2019 新星网秋季赛 1～4 题解答

上海市七宝中学高一　贾若桐

1. 设整数 $n\geq 2$. 求最大的实数 $\lambda=\lambda(n)$ 使得

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i+a_j)\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)\geq\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}$$

对任意满足 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ 的正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 成立.

(上海中学 王广廷 供题)

解　由切比雪夫不等式

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i+a_j)\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-2}{i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)a_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i+(n-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot a_i\geq(n-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot a_i+n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot a_i$$

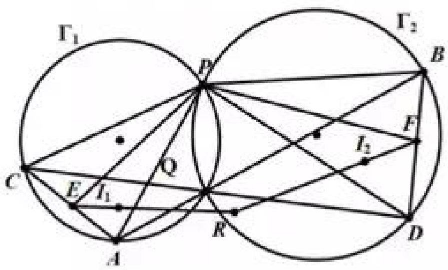
$$=(2n-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot a_i,$$

故

$$\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i+a_j)\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot a_i}\geq 2n-2.$$

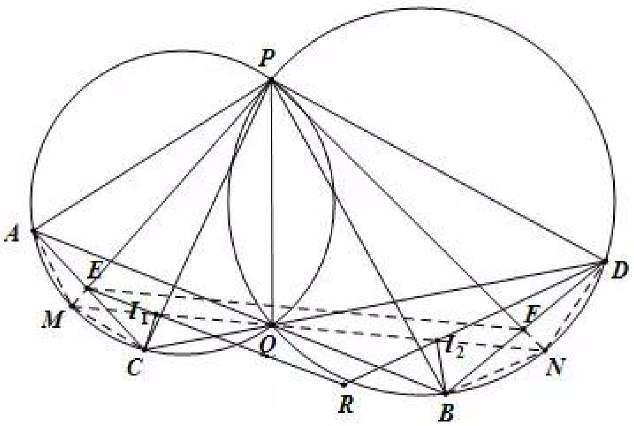
当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，$\lambda(n)_{\max}=2n-2$.

2. 如图，两圆 Γ_1，Γ_2 相交于点 P，Q. 过点 Q 的一条直线分别交圆 Γ_1，Γ_2 于点 A，B，过点 Q 的另一条直线分别交圆 Γ_1，Γ_2 于点 C，D. $\angle APC$ 的角平分线交 AC 于点 E，$\angle BPD$ 的角平分线交 BD 于点 F. $\triangle AQC$，$\triangle BQD$ 的内心分别为 I_1，I_2，直线 EI_1 交 FI_2 于点 R. 证明：PR 平分 $\angle APD$.



(浙江省乐清市知临中学 羊明亮 供题)

证明　联结 EF，I_1I_2，延长 I_2N，I_1M，AM，CM，DN，NB.



$\because PE$、PF 分别平分 $\angle APC$、$\angle BPD$，I_1、I_2 分别为 $\triangle AQC$、$\triangle BQD$ 的内心，

$\therefore M$、I_1、Q、I_2、N 五点共线.

$\because \angle BPD=\angle BQD=\angle AQC=\angle APC$，$\angle PDB=\angle PQA=\angle PCA$，

$\therefore \triangle PAC\sim\triangle PBD$.

$\because PE$、PF 分别平分 $\angle APC$、$\angle BPD$，由对应相似原理：$\dfrac{PF}{PN}=\dfrac{PE}{PM}$，

$\therefore EF /\!/ I_1I_2$，$\therefore \angle PEF=\angle PMN$，$\angle PFE=\angle PNM$.

对$\triangle PEF$ 及点 R 应用角元 Cevd 定理有

$$\frac{\sin\angle RPE\sin\angle RFP\sin\angle REF}{\sin\angle RPF\sin\angle RFE\sin\angle REP}=1.$$

$$\because \frac{\sin\angle RFP\sin\angle REF}{\sin\angle RFE\sin\angle REP}=\frac{\sin\angle RFN\sin\angle EI_1M}{\sin\angle FI_2N\sin\angle MER}$$

$$=\frac{I_2N\cdot EM}{FN\cdot MI_1}=\frac{NB\cdot EM}{FN\cdot MC}=1.$$

$$\therefore\ \sin\angle RPE=\sin\angle RPF\Rightarrow\angle RPE=\angle RPF.$$

3. 设整数 $k\geq 2$. 若正整数 n 能被所有小于 $\sqrt[k]{n}$ 的正整数整除. 证明: n 的不同素因子的个数不超过 $2k-1$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

证明 假设 $\exists n\in N^{+}$，有任意小于 $\sqrt[k]{n}$ 的整数整除 n，并且 n 至少有 $2k$ 个质因子.

设 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$，其中 p_i 为素数，$\alpha_i\in N^{+}$，$p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<\cdots<p_s^{\alpha_s}, s\geq 2k$. 则

$$\sqrt[k]{n}=\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}}>\sqrt[k]{p_1^{s\alpha_1}}\geq p_1^{2\alpha_1}.$$

由假设知 $p_1^{2\alpha_1}\mid n$，矛盾.

4. 设整数 $n\geq 2$. 求最小的常数 $c=c(n)$ 使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-G_n)^2\leq c\sum_{k=1}^{n}(a_k-A_n)^2$$

对任意非负实数 $a_1,\cdots,a_n$ 均成立, 其中 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, $A_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

解 不妨设 $a_n=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2>0$. 记 $B_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n}$，则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-G_n)^2}{\sum_{k=1}^{n}(a_k-A_n)^2}=\frac{nB_n+nG_n-2nA_nG_n}{nB_n+nA_n^2-2nA_n^2}$$

$$=1+\frac{G_n^2+A_n^2-2G_nA_n}{B_n-A_n^2}=1+\frac{(A_n-G_n)^2}{B_n-A_n^2}.$$

令 $a_n=0, a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>0$，则

$$c\ge 1+\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{\frac{n-1}{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}=n.$$

下证：$\left(A_n-G_n\right)^2\le(n-1)\left(B_n-A_n^2\right)$.

$\because a_n\le G_n\le A_n$，$\therefore \left(a_n-G_n\right)\left(a_n+G_n-2A_n\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(a_n-A_n\right)^2\ge\left(A_n-G_n\right)^2$，

只要证明：

$$\left(a_n-A_n\right)^2\le(n-1)\left(B_n-A_n^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a_n^2-2a_n\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n}{n}+\frac{\left(a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2}{n^2}\le\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\frac{n-1}{n^2}\left(a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{1\le i<j\le n-1}(a_i-a_j)^2\ge 0.$$

故当 $a_n=0, a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>0$ 时，$c(n)_{\min}=n$.