第 31 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题解答

2014 年 9 月 20 日

一、（12分）

（1）球形

（2）液滴的半径 r、密度 ρ 和表面张力系数 σ（或液滴的质量 m 和表面张力系数 σ）

（3）**解法一** 假设液滴振动频率与上述物理量的关系式为 $f=kr^{\alpha}\rho^{\beta}\sigma^{\gamma}$ ①

式中，比例系数 k 是一个待定常数. 任一物理量 a 可写成在某一单位制中的单位 $[a]$ 和相应的数值 $\{a\}$ 的乘积 $a=\{a\}[a]$. 按照这一约定，①式在同一单位制中可写成 $\{f\}[f]=\{k\}\{r\}^{\alpha}\{\rho\}^{\beta}\{\sigma\}^{\gamma}[r]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\sigma]^{\gamma}$

由于取同一单位制，上述等式可分解为相互独立的数值等式和单位等式，因而 $[f]=[r]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\sigma]^{\gamma}$ ②

力学的基本物理量有三个：质量 m、长度 l 和时间 t，按照前述约定，在该单位制中有

$m=\{m\}[m]$， $l=\{l\}[l]$， $t=\{t\}[t]$

于是 $[f]=[l]^{-1}$ ③ $[r]=[l]$ ④

$[\rho]=[m][l]^{-3}$ ⑤ $[\sigma]=[m][t]^{-2}$ ⑥

将③④⑤⑥式代入②式得 $[t]^{-1}=[l]^{\alpha}([m][l]^{-3})^{\beta}([m][t]^{-2})^{\gamma}$ 即 $[t]^{-1}=[l]^{\alpha-3\beta}[m]^{\beta+\gamma}[t]^{-2\gamma}$ ⑦

由于在力学中 $[m]$、$[l]$ 和 $[t]$ 三者之间的相互独立性，有

$\alpha-3\beta=0$， ⑧ $\beta+\gamma=0$， ⑨ $2\gamma=1$ ⑩

解为 $\alpha=-\frac{3}{2},\beta=-\frac{1}{2},\gamma=\frac{1}{2}$

⑪将⑪式代入①式得 $f=k\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}$

解法二

假设液滴振动频率与上述物理量的关系式为 $f=kr^{\alpha}\rho^{\beta}\sigma^{\gamma}$ ①

式中，比例系数 k 是一个待定常数. 任一物理量 a 可写成在某一单位制中的单位 $[a]$ 和相应的数值 $\{a\}$ 的乘积 $a=\{a\}[a]$. 在同一单位制中，①式两边的物理量的单位的乘积必须相等 $[f]=[r]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\sigma]^{\gamma}$ ②

力学的基本物理量有三个：质量 M、长度 L 和时间 T，对应的国际单位分别为千克（kg）、米（m）、秒（s）. 在国际单位制中，振动频率 f 的单位 $[f]$ 为 s^{-1}，半径 r 的单位 $[r]$ 为 m，密度 ρ 的单位 $[\rho]$ 为 $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，表面张力系数 σ 的单位 $[\sigma]$ 为 $\mathrm{N\cdot m^{-1}=kg\cdot(m\cdot s^{-2})\cdot m^{-1}=kg\cdot s^{-2}}$，即有

$[f]=\mathrm{s}^{-1}$ ③

$[r]=\mathrm{m}$ ④

$[\rho]=\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ ⑤

$[\sigma]=\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$ ⑥

若要使①式成立，必须满足

$$\mathrm{s^{-1}=m^{\alpha}\left(kg\cdot m^{-3}\right)^{\beta}\left(kg\cdot s^{-2}\right)^{\gamma}=(kg)^{\beta+\gamma}\cdot m^{\alpha-3\beta}\cdot s^{-2\gamma}} \quad ⑦$$

由于在力学中质量 M、长度 L 和时间 T 的单位三者之间的相互独立性，有

$$\alpha-3\beta=0,\qquad ⑧$$
$$\beta+\gamma=0,\qquad ⑨$$
$$2\gamma=1\qquad ⑩$$

解为

$$\alpha=-\frac{3}{2},\beta=-\frac{1}{2},\gamma=\frac{1}{2}\qquad ⑪$$

将⑪式代入①式得

$$f=k\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}\qquad ⑫$$

评分标准：本题 12 分. 第（1）问 2 分，答案正确 2 分；第（2）问 3 分，答案正确 3 分；第（3）问 7 分，⑦式 2 分，⑪式 3 分，⑫式 2 分（答案为 $f\propto\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}$ 、 $f=k\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$ 或 $f\propto\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$ 的，也给这 2 分）.

二、(16 分)　　**解法一**：瓶内理想气体经历如下两个气体过程：

$$(p_i,V_0,T_0,N_i)\xrightarrow{\text{放气(绝热膨胀)}}(p_0,V_0,T,N_f)\xrightarrow{\text{等容升温}}(p_f,V_0,T_0,N_f)$$

其中，$(p_i,V_0,T_0,N_i),(p_0,V_0,T,N_f)$ 和 (p_f,V_0,T_0,N_f) 分别是瓶内气体在初态、中间态与末态的压强、体积、温度和摩尔数．根据理想气体方程 $pV=NkT$，考虑到由于气体初、末态的体积和温度相等，有

$$\frac{p_f}{p_i}=\frac{N_f}{N_i}\qquad ①$$

另一方面，设 V' 是初态气体在保持其摩尔数不变的条件下绝热膨胀到压强为 p_0 时的体积，即

$$(p_i,V_0,T_0,N_i)\xrightarrow{\text{绝热膨胀}}(p_0,V',T,N_i)$$

此绝热过程满足

$$\frac{V_0}{V'}=\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{1/\gamma}\qquad ②$$

由状态方程有 $p_0V'=N_ikT$ 和 $p_0V_0=N_fkT$，所以

$$\frac{N_f}{N_i}=\frac{V_0}{V'}\qquad ③$$

联立①②③式得

$$\frac{p_f}{p_i}=\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{1/\gamma}\qquad ④$$

此即

$$\gamma=\frac{\ln\frac{p_i}{p_0}}{\ln\frac{p_i}{p_f}}\qquad ⑤$$

由力学平衡条件有

$$p_i=p_0+\rho gh_i\qquad ⑥$$

$$p_f=p_0+\rho gh_f\qquad ⑦$$

式中，$p_0=\rho gh_0$ 为瓶外的大气压强，ρ 是 U 形管中液体的密度，g 是重力加速度的大小.由⑤⑥⑦式得

$$\gamma=\frac{\ln(1+\frac{h_i}{h_0})}{\ln(1+\frac{h_i}{h_0})-\ln(1+\frac{h_f}{h_0})}\qquad ⑧$$

利用近似关系式：当 $x\ll 1$，$\ln(1+x)\approx x$，以及 $h_i/h_0\ll 1$，$h_f/h_0\ll 1$，有

$$\gamma=\frac{h_i/h_0}{h_i/h_0-h_f/h_0}=\frac{h_i}{h_i-h_f} \qquad ⑨$$

评分标准：本题 16 分．①②③⑤⑥⑦⑧⑨式各 2 分．

解法二：若仅考虑留在容器内的气体：它首先经历了一个绝热膨胀过程 ab，再通过等容升温过程 bc 达到末态

$$(p_i,V_1,T_0)\xrightarrow{\text{绝热膨胀ab}}(p_0,V_0,T)\xrightarrow{\text{等容升温bc}}(p_f,V_0,T_0)$$

其中，$(p_i,V_1,T_0),(p_0,V_0,T)$ 和 (p_f,V_0,T_0) 分别是留在瓶内的气体在初态、中间态和末态的压强、体积与温度．留在瓶内的气体先后满足绝热方程和等容过程方程 ab: $p_i^{\gamma-1}T_0^{-\gamma}=p_0^{\gamma-1}T^{-\gamma}$ ①

bc: $p_0/T=p_f/T_0$ ②

由①②式得 $\frac{p_f}{p_i}=\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{1/\gamma}$ ③ 此即 $\gamma=\frac{\ln\frac{p_i}{p_0}}{\ln\frac{p_i}{p_f}}$ ④

由力学平衡条件有 $p_i=p_0+\rho gh_i$ ⑤ $p_f=p_0+\rho gh_f$ ⑥

式中，$p_0=\rho gh_0$ 为瓶外的大气压强，ρ 是 U 形管中液体的密度，g 是重力加速度的大小．由④⑤⑥式得

$$\gamma=\frac{\ln(1+\frac{h_i}{h_0})}{\ln(1+\frac{h_i}{h_0})-\ln(1+\frac{h_f}{h_0})} \qquad ⑦$$

利用近似关系式：当$x\ll 1$，$\ln(1+x)\approx x$，以及 $h_i/h_0\ll 1$，$h_f/h_0\ll 1$，有

$$\gamma=\frac{h_i/h_0}{h_i/h_0-h_f/h_0}=\frac{h_i}{h_i-h_f} \qquad ⑧$$

评分标准：本题 16 分．①②式各 3 分，④⑤⑥⑦⑧式各 2 分．

三、（20 分）

（1）平板受到重力 $\boldsymbol{P}_C$、拉力 $\boldsymbol{Q}_{M_0}$、铰链对三角形板的作用力 $\boldsymbol{N}_A$ 和 $\boldsymbol{N}_B$，各力及其作用点的坐标分别为：

$\boldsymbol{P}_C=(0,-mg\sin\varphi,-mg\cos\varphi)$，$(0,0,h)$；　$\boldsymbol{Q}_{M_0}=(0,Q,0)$，$(x_0,0,z_0)$；

$\boldsymbol{N}_A=(N_{Ax},N_{Ay},N_{Az})$，$(\frac{b}{2},0,0)$；　$\boldsymbol{N}_B=(N_{Bx},N_{By},N_{Bz})$，$(-\frac{b}{2},0,0)$

式中 $h=\frac{1}{3}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ 是平板质心到 x 轴的距离．

平板所受力和（对 O 点的）力矩的平衡方程为

$$\sum F_x=N_{Ax}+N_{Bx}=0 \qquad ①$$

$$\sum F_y=Q+N_{Ay}+N_{By}-mg\sin\varphi=0 \qquad ②$$

$$\sum F_z = N_{Az} + N_{Bz} - mg\cos\varphi = 0 \qquad ③$$

$$\sum M_x = mgh\sin\varphi - Q\cdot z_0 = 0 \qquad ④$$

$$\sum M_y = N_{Bz}\frac{b}{2} - N_{Az}\frac{b}{2} = 0 \qquad ⑤$$

$$\sum M_z = Q\cdot x_0 + N_{Ay}\frac{b}{2} - N_{By}\frac{b}{2} = 0 \qquad ⑥$$

联立以上各式解得 $Q = \dfrac{mgh\sin\varphi}{z_0}$，　$N_{Ax} = -N_{Bx}$，

$N_{Ay} = \dfrac{mg\sin\varphi}{2}\left[1 - \dfrac{h}{b}\left(\dfrac{b}{z_0} + \dfrac{2x_0}{z_0}\right)\right]$，　$N_{By} = \dfrac{mg\sin\varphi}{2}\left[1 - \dfrac{h}{b}\left(\dfrac{b}{z_0} - \dfrac{2x_0}{z_0}\right)\right]$

$$N_{Az} = N_{Bz} = \frac{1}{2}mg\cos\varphi$$

即 $\boldsymbol{Q}_{M_0} = (0, \dfrac{mgh\sin\varphi}{z_0}, 0)$，　⑦

$$\boldsymbol{N}_A = (N_{Ax}, \frac{mg\sin\varphi}{2}\left[1 - \frac{h}{b}\left(\frac{b}{z_0} + \frac{2x_0}{z_0}\right)\right], \frac{1}{2}mg\cos\varphi), \qquad ⑧$$

$$\boldsymbol{N}_B = (-N_{Ax}, \frac{mg\sin\varphi}{2}\left[1 - \frac{h}{b}\left(\frac{b}{z_0} - \frac{2x_0}{z_0}\right)\right], \frac{1}{2}mg\cos\varphi) \qquad ⑨$$

（2）如果希望在 $M(x,0,z)$ 点的位置从点 $M_0(x_0,0,z_0)$ 缓慢改变的过程中，可以使铰链支点对板的作用力 N_{By} 保持不变，则需

$$N_{By} = \frac{mg\sin\varphi}{2}\left[1 - \frac{h}{b}\left(\frac{b}{z} - \frac{2x}{z}\right)\right] = 常量 \qquad ⑩$$

M点移动的起始位置为 M_0，由⑩式得　$\dfrac{b}{z} - \dfrac{2x}{z} = \dfrac{b}{z_0} - \dfrac{2x_0}{z_0}$　⑪

或　$b - 2x = \left(\dfrac{b}{z_0} - \dfrac{2x_0}{z_0}\right)z$　⑫

这是过 $A(\dfrac{b}{2}, 0, 0)$ 点的直线.　(*)

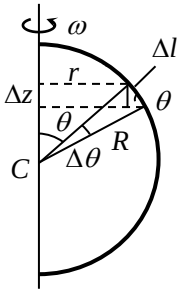
因此，当力 $\boldsymbol{Q}_M$ 的作用点 M 的位置沿通过 A 点任一条射线(不包含 A 点)在平板上缓慢改变时，铰链支点 B 对板的作用力 N_{By} 保持不变. 同理，当力 $\boldsymbol{Q}_M$ 的作用点 M 沿通过B点任一条射线在平板上缓慢改变时，铰链支点 A 对板的作用力 N_{Ay} 保持不变.

评分标准：本题 20 分. 第（1）问 14 分，①式 1 分，②③④⑤⑥式各 2 分，⑦⑧⑨式各 1 分；第（2）问 6 分，⑩⑫式各 1 分，(*) 2 分，结论正确 2 分.

四、（24 分）

（1）考虑小球沿径向的合加速度. 如图，设小球下滑至θ角位置时，小球相对于圆环的速率为v，圆环绕轴转动的角速度为ω．此时与速率v对应的指向中心C的小球加速度大小为 $a_1=\dfrac{v^2}{R}$ ①

同时，对应于圆环角速度ω，指向OO'轴的小球加速度大小为$a_\omega=\dfrac{(\omega R\sin\theta)^2}{R\sin\theta}$ ②



该加速度的指向中心C的分量为$a_2=a_\omega\sin\theta=\dfrac{(\omega R\sin\theta)^2}{R}$ ③

该加速度的沿环面且与半径垂直的分量为$a_3=a_\omega\cos\theta=\dfrac{(\omega R\sin\theta)^2}{R}\cot\theta$ ④

由①③式和加速度合成法则得小球下滑至θ角位置时，其指向中心C的合加速度大小为

$$a_R=a_1+a_2=\frac{v^2}{R}+\frac{(\omega R\sin\theta)^2}{R} \qquad ⑤$$

在小球下滑至θ角位置时，将圆环对小球的正压力分解成指向环心的方向的分量N、垂直于环面的方向的分量T．值得指出的是：由于不存在摩擦，圆环对小球的正压力沿环的切向的分量为零. 在运动过程中小球受到的作用力是N、T和mg．这些力可分成相互垂直的三个方向上的分量：在径向的分量不改变小球速度的大小，亦不改变小球对转轴的角动量；沿环切向的分量即$mg\sin\theta$要改变小球速度的大小；在垂直于环面方向的分量即T要改变小球对转轴的角动量，其反作用力将改变环对转轴的角动量，但与大圆环沿OO'轴的竖直运动无关. 在指向环心的方向，由牛顿第二定律有

$$N+mg\cos\theta=ma_R=m\frac{v^2+(\omega R\sin\theta)^2}{R} \qquad ⑥$$

合外力矩为零，系统角动量守恒，有$L_0=L+2m(R\sin\theta)^2\omega$ ⑦

式中L_0和L分别为圆环以角速度ω_0和ω转动时的角动量.

如图，考虑右半圆环相对于轴的角动量，在θ角位置处取角度增量$\Delta\theta$，圆心角$\Delta\theta$所对圆弧Δl的质量为$\Delta m=\lambda\Delta l$（$\lambda\equiv\dfrac{m_0}{2\pi R}$），其角动量为$\Delta L=\Delta m\omega r^2=\lambda\Delta l\omega rR\sin\theta=\lambda\omega Rr\Delta z=\lambda\omega R\Delta S$ ⑧

式中r是圆环上θ角位置到竖直轴OO'的距离，ΔS为两虚线间窄条的面积．⑧式说明，圆弧Δl的角动量与ΔS成正比．整个圆环（两个半圆环）的角动量为

$$L=2\sum\Delta L=2\times\frac{m_0}{2\pi R}\omega R\frac{\pi R^2}{2}=\frac{1}{2}m_0R^2\omega \qquad ⑨$$

[或：由转动惯量的定义可知圆环绕竖直轴OO'的转动惯量J等于其绕过垂直于圆环平面的对称轴的转动惯量的一半，即

$$J=\frac{1}{2}m_0R^2 \qquad ⑧$$

则角动量L为$L=J\omega=\dfrac{1}{2}m_0R^2\omega$ ⑨]

同理有$L_0=\dfrac{1}{2}m_0R^2\omega_0$ ⑩

力N及其反作用力不做功；而T及其反作用力的作用点无相对移动，做功之和为零；系统机械能守恒．故

$$E_{k0}-E_k+2\times mgR(1-\cos\theta)=2\times\frac{1}{2}m[v^2+(\omega R\sin\theta)^2] \qquad ⑪$$

式中E_{k0}和E_k分别为圆环以角速度ω_0和ω转动时的动能．圆弧Δl的动能为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}\Delta m(r\omega)^2=\frac{1}{2}\lambda\Delta l\omega^2rR\sin\theta=\frac{1}{2}\lambda R\omega^2\Delta S$$

整个圆环（两个半圆环）的动能为

$$E_k = 2\sum \Delta E_k = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{m_0}{2\pi R}\cdot R\omega^2\cdot\frac{\pi R^2}{2} = \frac{1}{4}m_0R^2\omega^2 \qquad ⑫$$

[或：圆环的转动动能为 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}m_0R^2\omega^2$ ⑫]

同理有 $E_{k0} = \frac{1}{4}m_0R^2\omega_0^2$ ⑬

根据牛顿第三定律，圆环受到小球的竖直向上作用力大小为 $2N\cos\theta$，当

$$2N\cos\theta \geq m_0g \qquad ⑭$$

时，圆环才能沿轴上滑．由⑥⑦⑨⑩⑪⑫ ⑬式可知，⑭式可写成

$$6m\cos^2\theta - 4m\cos\theta + m_0 - \frac{m_0\omega_0^2R\cos\theta}{2g}\left[1-\frac{m_0^2}{(m_0+4m\sin^2\theta)^2}\right] \leq 0 \qquad ⑮$$

式中， g 是重力加速度的大小.

（2）此时由题给条件可知当 θ=30° 时，⑮式中等号成立，即有

$$\left(\frac{9}{2}-2\sqrt{3}\right)m + m_0 = \frac{\sqrt{3}m_0R\omega_0^2}{4g}\left[1-\frac{m_0^2}{(m_0+m)^2}\right] \quad 或$$

$$\omega_0 = (m_0+m)\sqrt{\frac{(9\sqrt{3}-12)m+2\sqrt{3}m_0}{3(2m_0+m)mm_0}\frac{2g}{R}} \qquad ⑯$$

由⑦⑨⑩⑯式和题给条件得 $\omega = \frac{m_0}{m_0+4m\sin^2\theta}\omega_0 = \frac{m_0}{m_0+m}\omega_0 = \sqrt{\frac{(9\sqrt{3}-12)m+2\sqrt{3}m_0}{3(2m_0+m)}\frac{2m_0g}{mR}}$ ⑰

由⑪⑫⑬⑯⑰式和题给条件得 $v = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}m_0^2+(12-\sqrt{3})mm_0+3\sqrt{3}m^2}{6(2m_0+m)m}}$ ⑱

评分标准：本题 24 分．第（1）问 18 分，①②③④⑤式各 1 分，⑥⑦式各 2 分，⑨⑩式各 1 分，⑪式 2 分，⑫⑬式各 1 分，⑭式 2 分，⑮式 1 分；第（2）问 6 分，⑯⑰⑱式各 2 分．

五、（20 分）

（1）设圆盘像到薄凸透镜的距离为 v．由题意知：$u = 20\text{cm}$，$f = 10\text{cm}$，代入透镜成像公式

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \qquad ①$$

得像距为 $v = 20\text{cm}$ ②

其横向放大率为 $\beta = -\frac{v}{u} = -1$ ③

可知圆盘像在凸透镜右边 20cm，半径为 5cm，为圆盘状，圆盘与其像大小一样.

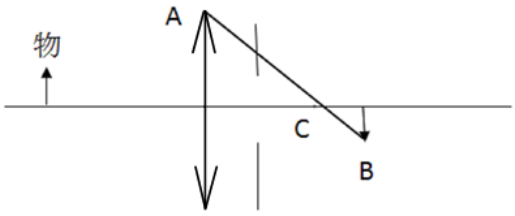
（2）如下图所示，连接 A、B 两点，连线 AB 与光轴交点为 C 点，由两个相似三角形 ΔAOC 与 $\Delta BB'C$ 的关系可求得 C 点距离透镜为 15cm. 1 分

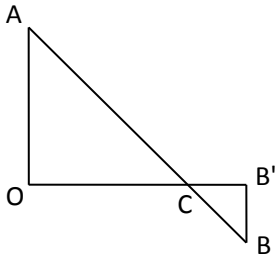
若将圆形光阑放置于凸透镜后方 6cm 处，此时圆形光阑在 C 点左侧. 1 分

当圆形光阑半径逐渐减小时，均应有光线能通过圆形光阑在 B 点成像，因而圆盘像的形状及大

小不变，而亮度变暗. 2 分

此时不存在圆形光阑半径 r_a 使得圆盘像大小的半径变为（1）中圆盘像大小的半径的一半．1 分



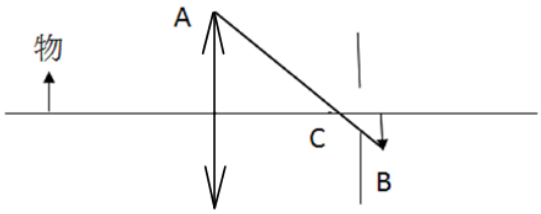


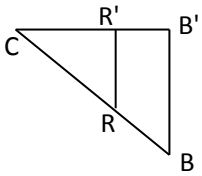
（3）若将圆形光阑移至凸透镜后方 18cm 处，此时圆形光阑在 C 点（距离透镜为 15cm）的右侧．由下图所示，此时有:

$$CB'=BB'=5cm,\ R'B'=2cm,$$

利用两个相似三角形 $\Delta CRR'$ 与 $\Delta CBB'$ 的关系，得 $r=RR'=\frac{CR'}{CB'}\times BB'=\frac{5-2}{5}\times 5cm=3cm$ ④

可见当圆盘半径 $r=3cm$ （光阑边缘与 AB 相交）时，圆盘刚好能成完整像，但其亮度变暗 4 分





若进一步减少光阑半径，圆盘像就会减小．当透镜上任何一点发出的光都无法透过光阑照在原先像的一半高度处时，圆盘像的半径就会减小为一半，如下图所示．此时光阑边缘与 AE 相交，AE 与光轴的交点为 D，由几何关系算得 D 与像的轴上距离为 $\frac{20}{7}$ cm. 此时有

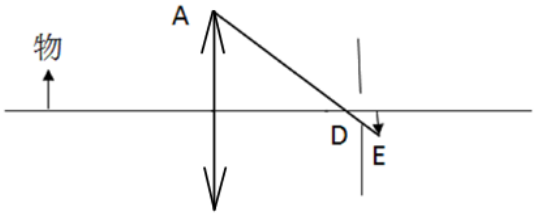
$$DR'=\frac{6}{7}\ cm,\ DE'=\frac{20}{7}\ cm,\ EE'$$

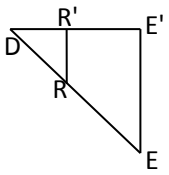
利用两个相似三角形 $\Delta DRR'$ 与 $\Delta DEE'$ 的关系，得

$$r_a=RR'=\frac{DR'}{DE'}\times EE'=\frac{20-7}{20/7}\times 2\ 2.5cm\ ($$ ⑤

可见当圆形光阑半径 r_a =0.75cm，圆盘像大小的半径的确变为（1）中圆盘像大小的半径的一半

3 分





（4）只要圆形光阑放在 C 点（距离透镜为 15cm）和光屏之间，圆盘像的大小便与圆形光阑半径有关． 2 分

（5）若将图中的圆形光阑移至凸透镜前方 6cm 处，则当圆形光阑半径逐渐减小时，圆盘像的形状及大小不变，亮度变暗； 2 分

同时不存在圆形光阑半径使得圆盘像大小的半径变为（1）中圆盘像大小的半径的一半． 1 分

评分标准：第（1）问 3 分，正确给出圆盘像的位置、大小、形状，各 1 分； 第（2）问 5 分，4 个给分点分别为 1、1、2、1 分；

第（3）问 7 分，2 个给分点分别为 2、3 分；第（4）问 2 分，1 个给分点为 2 分；第（5）问 3 分，2 个给分点分别为 2、1 分．

六、（22 分）

（1）固定金属板和可旋转金属板之间的重叠扇形的圆心角θ 的取值范围为$-\theta_0 \le \theta \le \theta_0$．整个电容器相当于$2N$ 个相同的电容器并联，因而

$$C(\theta)=2NC_1(\theta) \qquad ①$$

式中$C_1(\theta)$为两相邻正、负极板之间的电容

$$C_1(\theta)=\frac{A(\theta)}{4\pi ks} \qquad ②$$

这里，$A(\theta)$是两相邻正负极板之间相互重迭的面积，有

$$A(\theta)=\begin{cases} 2\times\frac{1}{2}R^2(\theta_0-\theta), & \text{当}-\theta_0\le\theta\le\pi-\theta_0 \\ 2\times\frac{1}{2}R^2(2\theta_0-\pi), & \text{当}\pi-\theta_0<\theta<\theta_0 \end{cases} \qquad ③$$

由②③式得

$$C_1(\theta)=\begin{cases} \frac{R^2(\theta_0-\theta)}{4\pi ks}, & \text{当}-\theta_0\le\theta\le\pi-\theta_0 \\ \frac{R^2(2\theta_0-\pi)}{4\pi ks}, & \text{当}\pi-\theta_0<\theta<\theta_0 \end{cases} \qquad ④$$

由①④式得

$$C(\theta)=\begin{cases} \frac{NR^2(\theta_0-\theta)}{2\pi ks}, & \text{当}-\theta_0\le\theta\le\pi-\theta_0 \\ \frac{NR^2(2\theta_0-\pi)}{2\pi ks}, & \text{当}\pi-\theta_0<\theta<\theta_0 \end{cases} \qquad ⑤$$

（2）当电容器两极板加上直流电势差 E 后，电容器所带电荷为

$$Q(\theta)=C(\theta)E \qquad ⑥$$

当$\theta=0$时，电容器电容达到最大值$C_{\max}$，由⑤式得

$$C_{\max}=\frac{NR^2\theta_0}{2\pi ks} \qquad ⑦$$

充电稳定后电容器所带电荷也达到最大值Q_{max}，由⑥式得 $Q_{max}=\frac{NR^2\theta_0}{2\pi ks}E$ ⑧

断开电源，在转角θ取$\theta=0$附近的任意值时，由⑤⑧式得，电容器内所储存的能量为

$$U(\theta)=\frac{Q_{max}^2}{2C(\theta)}=\frac{NR^2\theta_0^2E^2}{4\pi ks(\theta_0-\theta)} \quad 当-\theta_0\le\theta\le\pi-\theta_0 \quad ⑨$$

设可旋转金属板所受力矩为$T(\theta)$（它是由若干作用在可旋转金属板上外力F_i产生的，不失普遍性，可认为F_i的方向垂直于转轴，其作用点到旋转轴的距离为r_i，其值F_i的正负与可旋转金属板所受力矩的正负一致），当金属板旋转$\Delta\theta$（即从θ变为$\theta+\Delta\theta$）后，电容器内所储存的能量增加ΔU，则由功能原理有 $T(\theta)\Delta\theta=(\sum F_i r_i)\Delta\theta=\sum F_i\Delta l_i=\Delta U(\theta)$ ⑩

式中，由⑨⑩式得 $T(\theta)=\frac{\Delta U(\theta)}{\Delta\theta}=\frac{NR^2\theta_0^2E^2}{4\pi ks(\theta_0-\theta)^2}$ 当$-\theta_0\le\theta\le\pi-\theta_0$ ⑪

当$\theta=\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，$T(\theta)$发散，这表明所用的平行板电容公式需要修改．当电容器电容最大时，充电后转动可旋转金属板的力矩为

$$T=\left(\frac{\Delta U}{\Delta\theta}\right)_{\theta=0}=\frac{NR^2E^2}{4\pi ks} \quad ⑫$$

（3）当$V=V_0\cos\omega t$，则其电容器所储存能量为

$$U=\frac{1}{2}CV^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(C_{max}+C_{min})+\frac{1}{2}(C_{max}-C_{min})\cos 2\omega_m t\right]V_0^2\cos^2\omega t$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(C_{max}+C_{min})+\frac{1}{2}(C_{max}-C_{min})\cos 2\omega_m t\right]V_0^2(1+\cos 2\omega t) \quad ⑬$$
$$=\frac{V_0^2}{8}\left[(C_{max}+C_{min})+(C_{max}+C_{min})\cos 2\omega t+(C_{max}-C_{min})\cos 2\omega_m t+(C_{max}-C_{min})\cos 2\omega_m t\cos 2\omega t\right]$$
$$=\frac{V_0^2}{8}\{(C_{max}+C_{min})+(C_{max}+C_{min})\cos 2\omega t+(C_{max}-C_{min})\cos 2\omega_m t$$
$$+\frac{1}{2}(C_{max}-C_{min})[\cos 2(\omega_m+\omega)t+\cos 2(\omega_m-\omega)t]\}$$

由于边缘效应引起的附加电容远小于C_{max}，因而可用⑦式估算C_{max}．如果$\omega_m\neq\omega$，利用⑦式和题设条件以及周期平均值公式

$$\overline{\cos 2\omega t}=0,\quad \overline{\cos 2\omega_m t}=0,\quad \overline{\cos 2(\omega_m+\omega)t}=0,\quad \overline{\cos 2(\omega_m-\omega)t}=0 \quad ⑭$$

可得电容器所储存能量的周期平均值为

$$\bar{U}_1=\frac{1}{8}(C_{max}+C_{min})V_0^2=\frac{(1+\lambda)NR^2}{32ks}V_0^2 \quad ⑮$$

如果$\omega_m=\omega$，⑭式中第 4 式右端不是零，而是 1．利用⑦式和题设条件以及周期平均值公式的前 3 式得电容器所储存能量的周期平均值为

$$\bar{U}_2=\frac{1}{8}(C_{max}+C_{min})V_0^2+\frac{1}{16}(C_{max}-C_{min})V_0^2=\frac{1}{16}(3C_{max}+C_{min})V_0^2=\frac{(3+\lambda)NR^2}{64ks}V_0^2 \quad ⑯$$

由于边缘效应引起的附加电容与忽略边缘效应的电容是并联的，因而C_{max}应比用⑦式估计C_{max}大；这一效应同样使得$C_{min}>0$；可假设实际的$(C_{max}-C_{min})$近似等于用⑦式估计C_{max}．如果$\omega_m\neq\omega$，

利用⑦式和题设条件以及周期平均值公式

$$\overline{\cos 2\omega t}=0,\quad \overline{\cos 2\omega_m t}=0,\quad \overline{\cos 2(\omega_m+\omega)t}=0,\quad \overline{\cos 2(\omega_m-\omega)t}=0 \qquad ⑰$$

可得电容器所储存能量的周期平均值为 $\bar{U}_1=\frac{1}{8}(C_{\max}+C_{\min})V_0^2=\frac{(1+2\lambda)NR^2}{32ks}V_0^2$ ⑱

[如果 $\omega_m=\omega$，⑭中第 4 式右端不是零，而是 1．利用⑦式和题设条件以及周期平均值公式⑭的前 3 式得电容器所储存能量的周期平均值为

$$\bar{U}_2=\frac{1}{8}(C_{\max}+C_{\min})V_0^2+\frac{1}{16}(C_{\max}-C_{\min})V_0^2=\frac{1}{16}(3C_{\max}+C_{\min})V_0^2=\frac{(3+4\lambda)NR^2}{64ks}V_0^2 \qquad ⑲$$

]

因为 $\bar{U}_2>\bar{U}_1$，则最大值为$\bar{U}_2$，所对应的 ω_m 为

$$\omega_m=\omega \qquad ⑳$$

评分标准：本题 22 分．第（1）问 6 分，①②式各 1 分，③⑤式各 2 分；第（2）问 9 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 1 分（⑩式中没有求和号的，也同样给分；没有力的符号，也给分），⑪⑫式各 2 分；第（3）问 7 分，⑬⑭式各 2 分，⑮⑯⑳式各 1 分．

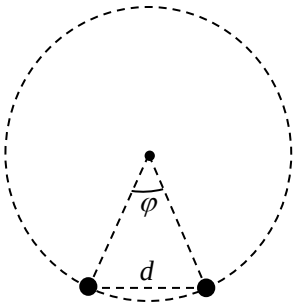
七、（26 分）（1）通有电流 i 的钨丝（长直导线）在距其 r 处产生的磁感应强度的大小为

$$B=k_m\frac{i}{r} \qquad ①$$

由右手螺旋定则可知，相应的磁感线是在垂直于钨丝的平面上以钨丝为对称轴的圆，磁感应强度的方向沿圆弧在该点的切向，它与电流 i 的方向成右手螺旋．

两根相距为 d 的载流钨丝（如图（a））间的安培力是相互吸引力，大小为

$$F=B\Delta L\,i=\frac{k_m\Delta L i^2}{d} \qquad ②$$



图(a)

考虑某根载流钨丝所受到的所有其他载流钨丝对它施加的安培力的合力．由系统的对称性可知，每根钨丝受到的合力方向都指向轴心；我们只要将其他钨丝对它的吸引力在径向的分量叠加即可．如图，设两根载流钨丝到轴心连线间的夹角为 φ，则它们间的距离为

$$d=2r\sin\frac{\varphi}{2} \qquad ③$$

由②③式可知，两根载流钨丝之间的安培力在径向的分量为

$$F_r=\frac{k_m\Delta L i^2}{2r\sin(\varphi/2)}\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{k_m\Delta L i^2}{2r} \qquad ④$$

它与 φ 无关，也就是说虽然处于圆周不同位置的载流钨丝对某根载流钨丝的安培力大小和方向均不同，但在径向方向上的分量大小却是一样的；而垂直于径向方向的力相互抵消．因此，某根载流钨丝所受到的所有其他载流钨丝对它施加的安培力的合力为

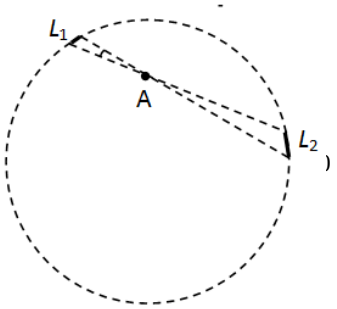
$$F=\frac{(N-1)k_m\Delta L i^2}{2r}=\frac{(N-1)k_m\Delta L I_{内}^2}{2rN^2} \qquad ⑤$$

其方向指向轴心．

（2）由系统的对称性可知，所考虑的圆柱面上各处单位面积所受的安培力的合力大小相等，方向与柱轴垂直，且指向柱轴．所考虑的圆柱面，可视为由很多钨丝排布而成，N 很大，但总电流不变．圆柱面上 $\Delta\varphi$ 角对应的柱面面积为

$$s=r\Delta\varphi\Delta L \qquad ⑥$$

圆柱面上单位面积所受的安培力的合力为



图(b)

$$P=\frac{N\Delta\varphi}{2\pi}\frac{F}{s}=\frac{N(N-1)k_m\Delta Li^2}{4\pi r^2\Delta L} \qquad ⑦$$

由于 $N\gg 1$，有 $N(N-1)i^2=I_{内}^2$ ⑧

由⑦⑧式得 $P=\dfrac{k_mI_{内}^2}{4\pi r^2}$ ⑨

代入题给数据得 $P=1.02\times10^{12}\,\mathrm{N/m^2}$ ⑩

一个大气压约为 $10^5\,\mathrm{N/m^2}$，所以 $P\approx10^7\,\mathrm{atm}$ ⑪

即相当于一千万大气压.

（3）考虑均匀通电的长直圆柱面内任意一点 A 的磁场强度. 根据对称性可知，其磁场如果不为零，方向一定在过 A 点且平行于通电圆柱的横截面. 在 A 点所在的通电圆柱的横截面（纸面上的圆）内，过 A 点作两条相互间夹角为微小角度 $\Delta\theta$ 的直线，在圆上截取两段微小圆弧 L_1 和 L_2，如图（b）所示. 由几何关系以及钨丝在圆周上排布的均匀性，通过 L_1 和 L_2 段的电流之比 I_1/I_2 等于它们到 A 点的距离之比 l_1/l_2：

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{l_1}{l_2} \qquad ⑫$$

式中，因此有

$$k_m\frac{I_1}{l_1}=k_m\frac{I_2}{l_2} \qquad ⑬$$

即通过两段微小圆弧在 A 点产生的磁场大小相同，方向相反，相互抵消. 整个圆周可以分为许多“对”这样的圆弧段，因此通电的外圈钨丝圆柱面在其内部产生的磁场为零，所以通电外圈钨丝的存在，不改变前述两小题的结果.

（4）由题中给出的已知规律，内圈电流在外圈钨丝所在处的磁场为

$$B=k_m\frac{I_{内}}{R} \qquad ⑭$$

方向在外圈钨丝阵列与其横截面的交点构成的圆周的切线方向，由右手螺旋法则确定. 外圈钨丝的任一根载流钨丝所受到的所有其他载流钨丝对它施加的安培力的合力为

$$F_{外}=\frac{(M-1)k_m\Delta L\,I_{外}^2}{2RM^2}+\frac{I_{外}}{M}\Delta L\frac{k_mI_{内}}{R}=\frac{k_m\Delta L(I_{外}^2+2I_{内}I_{外})}{2RM} \qquad ⑮$$

式中第一个等号右边的第一项可直接由⑤式类比而得到，第二项由⑭式和安培力公式得到.

因此圆柱面上单位面积所受的安培力的合力为

$$P_{外}=\frac{M\Delta\varphi}{2\pi}\frac{F_{外}}{R\Delta\varphi\Delta L}=\frac{k_m(I_{外}^2+2I_{内}I_{外})}{4\pi R^2} \qquad ⑯$$

若要求

$$\frac{k_m(I_{外}^2+2I_{内}I_{外})}{4\pi R^2}>\frac{k_mI_{内}^2}{4\pi r^2} \qquad ⑰$$

只需满足

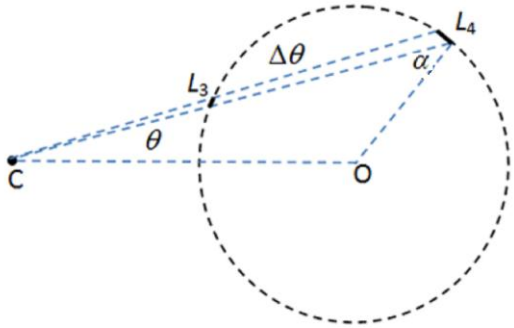
$$\frac{R}{r}<\sqrt{\frac{I_{外}^2+2I_{内}I_{外}}{I_{内}^2}}=\sqrt{\frac{M^2+2NM}{N^2}} \qquad ⑱$$

（5）考虑均匀通电的长直圆柱面外任意一点 C 的磁场强度. 根据对称性可知，长直圆柱面上的均匀电流在该点的磁场方向一定在过 C 点且平行于通电圆柱的横截面（纸面上的圆），与圆的径向垂直，满足右手螺旋法则. 在 C 点所在的通电圆柱的横截面内，过 C 点作两条相互间夹角为微小角度 $\Delta\theta$ 的直线，在圆上截取两段微小圆弧 L_3 和 L_4，如图（c）所示. 由几何关系以及电流在圆周上排布的均匀性，穿过 L_3 和 L_4 段的电流之比 I_3/I_4 等于它们到 C 点的距离之比 l_3/l_4：

$$\frac{I_3}{I_4}=\frac{L_3}{L_4}=\frac{l_3}{l_4} \qquad ⑲$$

式中，$CL_3=l_3$，$CL_4=l_4$，$CO=l$．由此得

$$\frac{I_3}{l_3}=\frac{I_4}{l_4}=\frac{I_3+I_4}{l_3+l_4} \qquad ⑳$$



图(c)

考虑到磁场分布的对称性，全部电流在 C 点的磁感应强度应与 CO 垂直．穿过 L_3 和 L_4 段的电流在 C 点产生的磁感应强度的垂直于 CO 的分量之和为

$$B_C=k_m\frac{I_3}{l_3}\cos\theta+k_m\frac{I_4}{l_4}\cos\theta=2k_m\frac{I_3+I_4}{l_3+l_4}\cos\theta \qquad ○21$$

设过 C 点所作的直线 CL_3L_4 与直线 CO 的夹角为 θ，直线 CL_3L_4 与圆的半径 OL_4 的夹角为 α（此时，将微小弧元视为点）．由正弦定理有

$$\frac{l_3}{\sin(\alpha-\theta)}=\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{l_4}{\sin(\alpha+\theta)} \qquad ○22$$

式中，$OCL_3=\theta$，$CL_4O=\alpha$．于是

$$B_C=2k_m\frac{I_3+I_4}{l_3+l_4}\cos\theta=2k_m\frac{I_3+I_4}{l[\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)]}\sin\alpha\cos\theta=k_m\frac{I_3+I_4}{l} \qquad ○23$$

即穿过两段微小圆弧的电流 I_3 和 I_4 在 C 点产生的磁场沿合磁场方向的投影等于 I_3 和 I_4 移至圆柱轴在在 C 点产生的磁场．整个圆周可以分为许多“对”这样的圆弧段，因此沿柱轴通有均匀电流的长圆柱面外的磁场等于该圆柱面上所有电流移至圆柱轴后产生的磁场

$$B=k_m\frac{I_{内}}{l},\quad l>r \qquad ○24$$

方向垂直于 C 点与圆心 O 的连线，满足右手螺旋法则．

评分标准：本题 26 分．第（1）问 6 分，②③式各 1 分，④式 2 分，⑤式 1 分，方向 1 分；第（2）问 6 分，⑥~⑪式各 1 分；第（3）问 3 分，⑫⑬式各 1 分，对称性分析正确 1 分；第（4）问 6 分，⑮⑯各 2 分，⑰⑱式各 1 分；第（5）问 5 分，⑲○21○22○23○24式各 1 分．

八、（20 分）

（1）由题给条件，观察到星系的谱线的频率分别为 $\nu_1'=4.549\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ 和 $\nu_2'=6.141\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$，它们分别对应于在实验室中测得的氢原子光谱的两条谱线 ν_1 和 ν_2．由红移量 z 的定义，根据波长与频率的关系可得

$$z=\frac{\nu_1-\nu_1'}{\nu_1'}=\frac{\nu_2-\nu_2'}{\nu_2'} \qquad ①$$

式中，ν' 是我们观测到的星系中某恒星发出的频率，而 ν 是实验室中测得的同种原子发出的相应的频率．上式可写成

$$\frac{1}{\nu_1'}=(1+z)\frac{1}{\nu_1},\qquad \frac{1}{\nu_2'}=(1+z)\frac{1}{\nu_2}$$

由氢原子的能级公式

$$E_n=\frac{E_0}{n^2}, \qquad ②$$

得到其巴耳末系的能谱线为

$$h\nu = \frac{E_0}{n^2} - \frac{E_0}{2^2} \qquad ③$$

由于 z 远小于 1，光谱线红移后的频率近似等于其原频率．把 ν_1' 和 ν_2' 分别代入上式，得到这两条谱线的相应能级的量子数

$$n_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h\nu_1'}{E_0}}} \approx 3 \quad , \quad n_2 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h\nu_2'}{E_0}}} \approx 4 \qquad ④$$

从而，证实它们分别由 n=3 和 4 向 k=2 的能级跃迁而产生的光谱，属于氢原子谱线的巴尔末系．这两条谱线在实验室的频率分别为

$$\nu_1 = -\frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 4.567 \times 10^{14}\,\text{Hz} \quad , \qquad \nu_2 = -\frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 6.166 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

根据波长与频率的关系可得，在实验室中与之相对应的波长分别是

$$\lambda_1 = 656.4\text{nm}\,，\ \lambda_2 = 486.2\text{nm} \qquad ⑤$$

（2）由①式可知

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1 - \nu_1'}{\nu_1'} + \frac{\nu_2 - \nu_2'}{\nu_2'}\right) = 0.0040 \qquad ⑥$$

由于多普勒效应，观测到的频率

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\ \nu$$

因为 v□ c，推导得

$$z = v/c$$

从而，该星系远离我们的速度大小为

$$v = zc = 0.0040 \times 2.998 \times 10^8\ \text{m/s} = 1.2 \times 10^6\ \text{m/s} \qquad ⑦$$

（3）由哈勃定律，该星系与我们的距离为

$$D = \frac{v}{H} = \frac{1.2 \times 10^6}{6.780 \times 10^4}\ \text{Mpc} = 18\text{Mpc} \qquad ⑧$$

评分标准：本题 20 分．第（1）问 14 分，①式 2 分，③④⑤式各 4 分；第（2）问 4 分，⑥⑦式各 2 分；第（3）问 2 分，⑧式 2 分．（有效数字位数正确但数值有微小差别的，仍给分）