第十四届中国东南地区数学奥林匹克

高一年级　　第一天

题 1　设 $x_i \in \{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$. 若函数 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的值只取 0 或 1, 则称 f 是一个 n 元布尔函数, 并记

$$D_n(f)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\}$$

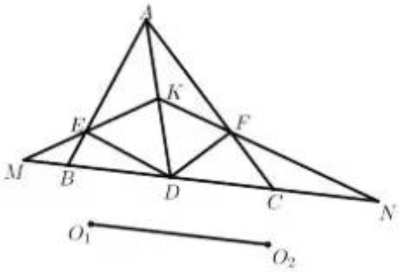
(1) 求 n 元布尔函数的个数;

(2) 设 g 是 10 元布尔函数, 满足

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_{10})\equiv 1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\cdots x_{10} \pmod 2$$

求集合 $D_{10}(g)$ 的元素个数, 并求 $\sum\limits_{(x_1,x_2,\cdots,x_{10})\in D_{10}(g)}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})$.

题 2　如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB\neq AC$, K 是中线 AD 的中点, $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$ 于 F, 直线 KE,KF 分别与直线 BC 相交于点 M,N, $\triangle DEM,\triangle DFN$ 的外心分别为 O_1,O_2. 证明: $O_1O_2 \parallel BC$.



题 3　对于任意正整数 n, 记 D_n 为 n 的正约数全体, $f_i(n)$ 为集合

$$F_i(n)=\{a\in D_n|a\equiv i \pmod 4\}$$

的元素个数, 其中 $i=1,2$. 求最小的正整数 m, 使得 $2f_1(m)-f_2(m)=2017$.

题 4　实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 满足 $a_1=a_{2017}$, 且

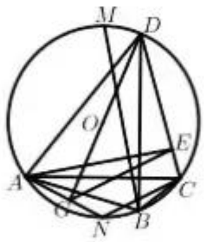
$$|a_i+a_{i+2}-2a_{i+1}|\leq 1, i=1,2,\cdots,2015$$

记 $M=\max\limits_{1\leq i<j\leq 2017}|a_i-a_j|$, 求 M 的最大值.

第十四届中国东南地区数学奥林匹克

高一年级　　第二天

题 1　如图, 在圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 互相垂直, 弧 $\widehat{ADC}$ 与弧 $\widehat{ABC}$ 的中点分别为 M, N, 过点 D 的直径与弦 AN 交于点 G. K 是 CD 边上一点, 满足 $GK \parallel NC$. 证明: $BM \perp AK$.



题 2　已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{8}$, 且 $a_{n+1}^2 + 3a_n a_{n+2} = 2a_{n+1}(a_n + a_{n+2})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对任意正整数 n, 有 $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

题 3　设 m 是正整数, 对于 $k = 1, 2, \cdots$, 定义 $a_k = \frac{(2km)!}{3^{(k-1)m}}$. 证明: 在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中, 既有无穷多个整数项, 也有无穷多个非整数项.

题 4　给定整数 $m \geq 2, n \geq 3$. 设集合

$$S = \{(a,b) | a \in \{1,2,\cdots,m\}, b \in \{1,2,\cdots,n\}\}$$

A 为 S 的子集. 若不存在正整数 x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, 使得 $x_1 < x_2, y_1 < y_2 < y_3$, 且

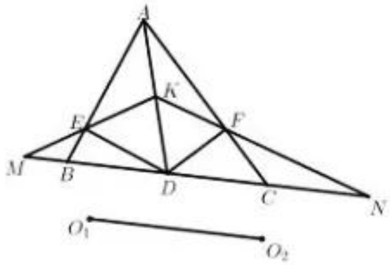
$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2) \in A$$

求集合 A 的元素的个数的最大值.

第十四届中国东南地区数学奥林匹克

高二年级　　第一天

题 1　如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, K 是中线 AD 的中点, $DE \perp AB$ 于 E, $DF \perp AC$ 于 F, 直线 KE, KF 分别与直线 BC 相交于点 M, N, $\triangle DEM$, $\triangle DFN$ 的外心分别为 O_1, O_2. 证明: $O_1O_2 \parallel BC$.



题 2　设 $x_i \in \{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$. 若函数 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的值只取 0 或 1, 则称 f 是一个 n 元布尔函数, 并记

$$D_n(f)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\}$$

(1) 求 n 元布尔函数的个数;

(2) 设 g 是 n 元布尔函数, 满足

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\cdots x_n \pmod 2$$

求集合 $D_n(g)$ 的元素个数, 并求最大的正整数 n, 使得

$$\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D_n(g)}(x_1+x_2+\cdots+x_n)<2017$$

题 3　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 为正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})$$

题 4　对于任意正整数 n, 记 D_n 为 n 的正约数全体, $f_i(n)$ 为集合

$$F_i(n)=\{a\in D_n|a\equiv i \pmod 4\}$$

的元素个数, 其中 $i=0,1,2,3$. 求最小的正整数 m, 使得 $f_0(m)+f_1(m)-f_2(m)-f_3(m)=2017$.

第十四届中国东南地区数学奥林匹克

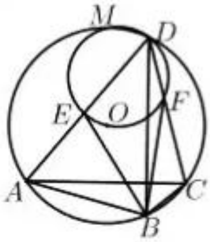
高二年级　　第二天

题 1　设 a, b, c 为实数, $a \neq 0$. 若一元二次方程 $2ax^2+bx+c=0$ 在 $[-1,1]$ 上有实根, 证明:

$$\min\{c, a+c+1\} \leq \max\{|b-a+1|, |b+a+-1|\}$$

并确定上述不等式等号成立时, a, b, c 满足的充要条件.

题 2　如图, 在圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相互垂直, 弧 $\widehat{ADC}$ 的中点为 M, 过 M, O, D 三点的圆与 DA, DC 分别交于 E, F. 证明: $BE=BF$.



题 3　求最大的正整数 n, 使得存在 n 个互不相同的整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 满足

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=2017$$

题 4　给定整数 $m \geq 3, n \geq 3$. 设集合

$$S=\{(a,b) | a \in \{1,2,\cdots,m\}, b \in \{1,2,\cdots,n\}\}$$

A 为 S 的子集. 若不存在正整数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, 使得 $x_1<x_2<x_3, y_1<y_2<y_3$, 且

$$(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_2,y_3),(x_3,y_2) \in A$$

求集合 A 的元素的个数的最大值.