2018 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1．设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,99\}$，$B=\{2x\mid x\in A\}$，$C=\{x\mid 2x\in A\}$，则 $B\cap C$ 的元素个数为____________.

答案：24.

解：由条件知，$B\cap C=\{2,4,6,\cdots,198\}\cap\left\{\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2,\cdots,\dfrac{99}{2}\right\}=\{2,4,6,\cdots,48\}$，故 $B\cap C$ 的元素个数为 24.

2．设点 P 到平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$，点 Q 在平面 α 上，使得直线 PQ 与 α 所成角不小于 30° 且不大于 60°，则这样的点 Q 所构成的区域的面积为____________.

答案：8π.

解：设点 P 在平面 α 上的射影为 O．由条件知，$\dfrac{OP}{OQ}=\tan\angle OQP\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，即 $OQ\in[1,3]$，故所求的区域面积为 $\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 1^2=8\pi$.

3．将 $1,2,3,4,5,6$ 随机排成一行，记为 a,b,c,d,e,f，则 $abc+def$ 是偶数的概率为____________.

答案：$\dfrac{9}{10}$.

解：先考虑 $abc+def$ 为奇数的情况，此时 abc,def 一奇一偶，若 abc 为奇数，则 a,b,c 为 $1,3,5$ 的排列，进而 d,e,f 为 $2,4,6$ 的排列，这样有 $3!\times 3!=36$ 种情况，由对称性可知，使 $abc+def$ 为奇数的情况数为 $36\times 2=72$ 种．从而 $abc+def$ 为偶数的概率为 $1-\dfrac{72}{6!}=1-\dfrac{72}{720}=\dfrac{9}{10}$.

4．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，椭圆 C 的弦 ST 与 UV 分别平行于 x 轴与 y 轴，且相交于点 P．已知线段 PU,PS,PV,PT 的长分别为 $1,2,3,6$，则 ΔPF_1F_2 的面积为____________.

答案：$\sqrt{15}$.

解：由对称性，不妨设 $P(x_P,y_P)$ 在第一象限，则由条件知

$$x_P=\frac{1}{2}\left(|PT|-|PS|\right)=2,\ y_P=\frac{1}{2}\left(|PV|-|PU|\right)=1,$$

即 $P(2,1)$．进而由 $x_P=|PU|=1, |PS|=2$ 得 $U(2,2), S(4,1)$，代入椭圆 C 的方程知 $4\cdot\frac{1}{a^2}+4\cdot\frac{1}{b^2}=16\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $a^2=20, b^2=5$．

从而 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_P|=\sqrt{a^2-b^2}\cdot y_P=\sqrt{15}$．

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的偶函数，在区间 $[0,1]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi)=1,\ f(2\pi)=2$，则不等式组 $\begin{cases}1\le x\le 2,\\ 1\le f(x)\le 2\end{cases}$ 的解集为____________.

答案：$[\pi-2,\ 8-2\pi]$.

解：由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[0,1]$ 上严格递减知，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上严格递增，再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知，$[1,2]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间.

注意到
$$f(\pi-2)=f(\pi)=1,\ f(8-2\pi)=f(-2\pi)=f(2\pi)=2,$$
所以
$$1\le f(x)\le 2 \Leftrightarrow f(\pi-2)\le f(x)\le f(8-2\pi),$$
而 $1<\pi-2<8-2\pi<2$，故原不等式组成立当且仅当 $x\in[\pi-2,\ 8-2\pi]$．

6. 设复数 z 满足 $|z|=1$，使得关于 x 的方程 $zx^2+2\bar{z}x+2=0$ 有实根，则这样的复数 z 的和为____________.

答案：$-\frac{3}{2}$．

解：设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R}, a^2+b^2=1)$．

将原方程改为 $(a+b\mathrm{i})x^2+2(a-b\mathrm{i})x+2=0$，分离实部与虚部后等价于
$$ax^2+2ax+2=0, \qquad ①$$
$$bx^2-2bx=0. \qquad ②$$

若 $b=0$，则 $a^2=1$，但当 $a=1$ 时，①无实数解，从而 $a=-1$，此时存在实数 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 满足①、②，故 $z=-1$ 满足条件.

若 $b\ne 0$，则由②知 $x\in\{0,2\}$，但显然 $x=0$ 不满足①，故只能是 $x=2$，代入①解得 $a=-\frac{1}{4}$，进而 $b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，相应有 $z=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}$．

综上，满足条件的所有复数 z 之和为 $-1+\frac{-1+\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}+\frac{-1-\sqrt{15}\,\mathrm{i}}{4}=-\frac{3}{2}$．

7. 设 O 为 ΔABC 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，则 $\sin\angle BAC$ 的值为________.

答案：$\frac{\sqrt{10}}{4}$．

解：不失一般性，设 ΔABC 的外接圆半径 $R=2$．由条件知，
$$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}, \qquad ①$$
故 $AC=\frac{1}{2}BO=1$．

取 AC 的中点 M ，则 $OM \perp AC$ ，结合①知 $OM \perp BO$ ，且 B 与 A 位于直线 OM 的同侧．于是 $\cos\angle BOC = \cos(90^\circ + \angle MOC) = -\sin\angle MOC = -\dfrac{MC}{OC} = -\dfrac{1}{4}$.

在 ΔBOC 中，由余弦定理得

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC} = \sqrt{10}\ ,$$

进而在 ΔABC 中，由正弦定理得 $\sin\angle BAC = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

8．设整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 满足 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$ ，且

$$a_{i+1} \in \{1 + a_i, 2 + a_i\},\ i = 1, 2, \cdots, 9\ ,$$

则这样的数列的个数为____________.

答案： 80 .

解： 设 $b_i = a_{i+1} - a_i \in \{1, 2\}(i = 1, 2, \cdots, 9)$ ，则有

$$2a_1 = a_{10} - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_9\ , \qquad ①$$

$$b_2 + b_3 + b_4 = a_5 - a_2 = a_8 - a_5 = b_5 + b_6 + b_7\ . \qquad ②$$

用 t 表示 b_2, b_3, b_4 中值为 2 的项数．由②知， t 也是 b_5, b_6, b_7 中值为 2 的项数，其中 $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. 因此 $b_2, b_3, \cdots, b_7$ 的取法数为 $(C_3^0)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^3)^2 = 20$.

取定 $b_2, b_3, \cdots, b_7$ 后，任意指定 b_8, b_9 的值，有 $2^2 = 4$ 种方式.

最后由①知，应取 $b_1 \in \{1, 2\}$ 使得 $b_1 + b_2 + \cdots + b_9$ 为偶数，这样的 b_1 的取法是唯一的，并且确定了整数 a_1 的值，进而数列 $b_1, b_2, \cdots, b_9$ 唯一对应一个满足条件的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$.

综上可知，满足条件的数列的个数为 $20 \times 4 = 80$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（**本题满分 16 分**）已知定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |\log_3 x - 1|, & 0 < x \le 9, \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 9. \end{cases}$$

设 a, b, c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，求 abc 的取值范围.

解：不妨假设 $a < b < c$. 由于 $f(x)$ 在 $(0, 3]$ 上严格递减，在 $[3, 9]$ 上严格递增，在 $[9, +\infty)$ 上严格递减，且 $f(3) = 0,\ f(9) = 1$，故结合图像可知

$$a \in (0, 3)\ ，\quad b \in (3, 9)\ ，\quad c \in (9, +\infty)\ ,$$

并且 $f(a) = f(b) = f(c) \in (0, 1)$. …………………4 分

由 $f(a) = f(b)$ 得

$$1 - \log_3 a = \log_3 b - 1\ ,$$

即 $\log_3 a + \log_3 b = 2$ ，因此 $ab = 3^2 = 9$ ．于是 $abc = 9c$. …………………8 分

又

$$0<f(c)=4-\sqrt{c}<1,$$ ……………………12 分

故 $c\in(9,16)$．进而 $abc=9c\in(81,144)$．

所以，abc 的取值范围是 $(81,144)$．……………………16 分

注：对任意的 $r\in(81,144)$，取 $c_0=\frac{r}{9}$，则 $c_0\in(9,16)$，从而 $f(c_0)\in(0,1)$．过点 $(c_0, f(c_0))$ 作平行于 x 轴的直线 l，则 l 与 $f(x)$ 的图像另有两个交点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$（其中 $a\in(0,3), b\in(3,9)$），满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，并且 $ab=9$，从而 $abc=r$．

10．**（本题满分 20 分）**已知实数列 $a_1, a_2, a_3,\cdots$ 满足：对任意正整数 n，有 $a_n(2S_n-a_n)=1$，其中 S_n 表示数列的前 n 项和．证明：

(1) 对任意正整数 n，有 $a_n<2\sqrt{n}$；

(2) 对任意正整数 n，有 $a_na_{n+1}<1$．

证明：(1) 约定 $S_0=0$．由条件知，对任意正整数 n，有

$$1=a_n(2S_n-a_n)=(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=S_n^2-S_{n-1}^2,$$

从而 $S_n^2=n+S_0^2=n$，即 $S_n=\pm\sqrt{n}$（当 $n=0$ 时亦成立）．……………………5 分

显然，$a_n=S_n-S_{n-1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$．……………………10 分

(2) 仅需考虑 a_n, a_{n+1} 同号的情况．不失一般性，可设 a_n, a_{n+1} 均为正（否则将数列各项同时变为相反数，仍满足条件），则 $S_{n+1}>S_n>S_{n-1}>-\sqrt{n}$，故必有

$$S_n=\sqrt{n},\ S_{n+1}=\sqrt{n+1},$$

此时

$$a_n=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}, a_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

从而

$$a_na_{n+1}<(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1.$$

……………………20 分

11．**（本题满分 20 分）**在平面直角坐标系 xOy 中，设 AB 是抛物线 $y^2=4x$ 的过点 $F(1,0)$ 的弦，ΔAOB 的外接圆交抛物线于点 P（不同于点 O, A, B）．若 PF 平分 $\angle APB$，求 $|PF|$ 的所有可能值．

解：设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), P\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right)$，由条件知 y_1, y_2, y_3 两两不等且非零．

设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，与抛物线方程联立可得 $y^2-4ty-4=0$，故

$$y_1y_2=-4. \quad ①$$

注意到 ΔAOB 的外接圆过点 O，可设该圆的方程为 $x^2+y^2+dx+ey=0$，与 $x=\frac{y^2}{4}$ 联立得，$\frac{y^4}{16}+\left(1+\frac{d}{4}\right)y^2+ey=0$．该四次方程有 $y=y_1, y_2, y_3, 0$ 这四个不

同的实根，故由韦达定理得 $y_1+y_2+y_3+0=0$，从而

$$y_3=-(y_1+y_2). \qquad ②$$

…………………5 分

因 PF 平分 $\angle APB$，由角平分线定理知，$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}$，结合①、②，有

$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{|PA|^2}{|PB|^2}=\frac{\left(\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}\right)^2+(y_3-y_1)^2}{\left(\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}\right)^2+(y_3-y_2)^2}=\frac{\left((y_1+y_2)^2-y_1^2\right)^2+16(2y_1+y_2)^2}{\left((y_1+y_2)^2-y_2^2\right)^2+16(2y_2+y_1)^2}$$

$$=\frac{(y_2^2-8)^2+16(4y_1^2+y_2^2-16)}{(y_1^2-8)^2+16(4y_2^2+y_1^2-16)}=\frac{y_2^4+64y_1^2-192}{y_1^4+64y_2^2-192},$$ …………………10 分

即 $y_1^6+64y_1^2y_2^2-192y_1^2=y_2^6+64y_2^2y_1^2-192y_2^2$，故

$$(y_1^2-y_2^2)(y_1^4+y_1^2y_2^2+y_2^4-192)=0.$$

当 $y_1^2=y_2^2$ 时，$y_2=-y_1$，故 $y_3=0$，此时 P 与 O 重合，与条件不符.

当 $y_1^4+y_1^2y_2^2+y_2^4-192=0$ 时，注意到①，有

$$(y_1^2+y_2^2)^2=192+(y_1y_2)^2=208.$$ …………………15 分

因 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}>8=|2y_1y_2|$，故满足①以及 $y_1^2+y_2^2=4\sqrt{13}$ 的实数 y_1,y_2 存在，对应可得满足条件的点 A,B．此时，结合①、②知

$$|PF|=\frac{y_3^2}{4}+1=\frac{(y_1+y_2)^2+4}{4}=\frac{y_1^2+y_2^2-4}{4}=\frac{\sqrt{208}-4}{4}=\sqrt{13}-1.$$

…………………20 分