2019年全国高中数学联合竞赛一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 已知正实数a满足$a^a=(9a)^{8a}$，则$\log_a(3a)$的值为__________.

2. 若实数集合$\{1,2,3,x\}$的最大元素与最小元素之差等于该集合的所有元素之和，则x的值为__________.

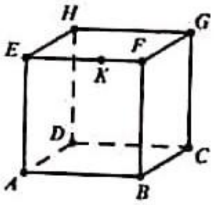
3. 平面直角坐标系中，$\vec{e}$是单位向量，向量$\vec{a}$满足$\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，且$|\vec{a}|^2\le 5|\vec{a}+t\vec{e}|$对任意实数$t$成立，则$|\vec{a}|$的取值范围是__________.

4. 设A,B为椭圆Γ的长轴顶点，E,F为Γ的两个焦点，$|AB|=4$，$|AF|=2+\sqrt{3}$，P为Γ上一点，满足$|PE|\cdot|PF|=2$，则ΔPEF的面积为________.

5. 在$1,2,3,\cdots,10$中随机选出一个数a，在$-1,-2,-3,\cdots,-10$中随机选出一个数b，则a^2+b被3整除的概率为__________.

6. 对任意闭区间I，用M_I表示函数$y=\sin x$在I上的最大值．若正数a满足$M_{[0,a]}=2M_{[a,2a]}$，则a的值为__________.

7. 如图，正方体$ABCD-EFGH$的一个截面经过顶点A,C及棱EF上一点K，且将正方体分成体积比为$3:1$的两部分，则$\dfrac{EK}{KF}$的值为__________.



8. 将6个数$2,0,1,9,20,19$按任意次序排成一行，拼成一个8位数（首位不为0），则产生的不同的8位数的个数为__________.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）在ΔABC中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$．若b是a与c的等比中项，且$\sin A$是$\sin(B-A)$与$\sin C$的等差中项，求$\cos B$的值.

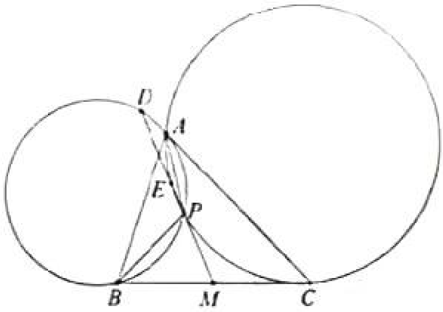
10.（本题满分20分）在平面直角坐标系xOy中，圆Ω与抛物线$\Gamma: y^2=4x$恰有一个公共点，且圆Ω与x轴相切于Γ的焦点F．求圆Ω的半径.

11.（本题满分20分）称一个复数数列$\{z_n\}$为"有趣的"，若$|z_1|=1$，且对任意正整数n，均有$4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．求最大的常数$C$，使得对一切有趣的数列$\{z_n\}$及任意正整数$m$，均有$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\ge C$.

2019年全国高中数学联合竞赛加试试题（A卷）

一、（本题满分40分） 如图，在锐角ΔABC中，M是BC边的中点．点P在ΔABC内，使得AP平分$\angle BAC$．直线MP与$\Delta ABP, \Delta ACP$的外接圆分别相交于不同于点P的两点D, E．证明：若$DE = MP$，则$BC = 2BP$．

（答题时请将图画在答卷纸上）



二、（本题满分40分） 设整数$a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$满足$1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2019} = 99$．

记$f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + \cdots + a_{2017} a_{2019})$．

求f的最小值f_0．并确定使$f = f_0$成立的数组$(a_1, a_2, \cdots, a_{2019})$的个数．

三、（本题满分50分） 设m为整数，$|m| \geq 2$．整数数列$a_1, a_2, \cdots$满足：a_1, a_2不全为零，且对任意正整数n，均有$a_{n+2} = a_{n+1} - m a_n$．

证明：若存在整数$r, s\ (r > s \geq 2)$使得$a_r = a_s = a_1$，则$r - s \geq |m|$．

四、（本题满分50分） 设V是空间中2019个点构成的集合，其中任意四点不共面．某些点之间连有线段，记E为这些线段构成的集合．试求最小的正整数n，满足条件：若E至少有n个元素，则E一定含有908个二元子集，其中每个二元子集中的两条线段有公共端点，且任意两个二元子集的交为空集．