2019年全国高中数学联赛模拟试题（十）参考答案

一、选择题（每小题3分，共27分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
选项	B	C	B	A	D	B	B	B	D

二 、填空题（每小题3分，共30分）

10、$6\sqrt{3}$； 12、 9\10\9 ； 12、 +2\-2 ； 13、$(9,81)$ 13、；

三、简答题

16、证明：∵ $MA=MD$，∴ $\triangle MAD$是等腰三角形，

∴ $\angle DAM=\angle ADM$. ……（1分）

∵ $AD//BC$,

∴ $\angle AMB=\angle DAM$，$\angle DMC=\angle ADM$.

∴ $\angle AMB=\angle DMC$. ……（3分）

又∵ 点M是BC的中点，∴ $BM=CM$. ……（4分）

在$\triangle AMB$和$\triangle DMC$中，

$$\begin{cases} AM=DM, \\ \angle AMB=\angle DMC, \\ BM=CM, \end{cases}$$

∴ $\triangle AMB\cong\triangle DMC$. ……（5分）

∴ $AB=DC$，四边形$ABCD$是等腰梯形.

17．解：设原来每天加固x米，根据题意，得……1分

$\frac{600}{x}+\frac{4800-600}{2x}=9$． ……3分

去分母，得 1200+4200=18x（或18x=5400）……5分

解得 $x=300$． ……6分

检验：当$x=300$时，$2x\neq 0$（或分母不等于0）．

∴$x=300$是原方程的解. ……7分

答：该地驻军原来每天加固300米.

18．(1)由于直线$y=-x+3$经过B、C两点，

令y=0得x=3；令x=0，得y=3

∴B(3，0)，C(0，3) ……1分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

∵点 B、C 在抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 上，于是得

$$\begin{cases}-9+3b+c=0\\ c=3\end{cases}$$ ……2 分

解得 b＝2，c＝3 ……3 分

∴所求函数关系式为 $y=-x^2+2x+3$ ……4 分

(2)①∵点 $P(x,y)$ 在抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 上，

且 $PN\perp x$ 轴，

∴设点 P 的坐标为 $(x,\ -x^2+2x+3)$ ……5 分

同理可设点 N 的坐标为 $(x,\ -x+3)$ ……6 分

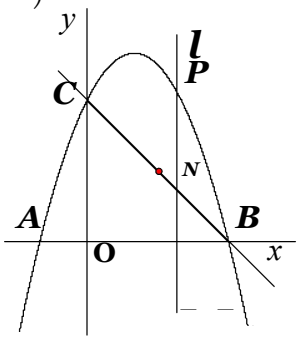
又点 P 在第一象限，

∴$PN=PM-NM$

$=(-x^2+2x+3)-(-x+3)$

$=x^2+3x$

$=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$



……7 分

∴当 $x=\frac{3}{2}$ 时，

线段 PN 的长度的最大值为 $\frac{9}{4}$. ……8 分

②解法一：

由题意知，点 P 在线段 BC 的垂直平分线上，

又由①知，$OB=OC$

∴BC 的中垂线同时也是 $\angle BOC$ 的平分线，

∴设点 P 的坐标为 (a,a)

又点 P 在抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 上，于是有 $a=-a^2+2a+3$ ∴

$a^2-a-3=0$ ……9 分

解得 $a_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2},a_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ……10 分

∴点 P 的坐标为：

$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ …11 分

若点 P 的坐标为 $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$，此时点 P 在第一象限，在 Rt△OMP 和 Rt△BOC 中，$MP=OM=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，$OB=OC=3$

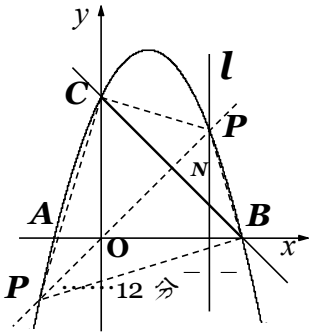
$$S_{\Delta BPC}=S_{四边形BOCP}-S_{\Delta BOC}$$

$$=2S_{\Delta BOP}-S_{\Delta BOC}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\cdot BO\cdot PM-\frac{1}{2}BO\cdot CO$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1+\sqrt{13}}{2}-\frac{9}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{13}-6}{2}$$



若点 P 的坐标为 $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$，此时点 P 在第三象限，则 $S_{\Delta BPC}=S_{\Delta BOP}+S_{\Delta COP}+S_{\Delta BOC}$

$$=\frac{1}{2}\times3\times\left|\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right|\times2+\frac{1}{2}\times3\times3$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{13}-1}{2}\times2+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{13}-3+9}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{13}+6}{2}$$ ……13 分

解法二：由题意知，点 P 在线段 BC 的垂直平分线上，
又由①知，$OB=OC$
∴BC 的中垂线同时也是∠BOC 的平分线，

∴设点 P 的坐标为 (a,a)

又点 P 在抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 上，于是有 $a=-a^2+2a+3$ ∴

$a^2-a-3=0$ ……9 分

解得 $a_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}, a_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ……10 分

∴点 P 的坐标为:

$(\frac{1+\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2})$ 或 $(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{13}}{2})$ …11 分

若点 P 的坐标为 $(\frac{1+\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2})$，此时点 P 在第一象限，在 Rt△OMP 和 Rt△BOC 中，

$MP=OM=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，$OB=OC=3$

$S_{\Delta BPC}=S_{梯形COMP}+S_{\Delta BMP}-S_{\Delta BOC}$

$=\frac{1}{2}(OC+MP)\cdot MO+\frac{1}{2}BM\cdot PM-\frac{1}{2}BO\cdot CO$

$=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\left(3-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\times3\times3$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{2}\left(3+\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)-\frac{9}{2}$

$=\frac{3+3\sqrt{13}-9}{2}$

$=\frac{3\sqrt{13}-6}{2}$ ……12 分

若点 P 的坐标为 $(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{13}}{2})$，此时点 P 在第三象限，（与解法一相同） ……13 分

当点 P 在第一象限时，△BPC 面积其它解法有：

①$OP=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{2}$，$BC=3\sqrt{2}$

$S_{\Delta BPC}=S_{四边形BOCP}-S_{\Delta BOC}$

$=\frac{1}{2}OP\cdot BC-\frac{1}{2}OB\cdot OC$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times3\times3$

$=\frac{3\sqrt{13}-6}{2}$

②$S_{\Delta BPC}=S_{\Delta PNC}+S_{\Delta PNB}$

$$=\frac{1}{2}\cdot PN\cdot OM+\frac{1}{2}\cdot PN\cdot MB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot PN（OM+MB）$$

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。