

2019 年上海新星秋季数学奥林匹克试题

上海

(2019 年 12 月 9 日 8:00 – 12:00)

1. 设整数 $n \geq 2$. 求最大的实数 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

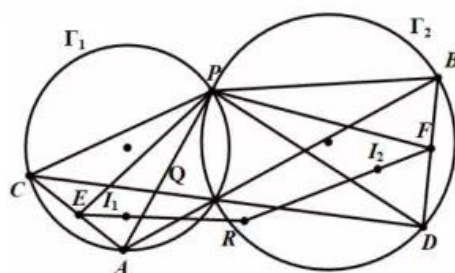
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \geq \lambda \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}$$

对任意满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

(上海中学 王广廷 供题)

2. 如图, 两圆 Γ_1, Γ_2 相交于点 P, Q .

过点 Q 的一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 A, B , 过点 Q 的另一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 C, D . $\angle APC$ 的角平分线交 AC 于点 E , $\angle BPD$ 的角平分线交 BD 于点 F . $\triangle AQC, \triangle BQD$ 的内心分别为 I_1, I_2 , 直线 EI_1 交 FI_2 于点 R . 证明: PR 平分 $\angle APD$.



(浙江省乐清市知临中学 羊明亮 供题)



3. 设整数 $k \geq 2$. 若正整数 n 能被所有小于 $\sqrt[k]{n}$ 的正整数整除. 证明: n 的不同素因子的个数不超过 $2k - 1$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

4. 设整数 $n \geq 2$. 求最小的常数 $c = c(n)$ 使得不等式

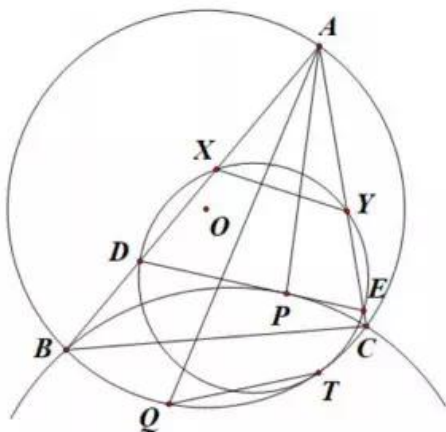
$$\sum_{k=1}^n (a_k - G_n)^2 \leq c \sum_{k=1}^n (a_k - A_n)^2$$

对任意非负实数 $a_1, \dots, a_n$ 均成立, 其中 $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

5. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上. 过点 B, C 的圆切线段 DE 于点 P , 圆 O 上一点 Q 满足 AQ, AP 互为关于 $\angle BAC$ 的等角线. 过点 D, E 且与圆 O 内切于点 T 的圆, 分别交线段 AD, AE 于点 X, Y . 证明: XY, BC, QT 交于一点.

(吉林大学附属中学 石泽晖 供题)



6. 给定简单图 G 和正整数 n . 证明: 图中存在两个(可以相同)顶点 A, B , 使得以 A 为起点, B 为终点的长度为 n 的路径条数为偶数.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

自主招生在线创始于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

