

2018 年全国高中数学联赛（重庆赛区）预赛试题参考答案

一、填空题：本大题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分，把答案填在横线上。

1. 设集合 $A = \{a-1, 2\log_2 b\}$ 与 $B = \{a+1, \log_2(16b-64)\}$ 恰有一个公共元素为 a ，则实数 $a =$ _____.

答案：6

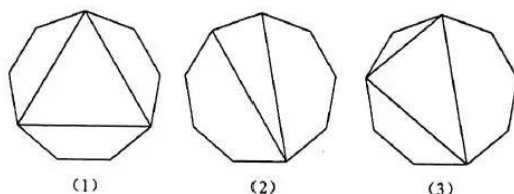
解析：因为 $a-1 \neq a$ ， $a+1 \neq a$ ，所以公共元素为 $2\log_2 b = \log_2(16b-64)$ ，解得

$$b = 8, a = 2\log_2 b = 6.$$

2. 从正九边形中任取三个顶点构成三角形，则正九边形的中心在三角形内的概率为_____.

答案： $\frac{5}{14}$

解析：如图，正 9 边形中包含中心的三角形有以下三种形状：



对于 (1)，有 3 种情况；对于 (2)，有 9 种情况；对于 (3)，有 18 种情况；故所求概率为

$$P = \frac{3+9+18}{C_9^3} = \frac{5}{14}$$

3. 设 $O(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ ，点 P 是线段 AB 上的一个动点， $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，若

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ，则实数 λ 的取值范围是_____.

答案： $[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

解析： $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda, \lambda)$ ，则 $\overrightarrow{PB} = (\lambda-1, 1-\lambda)$ ，

$$\overrightarrow{PA} = (\lambda, -\lambda),$$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow (1-\lambda, \lambda) \cdot (-1, 1) \geq (\lambda, -\lambda) \cdot (\lambda-1, 1-\lambda) \Rightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 \leq 0$ ，解得：

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

，因点 P 是线段 AB 上的一个动点，所以 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，综上，满足条件的 λ

的取值范围是 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda \leq 1$.

4. 顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形, A 是底面圆周上的点, B 是底面圆内的点, O 为底面圆心, $AB \perp OB$, 垂足为 B , $OH \perp HB$, 垂足为 H , 且 $PA=4$, C 为 PA 的中点, 则当三棱锥 $O-HPC$ 的体积最大时, OB 的长为_____.

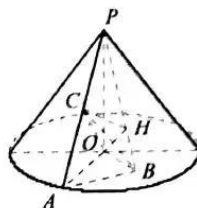
答案: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

法一: $AB \perp OB \Rightarrow PB \perp AB \Rightarrow AB \perp$ 面 $POB \Rightarrow$ 面 $PAB \perp$ 面 POB . $OH \perp PB \Rightarrow OH \perp$ 面 $PAB \Rightarrow OH \perp HC$, $OH \perp PC$, 又, $PC \perp OC \Rightarrow PC \perp$ 面 OCH . $\Rightarrow PC$ 是三棱锥 $P-OCH$ 的高. $PC=OC=2$. 而 $\triangle OCH$ 的面积在 $OH=HC=\sqrt{2}$ 时取得最大值(斜边=2 的直角三角形). 当

$OH=\sqrt{2}$ 时, 由 $PO=2\sqrt{2}$, 知 $\angle OPB=30^\circ$, $OB=PO \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

法二: 连线如图, 由 C 为 PA 中点, 故 $V_{O-PHC} = \frac{1}{2} V_{B-AOP}$,

而 $V_{O-PHC} : V_{O-PBC} = \frac{PH}{PB} = \frac{PO^2}{PB^2}$ ($PO^2 = PH \cdot PB$).



记 $PO=OA=2\sqrt{2}=R$, $\angle AOB=\alpha$,

则 $V_P -_{AOB} = \frac{1}{6} R^3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{12} R^3 \sin 2\alpha$, $V_B -_{AOB} =$

$\frac{1}{24} R^3 \sin 2\alpha$. $\frac{PO^2}{PB^2} = \frac{R^2}{R^2 + R^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3 + \cos 2\alpha}$. $\Rightarrow V_{O-PHC} = \frac{\sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha} \times \frac{1}{12} R^3$. $\therefore$ 令

$y = \frac{\sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha}$, $y' = \frac{2 \cos 2\alpha (3 + \cos 2\alpha) - (-2 \sin 2\alpha) \sin 2\alpha}{(3 + \cos 2\alpha)^2} = 0$, 得 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$,

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore OB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

5. 已知复数 z 的模为 1, 则 $|z-4|^2 + |z+3i|^2$ 的最小值为_____.

答案: 17

解: 在复平面内, 设 $A(4,0)$, $B(0,-3)$, P 为单位圆上的点, 问题转化为求 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的最小值, 设 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 其中 $\alpha \in R$

$|PA|^2 + |PB|^2 = (\cos \alpha - 4)^2 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\sin \alpha + 3)^2 = 27 + 6 \sin \alpha - 8 \cos \alpha$
 $= 27 + 10 \sin(\alpha + \varphi) \geq 17$

由于 $\alpha \in R$ ，必存在 α 使 $\sin(\alpha + \varphi) = -1$ ，即等号可以取到。

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A + \sin^2 C = 2018 \sin^2 B$ ，则 $\frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A + \tan B + \tan C} =$ _____。

答案： $\frac{2}{2017}$

解析：因为 $\sin^2 A + \sin^2 C = 2018 \sin^2 B$

所以 $a^2 + c^2 = 2018 \cdot b^2$

注意到： $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

$$\begin{aligned} \text{故 } & \frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A + \tan B + \tan C} \\ &= \frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} = \left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} \right) \tan B \\ &= \frac{\sin^2 B}{\sin A \cdot \sin C} \cdot \frac{1}{\cos B} = \frac{b^2}{ac} \left(\frac{2ac}{a^2 + c^2 - b^2} \right) = \frac{2b^2}{2018b^2 - b^2} = \frac{2}{2017}. \end{aligned}$$

二、解答题：本大题共 4 小题，第 7、8 题各 16 分，第 9、10 题各 20 分，共 72 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

7. (满分 16 分) 设 $f(m)$ 是正整数 m 的各位数字的乘积，求方程 $f(m) = m^2 - 10m - 36$ 的正整数解。

解：设 m 是 n 位正整数，若 $n \geq 3$ ，则 $m \geq 10^{n-1} \geq 100$ ，

$\therefore 9^n \geq f(m) = m^2 - 10m - 36 = m(m-10) - 36 \geq 90m - 36 \geq 9 \cdot 10^n - 36 > 10^n$ 矛盾。此时无解。 4 分

若 $n=1$ ，则 $f(m) = m = m^2 - 10m - 36$ ，此方程无整数解。 8 分

若 $n=2$ ，且 $m \geq 20$ ，则 $81 \geq f(m) = m^2 - 10m - 36 \geq 400 - 200 - 36 = 164$ 矛盾

$\therefore m \in [10, 19]$ ， 12 分

设 $m = 10 + k$ ， $f(m) = (10 + k)^2 - 10(10 + k) - 36 = k$ ，解得 $k = 3$ ，

综上，方程的解为 $m = 13$ 。 16 分

8. (满分 16 分) 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. 证明: $1 - \frac{1}{2018^{2018}} < \sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{a_n} < 1$.

证明: 由递推式得 $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$ 所以

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

从而得

$$\sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{2018} \left(\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \right) = 1 - \frac{1}{a_{2019} - 1}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 0$$

得数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $a_n \geq a_1 = 2$.

$$\text{特别地 } \sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{2019} - 1} < 1. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

由递推式可得 $a_n = \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1}$. 从而

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \frac{a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} = a_{n+1} - 1. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

由均值不等式及已证结论有

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}}.$$

所以 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n > n^n$

$$\text{特别地 } a_{2019} - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2018} > 2018^{2018}$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{2019} - 1} > 1 - \frac{1}{2018^{2018}}. \quad \dots\dots 16 \text{ 分}$$

9. (满分 20 分) 设椭圆 C 的左、右顶点为 A , $B(a, 0)$, 过右焦点 $F(1, 0)$ 作非水平直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试证: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值, 并求此定值

(用 a 的函数表示).



证明：设 $l: x = ty + 1$ ，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ 得

$$((a^2 - 1)t^2 + a^2)y^2 + 2(a^2 - 1)ty - (a^2 - 1)^2 = 0,$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则

$$y_1 + y_2 = -\frac{2(a^2 - 1)t}{(a^2 - 1)t^2 + a^2}, \quad y_1 y_2 = -\frac{(a^2 - 1)^2}{(a^2 - 1)t^2 + a^2}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

两式相除得

$$\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{2}{a^2 - 1}t, \quad ty_1 y_2 = \frac{a^2 - 1}{2}(y_1 + y_2).$$

由题意知

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1 + a} = \frac{y_1}{ty_1 + a + 1}, \quad k_2 = \frac{y_2}{x_2 - a} = \frac{y_2}{ty_2 - a + 1}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} &= \frac{y_1(ty_2 - a + 1)}{y_2(ty_1 + a + 1)} = \frac{(a^2 - 1)(y_1 + y_2)/2 - ay_1 + y_1}{(a^2 - 1)(y_1 + y_2)/2 + ay_2 + y_2} \\ &= \frac{(a^2 - 2a + 1)y_1 + (a^2 - 1)y_2}{(a^2 - 1)y_1 + (a^2 + 2a + 1)y_2}. \quad \dots\dots 15 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{a - 1}{a + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1}$$

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{a - 1}{a + 1}. \quad \dots\dots 20 \text{ 分}$$

10. (满分 20 分) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 满足

$$|f(0)| \leq 2, \quad |f(2)| \leq 2, \quad |f(-2)| \leq 2,$$

求当 $x \in [-2, 2]$ 时 $y = |f(x)|$ 的最大值.

解：由题意知
$$\begin{cases} c = f(0) \\ 4a + 2b + c = f(2) \\ 4a - 2b + c = f(-2) \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} c = f(0) \\ a = \frac{f(2) + f(-2) - 2f(0)}{8} \\ b = \frac{f(2) - f(-2)}{4} \end{cases}$$

从而当 $x \in [-2, 2]$ 时,

$$\begin{aligned} y = |f(x)| &= \left| \frac{f(2) + f(-2) - 2f(0)}{8} x^2 + \frac{f(2) - f(-2)}{4} x + f(0) \right| \\ &= \left| \frac{x^2 + 2x}{8} f(2) + \frac{x^2 - 2x}{8} f(-2) + \frac{4 - x^2}{4} f(0) \right| \\ &\leq \left| \frac{x^2 + 2x}{4} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x}{4} \right| + \frac{4 - x^2}{2}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $x \in [-2, 2]$ 时 $\frac{x^2 + 2x}{4} \cdot \frac{x^2 - 2x}{4} \leq 0$, 从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \frac{x^2 + 2x}{4} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x}{4} \right| + \frac{4 - x^2}{2} = \left| \frac{x^2 + 2x}{4} - \frac{x^2 - 2x}{4} \right| + \frac{4 - x^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2} + |x| + 2. \quad \dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

易知当 $x \in [0, 2]$ 时 $-\frac{x^2}{2} + |x| + 2 = -\frac{x^2}{2} + x + 2 \leq \frac{5}{2}$

当 $x \in [-2, 0]$ 时 $-\frac{x^2}{2} + |x| + 2 = -\frac{x^2}{2} - x + 2 \leq \frac{5}{2}$ 得

$$\max_{|x| \leq 2} |f(x)| \leq \max_{|x| \leq 2} \left(-\frac{x^2}{2} + |x| + 2 \right) \leq \frac{5}{2}. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

最后取 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$, 则 $|f(2)| = |f(-2)| = |f(0)| = 2$.

故该函数满足题设条件且在 $[-2, 2]$ 上能取到最大值 $\frac{5}{2}$, 因此 $y = |f(x)|$ 的最大值为

$$\frac{5}{2}.$$

$\dots\dots 20 \text{ 分}$

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注