

“万友”名校大联考试卷一·数学

参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	D	B	B	C	C	D	A	C

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分)

11. 1

12. 51

13. 3:16

14. ①③④

三、(本大题共 2 小题,每小题 8 分,满分 16 分)

15. 解:原式 $= \frac{1-(a+2)}{a+2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a+1}$ 3 分

$= \frac{-(a+1)}{a+2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a+1} = 2-a$ 5 分

当 $a = \tan 45^\circ = 1$ 时,原式 $= 2-a = 2-1 = 1$ 8 分

16. 解: $\because PQ \parallel BC, \therefore \triangle PAM \sim \triangle BCM, \triangle AMN \sim \triangle ABC$, 2 分

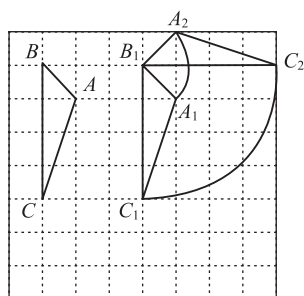
$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{PA}{BC} = \frac{\frac{1}{2} \times 4}{3} = \frac{2}{3}$, 4 分

$\therefore \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, 6 分

$\therefore MN = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$ 8 分

四、(本大题共 2 小题,每小题 8 分,满分 16 分)

17. 解:(1)如图所示: 4 分



第 17 题图

(2) A_1C_1 所扫过的面积 $= \frac{1}{4}\pi \times 4^2 - \frac{1}{4}\pi \times (\sqrt{2})^2 = \frac{7\pi}{2}$ 8 分

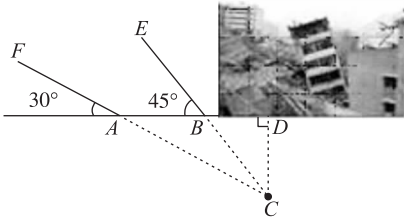
18. 解:(1)因为反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象经过点 $A(1, m)$, 所以 $m = 3$, 2 分

将 $(1, 3)$ 代入 $y = x + k$, 得 $k = 2$, 即一次函数的解析式 $y = x + 2$; 4 分

- (2) B 的坐标为 $(-3, -1)$, 6 分
 x 的取值范围是 $x > 1$ 或 $-3 < x < 0$ 8 分

五、(本大题共 2 小题,每小题 10 分,满分 20 分)

19. 解:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,交 AB 延长线于点 D , 1 分



第 19 题图

- 由题意知 $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$,
 设 $CD = x$ m, $\therefore BD = CD = x$ m,
 $\because AB = 2$ m, $\therefore AD = (x + 2)$ m, 3 分
 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\because \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}$, $\therefore \frac{x}{x + 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 6 分
 解得 $x = \sqrt{3} + 1 \approx 2.7$. 即 $BD = CD = 2.7$ m 9 分
 即离 B 点 2.7 m 处对点 C 处生命救援最有效. 10 分
20. 解:(1)设第一次购书的进价为 x 元,

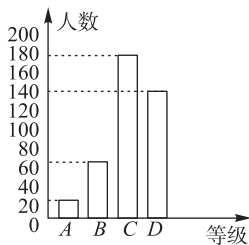
- 根据题意得 $\frac{1\,800}{x(1 - 10\%)} - \frac{1\,800}{x} = 20$, 3 分
 解得 $x = 10$,
 经检验 $x = 10$ 是原方程的解, 5 分
 第二次购书的进价为 $10 \times (1 - 10\%) = 9$ (元).
 第一次购书: $\frac{1\,800}{10} = 180$ (本).

- 第二次购书: $180 + 20 = 200$ (本); 7 分
 (2)每本书定价是 $10 \div \frac{4}{10} = 25$ (元),

- 两次获利: $25 \times \frac{7}{10} \times (200 + 180) - 3\,600 = 3\,050$ (元). 10 分
 答:书店第二次批发了 200 本图书,该老板两次总共获利 3 050 元.

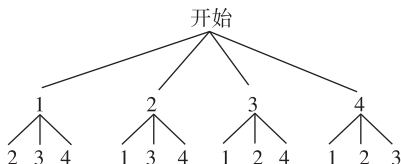
六、(本题满分 12 分)

21. 解:(1)利用条形图和扇形图可得出:
 本次参与调查的学生共有: $180 \div 45\% = 400$, 2 分
 $m = \frac{60}{400} \times 100\% = 15\%$, $n = 1 - 5\% - 15\% - 45\% = 35\%$; 4 分
 (2) $\because D$ 等级的人数为 $400 \times 35\% = 140$; 6 分
 如图所示: 8 分



第 21 题图 1

(4)列树状图 2:



第 21 题图 2

由树状图可以看出所有可能的结果有 12 种,组成的两位数为奇数的有 6 种,

即 13,21,23,31,41,43,则小明参加的概率为 $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, 10 分

同理小刚参加的概率也是 $\frac{1}{2}$,

故游戏规则公平. 12 分

七、(本题满分 12 分)

22. 解:(1)证明:作 $OD \perp PB$,垂足为点 D .

$\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于 A 点,

$\therefore OA \perp PA$,

又 $\because O$ 在 $\angle APB$ 的平分线上,

$\therefore OD = OA$,

$\therefore PD$ 是 $\odot O$ 的切线; 4 分

(2) $CD \parallel PO$,理由如下:

连接 AD ,

$\because PA, PD$ 分别与 $\odot O$ 相切于 A, D 两点,

$\therefore PA = PD$.

又 $\because PO$ 平分 $\angle APB$,

$\therefore PO \perp AD$.

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADC = 90^\circ$,即 $CD \perp AD$,

$\therefore CD \parallel PO$; 8 分

(3) $\because CD \parallel PO$, $\therefore \triangle BCD \sim \triangle BOP$,

$\because$ 点 C 是 OB 的中点, $\therefore \frac{CD}{OP} = \frac{BC}{BO} = \frac{1}{2}$,即 $PO = 2CD$,

又 $\angle ACD = \angle AOP$, $\angle ADC = \angle PAO = 90^\circ$,

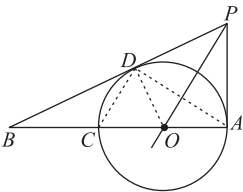
$\therefore \triangle CDA \sim \triangle OAP$,

设 $\odot O$ 的半径 $OA = x$,则 $AC = 2x$,

$\therefore \frac{CD}{OA} = \frac{AC}{PO}$,即 $2CD^2 = 2x^2$,

$\therefore PO = 2CD = 2x$,

在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中, $x^2 + (2\sqrt{3})^2 = (2x)^2$,
解得 $x=2$ (负值舍去). 12 分



第 22 题图

八、(本题满分 14 分)

23. 解(1) $\because$ 点 $A(-3,0), C(0,3)$ 在抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的图象上,

$\therefore \begin{cases} -9-3b+c=0, \\ c=3, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} b=-2, \\ c=3, \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2-2x+3$; 4 分

(2) 证明: 由(1)得抛物线解析式为 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,

$\therefore$ 抛物线的顶点 $D(-1,4)$,

$\because C(0,3), A(-3,0)$,

$\therefore AD=2\sqrt{5}, AC=3\sqrt{2}, CD=\sqrt{2}$,

$\therefore AD^2=AC^2+CD^2$,

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形; 8 分

(3) 存在,

理由: $\because$ 抛物线解析式为 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,

$\therefore E(-1,0)$,

$\because A(-3,0), D(-1,4)$,

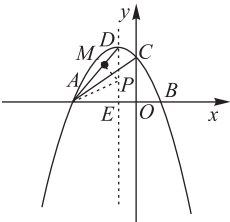
$\therefore AE=2, DE=4, AD=2\sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\sin\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

设 $P(-1,p)$,

$\because$ 点 P 到直线 AD 的距离与到 x 轴的距离相等, 9 分

① 如图 1, 当点 P 在 $\angle DAB$ 的角平分线时,



第 23 题图 1

过点 P 作 $PM\perp AD$,

$\therefore PM=PD\cdot \sin\angle ADE=\frac{\sqrt{5}}{5}(4-p), PE=p$,

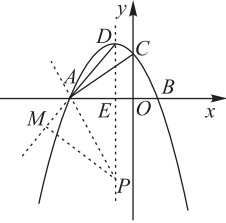
$$\because PM=PE,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}(4-p)=p,$$

$$\therefore p=\sqrt{5}-1,$$

$$\therefore P(-1, \sqrt{5}-1), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

②如图 2,当点 P 在 $\angle DAB$ 的外角的平分线时,



第 23 题图 2

过点 P 作 $PM \perp AD$,

$$\therefore PM=PD \cdot \sin \angle ADE=\frac{\sqrt{5}}{5}(4-p), PE=-p,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{4}(4-p)=-p,$$

$$\therefore p=-\sqrt{5}-1,$$

$$\therefore P(-1, -\sqrt{5}-1), \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

综上所述,存在点 P 到 AD 的距离与到 x 轴的距离相等,点 $P(-1, \sqrt{5}-1)$ 或 $(-1, -\sqrt{5}-1)$. $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$