

## 2019 新星网秋季赛 1 ~ 4 题解答

上海市七宝中学高一 贾若桐

1. 设整数  $n \geq 2$ . 求最大的实数  $\lambda = \lambda(n)$  使得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \left( \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \geq \lambda \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}$$

对任意满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  的正实数  $a_1, \dots, a_n$  成立.

(上海中学 王广廷 供题)

**解** 由切比雪夫不等式

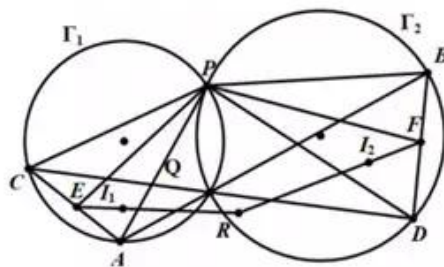
$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \left( \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{n-2}{i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) a_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot \sum_{i=1}^n a_i + (n-2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot a_i \geq (n-2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot a_i + n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot a_i \\ &= (2n-2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot a_i, \end{aligned}$$

故

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \left( \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot a_i} \geq 2n-2.$$

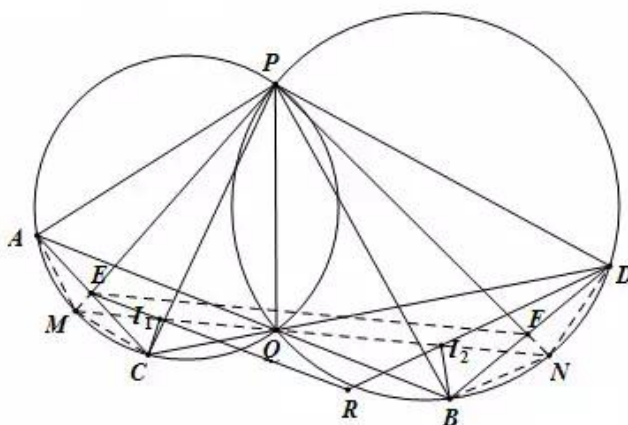
当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时,  $\lambda(n)_{\max} = 2n-2$ .

2. 如图, 两圆  $\Gamma_1, \Gamma_2$  相交于点  $P, Q$ . 过点  $Q$  的一条直线分别交圆  $\Gamma_1, \Gamma_2$  于点  $A, B$ , 过点  $Q$  的另一条直线分别交圆  $\Gamma_1, \Gamma_2$  于点  $C, D$ .  $\angle APC$  的角平分线交  $AC$  于点  $E$ ,  $\angle BPD$  的角平分线交  $BD$  于点  $F$ .  $\triangle AQC, \triangle BQD$  的内心分别为  $I_1, I_2$ , 直线  $EI_1$  交  $FI_2$  于点  $R$ . 证明:  $PR$  平分  $\angle APD$ .



(浙江省乐清市知临中学 羊明亮 供题)

证明 联结  $EF, I_1I_2$ , 延长  $I_2N, I_1M, AM, CM, DN, NB$ .



$\therefore PE$ 、 $PF$  分别平分  $\angle APC$ 、 $\angle BPD$ ， $I_1$ 、 $I_2$  分别为  $\triangle AQC$ 、 $\triangle BQD$  的内心，

$\therefore M$ 、 $I_1$ 、 $Q$ 、 $I_2$ 、 $N$  五点共线。

$\therefore \angle BPD = \angle BQD = \angle AQC = \angle APC$ ， $\angle PDB = \angle PQA = \angle PCA$ ，

$\therefore \triangle PAC \sim \triangle PBD$ 。

$\therefore PE$ 、 $PF$  分别平分  $\angle APC$ 、 $\angle BPD$ ，由对应相似原理： $\frac{PF}{PN} = \frac{PE}{PM}$ ，

$\therefore EF \parallel I_1I_2$ ， $\therefore \angle PEF = \angle PMN$ ， $\angle PFE = \angle PNM$ 。

对  $\triangle PEF$  及点  $R$  应用角元 Cevd 定理有

$$\frac{\sin \angle RPE \sin \angle RFP \sin \angle REF}{\sin \angle RPF \sin \angle RFE \sin \angle REP} = 1.$$

$$\therefore \frac{\sin \angle RFP \sin \angle REF}{\sin \angle RFE \sin \angle REP} = \frac{\sin \angle RFN \sin \angle EI_1M}{\sin \angle FI_2N \sin \angle MER}$$

$$= \frac{I_2N \cdot EM}{FN \cdot MI_1} = \frac{NB \cdot EM}{FN \cdot MC} = 1.$$

$\therefore \sin \angle RPE = \sin \angle RPF \Rightarrow \angle RPE = \angle RPF$ 。



3. 设整数  $k \geq 2$ . 若正整数  $n$  能被所有小于  $\sqrt[k]{n}$  的正整数整除. 证明:  $n$  的不同素因子的个数不超过  $2k - 1$ .

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

**证明** 假设  $\exists n \in \mathbb{N}^+$ , 有任意小于  $\sqrt[k]{n}$  的整数整除  $n$ , 并且  $n$  至少有  $2k$  个质因子.

设  $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$ , 其中  $p_i$  为素数,  $\alpha_i \in \mathbb{N}^+$ ,  $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \dots < p_s^{\alpha_s}$ ,  $s \geq 2k$ . 则

$$\sqrt[k]{n} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}} > \sqrt[k]{p_1^{s\alpha_1}} \geq p_1^{2\alpha_1}.$$

由假设知  $p_1^{2\alpha_1} | n$ , 矛盾.

4. 设整数  $n \geq 2$ . 求最小的常数  $c = c(n)$  使得不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k - G_n)^2 \leq c \sum_{k=1}^n (a_k - A_n)^2$$

对任意非负实数  $a_1, \dots, a_n$  均成立, 其中  $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ ,  $A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ .

(华东师范大学 罗振华 供题)

**解** 不妨设  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 > 0$ . 记  $B_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - G_n)^2}{\sum_{k=1}^n (a_k - A_n)^2} &= \frac{nB_n + nG_n^2 - 2nA_n G_n}{nB_n + nA_n^2 - 2nA_n^2} \\ &= 1 + \frac{G_n^2 + A_n^2 - 2G_n A_n}{B_n - A_n^2} = 1 + \frac{(A_n - G_n)^2}{B_n - A_n^2}. \end{aligned}$$

令  $a_n = 0, a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} > 0$ , 则

$$c \geq 1 + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\frac{n-1}{n} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = n.$$

下证:  $(A_n - G_n)^2 \leq (n-1)(B_n - A_n^2)$ .

$\because a_n \leq G_n \leq A_n, \therefore (a_n - G_n)(a_n + G_n - 2A_n) \geq 0 \Leftrightarrow (a_n - A_n)^2 \geq (A_n - G_n)^2$ ,

只要证明:

$$\begin{aligned} & (a_n - A_n)^2 \leq (n-1)(B_n - A_n^2) \\ \Leftrightarrow & a_n^2 - 2a_n \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n}{n} + \frac{\left(a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2}{n^2} \leq \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \frac{n-1}{n^2} \left(a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

故当  $a_n = 0, a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} > 0$  时,  $c(n)_{\min} = n$ .

自主招生在线创立于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



识别二维码, 快速关注

5 官方微信公众号: zizzsw

官方网站: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018