第33届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考解答与评分标准

一、选择题.

本题共5小题,每小题6分.在每小题给出的4个选项中,有的小题只有一项符合题意,有的小题有多项符合题意.把符合题意的选项前面的英文字母写在每小题后面的方括号内.全部选对的得6分,选对但不全的得3分,有选错或不答的得0分.

1.[D];　　2.[C];　　3.[A];　　4.[AC];　　5.[C]

二、填空题.把答案填在题中的横线上.只要给出结果,不需写出求得结果的过程.

6.(10分)

答案: 6.0×10^{30} (5分); 5.4×10^{47} (5分)

7.(10分)

答案: 6 (5分); 2.0, 4.0, 8.0, 10, 14, 16 (5分)

8.(10分)

答案: L_1+L_2+2M (5分); L_1+L_2-2M (5分)

9.(10分)

答案: $2\pi\sqrt{\dfrac{LR^2}{MG}}$ (5分); $2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{MG}}$ (5分)

10.(10分)

答案: 2530 (5分,得2529的也给这5分);

35.29 (5分,得35.30的也给这5分)

三. 计算题.

计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤,只写出最后结果的不能得分. 有数值计算的,答案中必须明确写出数值和单位.

11.(20分)

(1)记运动员1踢出球的时刻为零时刻。设运动员2沿着与A、B连线夹角为θ的方向运动,球在时刻t被运动员2拦截。令球被拦截时球到A点和运动员2到出发点的距离分别为s_1和s_2,则

$$s_1=ut \qquad ①$$

$$s_2=vt \qquad ②$$

由几何关系有

$$s_1-s_2\cos\theta=\frac{s}{2} \qquad ③$$

$$s_2\sin\theta=l \qquad ④$$

从③④式消去θ,并利用①②式得

$$l^2+(ut-\frac{s}{2})^2=(vt)^2 \qquad ⑤$$

此即

$$(u^2-v^2)t^2-ust+\left(l^2+\frac{s^2}{4}\right)=0 \qquad ⑥$$

这是关于 t 的一元二次方程。解为

$$t=t_{\pm}=\frac{us\pm\sqrt{u^2s^2-4(u^2-v^2)\left(l^2+\frac{s^2}{4}\right)}}{2(u^2-v^2)}$$

$$=\frac{us\pm\sqrt{4(v^2-u^2)l^2+v^2s^2}}{2(u^2-v^2)} \qquad ⑦$$

由①②⑦式得

$$s_1=s_{1\pm}=u\frac{us\pm\sqrt{4(v^2-u^2)l^2+v^2s^2}}{2(u^2-v^2)} \qquad ⑧$$

$$s_2=s_{2\pm}=v\frac{us\pm\sqrt{4(v^2-u^2)l^2+v^2s^2}}{2(u^2-v^2)} \qquad ⑨$$

由④⑨式得

$$\theta=\theta_{\pm}=\arcsin\frac{2l[us\mp\sqrt{4(v^2-u^2)l^2+v^2s^2}]}{v(s^2+4l^2)} \qquad ⑩$$

(2)方程⑥有实数解的条件是

$$4(v^2-u^2)l^2+v^2s^2\geq 0 \qquad ⑪$$

或

$$v^2\left(1+\frac{s^2}{4l^2}\right)\geq u^2 \qquad ⑫$$

依题意有

$$t>0 \qquad ⑬$$

条件⑬要求

$$u>v,\text{当 } t=t_+ \qquad ⑭$$

$$u\neq v,\text{当 } t=t_- \qquad ⑮$$

值得注意的是,利用⑩式条件

$$-1\leq\sin\theta_{\pm}\leq 1$$

可写成

$$(s^2+4l^2)\left(v\frac{s}{2l}-u\right)^2\geq 0$$

它是自动满足的。综上所述,⑫⑭⑮式即运动员 2 能拦截到球的条件。

当⑫式中大于号成立时,运动员 2 可在两处拦截到球;当⑫式中等号成立时,

$$u=v\sqrt{1+\frac{s^2}{4l^2}}>v \qquad ⑯$$

⑦⑧⑨⑩式成为

$$t=\frac{2l^2}{vs}\sqrt{1+\frac{s^2}{4l^2}} \qquad ⑰$$

$$s_1=\frac{s}{2}\left(1+\frac{4l^2}{s^2}\right) \qquad ⑱$$

$$s_2=l\sqrt{1+\frac{4l^2}{s^2}} \qquad ⑲$$

$$\theta=\arcsin\frac{s}{\sqrt{s^2+4l^2}} \qquad ⑳$$

运动员 2 只能在一处拦截到球。

评分参考：第（1）问 10 分，①②③④⑥式各 1 分，⑦式 2 分，⑧⑨⑩式各 1 分；第（2）问 10 分，⑪或⑫式 2 分，⑭⑮式各 1 分，⑯式 2 分，⑰⑱⑲⑳式各 1 分。

12.（20 分）

（1）由于星体是均匀的球体，且山体的高度 h 远小于球体的半径 R。按题设模型有

$$mgh_{\max}=mL \qquad ①$$

式中，$h_{\max}$是由同样物质构成的山体高度上限，m 是会熔化掉的那一小块物质的质量。在星球表面由引力产生的加速度大小为

$$g=\frac{GM}{R^2} \qquad ②$$

式中 M 是星体的质量。根据本题假设有

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho \qquad ③$$

由①②③式得，半径为 R 的星球上的山体的高度的上限为

$$h_{\max}=\frac{3}{4\pi G}\frac{L}{\rho R} \qquad ④$$

故该星球上山体的高度应满足

$$h\le\frac{3}{4\pi G}\frac{L}{\rho R} \qquad ⑤$$

（2）按题设要求有

$$h_{\max}\le\frac{R}{10} \qquad ⑥$$

由④⑥式得

$$R\ge\sqrt{\frac{15}{2\pi}\frac{L}{G\rho}} \qquad ⑦$$

（3）由⑤式得

$$\frac{h}{R}\le\frac{3L}{4\pi\rho GR^2} \qquad ⑧$$

代入题给数据得

$$\frac{h}{R}\le\frac{3}{4\pi 3.34\times10^3}\frac{2.4\times10^5}{6.67\times10^{-11}\times1.7^2\times10^{12}}=0.09 \qquad ⑨$$

评分参考：第（1）问10分，①②③④⑤式各2分；第（2）问5分，⑥式2分，⑦式3分；第（3）问5分，⑧式2分，⑨式3分。

13.（20分）

（1）总电容等效为三个电容器，1、2串联，再与3并联。其中电容器1的极板面积为 $S/2$，间距设为 x；电容器2的极板面积为 $S/2$，间距为 $d-x-t$；电容器3的极板面积为 $S/2$，间距为 d。

由平行板电容器电容公式，三个电容的值分别为

$$C_1=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{2x},\quad C_2=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{2(d-x-t)},\quad C_3=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{2d} \qquad ①$$

电容器1和2串联后的电容 C_{12} 满足

$$\frac{1}{C_{12}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \qquad ②$$

由①②式得

$$C_{12}=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{2(d-t)} \qquad ③$$

总电容的值 C 满足

$$C=C_{12}+C_3 \qquad ④$$

由①③④式得

$$C=\frac{S}{8\pi k}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{d-t}\right) \qquad ⑤$$

（2）设电容器1和3极板上的电荷量分别为 Q_{12} 和 Q_3，则

$$\frac{Q_{12}}{Q_3}=\frac{C_{12}}{C_3}=\frac{d}{d-t} \qquad ⑥$$

极板上总电荷量为

$$Q=Q_{12}+Q_3 \qquad ⑦$$

联立⑥⑦式得

$$Q_{12}=\frac{d}{2d-t}Q,\quad Q_3=\frac{d-t}{2d-t}Q \qquad ⑧$$

由于 C_1、C_2 串联，所以 Q_{12} 即等于金属片上表面所带的电量值，电性为负。

（3）设电容器 C_1 两极板间的电压为 U_1，有

$$U_1=\frac{Q_{12}}{C_1} \qquad ⑨$$

以 E_1 表示 C_1 中的场强，有

$$E_1=\frac{U_1}{x} \qquad ⑩$$

由①⑧⑨⑩各式得

$$E_1=\frac{8\pi k}{S}\frac{Qd}{2d-t} \qquad ⑪$$

同理可得电容器 C_2 和 C_3 中的场强

$$E_2=E_1=\frac{8\pi k}{S}\frac{Qd}{2d-t} \qquad ⑫$$

$$E_3 = \frac{8\pi k}{S}\frac{Q(d-t)}{2d-t} \qquad ⑬$$

（4）插入金属片前，总电容为

$$C_0 = \frac{S}{4\pi kd} \qquad ⑭$$

所储存的能量为

$$E_{0能量} = \frac{Q^2}{2C_0} \qquad ⑮$$

插入金属片后，总电容变为 C，总电量不变。储存的能量变为

$$E_{能量} = \frac{Q^2}{2C} \qquad ⑯$$

插入过程外力做功

$$W = E_{能量} - E_{0能量} \qquad ⑰$$

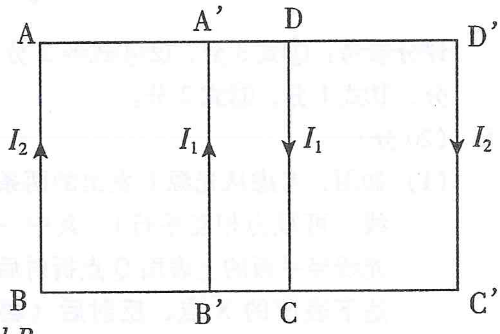
由⑤⑭⑮⑯⑰式得

$$W = -\frac{2\pi k}{S}\frac{Q^2 dt}{2d-t} \qquad ⑱$$

负值表示插入过程中，外力方向与位移方向相反，即电容器对金属片有吸引力。

评分参考：第（1）问 6 分，①式 3 分；②④⑤式各 1 分；第（2）问 4 分，⑥⑦式各 1 分，⑧式 2 分；第（3）问 5 分，⑨⑩⑪⑫⑬式各 1 分；第（4）问 5 分，⑭⑮⑯⑰⑱式各 1 分。

14.（20 分）在撤去磁场（磁感应强度从 B_0 变至零）的时间内，框内产生感应电流。考虑左框构成的闭合回路 ABCD，设在时刻 t 磁场的磁感应强度大小为 $B(t)$，正方形回路的感应电动势为



$$\varepsilon_1 = -a^2\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \qquad ①$$

由欧姆定律有

$$\varepsilon_1 = \frac{a+2(a-l)}{a}RI_2 + \frac{2l}{a}\frac{R}{2}(I_1+I_2) + RI_1 \qquad ②$$

式中，I_2 和 I_1 分别是时刻 t 流经外框边 BA 和内框边 DC 的电流（如图）。联立①②式有

$$(1+\frac{l}{a})RI_1 + (3-\frac{l}{a})RI_2 = -a^2\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \qquad ③$$

考虑由两框内边与上下交叠部分围成的闭合回路 A′B′CD，感应电动势为

$$\varepsilon_2 = -S\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \qquad ④$$

式中 S 为闭合回路 A′B′CD 的面积

$$S = la \qquad ⑤$$

由欧姆定律有

$$\varepsilon_2 = RI_1 + \frac{2l}{a}\frac{R}{2}(I_1+I_2) + RI_1 \qquad ⑥$$

联立④⑤⑥式得

$$\left(2+\frac{l}{a}\right)RI_1+\frac{l}{a}RI_2=-la\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \quad ⑦$$

联立③⑦式得

$$I_1=-\frac{(2a-l)l}{3a^2-l^2}\frac{a^2}{2R}\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \quad ⑧$$

$$I_2=-\frac{(2a^2-l^2)}{3a^2-l^2}\frac{a^2}{2R}\frac{\triangle B(t)}{\triangle t} \quad ⑨$$

在从 t 到 $t+\triangle t$ 的时间间隔内，流过框边重叠部分 A D 的横截面的电荷量为

$$\triangle Q=(I_1+I_2)\triangle t \quad ⑩$$

由⑨⑩式得

$$\triangle Q=-\frac{(a^2+al-l^2)\ a^2}{(3a^2-l^2)\ R}\triangle B(t) \quad ⑪$$

在撤去磁场（磁感应强度从 B_0 变至零）的时间内，流过框边重叠部分 A′D 的横截面的总电荷量为

$$Q-0=-\frac{(a^2+al-l^2)\ a^2}{(3a^2-l^2)\ R}(0-B_0) \quad ⑫$$

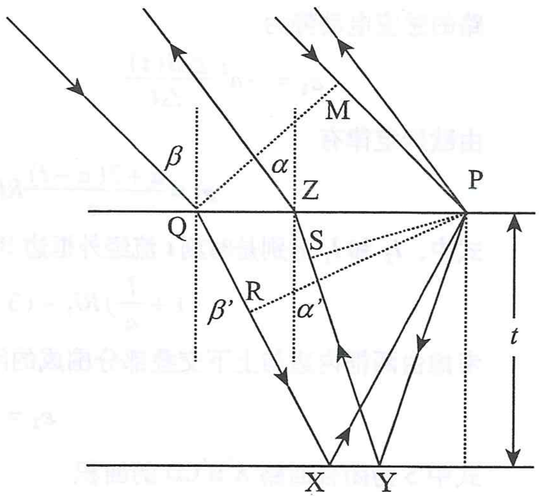
此即

$$Q=\frac{a^2+al-l^2}{3a^2-l^2}\frac{B_0a^2}{R} \quad ⑬$$

评分参考：①式 3 分，②④式各 2 分，⑤式 1 分，⑥式 2 分，⑧⑨式各 2 分，⑩式 3 分，⑪式 1 分，⑬式 2 分。

15. (20 分)

(1) 如图，考虑从光源 L 发出的两条光线（可视为相互平行）：其中一条光线经平板的上表面 Q 点折射后到达下表面的 X 点，反射后（再折射）到达微粒 P，经（漫）反射后射向 O 点；另一条光线经微粒 P（漫）反射后，折射入玻璃到达 Y 点，反射后到达 Z 点，再折射后射向 O 点；两条射向 O 点的光线也可视为相互平行。作 QM 垂直于从 L 发出的两条光线，分别与之交于 Q、M 点；作 PR 垂直于 QX 并与之交于 R 点；作 PS 垂直于在 Y 点反射后的光线并与之交于 S 点。LQ 和 LM 的长度相等，MP 和 QR 是等光程的，PO 和 SO 也是等光程的。因此，O 点接受到的两条光线的光程差为



$$m\frac{\lambda}{n}=|\mathrm{RXP}-\mathrm{SYP}| \quad ①$$

式中，$\mathrm{RXP}=\mathrm{RX}+\mathrm{XP}$，$\mathrm{SYP}=\mathrm{SY}+\mathrm{YP}$，$m$ 是干涉环纹的级数。设在反射镜上的 X 点发生反射的光线的入射角和反射角分别为 β'' 和 β'''（图中未标出）。由于平板玻璃上、下两表面平行有

$$\beta'=\beta'' \quad ②$$

按反射定律有

$$\beta''=\beta''' \quad ③$$

据题设，P 点在 N 点附近，且 β（α）很小，因而 β'（α'）也很小；由几何关系得

$$\mathrm{RXP}=2t\cos\beta'-\mathrm{QP}\sin\beta'\approx 2t\cos\beta' \quad ④$$

同理

$$\mathrm{SYP}=2t\cos\alpha'-\mathrm{ZP}\sin\alpha'\approx 2t\cos\alpha' \quad ⑤$$

由①④⑤式得

$$m\frac{\lambda}{n}=2t\,|\cos\alpha'-\cos\beta'| \quad ⑦$$

按折射定律有

$$\sin\beta=n\sin\beta' \quad ⑧$$

$$\sin\alpha=n\sin\alpha' \quad ⑨$$

由⑧式和题给近似（β 很小）得

$$\cos\beta'=\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{n^2}}=1-\frac{\beta^2}{2n^2} \quad ⑩$$

同理有

$$\cos\alpha'=\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}=1-\frac{\alpha^2}{2n^2} \quad ⑪$$

由⑦⑩⑪式得

$$m\frac{\lambda}{n}=\frac{t}{n^2}\left(\beta^2-\alpha^2\right) \quad ⑫$$

注意到 $\alpha=\frac{r}{b}$ 和 $\beta=\frac{r}{a}$，由⑫式解得

$$r=ba\sqrt{\frac{mn\lambda}{t\left(b^2-a^2\right)}} \quad ⑬$$

（2）利用题给数据（$n=1.63$，$a=0.0495\mathrm{m}$，$b=0.245\mathrm{m}$，$t=1.1\times10^{-5}\mathrm{m}$，$\lambda=680\mathrm{nm}$）和⑬式得，最小亮环（$m=1$）的半径为

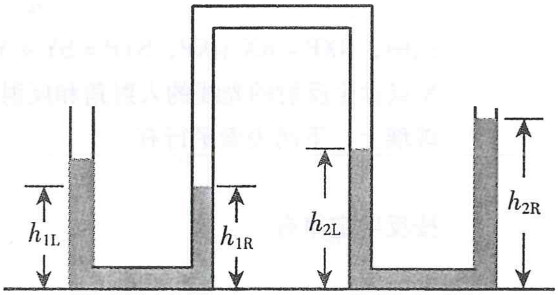
$$r_0=0.016\mathrm{m} \quad ⑭$$

评分参考：第（1）问 18 分，①式 5 分，②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各 1 分，⑬式 2 分；第（2）问 2 分，⑭式 2 分。

16. (20 分)

解法（一）

(1) 设在左管添加水之前左右两个 U 形管两边水面的高度分别为 h_1 和 h_2，添加水之后左右两个 U 形管两边水面的高度分别为 h_{1L}、h_{1R} 和 h_{2L}、h_{2R}，如图所示，设被封闭的空气的压强为 P，空气柱的长度为 L_b。水在常温常压下可视为不可压缩的流体，故



$$2h_1 + x = h_{1L} + h_{1R} \quad ①$$

$$2h_2 = h_{2L} + h_{2R} \quad ②$$

由力学平衡条件有

$$P_0 + \rho g h_{1L} = P + \rho g h_{1R} \quad ③$$

$$P_0 + \rho g h_{2R} = P + \rho g h_{2L} \quad ④$$

由于连通管中间高度不变，有

$$h_1 + h_2 + L_a = h_{1R} + h_{2L} + L_b \quad ⑤$$

由玻意耳定律得

$$P_0 L_a = P L_b \quad ⑥$$

联立①②③④⑤⑥式得 P 满足的方程

$$\frac{L_0}{P_0}P^2 + \left(L_a - L_0 - \frac{1}{2}x\right)P - P_0 L_a = 0$$

解得

$$P = \frac{P_0}{2L_0}\left\{L_0 - L_a + \frac{x}{2} + \sqrt{\left(L_a - L_0 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4L_aL_0}\right\} \quad ⑦$$

将⑦式代入⑥式得

$$L_b = \frac{1}{2}\left\{L_a - L_0 - \frac{x}{2} + \sqrt{\left(L_a - L_0 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4L_aL_0}\right\} \quad ⑧$$

由①②③④⑦式得

$$\begin{aligned}\triangle h_{1L} &\equiv h_{1L} - h_1 = x - \triangle h_{1R} \\ &= \frac{x - L_0}{2} + \frac{1}{4}\left\{L_0 - L_a + \frac{x}{2} + \sqrt{\left(L_a - L_0 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4L_aL_0}\right\} \quad ⑨\\ &= \frac{5x - 2L_a - 2L_0}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\left(L_a - L_0 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4L_aL_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle h_{1R} &\equiv h_{1R} - h_1 = \frac{L_0 + x}{2} - \frac{P}{2\rho g} \\ &= \frac{x + L_0}{2} - \frac{1}{4}\left\{L_0 - L_a + \frac{x}{2} + \sqrt{\left(L_a - L_0 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4L_aL_0}\right\} \quad ⑩\end{aligned}$$

$$=\frac{3x+2L_a+2L_0}{8}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_a-L_0-\frac{x}{2}\right)^2+4L_aL_0}$$

$$\triangle h_{2L}\equiv h_{2L}-h_2=\frac{L_0}{2}-\frac{P}{2\rho g}$$

$$=\frac{L_0}{2}-\frac{1}{4}\left\{L_0-L_a+\frac{x}{2}+\sqrt{\left(L_a-L_0-\frac{x}{2}\right)^2+4L_aL_0}\right\} \quad ⑪$$

$$=\frac{2L_a+2L_0-x}{8}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_a-L_0-\frac{x}{2}\right)^2+4L_aL_0}$$

$$\triangle h_{2R}\equiv h_{2R}-h_2=-\triangle h_{2L}$$

$$=\frac{x-2L_a-2L_0}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_a-L_0-\frac{x}{2}\right)^2+4L_aL_0} \quad ⑫$$

（2）在 $x\ll L_0$ 和 $L_a\ll L_0$ 的情形下，由⑧式得

$$L_b\approx L_a \quad ⑬$$

⑦式成为

$$P\approx P_0\left(1+\frac{x}{2L_0}\right) \quad ⑭$$

由⑨⑩⑪⑫⑬⑭式得

$$\triangle h_{1L}\approx\frac{3}{4}x \quad ⑮$$

$$\triangle h_{1R}\cong-\triangle h_{2L}=\triangle h_{2R}\approx\frac{1}{4}x \quad ⑯$$

评分参考：第（1）问 14 分，①②③④⑤⑥⑦⑧式各 1 分，⑨⑩式各 2 分，⑪⑫式各 1 分；第（2）问 6 分，⑬⑭式各 1 分，⑮⑯式各 2 分。

解法（二）

（1）设 U 形管 1 左侧末态水面比初态上升 $\frac{x}{2}+y$，右侧末态水面比初态上升 $\frac{x}{2}-y$，U 形管 2 左侧末态水面比初态下降 y，右侧末态水面比初态上升 y。由玻意耳定律得

$$L_aL_0=L_b\ (L_0+2y) \quad ①$$

由几何关系有

$$L_a-\frac{x}{2}+2y=L_b \quad ②$$

将②式代入①式得

$$L_0L_a=\left(L_a-\frac{x}{2}+2y\right)(L_0+2y) \quad ③$$

解得

$$y=\frac{x}{8}-\frac{L_0}{4}-\frac{L_a}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0} \quad ④$$

此即 U 形管 2 左侧末态比初态水面下降值，也是右侧末态比初态水面上升值（负根 $y=\frac{x}{8}-\frac{L_0}{4}-\frac{L_a}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0}$ 不符合题意，已舍去）。U 形管 1 左侧末态比初态水面上升

$$\frac{1}{2}x+y=\frac{5x}{8}-\frac{L_0}{4}-\frac{L_a}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0} \qquad ⑤$$

右侧末态比初态水面上升

$$\frac{1}{2}x-y=\frac{3x}{8}+\frac{L_0}{4}+\frac{L_a}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0} \qquad ⑥$$

将④式代入②式得

$$L_b=L_a-\frac{x}{2}+2y=\frac{L_a}{2}-\frac{L_0}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0} \qquad ⑦$$

（2）在 $x\ll L_0$ 和 $L_a\ll L_0$ 情形下，④⑤⑥⑦式中的根号部分

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(L_0+L_a-\frac{x}{2}\right)^2+2xL_0}&=\sqrt{L_0^2+L_a^2+\frac{x^2}{4}+2L_0L_a-xL_0-xL_a+2xL_0}\\&=L_0\sqrt{1+\frac{L_a^2}{L_0^2}+\frac{x^2}{4L_0^2}+2\frac{L_a}{L_0}-\frac{xL_a}{L_0^2}+\frac{x}{L_0}}\\&\approx L_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{L_a^2}{L_0^2}+\frac{x^2}{4L_0^2}+2\frac{L_a}{L_0}-\frac{xL_a}{L_0^2}+\frac{x}{L_0}\right)\right]\\&=L_0+\frac{1}{2}\left(\frac{L_a^2}{L_0}+\frac{x^2}{4L_0}+2L_a-\frac{xL_a}{L_0}+x\right)\\&\approx L_0+\frac{1}{2}(2L_a+x)\\&=L_0+L_a+\frac{1}{2}x\end{aligned} \qquad ⑧$$

⑧式推导过程中用到了 $\sqrt{1+z}\approx1+\frac{1}{2}z$，当 $z\ll1$。将⑧式代入④⑤⑥⑦式中分别得

$$y\approx\frac{x}{8}-\frac{L_0}{4}-\frac{L_a}{4}+\frac{1}{4}\left(L_0+L_a+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{4} \qquad ⑨$$

$$\frac{1}{2}x+y\approx\frac{1}{2}x+\frac{x}{4}=\frac{3x}{4} \qquad ⑩$$

$$\frac{1}{2}x-y\approx\frac{1}{2}x-\frac{x}{4}=\frac{x}{4} \qquad ⑪$$

$$L_b\approx\frac{L_a}{2}-\frac{L_0}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\left(L_0+L_a+\frac{x}{2}\right)=L_a \qquad ⑫$$

评分参考：第（1）问 14 分，①式 4 分，②③式各 1 分，④式 3 分，⑤式 2 分，⑥式 1 分，⑦式 2 分。第（2）问 6 分，⑨⑩式各 2 分，⑪⑫式各 1 分。