2018年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛暨2018年吉林省高中数学联赛试题参考答案

一、选择题

1. C

2. C

【解析】$V_{P-ABC}=V_{A-PBC}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times3\times4)\times\sqrt{3^2-(\frac{5}{2})^2}=\sqrt{11}$.

3. B

【解析】取$x=1,y=0$，得$f(0)=\frac{1}{2}$；

取$x=1,y=1$，得$4f^2(1)=f(2)+f(0)$，故$f(2)=-\frac{1}{4}$；

取$x=2,y=1$，得$4f(1)f(2)=f(3)+f(1)$，故$f(3)=-\frac{1}{2}$；

取$x=n$，$y=1$，有$f(n)=f(n+1)+f(n-1)$，

同理$f(n+1)=f(n+2)+f(n)$，

联立，得$f(n+2)=-f(n-1)$，故$f(n+6)=f(n)$.

所以周期为6，故$f(2019)=f(336\times6+3)=f(3)=-\frac{1}{2}$.

4. A

【提示】$|f(x)|=\frac{|\sin x|}{|2+\cos x|}\le|\sin x|\le|x|$

5. B

【解析】$f(x)$图像关于$(0,1)$对称，故$M+N=f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2$.

6. D

【解析】由已知$y=\frac{x}{x-1}$，所以$z=\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2}{x-1}-1}=\frac{x^2}{x^2-x+1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$，

因为$x>1$，即$0<\frac{1}{x}<1$，所以$\frac{3}{4}\le1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}<1$，故$1<z\le\frac{4}{3}$.

二、填空题

7. $(1,2)\cup(4,5)$

8. $\frac{4}{3}$

【解析】因为圆C的方程可化为$(x-4)^2+y^2=1$，所以圆C的圆心为$(4,0)$，半径为1.

若$y=kx-2$上至少存在一点$A(x_0,kx_0-2)$，以该点为圆心，1为半径的圆与圆C有公共点，

则存在$x_0\in\mathbf{R}$，使得$|AC|\le1+1=2$成立，即$|AC|_{\min}\le2$．又因为$|AC|_{\min}$为点C到直线$y=kx-2$的距离

$d=\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以$\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\le2$，解得$0\le k\le\frac{4}{3}$，因此$k$的最大值是$\frac{4}{3}$.

9. 4

【解析】法1：因为$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}^2=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$.

法2：以点C为原点，CA,CB分别为x轴，y轴建立平面直角坐标系，

则$A(2,0),B(0,2),P\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，有$\overrightarrow{CA}=(2,0),\overrightarrow{CB}=(0,2),\overrightarrow{CP}=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$.

10. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$

【解析】注意到两直线是平行的，故点M的轨迹为与两直线距离相等，且平行于两直线的直线，其方程为$x+2y+1=0$，即$M(x_0,y_0)$满足$x_0+2y_0+1=0$.

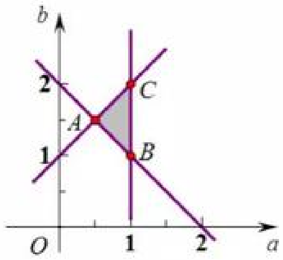
而满足不等式$y_0>x_0+2$的点在直线$y=x+2$的左上方.

问题转化为求射线$x_0+2y_0+1=0$（$x_0<-\frac{5}{3}$）上的点$M(x_0,y_0)$的$\frac{y_0}{x_0}$的范围，

而$\frac{y_0}{x_0}$的几何意义是$M(x_0,y_0)$与原点连线的斜率，故$k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$.

11. $\frac{7}{5}$

【解析】作出约束条件表示的可行域，



如图，即$\triangle ABC$内部及其边界，其中$A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),B(1,1),C(1,2)$.

设$P(a,b)$是可行域内任意一点，

则$k_{OP}=\frac{b}{a}$的最大值为$k_{OA}=3$，最小值为$k_{OB}=1$.

故 $\frac{a+2b}{2a+b}=2-\frac{3a}{2a+b}=2-\frac{3}{2+\frac{b}{a}}$，

可知当 $\frac{b}{a}$ 取最大值3时，$\frac{a+2b}{2a+b}$ 也取得最大值为 $\frac{7}{5}$.

12. ①②③④

【解析】①因为 $\left[(-1)^n\right]^2-\left[(-1)^{n-1}\right]^2=0$，所以 $\left\{(-1)^n\right\}$ 符合"等方差数列"定义;

②根据定义，显然 $\left\{{a_n}^2\right\}$ 是等差数列;

③ ${a_{kn}}^2-{a_{k(n-1)}}^2={a_{kn}}^2-{a_{kn-1}}^2+{a_{kn-1}}^2-{a_{kn-2}}^2+\cdots+{a_{kn-k+1}}^2-{a_{k(n-1)}}^2=kp$ 符合定义;

④若数列 $\{a_n\}$ 满足 ${a_n}^2-{a_{n-1}}^2=p$，$a_n-a_{n-1}=d$（d 为常数），

若 $d=0$，显然 $\{a_n\}$ 为常数列;

若 $d\neq 0$，则两式相除得 $a_n+a_{n-1}=\frac{p}{d}$，所以 $a_n=\frac{d^2+p}{2d}$（常数），即 $\{a_n\}$ 为常数列.

三、解答题

13. 【解析】（Ⅰ）$f(x)=4\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)+a=4\cos x\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)+a$

$=-2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1-1+a=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1+a$

$=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1+a$，

因此，当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$时，$f(x)$取得最大值$2-1+a=1+a$，

又因为$f(x)$的最大值为2，所以$1+a=2$，即$a=1$.

$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$f(x)=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

令$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

得$x\in\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

因此，$f(x)$的单调减区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

14. 【解析】$\because 3a_5=8a_{12}>0$　　$\therefore 3a_5=8(a_5+7d)$.

解得$a_5=-\frac{56}{5}d>0$.

$\therefore d<0,\quad a_1=-\frac{76}{5}d$.

故$\{a_n\}$是首项为正数的递减数列.

由$\begin{cases}a_n\ge 0\\a_{n+1}\le 0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\frac{76}{5}d+(n-1)d\ge 0\\-\frac{76}{5}d+nd\le 0\end{cases}$，解得$15\frac{1}{5}\le n\le 16\frac{1}{5}$.

即$a_{16}>0,a_{17}<0$,

$\therefore a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{16} > 0 > a_{17} > a_{18} > \cdots$, $\therefore b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_{14} > 0 > b_{17} > b_{18} > \cdots$,

而 $b_{15} = a_{15}a_{16}a_{17} < 0, b_{16} = a_{16}a_{17}a_{18} > 0,$

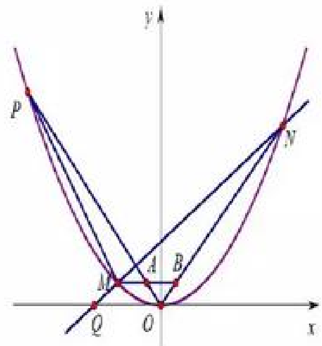
$\therefore S_{14} > S_{13} > \cdots > S_1, S_{14} > S_{15}, S_{15} < S_{16}$, $S_{16} > S_{17} > S_{18} > \cdots$.

又 $S_{16} - S_{14} = b_{15} + b_{16} = a_{16}a_{17}(a_{15} + a_{18}) = a_{16}a_{17}(-\frac{6}{5}d + \frac{9}{5}d) = \frac{3}{5}da_{16}a_{17} > 0$.

所以 S_n 中 S_{16} 最大，即 $n = 16$ 时，S_n 取得最大值.

15. 【解析】抛物线 $y = ax^2$ 过点 $P(-1,1)$，得 $a = 1$，

所以抛物线的方程为 $y = x^2$.



设直线 l 的方程为 $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$（其中 $k > 0$），

由 $\begin{cases} y = k\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ y = x^2 \end{cases}$，得 $2x^2 - 2kx - k = 0$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，则 $x_1 < x_2$，$A(-y_1, y_1)$，$x_1 + x_2 = k$，$x_1x_2 = -\frac{k}{2}$，

又 ON 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2}x$，故 $B\left(\frac{y_1x_2}{y_2}, y_1\right)$，所以 $|MA| = -y_1 - x_1$，$|AB| = \frac{y_1x_2}{y_2} + y_1$，

有 $|AB| - |MA| = \frac{y_1x_2}{y_2} + 2y_1 + x_1 = \frac{y_1x_2 + 2y_1y_2 + x_1y_2}{y_2}$

$$=\frac{k\left(x_1+\frac{1}{2}\right)\cdot x_2+2k\left(x_1+\frac{1}{2}\right)\cdot k\left(x_2+\frac{1}{2}\right)+x_1\cdot k\left(x_2+\frac{1}{2}\right)}{y_2}$$

$$=\frac{\left(2k^2+2k\right)x_1x_2+\left(k^2+\frac{1}{2}k\right)\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{2}k^2}{y_2}$$

$$=\frac{\left(2k^2+2k\right)\left(-\frac{k}{2}\right)+\left(k^2+\frac{1}{2}k\right)k+\frac{1}{2}k^2}{y_2}=0.$$

可得$|AB|=|AM|$.

由题意知$-\frac{1}{2}=x_Q<x_1<0$，故$y_1=x_1^2<\frac{1}{4}$，$1-y_1>1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

又因为$S_1=\frac{1}{2}|AM|\cdot(1-y_1)$，$S_2=\frac{1}{2}|AB|\cdot y_1$，所以$S_1>3S_2$.

16. 【解析】不妨设$x\geq y\geq z$.

情形1：当$256y^3\geq x^2z$时，

因为$\frac{x^2+256yz}{y^2+z^2}-\frac{x^2}{y^2}=\frac{z\left(256y^3-x^2z\right)}{\left(y^2+z^2\right)y^2}\geq 0$；

$\frac{y^2+256zx}{z^2+x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{z\left(256x^3-y^2z\right)}{\left(z^2+x^2\right)x^2}\geq 0$；

$\frac{z^2+256xy}{x^2+y^2}-\frac{256xy}{x^2+y^2}=\frac{z^2}{x^2+y^2}\geq 0$.

所以$f(x,y,z)\geq\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}+\sqrt{\frac{256xy}{x^2+y^2}}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+16\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}$

$=\frac{x^2+y^2}{xy}+8\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}+8\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}\geq 3\sqrt[3]{64}=12$，

当且仅当$x:y=\left(2+\sqrt{3}\right):1$，且$z=0$时，$f(x,y,z)$取到12；

情形2：当$256y^3<x^2z$时，又$x^2z\leq x^2y$，所以$256y^3<x^2y$，从而$256y^2<x^2$.

故$f(x,y,z)=\sqrt{\frac{x^2+256yz}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{y^2+256zx}{z^2+x^2}}+\sqrt{\frac{z^2+256xy}{x^2+y^2}}$

$>\sqrt{\frac{x^2+256yz}{y^2+z^2}}+0+0>\sqrt{\frac{256y^2+256yz}{y^2+z^2}}=16\sqrt{\frac{y^2+yz}{y^2+z^2}}\geq 16>12$. 综上，$f(x,y,z)_{\min}=12$

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注