准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座号______

地区（市）______ 县______ 学校______

装 订 线

2019年全国高中数学联赛新疆赛区初赛试卷

题号	一	二			合计
		1	2	3	
得分					
评卷人					
复核人					

注意事项:

1. 本试卷共二大题, 全卷满分120分.
2. 用圆珠笔或钢笔作答, 解题书写不要超出装订线.
3. 不能使用计算器. 请关闭手机(手机开机, 按作弊处理).

一、填空题

得分	评卷人

(本大题共8 小题, 每小题8分, 共64分. 把答案填在横线上.)

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$, 则是集合 U 的子集但不是集合 A 的子集, 也不是集合 B 的子集的集合个数为 ________.

   解法一: 因为 $A\cup B=U$ 且 $A\cap B=\{4,5\}$, 所以满足题意的集合所含的元素至少在 $\{1,2,3\}$ 中取一个且至少在 $\{6,7,8\}$ 中取一个, 集合 $\{4,5\}$ 中的元素可取或不取, 于是满足题意的集合共有

   $$(2^3-1)(2^3-1)\times 2^2=196 \text{ 个 }.$$

   解法二: 集合 U 的子集个数为 2^8, 其中是集合 A 或 集合 B 的子集个数为 $2^5+2^5-2^2$. 所以满足条件的集合个数为

   $$2^8-(2^5+2^5-2^2)=196 \text{ 个 }.$$

2. 设 n 为正整数. 若 $1+2+\cdots+n$ 的和恰好等于一个三位数且该三位数的每个数字均相同, 则所有可能的 n 值为 ________.

   解: 设 $1+2+\cdots+n=\overline{aaa}$, 化简可得 $\frac{n(n+1)}{2}=111\times a$. 由于 $111=3\times 37$ 且 37 是素数, 故 n 和 $n+1$ 中要有一个被 37 整除. 再由 $1+2+\cdots+n<1000$, 可知 $n<45$. 因此 $n=36$ 或 37. 经计算, $1+2+\cdots+36=666$ 且 $1+2+\cdots+37=703$, 故 $n=36$.

3. 已知 x, y, z 是正数且满足

$$\begin{cases} x+y+xy=8 \\ y+z+yz=15 \\ z+x+zx=35 \end{cases}, \text{则 } x+y+z+xy= \underline{\qquad\qquad}.$$

解: 由 $x+y+xy=8$ 知 $x+y+xy+1=9$ 即

$$(1+x)(1+y)=9. \tag{1}$$

同理可得

$$\begin{cases} (1+y)(1+z)=16 \\ (1+z)(1+x)=36 \end{cases}. \tag{2}$$

结合 (1) 和 (2) 可得

$$(1+x)(1+y)(1+z)=3\times 4\times 6. \tag{3}$$

由 (1) 和 (3) 可知 $z=7$. 同理可得 $x=7/2$ 和 $y=1$. 从而 $x+y+z+xy=15$.

4. 随机取一个由 0 和 1 构成的 8 位数, 它的偶数位数字之和与奇数位数字之和相等的概率为__________.

解: 设 n 是满足题意的 8 位数, 故知其偶数位上的 1 的个数和在奇数位上的 1 的个数相同, 从而在奇数位上与偶数位上的 1 的个数可能为 1, 2, 3 或 4. 注意到首位为 1, 下面分情况讨论:

(i) 奇数位上与偶数位上有 1 个 1, 3 个 0, 共有 $C_3^0\cdot C_4^1=4$ 种可能;

(ii) 奇数位上与偶数位上有 2 个 1, 2 个 0, 共有 $C_3^1\cdot C_4^2=18$ 种可能;

(iii) 奇数位上与偶数位上有 3 个 1, 1 个 0, 共有 $C_3^2\cdot C_4^3=12$ 种可能;

(iv) 奇数位上与偶数位上有 4 个 1, 共有 $C_3^3\cdot C_4^4=1$ 种可能;

合计共有 $4+18+12+1=35$ 个满足条件的自然数 n. 又因为 0 和 1 构成的 8 位数共有 $2^7=128$ 个, 从而概率为 $\frac{35}{128}$.

5. 设 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{22}{7}$ 且 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{m}{n}$, 其中 $\frac{m}{n}$ 为最简分数, 则 $m+n=$__________.

解: 注意到 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ 且 $1=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$. 由 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{22}{7}$ 可得 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=\frac{22}{7}$, 即 $15\cos\frac{x}{2}=29\sin\frac{x}{2}$. 于是

$$\frac{m}{n}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{29}{15}.$$

从而 $m+n=29+15=44$.

6. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数. 若 $A=[\frac{7}{8}]+[\frac{7^2}{8}]+\cdots+[\frac{7^{2019}}{8}]+[\frac{7^{2020}}{8}]$, 则 A 除以 50 的余数为 ________.

解: 注意到$\frac{7^{2k-1}}{8}$, $\frac{7^{2k}}{8}$ 均不是整数. 按定义 $7^{2k-1}-2=(\frac{7^{2k-1}}{8}-1)+(\frac{7^{2k}}{8}-1)<[\frac{7^{2k-1}}{8}]+[\frac{7^{2k}}{8}]<\frac{7^{2k-1}}{8}+\frac{7^{2k}}{8}=7^{2k-1}$, 所以对任意正整数 k 均有

$$\begin{aligned}&[\tfrac{7^{2k-1}}{8}]+[\tfrac{7^{2k}}{8}]=7^{2k-1}-1=7\cdot 7^{2k-2}-1\\=&\ 7\cdot(49)^{k-1}-1=7\cdot(50-1)^{k-1}-1\\\equiv&\ 7\cdot(-1)^{k-1}-1\ (\mod 50).\end{aligned}$$

从而 $A\equiv 7\cdot 1010\cdot(1-1)-1010\equiv 40\ (\mod 50)$.

7. 一个 $150\times 324\times 375$ 的长方体由 $1\times 1\times 1$ 的单位立方体拼在一起构成的, 则该长方体的一条对角线穿过 ________ 个不同的单位立方体.

解: 从左到右 151 个互相平行两两距离为 1 的平面与对角线有 151 个交点, 将对角线分为 150 段. 同样, 从上到下, 从前到后的两两距离为 1 的平面又增加一些分点. 除去对角线的一端外, 共有 $150+324+375-(150,324)-(324,375)-(375,150)+(150,324,375)=768$ 个分点(容斥原理), 将对角线分为 768 段, 每段属于一个单位立方体, 即对角线穿过 768 个单位立方体. (注: a,b 为正整数, 记 (a,b) 为 a 与 b 的最大公约数.)

8. 已知数列: $\frac{2}{3},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{6}{9},\frac{8}{9},\frac{2}{27},\frac{4}{27},\ldots,\frac{26}{27},\ldots,\frac{2}{3^n},\frac{4}{3^n},\ldots,\frac{3^n-1}{3^n},\ldots$, 那么 $\frac{2020}{2187}$ 是该数列的第________项.

解: 依题意知, 可将已知数列进行分组, 第一组为 $\{\frac{2}{3}\}$; 第二组为 $\{\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{6}{9},\frac{8}{9}\}$; 第三组为 $\{\frac{2}{27},\frac{4}{27},\ldots,\frac{24}{27},\frac{26}{27}\}$; $\cdots$; 第 n 组为 $\{\frac{2}{3^n},\frac{4}{3^n},\ldots,\frac{3^n-1}{3^n}\}$. 又 $2187=3^7$, $3^6<2020<3^7$, 故分数 $\frac{2020}{2187}$ 在数列第 7 组.

下面我们计算数列分组后, 前 6 组共有数列中

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left[(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+(3^4-1)+(3^5-1)+(3^6-1)\right]\\=&\ \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3(3^6-1)}{3-1}-6\right]=543\ \text{项}.\end{aligned}$$

又 $\frac{2020}{2187}$ 为数列第 7 组的第 1010 位.

所以分数 $\frac{2020}{2187}$ 为数列的第 $543+1010$ 位, 即 1553 位.

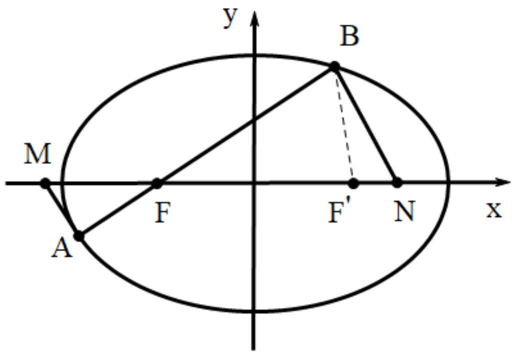
二、解答题

(本大题共3小题, 其中第1题16分, 第2, 3题各20分, 共56分.)

得分	评卷人

1. 设 F 是椭圆 E: $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左焦点, 过点 F 斜率为正的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 过点 A, B 分别作直线 AM 和 BN 满足 $AM \perp l$, $BN \perp l$, 且直线 AM, BN 分别与 x 轴相交于 M 和 N. 试求 $|MN|$ 的最小值.

解:



设过椭圆 E 的左焦点 F 的直线 l 的倾斜角为 α, 依题意知 $\frac{\pi}{2}>\alpha>0$.

如图, 设 F' 为椭圆 E 的右焦点, 在 $Rt\triangle MAF$ 中 $\cos\angle MFA=\frac{|AF|}{|MF|}$, 所以有 $|MF|=\frac{|AF|}{\cos\angle MFA}$. 在 $Rt\triangle NBF$ 中, 同理有 $|NF|=\frac{|BF|}{\cos\angle NFB}$, 所以有

$$|MN|=|MF|+|NF|=\frac{|AF|}{\cos\angle MFA}+\frac{|BF|}{\cos\angle NFB}=\frac{|AB|}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

连结 BF', 在 $\triangle FBF'$ 中, 记 $|BF|=x$, 则 $|BF'|=2\sqrt{3}-x$.

由余弦定理知 $|BF'|^2=|BF|^2+|FF'|^2-2|BF||FF'|\cos\alpha$, 即 $(2\sqrt{3}-x)^2=x^2+(2\sqrt{2})^2-2x\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$. 所以有 $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\alpha}$, 即

$$|BF|=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\alpha}. \tag{5}$$

同理有

$$|AF|=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos\alpha}. \tag{6}$$

由 (5) (6) 知 $|AB|=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3-2\cos^2\alpha}$. 由 (4) 知 $|MN|=\frac{2\sqrt{3}}{(3-2\cos^2\alpha)\cos\alpha}$.

令 $f(\alpha)=(3-2\cos^2\alpha)^2 4\cos^2\alpha$, 则 $f(\alpha)=(3-2\cos^2\alpha)(3-2\cos^2\alpha)4\cos^2\alpha$. 根据均值不等式知 $\frac{(3-2\cos^2\alpha)+(3-2\cos^2\alpha)+4\cos^2\alpha}{3}\geq\sqrt[3]{(3-2\cos^2\alpha)^2 4\cos^2\alpha}$. 所以$(3-2\cos^2\alpha)^2 4\cos^2\alpha\leq 8$ 且等号成立当且仅当 $3-2\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha$, 即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 所以当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时, $(f(\alpha))_{\max}=4$. 从而当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时 $|MN|_{\min}=\sqrt{6}$.

得分	评卷人

2. 设 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正整数, 且 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 1$ 并满足

$$(1-\frac{1}{a_1})+(1-\frac{1}{a_2})+\cdots+(1-\frac{1}{a_n})=2(1-\frac{1}{a_0}).$$

试求出 $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 所有可能的解.

解: 由题意知, 对 $0 \le i \le n$ 均有 $a_i \ge 2$. 于是有

$$2>2(1-\frac{1}{a_0})=(1-\frac{1}{a_1})+(1-\frac{1}{a_2})+\cdots+(1-\frac{1}{a_n})>\frac{n}{2}$$

可得 $n < 4$. 由于 n 是正整数, 故 $n \in \{1,2,3\}$.

(i) 当 $n = 1$ 时, 我们有 $\frac{2}{a_0} = 1 + \frac{1}{a_1}$, 解得 $2a_1 = a_0a_1 + a_0$. 注意到 $a_1 > 1$. 从而 $2a_1 = a_0a_1 + a_0 > 2a_0$, 即 $a_1 > a_0$, 这与 $a_0 > a_1$ 矛盾.

(ii) 当 $n = 2$ 时, 我们有 $\frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$. 由于 $a_0 > a_1 > a_2 > 1$, 故 $\frac{1}{a_0} < \frac{1}{a_1}$ 且 $\frac{1}{a_0} < \frac{1}{a_2}$. 从而 $\frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ 是不可能的, 故 $n = 2$ 也不成立.

(iii) 当 $n = 3$ 时, 我们有 $1 + \frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$, 则必定有 $a_3 = 2$, 否则等式右边至多为 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$. 同理 $a_2 = 3$, 不然等式右边至多为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$. 因此我们有 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{6} + \frac{2}{a_0} > \frac{1}{6}$, 从而 $3 < a_1 < 6$. 当 $a_1 = 4$ 时 $a_0 = 24$; 当 $a_1 = 5$ 时 $a_0 = 60$.

综上所述, $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 所有可能的解为 $(24, 4, 3, 2)$ 或 $(60, 5, 3, 2)$.

得分	评卷人

3. 给定正实数 $0<a<b$, 设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in[a,b]$. 试求

$$\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}}{x_1+x_2+x_3+x_4}$$ 的最小值与最大值.

解:(i) 因为 $x_1,x_2,x_3,x_4\in[a,b]$ 且 $0<a<b$, 所以有

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2}\cdot x_2}=2x_1\\ \frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geq 2\sqrt{\frac{x_2^2}{x_3}\cdot x_3}=2x_2\\ \frac{x_3^2}{x_4}+x_4\geq 2\sqrt{\frac{x_3^2}{x_4}\cdot x_4}=2x_3\\ \frac{x_4^2}{x_1}+x_1\geq 2\sqrt{\frac{x_4^2}{x_1}\cdot x_1}=2x_4\end{cases}.$$

从而有

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}\geq x_1+x_2+x_3+x_4$$

并且等号成立当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$. 于是当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时 $\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}}{x_1+x_2+x_3+x_4}$ 取得最小值 1.

(ii) 因为 $x_1,x_2,x_3,x_4\in[a,b]$ 且 $0<a<b$, 所以 $\frac{x_i}{x_{i+1}}\in[\frac{a}{b},\frac{b}{a}]$, 其中 $x_5=x_1$. 注意到 $\frac{\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}}}{\sqrt{x_{i+1}}}=\frac{x_i}{x_{i+1}}$. 于是有 $\frac{a}{b}\leq\frac{\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}}}{\sqrt{x_{i+1}}}\leq\frac{b}{a}$. 从而

$$(\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}}-\frac{a}{b}\sqrt{x_{i+1}})(\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}}-\frac{b}{a}\sqrt{x_{i+1}})\leq 0$$

即 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}}-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})x_i+x_{i+1}\leq 0$. 所以, 对所有 $1\leq i\leq 4$ 均有

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}\leq(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})x_i-x_{i+1}$$

其中 $x_5=x_1$. 从而有

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}\leq(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1)(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

于是

$$\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}}{x_1+x_2+x_3+x_4}\leq\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1$$

并且等号成立当且仅当 $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=a$, $x_4=b$ 或 $x_1=b$, $x_2=a$, $x_3=b$, $x_4=a$. 所以 $\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}}{x_1+x_2+x_3+x_4}$ 的最大值为 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1$.

综上所述, $\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}}{x_1+x_2+x_3+x_4}$ 的最小值和最大值分别为 1 和 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1$.

装

订

线