

2019 年全国高中数学联赛模拟试题（五）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

- 1、 a 、 b 是异面直线，直线 c 与 a 所成的角等于 c 与 b 所成的角，则这样的直线 c 有
(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 无数条
- 2、已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数， $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数，若 $f(x)-g(x)=x^2+2x+3$ ，则 $f(x)+g(x)=$
(A) $-x^2+2x-3$ (B) x^2+2x-3 (C) $-x^2-2x+3$ (D) x^2-2x+3
- 3、已知 $\triangle ABC$ ， O 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{2\pi}{3}$ ，则使 $AB+BC+CA \geq m(AO+BO+CO)$ 成立的 m 的最大值是
(A) 2 (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4、设 $x=0.82^{0.5}$ ， $y=\sin 1$ ， $z=\log_3 \sqrt{7}$ 则 x 、 y 、 z 的大小关系是
(A) $x < y < z$ (B) $y < z < x$ (C) $z < x < y$ (D) $z < y < x$
- 5、整数 $\left[\frac{10^{1995}}{10^{95}+3} \right]$ 的末尾两位数字是
(A) 10 (B) 01 (C) 00 (D) 20
- 6、设 (a, b) 表示两自然数 a 、 b 的最大公约数。设 $(a, b)=1$ ，则 (a^2+b^2, a^3+b^3) 为
(A) 1 (B) 2 (C) 1 或 2 (D) 可能大于 2

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

- 1、若 $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$ ，则 $f(\sqrt{2}-1)=$ _____。
- 2、设 F_1 、 F_2 是双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两个焦点， P 是双曲线上任意一点，从 F_1 引 $\angle F_1PF_2$ 平分线的垂线，垂足为 M ，则点 M 的轨迹方程是_____。

- 3、给定数列 $\{x_n\}$, $x_1=1$, 且 $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n + 1}{\sqrt{3} - x_n}$, 则 $x_{1999} - x_{601} =$ _____.
- 4、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 是 CD 中点, F 是 BB_1 中点, 则四面体 AD_1EF 的体积是_____.
- 5、在坐标平面上, 由条件 $\begin{cases} y \geq -|x| - 1 \\ y \leq -2|x| + 3 \end{cases}$ 所限定的平面区域的面积是_____.
- 6、12 个朋友每周聚餐一次, 每周他们分成三组, 每组 4 人, 不同组坐不同的桌子. 若要求这些朋友中任意两个人至少有一次同坐一张桌子, 则至少需要_____周.

三、(20 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过定点 $A(1, 0)$, 且焦点在 x 轴上, 椭圆与曲线 $|y|=x$ 的交点为 B, C . 现有以 A 为焦点, 过 B, C 且开口向左的抛物线, 抛物线的顶点坐标 $M(m, 0)$. 当椭圆的离心率 e 满足 $\frac{2}{3} < e^2 < 1$, 求实数 m 的取值范围.

四、(20 分)

a, b, c 均为实数, $a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

证明: $\frac{3}{2} \leq \frac{|a+b-2c| + |b+c-2a| + |c+a-2b|}{|a-b| + |b-c| + |c-a|} < 2$.

五、(20 分)

已知 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, 满足

- (i) a, b, c, d 均大于 0;
- (ii) 对于任一个 $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $f(x)$ 为整数;
- (iii) $f(1)=1, f(5)=70$.

试说明, 对于每个整数 x , $f(x)$ 是否为整数.

第二试

一、(50分)

设 K 为 $\triangle ABC$ 的内心，点 C_1 、 B_1 分别为边 AB 、 AC 的中点，直线 AC 与 C_1K 交于点 B_2 ，直线 AB 与 B_1K 交于点 C_2 。若 $\triangle AB_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等，试求 $\angle CAB$ 。

二、(50分)

设 $w = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ ， $f(x) = (x-w)(x-w^3)(x-w^7)(x-w^9)$ 。

求证： $f(x)$ 为一整系数多项式，且 $f(x)$ 不能分解为两个至少为一次的整系数多项式之积。

三、(50分)

在圆上有 21 个点。求在以这些点为端点组成的所有的弧中，不超过 120° 的弧的条数的最小值。

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：

zizzsw。



微信扫一扫，快速关注