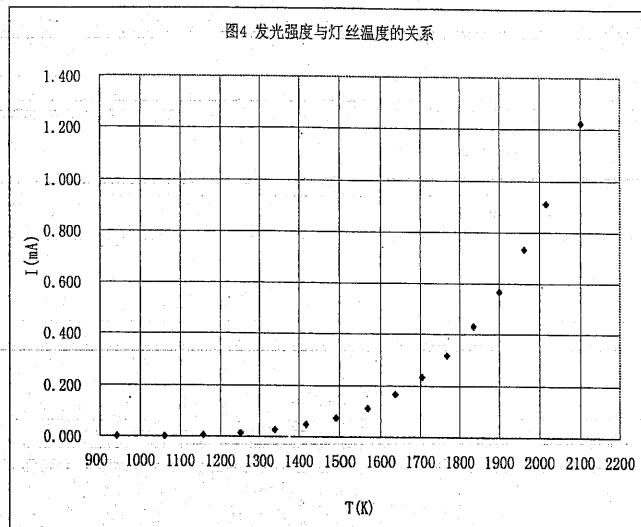
标阻阻值=20.0 Ω

光电池并联定值电阻=100 Ω (注:此两只电阻不能换位)

灯泡的本底电流电压很小,近似为零,可以忽略

记录测量数据如下表

序号	灯丝电 压(V)	标阻电 压(V)	灯丝电 阻(Ω)	灯丝温度 (K)	光电池电 压(mV)	光电流(mA)
1	1.290	0.600	43.00	941	0.1	0.001
2	1.740	0.701	49.64	1060	0.2	0.002
3	2.21	0.800	55.25	1159	0.6	0.006
4	2.73	0.900	60.67	1252	1.4	0.014
5	3.29	1.001	65.73	1338	2.6	0.026
6	3.88	1.101	70.48	1418	4.5	0.045
7	4.50	1.201	74.94	1492	7.2	0.072
8	5.17	1.301	79.48	1567	11.1	0.111
9	5.87	1.401	83.80	1637	16.4	0.164
10	6.60	1.501	87.94	1704	23.2	0.232
11	7.36	1.601	91.94	1768	31.9	0.319
12	8.19	1.703	96.18	1836	43.2	0.432
13	9.03	1.803	100.17	1899	56.8	0.568
14	9.91	1.903	104.15	1961	73.3	0.733
15	10.74	1.995	107.67	2016	91.0	0.910
16	12.00	2.12	113.21	2102	122.3	1.223



利用表 2 中灯丝温度与光电流的数据绘出图 4。

评分标准：(6 分)

(1)相关参数 1 分 (缺项扣 0.5 分, 电阻换位扣 0.5 分)。

(2)数据记录 1 分 (自灯泡发光至其额定电压测量少于 8 个数据点, 扣 0.5 分; 数据项: “灯丝电压、标阻电压、光电池电压”的名称、单位、有效数字有错误, 扣 0.5 分)。

(3)数据计算 1.5 分: (灯丝温度 1 分, 光电流 0.5 分。注: 电阻可以不计算)。

(4)绘图 1 分 (图名、坐标轴方向、坐标轴参量名、数据单位、数据点、曲线光滑、分度合理、比例恰当。注: 错 3 项以下扣 0.5 分, 3 个以上扣 1 分, 但错误的曲线不会因为图名、坐标轴方向、坐标轴参量名等给分)。

(5)结论阐述 1.5 分。(由图 4 可见灯丝温度越高, 由其产生的光电流越强, 说明其发光强度越强。xxxK 以下发光强度几乎为零, xxxK 以后光强迅速增加, xxxK 后增速加快)

2.3 求出灯泡额定电压下的灯丝温度(1 分)

当我们测得小灯泡的电阻即可获得其温度值。当小灯泡电压 $U=12.0V$ 时, 小灯泡温度 $T=2102K$

(直接根据额定电压计算, 而不是通过测量导出额定电压下电阻, 然后再计算出温度的情况, 则不给分)