2016中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(三)

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2017)02-0030-05

第一试

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2,且各项均为整数.若其所有项的和为2 016,则满足要求的数列有______个.

2. 已知曲线

$$(x-20)^2+(y-16)^2=r^2\text{与}y=\sin x$$

恰有一个公共点$P(x_0,y_0)$.则

$$\frac{1}{2}\sin 2x_0-16\cos x_0+x_0=\_\_\_\_\_\_.$$

3. 已知集合$M=\{(a,b)\mid a\leqslant -1,b\leqslant m\}$.若对任意$(a,b)\in M$,恒有$a\cdot 2^b-b-3a\geqslant 0$,则实数$m$的最大值为______.

4. 在$\triangle ABC$中,$3AB=2AC$,E、F分别为AC、AB的中点.若$BE<tCF$恒成立,则t的最小值为______.

5. 方程$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$的所有实数根的和为______.

6. 在四面体$ABCD$中,$\triangle ABD$为等边三角形,$\angle BCD=90°$,$BC=CD=1$,$AC=\sqrt{3}$,E、F分别为BD、AC的中点.则直线AE与BF所成角的余弦值为______.

7. 已知F_1、F_2为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,$P$为椭圆$C$上一点,且$\triangle F_1PF_2$的内心为$I$.若存在实数$\lambda$满足

$$(1+\lambda)\overrightarrow{PF_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{PI},$$

则椭圆C的离心率为______.

8. 将两个相同的白球、三个相同的红球、四个相同的黑球全部放入三个不同的袋子中.则没有空袋的放法数为______.

二、解答题(共56分)

9. (16分)已知复数a_1、a_2、a_3满足

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1^3+a_2^3+a_3^3=a_1^4+a_2^4+a_3^4=0.$$

求$a_1+a_2+a_3$的所有可能值.

10. (20分)已知抛物线$\Gamma:y^2=8x$的焦点为F,过F作一条直线l与抛物线Γ交于A、B两点,分别过A、B作抛物线Γ的切线,与y轴交于P、Q两点.求四边形$APQB$面积的最小值.

11. (20分)已知函数

$$f(x)=(1-x^2)(x^2+bx+c)(x\in[-1,1]).$$

记$|f(x)|$的最大值为$M(b,c)$.当b、c变化时,求$M(b,c)$的最小值.

加试

一、(40分)已知整数$a>b>1$,且满足

$$(a+b)\mid(ab+1),(a-b)\mid(ab-1).$$

证明:$a<\sqrt{3}b$.

二、(40分)如图1,四边形$ABCD$为$\odot O$的内接四边形,AC不是$\odot O$的直径,E为线段AC上一点,满足$AC=4AE$,过点E作OE的垂线,分别与AB、AD交于点P、Q.证明:$\angle POQ=\angle BAD$的充分必要条件是

$$AB\cdot CD=AD\cdot BC.$$

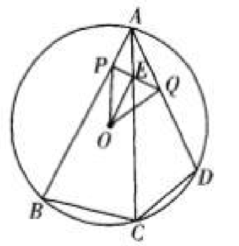

图1

三、(50分)有20种不同颜色的球,每种

颜色的球至少有10个，总共有800个球. 现将这些球放入若干箱子中，使得每个箱子中至少有10个球且它们全部同色. 问：是否存在一种分球装箱的方法，通过把这些箱子分给20名学生后，使得每名学生拥有球的数量一样多？

四、(50分) 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

令 $k_n = 2 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - x_i^2} + k_n \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} x_j x_k \geqslant n - 1.$$

参考答案

第一试

一、**1.** 34.

由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

$= n(n + a_1 - 1) = 2\,016$

$\Rightarrow n \mid 2\,016$，且 $n \geqslant 3$.

而 $2\,016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$，故所求为

$6 \times 3 \times 2 - 2 = 34$.

2. 20.

由已知得在点 $P(x_0, y_0)$ 处有公共切线.

故 $\frac{\sin x_0 - 16}{x_0 - 20}\cos x_0 = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x_0 - 16\cos x_0 + x_0 = 20$.

3. 1.

注意到，

$a \cdot 2^b - b - 3a \geqslant 0 \Leftrightarrow (2^b - 3)a - b \geqslant 0$

对任意 $a \leqslant -1$ 均成立.

则 $\begin{cases} 2^b - 3 \leqslant 0, \\ 2^b + b \leqslant 3 \end{cases} \Rightarrow b \leqslant 1$.

4. $\frac{7}{8}$.

不妨设 $AB = 2, AC = 3, BC = x(1 < x < 5)$.

由中线长公式得

$BE = \frac{\sqrt{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{2}$,

$CF = \frac{\sqrt{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{2x^2 + 14}}{2}$.

则 $t > \frac{BE}{CF} = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 14}} = \sqrt{1 - \frac{15}{2x^2 + 14}}$.

又因为 $1 < x < 5$，所以，$t \geqslant \frac{7}{8}$.

5. $\frac{35}{12}$.

由 $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$，知 $x > 1$.

令 $x = \frac{1}{\cos\theta}\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$. 则

$\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{35}{12}$.

令 $t = \cos\theta + \sin\theta$. 则

$35t^2 - 24t - 35 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{5}$(负根舍掉)

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$.

故原方程的根为 $\frac{5}{3}$、$\frac{5}{4}$，两根之和为 $\frac{35}{12}$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

由 $\angle BCD = 90°, BC = CD = 1$

$\Rightarrow BD = BA = AD = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 90°$.

故 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \\ &\quad \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos < \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF} > = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BF}|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

从而，所求为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. $\frac{1}{2}$.

因为$\triangle F_1PF_2$的内心为I,所以,

$|F_1F_2|\overrightarrow{IP}+|PF_1|\overrightarrow{IF_2}+|PF_2|\overrightarrow{IF_1}=\mathbf{0}$.

结合题设条件式得

$(1+\lambda)\overrightarrow{IF_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{IF_2}+\overrightarrow{IP}=\mathbf{0}$

$\Rightarrow \frac{1+\lambda}{|PF_2|}=\frac{1-\lambda}{|PF_1|}=\frac{1}{|F_1F_2|}$

$\Rightarrow |PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|$

$\Leftrightarrow 2a=4c \Leftrightarrow e=\frac{1}{2}$.

8. 723.

不妨设三个袋子分别为1、2、3号袋.

设集合I为"将两个相同的白球、三个相同的红球、四个相同的黑球全部放入1、2、3号袋中的放法集";集合M_i为"将两个相同的白球、三个相同的红球、四个相同的黑球全部放入1、2、3号袋中,其中,第i号袋为空的放法集".

则无空袋的放法数为

$$m=|I|-\sum_{1\leqslant i\leqslant 3}|M_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}|M_i\cap M_j|$$
$$=|I|-\mathrm{C}_3^2|M_3|+\mathrm{C}_3^1|M_2\cap M_3|.$$

设放入1、2、3号袋中的白球个数分别为x_1、x_2、x_3,红球个数分别为y_1、y_2、y_3,黑球个数分别为z_1、z_2、z_3.

则$|I|$为不定方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ y_1+y_2+y_3=3,(x_i、y_i、z_i\in\mathbf{N})\\ z_1+z_2+z_3=4\end{cases}$$

的解的组数,于是,$|I|=\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_6^2=900$;

$|M_3|$为不定方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ y_1+y_2=3,(x_i、y_i、z_i\in\mathbf{N})\\ z_1+z_2=4\end{cases}$$

的解的组数,于是,$|M_3|=\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1=60$.

显然,$|M_2\cap M_3|=1$.

故$m=|I|-\mathrm{C}_3^2|M_3|+\mathrm{C}_3^1|M_2\cap M_3|$

$=900-3\times 60+3=723$.

二、9. 注意到,

$$\sum_{i=1}^3 a_i^3=\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right)\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)-\left(\sum_{i\neq j}a_ia_j\right)\left(\sum_{i=1}^3 a_i^2\right)+\left(\prod_{i=1}^3 a_i\right)\left(\sum_{i=1}^3 a_i\right).$$

由$\sum_{i=1}^3 a_i^2=\sum_{i=1}^3 a_i^3=\sum_{i=1}^3 a_i^4=0$

$\Rightarrow a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)=0$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3=0$ 或 $a_1a_2a_3=0$.

若$a_1a_2a_3=0$,不妨设$a_3=0$.

则条件化为$\begin{cases}a_1^2+a_2^2=0,\\ a_1^3+a_2^3=0,\\ a_1^4+a_2^4=0.\end{cases}$

故$a_1^2a_2^2=\frac{(a_1^2+a_2^2)^2-(a_1^4+a_2^4)}{2}=0$

$\Rightarrow a_1a_2=0\Rightarrow a_1=0$ 或 $a_2=0$

$\Rightarrow a_1=a_2=0=a_3\Rightarrow a_1+a_2+a_3=0$.

综上,$a_1+a_2+a_3=0$.

10. 设$A\left(\frac{y_1^2}{8},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{8},y_2\right)$$(y_1>0,y_2<0)$,

$l_{AB}:x=my+2$.

上式与抛物线Γ的方程联立并消去x得

$y^2-8my-16=0$

$\Rightarrow y_1+y_2=8m,y_1y_2=-16$.

过点A的切线方程为$yy_1=4(x+x_1)$.

令$x=0$,得

$$y_P=\frac{4x_1}{y_1}=4\times\frac{\frac{y_1^2}{8}}{y_1}=\frac{y_1}{2}.$$

类似地,$y_Q=\frac{y_2}{2}$.

过点A、B分别作y轴的垂线,垂足分别为E、D.

则$S_{四边形APQB}=S_{四边形AEDB}-S_{\triangle AEP}-S_{\triangle BDQ}$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1-y_2)-\left(\frac{1}{2}\left|y_1-\frac{1}{2}y_1\right|x_1+\frac{1}{2}\left|y_2-\frac{1}{2}y_2\right|x_2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1-y_2)-\frac{1}{4}(x_1y_1-x_2y_2)$$

$$=\frac{1}{32}(2(y_1^2+y_2^2)(y_1-y_2)-(y_1^3-y_2^3))$$

$$=\frac{1}{32}((y_1+y_2)^2-3y_1y_2))\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$
$$=\frac{1}{32}(64m^2+48)\sqrt{64m^2+64}.$$

注意到,函数

$$f(m)=\frac{1}{32}(64m^2+48)\sqrt{64m^2+64}$$

单调递增.

故 $m=0$ 时,面积最小,最小值为12.

11. 因为对任意的 $x\in[-1,1]$, $|f(x)|\leqslant M(b,c)$,所以,取 $x=\pm\lambda,0$,得

$$\begin{cases}|c|\leqslant M(b,c),\\|(1-\lambda^2)(\lambda^2+b\lambda+c)|\leqslant M(b,c),\\|(1-\lambda^2)(\lambda^2-b\lambda+c)|\leqslant M(b,c)\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2|(1-\lambda^2)(\lambda^2+c)|\leqslant 2M(b,c)$$
$$\Rightarrow |(1-\lambda^2)(\lambda^2+c)|\leqslant M(b,c)$$
$$\Rightarrow |(1-\lambda^2)\lambda^2|$$
$$\leqslant|(1-\lambda^2)(\lambda^2+c)|+(1-\lambda^2)|c|$$
$$\leqslant(2-\lambda^2)M(b,c)$$
$$\Rightarrow M(b,c)\geqslant\frac{(1-\lambda^2)\lambda^2}{2-\lambda^2}$$
$$\Rightarrow M(b,c)\geqslant\left(\frac{(1-\lambda^2)\lambda^2}{2-\lambda^2}\right)_{\max}=3-2\sqrt{2}.$$

此时,可取

$$M=3-2\sqrt{2},b=0,c=2\sqrt{2}-3,$$

即 $$(1-x^2)(x^2+2\sqrt{2}-3)\leqslant3-2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow(x^2-2+\sqrt{2})^2\geqslant0.$$

显然,上式等号可以取到.

加　试

一、由整除的性质知

$$(a+b)\mid(b(a+b)-(ab+1))$$
$$\Rightarrow(a+b)\mid(b^2-1),$$
$$(a-b)\mid(b(a-b)-(ab-1))$$
$$\Rightarrow(a-b)\mid(b^2-1).$$

注意到,$a>b>1$.

则 $b^2-1>0,a-b>0$

$$\Rightarrow[a+b,a-b]\mid(b^2-1)$$
$$\Rightarrow[a+b,a-b]\leqslant b^2-1.$$

设 $d=(a,b)$. 则 $d\mid(a+b)$.

又 $(a+b)\mid(ab+1)$,从而,$d\mid(ab+1)$.

结合 $d\mid ab$,知

$$d\mid1\Rightarrow(a,b)=1$$
$$\Rightarrow(a+b,a-b)=(a+b,2a)$$
$$=(a+b,2b)\leqslant(2a,2b)=2$$
$$\Rightarrow[a+b,a-b]=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b,a-b)}\geqslant\frac{a^2-b^2}{2}$$
$$\Rightarrow b^2-1\geqslant\frac{a^2-b^2}{2}$$
$$\Rightarrow a^2\leqslant3b^2-2<3b^2$$
$$\Rightarrow a<\sqrt{3}b.$$

二、分别取 AB、AC、AD 的中点 M、K、N. 则 E 为 AK 的中点.

显然,O、E、P、M,O、E、Q、N 分别四点共圆.

故 $\angle POQ=\angle POE+\angle QOE$

$=\angle EMP+\angle ENQ=\angle MEN-\angle MAN$

$\Rightarrow\angle POQ=\angle BAD$

$\Leftrightarrow\angle MEN=2\angle BAD=\angle BOD.$

由 $BK/\!/ME$,$DK/\!/NE$

$\Rightarrow\angle MEN=\angle BKD.$

故 $\angle POQ=\angle BAD\Leftrightarrow\angle BKD=\angle BOD$

$\Leftrightarrow O$、B、D、K 四点共圆.

设点 B、D 处的切线交于点 R. 显然,R、B、O、D 四点共圆.

则 O、B、D、K 四点共圆

$\Leftrightarrow O$、B、R、D、K 五点共圆.

注意到,$OK\perp AC$.

若 O、B、R、D、K 五点共圆,则 K、R、C 三点共线. 故 A、B、C、D 为调和点列,有

$AB\cdot CD=AD\cdot BC.$

反之,若上式成立,则 A、B、C、D 为调和点列,K、R、C 三点共线,O、B、R、D、K 五点共圆.

故 $\angle POQ=\angle BAD\Leftrightarrow AB\cdot CD=AD\cdot BC.$

三、一般地,可用数学归纳法证明:对于 n 种不同颜色的球(共 $40n$ 个),若每种颜色的球至少10个,且每个箱子至少放10个同色球,则可以分给 n 名学生,使得每名学生恰

有 40 个球.

当 $n=1$ 时,显然成立.

假设命题对 $n-1$ 时成立,则当 n 时设最多的两种颜色的球的个数分别为 x、y.

故 $x+y\geqslant 80$.

不妨设 $x\geqslant y$. 用一种新的颜色的球来代替这两种颜色的球,并取新颜色的球数为

$$z=x+y-40.$$

由归纳假设,可把球分给 $n-1$ 名学生,使得每人恰有 40 个球. 不妨设每个箱子的球数均介于 10 和 20 之间(多于 20 个球的可以把它分到若干箱),并设新颜色的球被分到个数分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 的 k 个箱中,则

$$\sum_{i=1}^{k}c_i=x+y-40.$$

令 $S_j=\sum_{i=1}^{j}c_i$.

由于 $x-\sum_{i=1}^{k}c_i=40-y\leqslant 30$,故可设 i_0 为使得 $x-S_i\leqslant 30$ 的最小下标.

现把原来的 x 个球分成 i_0+1 箱,个数分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_{i_0}$ 和 $x-S_{i_0}$,则 $x-S_{i_0}\leqslant 30$,且

$$x-S_{i_0}=(x-S_{i_0-1})-c_{i_0}>30-c_{i_0}\geqslant 10.$$

于是,将原来有 y 个球的那种颜色的球分为 $c_{i_0+1},c_{i_0+2},\cdots,c_k$ 和 $y-\sum_{i=i_0+1}^{k}c_i$.

则 $y-\sum_{i=i_0+1}^{k}c_i\in[10,30]$.

从而,将 $y-\sum_{i=i_0+1}^{k}c_i$ 和 $x-S_{i_0}$ 分给第 n 名学生即可,由归纳假设命题成立.

四、分两种情形证明.

(1)若 $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k\leqslant 0$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}+k_n\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k\geqslant\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)=n-1.$$

(2)若 $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k\geqslant 0$,记 $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k=q$,则原不等式可转化为

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}\geqslant n-1-k_nq.$$

上式两边平方得

$$\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left(\sqrt{1-x_j^2}\sqrt{1-x_k^2}\right)\geqslant(n-1)^2-2(n-1)k_nq+k_n^2q^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left(\sqrt{1-x_j^2}\sqrt{1-x_k^2}\right)\geqslant(n-1)(n-2)-2(n-1)k_nq+k_n^2q^2. \quad ①$$

由柯西不等式,知对任意的 $1\leqslant j<k\leqslant n$,均有

$$\sqrt{1-x_j^2}\sqrt{1-x_k^2}=\left(\sqrt{\sum_{i\neq j}x_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i\neq k}x_i^2}\right)\geqslant\left|\sum_{i\neq j,k}x_i^2+x_jx_k\right|=|1-x_j^2-x_k^2+x_jx_k|.$$

将上式对所有满足 $1\leqslant j<k\leqslant n$ 的 j、k 求和得

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left(\sqrt{1-x_j^2}\sqrt{1-x_k^2}\right)\geqslant\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|1-x_j^2-x_k^2+x_jx_k|$$
$$\geqslant|\mathrm{C}_n^2-(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+q|=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+q.$$

因此,要证式①成立,只需证明

$$(n-1)(n-2)+2q\geqslant(n-1)(n-2)-2(n-1)k_nq+k_n^2q^2,$$

即 $q(2+2(n-1)k_n-k_n^2q)\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow q\left(\frac{n-1}{2}-q\right)\geqslant 0 \quad ②$$

成立(由 k_n 的定义知 $\frac{2+2(n-1)k_n}{k_n^2}=\frac{n-1}{2}$).

注意到,

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_j-x_k)^2\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}x_jx_k\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n-1.$$

于是,$q\leqslant\frac{n-1}{2}$.

再结合 $q>0$,知式②成立.

进而,原不等式成立.

(命题组 提供)