第二届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 证法 1 如图 1,设 AE 与 BC、BG 与 CA、AE 与 BG 分别交于点 A_1、B_1、H. 则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,点 A_1、B_1 分别在 $\odot O_2$、$\odot O_1$ 上.

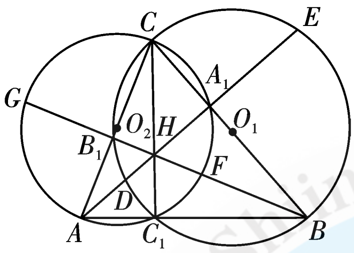

图 1

因为 BC、CA 分别是 DE、FG 的中垂线,所以,$CD=CE$,$CF=CG$.

注意到,$\angle BEC=\angle AGC=90°$.

由射影定理得

$CE^2=CB\cdot CA_1$,$CG^2=CA\cdot CB_1$.

又因为 A、B、A_1、B_1 四点共圆,所以,

$CA\cdot CB_1=CB\cdot CA_1$.

从而,$CD=CE=CG=CF$,即 E、F、D、G 四点共圆,且圆心为 C.

证法 2 如图 1,设 AE 与 BG 交于点 H. 则 H 为$\triangle ABC$ 的垂心.

延长 CH 与 AB 交于点 C_1.

由相交弦定理得

$DH\cdot HE=CH\cdot HC_1=FH\cdot HG$.

因此,E、F、D、G 四点共圆.

因为 BC、CA 分别是 DE、FG 的中垂线,所以,BC 与 CA 的交点 C 即为过点 E、F、D、G 的圆的圆心.

2. 对于正整数 n,易知

$$n-1,n-2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

这$\left[\frac{n-1}{2}\right]$个数不可能为 n 的正因子,即

$$d(n)\leqslant n-\left[\frac{n-1}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}+1.$$

则 $a_{n+1}\leqslant\dfrac{\left[\frac{3}{2}a_n\right]}{2}+1+2\,011\leqslant\dfrac{3}{4}a_n+2\,012.$

下面用数学归纳法证明:

$a_n\leqslant\max\{A,8\,048\}$.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

设当 $n=k$ 时,命题成立.

则当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1}\leqslant\frac{3}{4}\max\{A,8\,048\}+2\,012$$

$$\leqslant\frac{3}{4}\max\{A,8\,048\}.$$

所以,对任意 $n\in\mathbf{Z}_+$ 命题均成立.

由此,$\{a_n\}$为有界的正整数数列.

于是,存在 m、$k\in\mathbf{Z}_+$,使得 $a_m=a_{m+k}$.

因此,$a_{m+1}=a_{m+k+1}$,……$a_{m+l}=a_{m+k+l}$.

故$\{a_n\}$是从 a_m 项开始周期为 k 的数列.

3. 设 $p=k^2+r$,其中,k、r 是整数,且满足 $0\leqslant r\leqslant 2k$.

因为$\dfrac{\sqrt{p}-31}{75}$是$\dfrac{1}{x}$的小数部分,所以,

$$0\leqslant\frac{\sqrt{p}-31}{75}<1\Rightarrow 31\leqslant\sqrt{p}<106.$$

由 p 为素数,知$\sqrt{p}$为无理数,且

$[\sqrt{p}]=k$.

于是,$x=\sqrt{p}-k\ (0<x<1)$.

由于$\dfrac{1}{x}>1$,设

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{p}-k}=N+\frac{\sqrt{p}-31}{75}\ (N\geqslant 1).$$

则$\dfrac{\sqrt{p}+k}{r}=N+\dfrac{\sqrt{p}-31}{75}$.

由无理部分、有理部分分别相等得

$\frac{1}{r}=\frac{1}{75},\frac{k}{r}=\frac{75N-31}{75}$

$\Rightarrow r=75,k=75N-31.$

若 $N\geqslant 2$,则 $k\geqslant 75\times 2-31=119.$

于是,$[\sqrt{p}]=k\geqslant 119$,与 $31\leqslant\sqrt{p}<106$ 矛盾.

因此,$N=1,k=44.$

故 $p=44^2+75=2\,011$,且 2 011 为素数.

4. 不能.

把棋子按字典序重新编号,即 (i,j) 编号为 $(i-1)n+j$. 棋盘的格子也按字典序编号,第 i 行第 j 列为 $(i-1)n+j$. 标准状态就是第 k 枚棋子在第 k 个格子中.

按格子的编号从小到大记录格子中棋子的编号,空格不记录. 于是,得到 n^2-1 个数的一个排列.

下面分情形讨论.

(1)当 n 为奇数时,移动空格左右两侧的棋子,对应的排列不变,移动空格上下两侧的棋子,相当于对排列做了一个 n 轮换. 由于 n 为奇数,则 n 轮换是偶置换. 因而,排列的奇偶性不变.

(2)当 n 为偶数时,移动空格左右两侧的棋子,排列仍不变,移动空格上下两侧的棋子,排列的奇偶性互换,同时,空格所在行数的奇偶性也互换.

综上,对标准状态下,把编号 $(n,n-2)$ 与 $(n,n-1)$ 的两枚棋子换位,是无法移动到标准状态的.

5. 先证明:O 为 $\triangle DEF$ 的垂心.

如图 2,设 H 为 $\triangle DEF$ 的垂心,DH 与 EF、EH 与 FD、FH 与 DE 分别交于点 L、M、N.

由 $\angle EHF=180^\circ-\angle EDF$

$=180^\circ-\angle EAF$,

知 A、E、H、F 四点共圆.

于是,$\angle FAH=\angle FEH.$

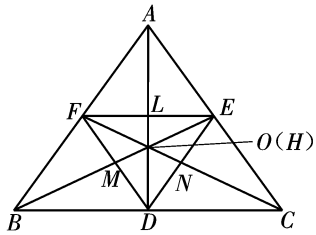

图 2

类似地,由 B、D、H、F 四点共圆得

$\angle FBH=\angle FDH.$

因为 D、E、L、M 四点共圆,所以,

$\angle FEM=\angle FDL.$

于是,$\angle FAH=\angle FBH.$

因此,$HA=HB.$

类似地,$HB=HC.$

从而,H 为 $\triangle ABC$ 的外心 O.

设 $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$,

$\angle OCA=\angle OAC=\beta$,

$\angle OAB=\angle OBA=\gamma.$

则 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ.$

因为 $BE\perp DF$,所以,$\angle BFD=90^\circ-\gamma.$

由 $\angle BFC=2\beta+\gamma$,得

$\angle DFC=2\beta+\gamma-(90^\circ-\gamma)$

$=2(\beta+\gamma)-90^\circ=90^\circ-2\alpha.$

又因为 $CF\perp DE$,所以,

$\angle DFC=90^\circ-\angle FDE=90^\circ-\angle BAC$

$=90^\circ-(\beta+\gamma)=\alpha.$

于是,$90^\circ-2\alpha=\alpha\Rightarrow\alpha=30^\circ.$

类似地,$\beta=\gamma=30^\circ.$

故 $\angle BAC=\angle CBA=\angle ACB=60^\circ.$

因此,$\triangle ABC$ 为正三角形.

6. 当 $x=y=z=0$ 时,不等式显然成立.

当 x、y、z 不全为 0 时,将不等式变形为

$$-\frac{3}{2}\leqslant\frac{3xy+yz+zx}{x^2+y^2+2z^2}\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{4}.$$

设 $F(x,y,z)=\frac{3xy+yz+zx}{x^2+y^2+2z^2}.$

下面求 $F(x,y,z)$ 的值域.

当 $z=0$ 时,

$$F(x,y,z)=\frac{3xy}{x^2+y^2}\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right],$$

原不等式成立.

当 $z\neq 0$ 时,

$$Fx^2-(3y+z)x+(F(y^2+2z^2)-yz)=0,$$

$$\begin{aligned}\Delta&=(3y+z)^2-4F(F(y^2+2z^2)-yz)\\&=9y^2+6yz+z^2-4F^2y^2-8F^2z^2+4Fyz\\&=(9-4F^2)y^2+(6z+4Fz)y+(z^2-8F^2z^2).\end{aligned}$$

当 $F=\pm\frac{3}{2}$时,原不等式成立.

当 $F\neq\pm\frac{3}{2}$,即任意 $y\in\mathbf{R}$ 时,$\Delta\geqslant 0$.

下面分两种情形讨论.

(1)当 $\Delta=0$ 时,

$$\Delta_1=(6z+4Fz)^2-4(9-4F^2)(z^2-8F^2z^2)\geqslant 0.$$

则

$$\begin{aligned}&(3+2F)^2-(9-4F^2)(1-8F^2)\\&=-32F^4+80F^2+12F\\&=-4F(2F+3)(4F^2-6F-1)\\&=-4^2F(2F+3)\left(F-\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)\left(F-\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $F\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right]\cup\left[0,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right]$.

(2)当 $\Delta>0$ 时,

$$\begin{cases}9-4F^2>0,\\ \Delta_2=(6z+4Fz)^2-4(9-4F^2)(z^2-8F^2z^2)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow F\in\left(\frac{3-\sqrt{13}}{4},0\right).$$

综上,$F\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right]$.

当 $x=-y,z=0$ 时,$F=-\frac{3}{2}$;

当 $x=\frac{20+6\sqrt{13}}{9+\sqrt{13}}z,y=\frac{9+\sqrt{13}}{3\sqrt{13}-7}z$ 时,

$$F=\frac{3+\sqrt{13}}{4}.$$

7. 用反证法.

假设命题不真,即存在

$$1\leqslant A<B<C<D<E<F<G<H<I\leqslant 9\ 000,$$

其中,任意四个数不满足题目中的不等式.

显然,$A\geqslant 1,B\geqslant A+1\geqslant 2,D\geqslant C+1$.

则 $4+C=1+2+(C+1)\leqslant A+B+D$.

于是,$A+B+D>4C$,即

$$\begin{aligned}D&\geqslant 4C-(A+B)+1\\&=2C+(C-A)+(C-B)+1\\&\geqslant 2\times 3+2+1+1=10.\end{aligned}$$

由 $E\geqslant D+1$,得

$$4+D=1+2+(D+1)\leqslant A+B+E.$$

于是,$A+B+4>4D$,即

$$\begin{aligned}E&\geqslant 4D-(A+B)+1\\&\geqslant 4(4C-(A+B)+1)-(A+B)+1\\&=16C-5(A+B)+5\\&\geqslant 6\times 3+5\times 2+5\times 1+5=38.\end{aligned}$$

类似地,

由 $4+E=1+2+(E+1)\leqslant A+B+F$,得

$$\begin{aligned}F&\geqslant 4E-(A+B)+1\\&\geqslant 4(16C-5(A+B)+5)-(A+B)+1\\&=64C-21(A+B)+21\\&=22C+21(C-B)+21(C-A)+21\\&\geqslant 22\times 3+21\times 2+21\times 1+21=150.\end{aligned}$$

由 $4+F=1+2+(F+1)\leqslant A+B+G$,得

$$\begin{aligned}G&\geqslant 4F-(A+B)+1\\&\geqslant 4(64C-21(A+B)+21)-(A+B)+1\\&=256C-85(A+B)+85\\&=86C+85(C-A)+85(C-B)+85\\&\geqslant 86\times 3+85\times 2+85\times 1+85=598.\end{aligned}$$

由 $4+G=1+2+(G+1)\leqslant A+B+H$,得

$$\begin{aligned}H&\geqslant 4G-(A+B)+1\\&\geqslant 4(256C-85(A+B)+85)-(A+B)+1\\&=1\ 024C-341(A+B)+341\\&=342C+341(C-A)+341(C-B)+341\\&\geqslant 342\times 3+341\times 2+341\times 1+341\\&=2\ 390.\end{aligned}$$

由 $4+H=1+2+(H+1)\leqslant A+B+I$,得

$$I\geqslant 4H-(A+B)+1$$

$$\geqslant 4(1\,024C-341(A+B)+341)-(A+B)+1$$
$$=4\,096C-1\,365(A+B)+1\,365$$
$$=1\,366C+1\,365(C-A)+1\,365(C-B)+1\,365$$
$$\geqslant 1\,366\times 3+1\,365\times 2+1\,365\times 1+1\,365$$
$$=9\,558.$$

矛盾.

8. 准备 $n^2(n=8)$ 张卡片，正面卡号依次为 $1,2,\cdots,n^2$，背面对应写有该数在密码中的位置（从左数）. 当然，操作人事先不知道背面数.

首先，将 n^2 张卡片分成 n 组（每组 n 张），前 n 次操作将每组卡号各输入一次，即可知道每组卡片背面数的大小顺序（也记为卡片的大小顺序）.

将每组卡片按从小到大排成一列放到桌面上，得到 $n\times n$ 数表 (a_{ij})，其中，a_{ij} 为第 j 组第 i 张卡片的卡号，其对应的背面数为 b_{ij}.

其次，再输入两次，分别为
$$\{a_{1j}\mid j=1,2,\cdots,n\},\{a_{nj}\mid j=1,2,\cdots,n\}.$$

将这 $2n$ 张卡片称为"原卡"（前者为"原小卡"，后者为"原大卡"）. 则
$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} b_{1j}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\min_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}=\min_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij},$$
$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} b_{nj}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}.$$

从而，知道 $\{b_{ij}\}$ 中最小数、最大数所在的卡号（即密码首尾两个数）. 从桌面上拿去这两张卡片，将前（后）者下（上）面的卡片移到其位上（称为"新小（大）卡"）.

然后，将这两个新卡与原小（大）卡中 $\frac{n}{2}-1$ 个较小（大）卡的卡号输入，即可知道余下 n^2-2 个 b_{ij} 中的最小数、最大数所在的卡号（即密码中第 2、n^2-1 个数）.

类似地，按照下面两种操作方法可将所有卡片按背后数从小到大排列，其正面卡号组成密码.

操作 A：当新小、大卡的个数均小于 $\frac{n}{2}$ 时，将这些新卡与原卡中若干个较小（大）卡组成 $\frac{n}{2}$ 个较小卡和 $\frac{n}{2}$ 个较大卡（即在桌面上第 1、n 行各取 $\frac{n}{2}$ 个）输入后，即可知道桌面上所有卡的最小卡、最大卡所在的卡号. 拿去这两张卡片，将前（后）者下（上）面的卡片移到其位上（称为新小（大）卡）.

操作 B：当新小（或大）卡的个数为 $\frac{n}{2}$ 时，将第 1（或 n）行上所有卡片（即 $\frac{n}{2}$ 个原小（或大）卡和 $\frac{n}{2}$ 个新小（或大）卡，将其都改称为原卡）的卡号输入后，即可知道桌面上所有卡的最小（或大）卡所在的卡号. 去掉该卡片，将其下（或上）面的卡片移到其位上（称为新小（或大）卡）.

操作的可行性是显然的，且除了前 n 次操作，所有的操作均可视为操作 A、B 之一，其中，第 $n+1$、$n+2$ 次操作可视为操作 B，第 $n+3$ 次操作可视为操作 A.

设操作 A、B 分别进行 x、y 次后卡片被拿光.

因为每次操作 A 拿走 2 张卡片，每次操作 B 拿走 1 张卡片，最后一次操作至多拿走 n 张卡片，故
$$2x+y\leqslant n^2-n+2.$$

注意到，每次操作 A 新卡数至多增加 2，每次操作 B 新卡数减少 $\frac{n}{2}-1$.

若最后一次操作为操作 B，则
$$2x+2\geqslant\left(\frac{n}{2}-1\right)(y-2)+1; \qquad ①$$

若最后一次操作为操作 A，则
$$2(x-1)+2\geqslant\left(\frac{n}{2}-1\right)(y-2). \qquad ②$$

由式①、②
$$\Rightarrow 2x+y-1\geqslant\frac{n}{2}(y-2)$$

$$\Rightarrow n^2-n+1 \geqslant \frac{n}{2}(y-2)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} \leqslant n+\frac{1}{n}.$$

故操作总次数为

$$n+x+y=n+\frac{(2x+y)+y}{2}$$

$$\leqslant n+\frac{n^2-n+2}{2}+n+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{1}{n}=45\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow n+x+y \leqslant 45.$$

【注】操作中若某列提前拿空，可从其他列第 $2\sim n-1$ 行中任取一张卡片补上.