2019 东南地区数学竞赛真题高一高二组

第十六届中国东南地区数学奥林匹克

江西·吉安

高一年级 第一天

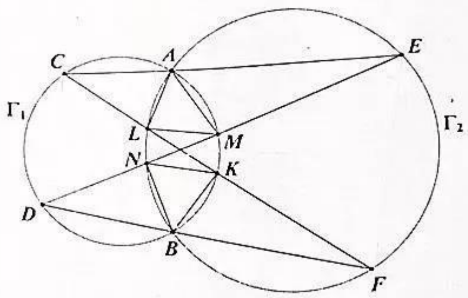
2019 年 7 月 30 日 上午 8:00—12:00

1．求最大的实数k，使得对任意正数a,b，均有

$$(a+b)(ab+1)(b+1)\geq kab^2.$$

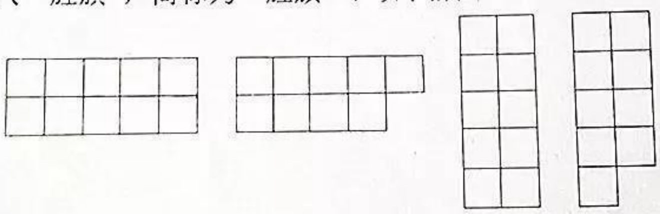
2．如图，两圆Γ_1,Γ_2交于A,B两点，C,D为Γ_1上两点，E,F为Γ_2上两点，满足A,B分别在线段CE,DF内，且线段CE,DF不相交．设CF与Γ_1,Γ_2分别交于点$K(\neq C),L(\neq F)$，DE与Γ_1,Γ_2分别交于点$M(\neq D),N(\neq E)$．

证明：若$\triangle ALM$的外接圆与$\triangle BKN$的外接圆相切，则这两个外接圆的半径相等．



3．函数$f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$满足：对任意正整数$a,b$，均有$f(ab)$整除$\max\{f(a),b\}$．是否一定存在无穷多个正整数$k$，使得$f(k)=1$？证明你的结论．

4．将一个2×5方格表按照水平方向或者竖直方向放置，然后去掉其四个角上的任意一个小方格，剩下由 9 个小方格组成的八种不同图形皆称为“五四旌旗”，或“八一旌旗”，简称为“旌旗”，如图所示．



现有一个固定放置的9×18方格表．若用 18 面上述旌旗将其完全覆盖，问共有多少种不同的覆盖方案？说明理由．

第十六届中国东南地区数学奥林匹克

江西·吉安

高一年级 第二天

2019年7月31日 上午8:00—12:00

5．称集合$S=\{1928,1929,1930,\cdots,1949\}$的一个子集$M$为“红色”的子集，若$M$中任意两个不同的元素之和均不被4整除．用$x,y$分别表示$S$的红色的四元子集的个数，红色的五元子集的个数．试比较x,y的大小，并说明理由． $y>x$.

112 1100

6．设a,b,c为给定的三角形的三边长．若正实数x,y,z满足$x+y+z=1$，求$axy+byz+czx$的最大值． 常规方法？ $\frac{abc}{3\sum a^2-2\sum ab}$

7．设$ABCD$为平面内给定的凸四边形．证明：存在一条直线上的四个不同的点P，Q，R，S和一个正方形$A'B'C'D'$，使得点P在直线AB与$A'B'$上，点Q在直线BC与$B'C'$上，点R在直线CD与$C'D'$上，点S在直线DA与$D'A'$上．

8．对于正整数$x>1$，定义集合

$$S_x=\left\{p^{\alpha}\ \middle|\ p\text{为}x\text{的素因子},\ \alpha\text{为非负整数},\ p^{\alpha}\,|\,x,\ \text{且}\alpha\equiv v_p(x)\pmod 2\right\},$$

其中$v_p(x)$表示x的标准分解式中素因子p的次数，并记$f(x)$为S_x中所有元素之和．约定$f(1)=1$．

今给定正整数m．设正整数数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$满足：对任意整数$n>m$，$a_{n+1}=\max\left\{f(a_n),\ f(a_{n-1}+1),\cdots,f(a_{n-m}+m)\right\}$．

(1) 证明：存在常数$A,B\ (0<A<1)$，使得当正整数x有至少两个不同的素因子时，必有$f(x)<Ax+B$；

(2) 证明：存在正整数Q，使得对所有$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<Q$．

第十六届中国东南地区数学奥林匹克

江西·吉安

高二年级 第一天

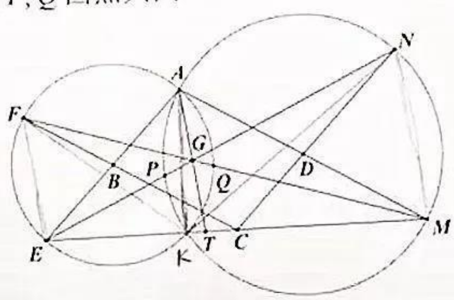
2019年7月30日 上午8:00—12:00

1．对任意实数a，用$[a]$表示不超过a的最大整数，记$\{a\}=a-[a]$．是否存在正整数m,n及$n+1$个实数$x_0,x_1,\cdots,x_n$，使得

$$x_0=428,\ x_n=1928,\ \frac{x_{k+1}}{10}=\left[\frac{x_k}{10}\right]+m+\left\{\frac{x_k}{5}\right\}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

成立？证明你的结论．

2．如图，在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD\neq 90^\circ$，以B为圆心，BA为半径的圆与AB,CB的延长线分别相交于点E,F，以D为圆心，DA为半径的圆与AD,CD的延长线分别相交于点M,N，直线EN,FM相交于点G，直线AG,ME相交于点T，直线EN与圆D相交于点$P(\neq N)$，直线MF与圆B相交于点$Q(\neq F)$．证明：G,P,T,Q四点共圆．



3．今有n人排成一行，自左至右按$1,2,\cdots,n$的顺序报数，凡序号为平方数者退出队伍；剩下的人自左至右再次按$1,2,3,\cdots$的顺序重新报数，凡序号为平方数者退出队伍；如此继续．在此过程中，每个人都将先后从队伍中退出．

用$f(n)$表示最后一个退出队伍的人在最初报数时的序号．求$f(n)$的表达式（用n表示）；特别地，给出$f(2019)$的值．

4．在5×5矩阵X中，每个元素为0或1．用$x_{i,j}$表示X中第i行第j列的元素$(i,j=1,2,\cdots,5)$．考虑X的所有行、列及对角线上的5元有序数组（共24个数组）：

$$(x_{i,1},x_{i,2},\cdots,x_{i,5}),\ (x_{i,5},x_{i,4},\cdots,x_{i,1})\ (i=1,2,\cdots,5),$$
$$(x_{1,j},x_{2,j},\cdots,x_{5,j}),\ (x_{5,j},x_{4,j},\cdots,x_{1,j})\ (j=1,2,\cdots,5),$$
$$(x_{1,1},x_{2,2},\cdots,x_{5,5}),\ (x_{5,5},x_{4,4},\cdots,x_{1,1}),$$
$$(x_{1,5},x_{2,4},\cdots,x_{5,1}),\ (x_{5,1},x_{4,2},\cdots,x_{1,5}).$$

若这些数组两两不同，求矩阵X中所有元素之和的可能值．

第十六届中国东南地区数学奥林匹克

江西·吉安

高二年级 第二天

2019 年 7 月 31 日 上午 8: 00－12: 00

5. 对任意正整数 n，用 a_n 表示三边长均为整数且最长边的长为 $2n$ 的三角形的个数.

(1) 求 a_n 关于 n 的表达式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足：$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k b_k=a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$. 求使 $b_n\le 2019a_n$ 成立的正整数 n 的个数.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，$\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 E，过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线，交 ED 的延长线于点 P. 已知 $AP=BC$. 证明：$BD\parallel CP$.

7. 甲、乙两人从 $0,1,2,\cdots,81$ 中轮流挑选互不重复的数，甲先选，每次每人从剩下的数中选 1 个数. 当这 82 个数被选完之后，记 A 为甲选择的所有数之和，B 为乙选择的所有数之和. 在挑选数的过程中，甲希望 A，B 的最大公约数越大越好，而乙希望 A，B 的最大公约数越小越好. 在甲、乙各自的最佳策略下，求挑选完毕之后 A，B 的最大公约数.

8. 对于正整数 $x>1$，定义集合

$$S_x=\left\{p^{\alpha}\ \middle|\ p\text{为}x\text{的素因子},\ \alpha\text{为非负整数},\ p^{\alpha}\mid x,\ \text{且}\alpha\equiv v_p(x)\pmod 2\right\},$$

其中 $v_p(x)$ 表示 x 的标准分解式中素因子 p 的次数，并记 $f(x)$ 为 S_x 中所有元素之和. 约定 $f(1)=1$.

今给定正整数 m. 设正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足：对任意整数 $n>m$，$a_{n+1}=\max\{f(a_n),f(a_{n-1}+1),\cdots,f(a_{n-m}+m)\}$.

(1) 证明：存在常数 $A,B\ (0<A<1)$，使得当正整数 x 有至少两个不同的素因子时，必有 $f(x)<Ax+B$;

(2) 证明：存在正整数 N,l，使得对所有 $n\ge N$，$a_{n+l}=a_n$ 成立.