2019 年高中数学联赛模拟试题（一）参考答案

一、填空题（每小题 7 分，共 56 分）

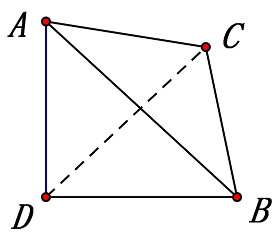
1、若 $y=\log_{2016}\left(x^2-ax+65\right)$ 的值域为 R^+，那么 a 的取值范围是__________. 答案：$-16<a<16$.

解：由值域 $y\in R^+$，$\therefore x^2-ax+65>1$，$\Rightarrow x^2-ax+64>0$

$\therefore \Delta=a^2-4\cdot 64<0$，$\therefore -16<a<16$.

2、四面体 $ABCD$ 中，ΔABC 是一个正三角形，$AD=BD=2$，$AD\perp BD$，$AD\perp CD$，则 D 到面 ABC 的距离为__________. 答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

解：如图，据题意得，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=2\sqrt{2}$，



于是 $BC=CA=AB=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=2$，

因 $BC^2=BD^2+CD^2$，得 $BD\perp CD$，从而以 D 为顶点的三面角是三直三面角，

四面体体积 $V=\dfrac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta BCD}=\dfrac{4}{3}$，而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=2\sqrt{3}$，

若设 D 到面 ABC 的距离为 h，则 $V=\dfrac{1}{3}h\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$，由 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h=\dfrac{4}{3}$，

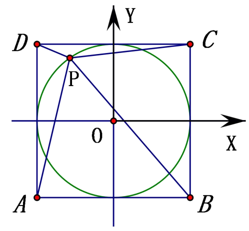
得到 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3、若对于所有的正数 x,y，均有 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le a\sqrt{x+y}$，则实数 a 的最小值是______. 答案：$\sqrt{2}$.

解：由 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=1$，得 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\le\sqrt{2}$，

当 $x=y$ 时取等号.

4、已知 P 是正方形 $ABCD$ 内切圆上的一点，记 $\angle APC=\alpha,\angle BPD=\beta$，则



$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=$____________．答案：$8$．

解：如图建立直角坐标系，设圆方程为$x^2+y^2=r^2$，

则正方形顶点坐标为$A(-r,-r),B(r,-r),C(r,r),D(-r,r)$，

若点P的坐标为$P(r\cos\theta,r\sin\theta)$，于是直线

PA,PB,PC,PD的斜率分别为

$$k_{PA}=\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta},k_{PB}=-\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta},\quad k_{PC}=\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta},k_{PD}=-\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta},$$

所以$\tan^2\alpha=\left(\dfrac{k_{PC}-k_{PA}}{1+k_{PA}k_{PC}}\right)^2=4(\cos\theta-\sin\theta)^2$，

$$\tan^2\beta=\left(\frac{k_{PD}-k_{PB}}{1+k_{PB}k_{PD}}\right)^2=4(\cos\theta+\sin\theta)^2,$$

由此立得$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=8$．

解2：取特例，P在坐标轴上，则$\alpha=\beta$，

这时，$\tan\alpha=\cot\gamma=\dfrac{2}{1}=2=\tan\beta$，$\therefore\tan^2\alpha+\tan^2\beta=2^2+2^2=8$

5、等差数列$2,5,8,\cdots,2015$与$4,9,14,\cdots,2014$的公共项（具有相同数值的项）的个数是___________．答案：134．

解：将两个数列中的各项都加1，则问题等价于求等差数列$3,6,9,\cdots,2016$与等差数列$5,10,15,\cdots,2015$的公共项个数；前者是$M=\{1,2,3,\cdots,2016\}$中的全体能被3整除的数，后者是M中的全体能被5整除的数，故公共项是M中的全体能被15整除的数，这种数有$\left[\dfrac{2016}{15}\right]=134$个．

6、设x为锐角，则函数$y=\sin x\sin 2x$的最大值是________．答案：$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$．

解：由$y=2\sin^2x\cos x$，

得$y^2=4\sin^4x\cos^2x=2(1-\cos^2x)(1-\cos^2x)\cdot2\cos^2x$

$$\le 2\left(\frac{(1-\cos^2 x)+(1-\cos^2 x)+2\cos^2 x}{3}\right)^3 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27},$$

所以 $y \le \frac{4\sqrt{3}}{9}$．当 $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ 时取得等号.

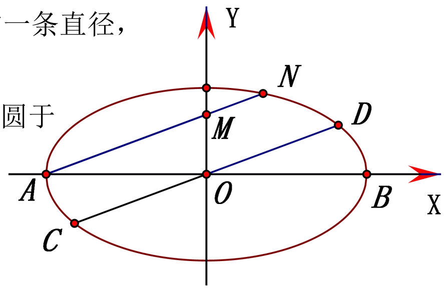
7、若将前九个正整数$1,2,3,4,5,6,7,8,9$分别填写于一张3×3方格表的九个格子中，使得每行三数的和，每列三数的和皆为质数，你的填法是

解答：（答案有多种）

1	7	9
2	6	3
8	4	5

二、解答题（共64分）

8、（14分）如图，CD是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一条直径，过椭圆长轴的左顶点$A$作$CD$的平行线，交椭圆于另一点$N$，交椭圆短轴所在直线于$M$，证明：$AM\cdot AN = CO\cdot CD$.



证1：椭圆方程为$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$，

点A,N的坐标为$A(-a,0), N(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则直线$AN$方程为

$$\begin{cases} x=-a+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}, \quad \cdots\cdots 3'$$

代入椭圆方程得到$(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)t^2 - 2ab^2 t\cos\theta = 0$，

$$AN = t = \frac{2ab^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta},\quad AM = \frac{a}{\cos\theta}\ \ (\theta\ne\frac{\pi}{2}),\quad \cdots\cdots 6'$$

因此 $AM\cdot AN = \frac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$，$\cdots\cdots 9'$

又据$AN \mathbin{/\!/} CD$，则点C,D坐标为：$C(-|OD|\cos\theta, -|OD|\sin\theta)$，

$D(|OD|\cos\theta, |OD|\sin\theta)$，$\cdots\cdots 12'$

因为C,D在椭圆上，则$|CO|^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$，而，

$CO\cdot CD=2\left|CO\right|^2=\dfrac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$，

因此 $AM\cdot AN=CO\cdot CD$． ……14'

证 2：

易知 CD 的斜率 k 存在，不妨令 $CD:y=kx$，与椭圆方程联系，

解得

$$C\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\frac{kab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)、D\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\frac{kab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)\quad\cdots\cdots 3'$$

$$\therefore\left|CO\right|=\frac{\sqrt{\left(1+k^2\right)a^2b^2}}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\left|CD\right|=\frac{\sqrt{4\left(1+k^2\right)a^2b^2}}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\quad\therefore\left|CO\right|\cdot\left|CD\right|=\frac{2\left(1+k^2\right)a^2b^2}{b^2+a^2k^2}\cdots\cdots 6'$$

AN 方程为： $y=k\left(x+a\right),\therefore M\left(0,ka\right)$.

将 AN 方程与椭圆方程联立，得 $\left(b^2+a^2k^2\right)x^2+2a^3k^2x+k^2a^2-a^2b^2=0$

$$\therefore x_A+x_N=-\frac{2a^3k^2}{b^2+a^2k^2},\therefore x_N=\frac{ab^2-a^3k^2}{b^2+a^2k^2}\qquad\cdots\cdots 9'$$

$$y_N=\frac{2kab^2}{b^2+a^2k^2},\therefore\left|AM\right|=a\sqrt{1+k^2}\qquad\cdots\cdots 12'$$

$$\left|AN\right|=\sqrt{\left(\frac{ab^2-a^3k^2}{b^2+a^2k^2}+a\right)^2+\frac{4k^2a^2b^4}{\left(b^2+a^2k^2\right)^2}}=\frac{2ab^2\sqrt{1+k^2}}{b^2+a^2k^2},$$

$$\therefore\left|AM\right|\cdot\left|AN\right|=\frac{2a^2b^2\left(1+k^2\right)}{b^2+a^2k^2}=\left|CO\right|\cdot\left|CD\right|\qquad\cdots 14'$$

9、（15 分）设 x,y,z 为正数，满足：$xy+yz+zx=1$，证明：

$$xyz(x+y)(y+z)(x+z)\ge(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

证：据条件，即要证 $xyz(x+y+z-xyz)\ge(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ ①

也即 $xyz(x+y+z)\ge 1-(x^2+y^2+z^2)+(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)$ ② ……3'

将此式各项齐次化，因为 $1=(xy+yz+xz)^2=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z)$ ……

6'

$x^2+y^2+z^2=(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz)=$

$x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)+xyz(x+y+z)$ 代入②，

只要证 $xyz(x+y+z)\geq$

$2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)-x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)+xyz(x+y+z)$ 即

$x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)\geq 0$ ……12'

也即 $xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+xz(x-z)^2\geq 0$ 。

此为显然，故命题得证．…15'

证 2：由题设得：

$y(x+z)=1-zx, x(y+z)=1-yz, z(x+y)=1-xy$ ，

三式相乘，故原不等式等价于证明：

$(1-zx)(1-yz)(1-xy)\geq(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ …… 3'

上式两边展开并化简得：

$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$ …… 6'

配方得：

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq(xy-xz)^2+(yz-xy)^2+(yz-zx)^2$

$=x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2$ …… 9'

即 $(1-z^2)(x-y)^2+(1-x^2)(y-z)^2+(1-y^2)(z-x)^2\geq 0\ (*)$ ……12'

$\because 0<x,y,z<1, \therefore 1-x^2>0, 1-y^2>0, 1-z^2>0,$

$\therefore (*)$ 显然成立． ……15'

10、（20 分）设集合 $A=\{1,2,\cdots,2016\}$，对于 A 的任一个 1008 元子集 X，若存在 $x,y\in X$，满足 $x<y, x|y$，则称 X 为“好集”，求最大的正整数 a，（$a\in A$），使得任一个含 a 的 1008 元子集皆为“好集”．

解：因任何正整数 n 可以表为 $n=2^{\alpha}t$ 形式，其中 $\alpha\in N$， t 为正奇数，于是集合 A 可划分为以下 1008 个子集：

$A_j=\left\{m\left|m=2^{\alpha}(2j-1),\alpha\in N,1\le m\le 2016\right.\right\}$， $j=1,2,\cdots,1008\cdots\cdots 4'$

对于集合 A 的任一个1008元子集 X，只要集 X 中含有某一个 A_j 中的至少两个元素 $x,y,(x<y)$，因 $x=2^{k_1}(2j-1),y=2^{k_2}(2j-1)$，$k_1<k_2$，则 $x|y$；此时 X 为好集；

以下证明正整数 a 的最大值为 671： $\cdots\cdots 8'$

若 $a=671$ 时，对于 A 的任一个1008元子集 X，如果 X 中含有某个 A_j 中的至少两个元素，则 X 便是好集；如果 $\left\{A_j\right\}$ 中的1008个集合，每个集合中恰有一个元素在 X 中，那么 A_{1007} 也有一个元素在 X 中，

但 $A_{1007}=\{2013\}$ 为单元素集，于是 $2013\in X$，而 $a|2013$，（$2013=671\times 3=3a$），这说明 X 仍是好集，

因此 $a=671$ 合于要求． $\cdots\cdots 12'$

下面说明当 $a\ge 672$ 时，存在含 a 的集 X 不是好集；分两种情况：

(1)、若 $a\ge 1009$，取1008元集 $X_0=\{1009,1010,\cdots,2016\}$，则 $a\in X_0$，

因 X_0 中任两个不同元素 $x<y$，均有 $x\quad y$，故 X_0 不为好集，这种 a 不合要求． $\cdots\cdots 15'$

(2)、若 $672\le a\le 1008$，记 $X_1=\left\{672+j\left|j=0,1,\cdots,336\right.\right\}$，

$X_2=X_0\setminus\left\{2(672+j)\left|j=0,1,\cdots,336\right.\right\}$，令 $X=X_1\cup X_2$，则 $|X|=1008$，且 $a\in X_1$，

若 X 中存在 $x<y,x|y$，因 $x\ge 672$，$y\le 2016$，则 $y\le 3x$；

若 $x=672$，如果 $x|y,x<y$，只有 $y=2x$ 或者 $y=3x$，此时 y 的取值只能是：$y=2\times 672=1344$，或者 $y=3\times 672=2016$；由于 $1344=2(672+0),2016=2(672+336)$，这说明，这两个数已被挖去，不在集合 X 中； $\cdots\cdots 18'$

若 $x>672$，假若 $x|y$，只有 $y=2x$，这种数 y 也已悉数被挖去，即 $y\notin X$，因此 X 不是好集，这种 a 也不合要求．

综上所述，a 的最大值为 671． $\cdots\cdots 20'$

（本试题来源于百度文库）

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注