第二届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 已知锐角$\triangle ABC$,过点A作BC的垂线与以BC为直径的$\odot O_1$分别交于点D、E;过点B作CA的垂线与以CA为直径的$\odot O_2$分别交于点F、G. 证明:E、F、D、G四点共圆,并确定圆心的位置.

2. 记$d(n)$为正整数n的正因子的个数,定义数列$\{a_n\}$如下:

$$a_1=A,a_{n+1}=d\left(\left[\frac{3}{2}a_n\right]\right)+2\,011\text{（}[x]\text{表示不超过实数}x\text{的最大整数）}.$$

证明:对于任意的正整数A,$\{a_n\}$自某项开始为周期数列.

3. 已知p为素数,$\sqrt{p}$的小数部分为x,$\frac{1}{x}$的小数部分为$\frac{\sqrt{p}-31}{75}$. 求所有满足条件的素数p的值.

4. 在一个n行n列的棋盘上放置$n^2-1(n\geqslant 3)$枚棋子. 棋子的编号为

$(1,1),\cdots,(1,n),(2,1),\cdots,(2,n),\cdots,(n,1),\cdots,(n,n-1)$.

若编号为(i,j)的棋子恰在棋盘的第i行第j列,即第n行第n列是空的,则称棋盘处于“标准状态”. 现把n^2-1枚棋子随意地放到棋盘上,每个格子只能放置一枚棋子,每一步可以把空格相邻的一个格子中的棋子移到空格中(两格子相邻是指其有公共边). 问:是否在任意放置下,均可以经过有限次移动,使棋盘达到标准状态?证明你的结论.

5. 设O为锐角$\triangle ABC$的外心,AO、BO、CO的延长线分别与BC、CA、AB交于点D、E、F. 若$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,证明:$\triangle ABC$为正三角形.

6. 对任意x、y、$z\in\mathbf{R}$,证明:

$$-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2z^2)\leqslant 3xy+yz+zx\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{4}(x^2+y^2+2z^2).$$

7. 任意九个两两不同的不超过9 000的正整数中一定存在四个数a、b、c、d,使得

$4+d\leqslant a+b+c\leqslant 4d$.

8. 某位科学家将其时间机器设计图存入一台电脑,文件打开密码设置为$\{1,2,\cdots,64\}$的某个排列. 又设计了一个程序,当每次输入1~64中的八个正整数时,电脑会提示这八个数之间在密码中的顺序(从左至右). 请设计一种操作方案,使得至多经过45次输入,就能确定这个密码.

——答案请参考《中等数学》2011年第9期