

中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 9 月测试

文科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\{-1, 0, 1\}$                       B.  $\{0, 1\}$                       C.  $\{-1, 0\}$                       D.  $\{-2, -1, 0\}$

2. 在复平面内，复数  $\frac{1+i}{2-i}$  ( $i$  为虚数单位) 对应的点在 ( )

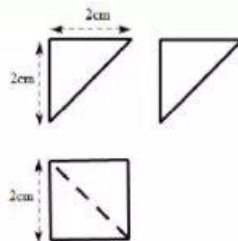
- A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限

3. 已知样本 1, 2, 4,  $x, y$  的平均数是 3, 标准差是  $\sqrt{2}$ , 则  $xy$  的值为 ( )

- A. 6                      B. 10                      C. 15                      D. 18

4. 已知一个棱锥的三视图如图所示，则该棱锥的表面积为 ( )  $\text{cm}^2$

- A.  $4\sqrt{2} + 4$   
B.  $4\sqrt{2} + 8$   
C. 8  
D. 12



5. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  经过椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的短轴端点和两个焦点，则椭圆  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 函数  $f(x) = x \sin x$  的图像在点  $(\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2}))$  处的切线的倾斜角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{3\pi}{4}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

7. 向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 4, \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ . 若  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ , 则  $|\lambda \vec{a} - \vec{b}| (\lambda \in \mathbb{R})$  的最小值为 ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $2\sqrt{2}$

8. 已知正四棱锥  $P-ABCD$ , 底面  $ABCD$  为正方形, 点  $P$  在底面的投影为  $O$ , 已知  $PO = 1$ , 该四棱锥的侧面积为  $4\sqrt{2}$ , 则该四棱锥的体积为 ( )

- A. 8                      B.  $\frac{8}{3}$                       C. 4                      D.  $\frac{4}{3}$

13. 以点(1,-2)为圆心且与直线 $x-y=1$ 相切的圆的方程是\_\_\_\_\_.
14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增.若实数 $a$ 满足 $f(3^{a-1}) < -f(-\sqrt{3})$ ,则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 $A,B,C$ 所对边的长分别为 $a,b,c$ ,且 $a\sin A + b\sin B - c\sin C = \sqrt{3}b\sin A$ ,若 $c=2$ ,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 4, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$ ,若 $f(x)$ 在区间 $[-4,m]$ 上的值域为 $[-4,5]$ ,则实数 $m$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17-21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:60分.

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$ ,  $a_{n+1}=3a_n+2$ , 设 $b_n=a_n+1$

(1) 求 $b_1, b_2, b_3$ ;

9. 要得到函数 $y = \sin 3x$ 的图像,只需将函数 $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像( )
- A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位  
B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位  
C. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位  
D. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
10. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 $AA_1=2AB$ ,  $D$ 是 $AA_1$ 的中点,则 $BD$ 与 $A_1C_1$ 所成角的余弦值为( )
- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
11. 已知点 $(x,y)$ 满足 $\begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ x-2y+2 \geq 0 \end{cases}$ , 目标函数 $z=ax+y$ 仅在点(1,0)处取得最小值,则 $a$ 的取值范围为( )
- A.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$                       B.  $(1, +\infty)$                       C.  $(-1, 1)$                       D.  $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
12. 已知 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\tan \alpha - \tan \beta = 3$ , 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值为( )
- A.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 以点 $(1, -2)$ 为圆心且与直线 $x - y = 1$ 相切的圆的方程是\_\_\_\_\_.
14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 $a$ 满足 $f(3^{a-1}) < -f(-\sqrt{3})$ , 则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 所对边的长分别为 $a, b, c$ , 且 $a \sin A + b \sin B - c \sin C = \sqrt{3} b \sin A$ , 若 $c = 2$ , 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为\_\_\_\_\_.
16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 4, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$ , 若 $f(x)$ 在区间 $[-4, m]$ 上的值域为 $[-4, 5]$ , 则实数 $m$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 60 分.

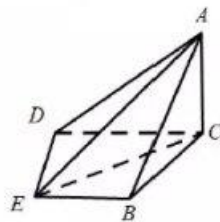
17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 2$ , 设 $b_n = a_n + 1$

- (1) 求 $b_1, b_2, b_3$ ;
- (2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;
- (3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$ ;  $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$ ,  $AB = CD = 2$ ,

$$DE = BE = 1, AC = \sqrt{2}.$$

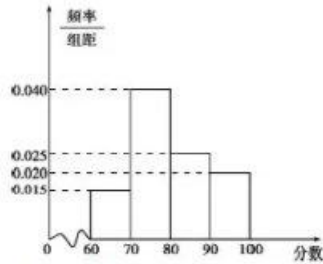
- (1) 证明: 平面 $ACE \perp$ 平面 $BCDE$ ;
- (2) 求点 $D$ 到面 $AEB$ 的距离.



19. (12 分) 2018 年初, 某市政府绩效办准备对 20 家政府机构部门进行年度考核评估, 并根据考核结果得分 (最低分 60 分, 最高分 100 分) 将这些机构分别评定为 A, B, C, D 四个类型, 考核评估标准如下表:

评估得分	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
评分类型	D	C	B	A

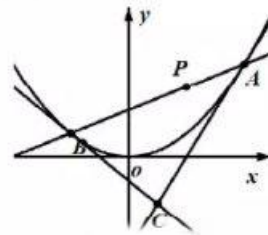
考核评估后, 对 20 家政府机构的评估分数进行统计分析, 得到频率分布直方图如图:



- (1) 评分类型为 D 的政府机构部门有多少家?  
 (2) 现从评分类型为 A 和 D 的所有政府机构部门中随机抽取两家进行分析, 求这两家来自同一评分类型的概率.

20. (12分) 已知直线过定点  $P(1,1)$ , 且与抛物线  $x^2 = 4y$  交  $A, B$  两点,  $l_1, l_2$  分别过  $A, B$  两点且与抛物线相切, 设  $l_1, l_2$  交点为  $C$ .

- (1) 求交点  $C$  的轨迹方程;  
 (2) 求三角形  $ABC$  面积的最小值.



21. (12分) 设函数  $f(x) = (1-x^2)e^x - ax - 1$ .
- (1) 当  $a=0$  时, 试讨论  $f(x)$  的单调性;  
 (2) 当  $x \geq 0$  时, 若  $a \geq 1$  时, 求证:  $f(x) \leq 0$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 6\rho \sin \theta - 7 = 0$ .

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设曲线  $C$  与直线  $l$  交于点  $A, B$ , 若点  $Q$  的坐标为  $(2,1)$ , 求  $|QA| + |QB|$  的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设函数  $f(x) = |x+3| + |x-a| - 10$ .

- (1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) > 0$  的解集;  
 (2) 如果对任意的  $x$ , 不等式  $f(x) > 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.



自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注