2018 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1． 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2． 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、（本题满分 40 分）设 n 是正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, A, B$ 均为正实数，满足 $a_i \le b_i, a_i \le A, i=1,2,\cdots,n$，且 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n} \le \dfrac{B}{A}$．

证明：$\dfrac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} \le \dfrac{B+1}{A+1}$．

证明：由条件知，$k_i = \dfrac{b_i}{a_i} \ge 1, i=1,2,\cdots,n$．记 $\dfrac{B}{A}=K$，则 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n} \le \dfrac{B}{A}$ 化为 $k_1k_2\cdots k_n \le K$．要证明

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{k_ia_i+1}{a_i+1} \le \frac{KA+1}{A+1}. \qquad ①$$

对 $i=1,2,\cdots,n$，由于 $k_i \ge 1$ 及 $0 < a_i \le A$ 知，

$$\frac{k_ia_i+1}{a_i+1} = k_i - \frac{k_i-1}{a_i+1} \le k_i - \frac{k_i-1}{A+1} = \frac{k_iA+1}{A+1}.$$

结合 $K \ge k_1k_2\cdots k_n$ 知，为证明①，仅需证明当 $A>0, k_i \ge 1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{k_iA+1}{A+1} \le \frac{k_1k_2\cdots k_nA+1}{A+1}. \qquad ②$$

…………………20 分

对 n 进行归纳．当 $n=1$ 时，结论显然成立．

当 $n=2$ 时，由 $A>0, k_1, k_2 \ge 1$ 可知

$$\frac{k_1A+1}{A+1}\cdot\frac{k_2A+1}{A+1} - \frac{k_1k_2A+1}{A+1} = -\frac{A(k_1-1)(k_2-1)}{(A+1)^2} \le 0, \qquad ③$$

因此 $n=2$ 时结论成立． …………………30 分

设 $n=m$ 时结论成立，则当 $n=m+1$ 时，利用归纳假设知，

$$\prod_{i=1}^{m+1}\frac{k_iA+1}{A+1} = \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{k_iA+1}{A+1}\right)\cdot\frac{k_{m+1}A+1}{A+1} \le \frac{k_1k_2\cdots k_mA+1}{A+1}\cdot\frac{k_{m+1}A+1}{A+1}$$
$$\le \frac{k_1k_2\cdots k_{m+1}A+1}{A+1},$$

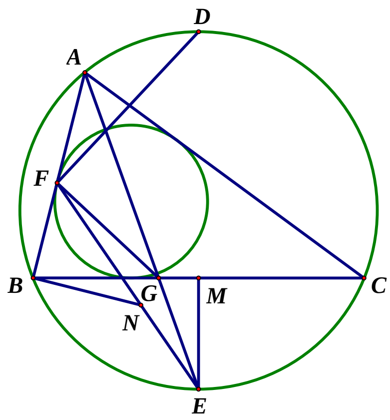
最后一步是在③中用 $k_1k_2\cdots k_m, k_{m+1}$（注意 $k_1k_2\cdots k_m \ge 1, k_{m+1} \ge 1$）分别代替 k_1, k_2．从而 $n=m+1$ 时结论成立．

由数学归纳法可知，②对所有正整数 n 成立，故命题得证．

…………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图，ΔABC 为锐角三角形，$AB < AC$，M 为 BC 边的中点，点 D 和 E 分别为 ΔABC 的外接圆 $\overset{\frown}{BAC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，F 为 ΔABC 的内切圆在 AB 边上的切点，G 为 AE 与 BC 的交点，N 在线段 EF 上，满足 $NB \perp AB$.

证明：若 $BN = EM$，则 $DF \perp FG$.**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：由条件知，DE 为 ΔABC 外接圆的直径，$DE \perp BC$ 于 M，$AE \perp AD$.

记 I 为 ΔABC 的内心，则 I 在 AE 上，$IF \perp AB$.

由 $NB \perp AB$ 可知

$$\angle NBE = \angle ABE - \angle ABN = (180^\circ - \angle ADE) - 90^\circ$$
$$= 90^\circ - \angle ADE = \angle MEI . \quad ①$$

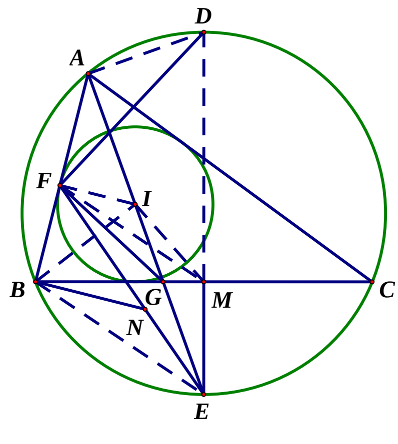
……………………10 分

又根据内心的性质，有

$$\angle EBI = \angle EBC + \angle CBI = \angle EAC + \angle ABI = \angle EAB + \angle ABI = \angle EIB ,$$

从而 $BE = EI$.

结合 $BN = EM$ 及①知，$\Delta NBE \cong \Delta MEI$. ……………………20 分



于是 $\angle EMI = \angle BNE = 90^\circ + \angle BFE = 180^\circ - \angle EFI$，故 E, F, I, M 四点共圆.

进而可知 $\angle AFM = 90^\circ + \angle IFM = 90^\circ + \angle IEM = \angle AGM$，从而 A, F, G, M 四点共圆. ……………………30 分

再由 $\angle DAG = \angle DMG = 90^\circ$ 知，A, G, M, D 四点共圆，所以 A, F, G, M, D 五点共圆. 从而 $\angle DFG = \angle DAG = 90^\circ$，即 $DF \perp FG$. ……………………40 分

三、（本题满分 50 分）设n, k, m是正整数，满足$k \ge 2$，且$n \le m < \dfrac{2k-1}{k}n$．设$A$是$\{1, 2, \cdots, m\}$的$n$元子集．证明：区间$\left(0, \dfrac{n}{k-1}\right)$中的每个整数均可表示为$a-a'$，其中$a, a' \in A$．

证明: 用反证法. 假设存在整数$x \in \left(0, \dfrac{n}{k-1}\right)$不可表示为$a-a'$，$a, a' \in A$. 作带余除法$m = xq + r$，其中$0 \le r < x$．将$1, 2, \cdots, m$按模$x$的同余类划分成$x$个公差为$x$的等差数列，其中$r$个等差数列有$q+1$项，$x-r$个等差数列有$q$项．由于$A$中没有两数之差为$x$，故$A$不能包含以$x$为公差的等差数列的相邻两项．从而

$$n = |A| \le r\left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil + (x-r)\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil = \begin{cases} x \cdot \dfrac{q+1}{2}, & 2 \nmid q, \\ x \cdot \dfrac{q}{2} + r, & 2 \mid q, \end{cases} \quad ①$$

这里$\lceil \alpha \rceil$表示不小于α的最小整数.　　　　　　　　　　…………………20 分

由条件，我们有

$$n > \frac{k}{2k-1} m = \frac{k}{2k-1}(xq+r). \quad ②$$

又$x \in \left(0, \dfrac{n}{k-1}\right)$，故

$$n > (k-1)x. \quad ③$$

情形一：q是奇数．则由①知，

$$n \le x \cdot \frac{q+1}{2}. \quad ④$$

结合②，④可知，$x \cdot \dfrac{q+1}{2} \ge n > \dfrac{k}{2k-1}(xq+r) \ge \dfrac{k}{2k-1}xq$，从而$q < 2k-1$．再由$q$是奇数可知，$q \le 2k-3$，于是

$$n \le x \cdot \frac{q+1}{2} \le (k-1)x,$$

与③矛盾.

情形二：q是偶数．则由①知，

$$n \le x \cdot \frac{q}{2} + r. \quad ⑤$$

结合②，⑤可知，$x \cdot \dfrac{q}{2} + r \ge n > \dfrac{k}{2k-1}(xq+r)$，从而$\dfrac{xq}{2(2k-1)} < \dfrac{k-1}{2k-1} r < \dfrac{(k-1)x}{2k-1}$，故$q < 2(k-1)$．再由$q$是偶数可知，$q \le 2k-4$，于是

$$n \le x \cdot \frac{q}{2} + r \le (k-2)x + r < (k-1)x,$$

与③矛盾.

综上可知，反证法假设不成立，结论获证.　　　　　　　　　…………………50 分

四、(本题满分 50 分) 数列$\{a_n\}$定义如下：a_1是任意正整数，对整数$n\ge 1$，a_{n+1}是与$\sum_{i=1}^{n} a_i$互素，且不等于$a_1,\cdots,a_n$的最小正整数．证明：每个正整数均在数列$\{a_n\}$中出现．

证明：显然$a_1=1$或$a_2=1$．下面考虑整数$m>1$，设m有k个不同素因子，我们对k归纳证明m在$\{a_n\}$中出现．记$S_n=a_1+\cdots+a_n$，$n\ge 1$．

$k=1$时，m是素数方幂，设$m=p^{\alpha}$，其中$\alpha>0$，p是素数．假设m不在$\{a_n\}$中出现．由于$\{a_n\}$各项互不相同，因此存在正整数N，当$n\ge N$时，都有$a_n>p^{\alpha}$．若对某个$n\ge N$，$p\nmid S_n$，那么p^{α}与S_n互素，又$a_1,\cdots,a_n$中无一项是p^{α}，故由数列定义知$a_{n+1}\le p^{\alpha}$，但是$a_{n+1}>p^{\alpha}$，矛盾！

因此对每个$n\ge N$，都有$p\,|\,S_n$．但由$p\,|\,S_{n+1}$及$p\,|\,S_n$知$p\,|\,a_{n+1}$，从而a_{n+1}与S_n不互素，这与a_{n+1}的定义矛盾． ……………………10 分

假设$k\ge 2$，且结论对$k-1$成立．设m的标准分解为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$．假设$m$不在$\{a_n\}$中出现，于是存在正整数$N'$，当$n\ge N'$时，都有$a_n>m$．取充分大的正整数$\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$，使得

$$M=p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}>\max_{1\le n\le N'} a_n .$$

我们证明，对$n\ge N'$，有$a_{n+1}\ne M$． ……………………20 分

对任意$n\ge N'$，若S_n与$p_1p_2\cdots p_k$互素，则m与S_n互素，又m在$a_1,\cdots,a_n$中均未出现，而$a_{n+1}>m$，这与数列的定义矛盾．因此我们推出：

$$\text{对任意}\ n\ge N',\ S_n\ \text{与}\ p_1p_2\cdots p_k\ \text{不互素}. \qquad (*)$$

情形 1．若存在$i\,(1\le i\le k-1)$，使得$p_i\,|\,S_n$，因$(a_{n+1},S_n)=1$，故$p_i\nmid a_{n+1}$，从而$a_{n+1}\ne M$（因$p_i\,|\,M$）． ……………………30 分

情形 2．若对每个$i\,(1\le i\le k-1)$，均有$p_i\nmid S_n$，则由$(*)$知必有$p_k\,|\,S_n$．于是$p_k\nmid a_{n+1}$，进而$p_k\nmid S_n+a_{n+1}$，即$p_k\nmid S_{n+1}$．故由$(*)$知，存在$i_0\,(1\le i_0\le k-1)$，使得$p_{i_0}\,|\,S_{n+1}$，再由$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$及前面的假设$p_i\nmid S_n\,(1\le i\le k-1)$，可知$p_{i_0}\nmid a_{n+1}$，故$a_{n+1}\ne M$． ……………………40 分

因此对$n\ge N'+1$，均有$a_n\ne M$，而$M>\max_{1\le i\le N'} a_n$，故$M$不在$\{a_n\}$中出现，这与归纳假设矛盾．因此，若$m$有$k$个不同素因子，则$m$一定在$\{a_n\}$中出现．

由数学归纳法知，所有正整数均在$\{a_n\}$中出现． ……………………50 分