第一届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 如图 1，联结 PA、PB、PC、PD、PE.

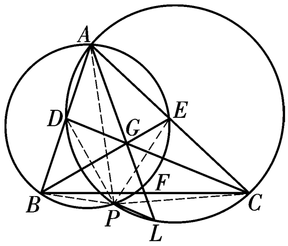

图 1

由$\angle BDP=\angle ACP$，$\angle CEP=\angle ABP$

$\Rightarrow \triangle DBP \backsim \triangle CEP$.

故$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{CE}=\dfrac{DP}{CP}$

$$=\frac{\sin\angle DCP}{\sin\angle CDP}=\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}. \quad ①$$

设 BC 的中点为 F. 则

$$\frac{BF}{CF}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AF\sin\angle BAF}{\frac{1}{2}AC\cdot AF\sin\angle CAF}=1.$$

故$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin\angle CAF}{\sin\angle BAF}$. ②

由式①、②得

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle BAF}.$$

从而，$\angle BAP=\angle CAF=\angle CAL$.

故$\angle PCD=\angle BAP=\angle CAL=\angle CPL$.

因此，$PL /\!/ CD$.

2. 设$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$，

$$g(x)=-\frac{1}{4}x^2+x+7=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8.$$

则 $M\cap N\neq\varnothing \Leftrightarrow f(x)\leqslant g(x)$有实解

$\Leftrightarrow x^2-2x-14\leqslant 0$ 有实解.

故 $M\cap N\neq\varnothing$.

在平面直角坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=g(x)$的顶点分别为 $O(0,0)$、$A(2,8)$，且两条抛物线关于点 $B(1,4)$对称.

从而，$M\cap N$ 在坐标系中所对应的图形 T 以点 B 为中心对称，且所包含的最大半径的圆应为 T 的内切圆.

下面证明：该圆的圆心为 B.

否则，设该圆圆心为 B_1（与点 B 不重合），半径为 r. 取点 B_1 关于 B 的对称点 B_2. 则以 B_2 为圆心、r 为半径的圆也是图形 T 的内切圆.

作两圆的两条外公切线.

因为图形 T 是凸的，所以，上述两条外公切线及两圆所围区域在图形 T 的内部.

从而，以 B 为圆心、r 为半径的圆在图形 T 的内部（不含边界）. 于是，以 B 为圆心的内切圆半径大于 r，矛盾.

因为图形 T 关于点 B 对称，所以，其内切圆$\odot B$ 就是以 B 为圆心与 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 相内切的$\odot B$，设其半径为 r_0.

设$\odot B$ 与 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 切于点 $C(a,b)$. 则

$$b=\frac{a^2}{4}. \quad ①$$

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 在点 C 的切线 l 方程为

$$y=\frac{a}{2}(x-a)+b.$$

显然，$BC\perp l$，即

$$\frac{b-4}{a-1}\cdot\frac{a}{2}=-1. \quad ②$$

式①代入式②整理得 $a^3-8a-8=0$.

解得 $a=-2$ 或 $1\pm\sqrt{5}$.

又 $r_0=|BC|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+1}\cdot|1-a|$,将 a 的值代入知,r_0 的最小值为$\odot B$ 的半径,即当 $a=1+\sqrt{5}$时,$r_0=\sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}}{2}}$.

所以,$r_{\max}=r_0=\sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}}{2}}$.

3. 显然,$3^2+4^2=5^2$,即 $p=2,n=5,k=2$ 是方程的一组解.

以下不妨设 p 为奇素数,$p=2l+1$. 则

$$n^k=3^{2l+1}+4^{2l+1}$$
$$=(3+4)(3^{2l}-3^{2l-1}\times4+3^{2l-2}\times4^2-\cdots+4^{2l}).$$

于是,$7|n^k$,$7|n$.

由 $k>1$,得 $49|n^k$,即

$$3^{2l+1}+4^{2l+1}\equiv0(\bmod 49).$$

由二项式定理得

$$3^{2l+1}=3\times9^l=3(7+2)^l$$
$$\equiv3(l\times7\times2^{l-1}+2^l)$$
$$\equiv(21l+6)2^{l-1}(\bmod 49),$$
$$4^{2l+1}=4(14+2)^l$$
$$\equiv4(l\times14\times2^{l-1}+2^l)$$
$$\equiv(56l+8)2^{l-1}(\bmod 49).$$

故 $3^{2l+1}+4^{2l+1}\equiv(77l+14)2^{l-1}(\bmod 49)$.

由 $49|(3^{2l+1}+4^{2l+1})$,得

$$49|(77l+14)\Leftrightarrow7|(11l+2)$$
$$\Leftrightarrow7|(4l+2),$$

即 $4l+2\equiv0(\bmod 7)$.

此同余式的解为 $l\equiv3(\bmod 7)$.

故 $p=2l+1\equiv0(\bmod 7)$.

又 p 为素数,因此,p 只能为 7.

注意到,

$$3^7+4^7=2\ 187+16\ 384$$
$$=18\ 571=49\times379.$$

但 379 为素数,故上式不可能写成 n^k $(k\geqslant2)$形式,即当 p 为奇素数时无解.

综上,方程只有一组正整数解

$(p,n,k)=(2,5,2)$.

4. n 的最小值为 11.

当 $n\geqslant11$ 时,无论 l 如何选取,总存在一个子集,不妨假设为 D_1,满足 D_1 中至少有六个点.

考虑 D_1 中的所有三角形的中边,并将其染为红色,然后将其他边染为蓝色.

由拉姆塞定理,知一定存在一个同色三角形. 由于每个三角形均有中边,因此,这个同色三角形一定是红色的. 故在 D_1 中存在中边三角形.

下面证明:当 $n\leqslant10$ 时,存在点集 D 和直线 l,使得 D_1、D_2 中均不存在中边三角形.

若 $n=10$,考虑在直线 l 两侧的两个子集 D_1、D_2 中均有五个点,且分布情形相同.

假设 D_1 中的五个点为 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5,且在圆周上依逆时针的次序排列,设

$$\overparen{P_1P_2}=\frac{\pi}{10},\overparen{P_2P_3}=\frac{3\pi}{5},\overparen{P_3P_4}=\frac{3\pi}{10},$$
$$\overparen{P_4P_5}=\frac{3\pi}{4},\overparen{P_5P_1}=\frac{\pi}{4}.$$

则 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 两两的距离互不相同,且 P_2P_3、P_3P_1、P_1P_5、P_5P_4、P_4P_2 为中边,但是,不存在中边三角形.

若 $n<10$,则对于 D_1、D_2 中少于五个点的情形,只要在前面的例子中删去若干个点,仍然不存在中边三角形.

综上,n 的最小值为 11.

5. 如图 2,联结 PB、PC、PE、PF.

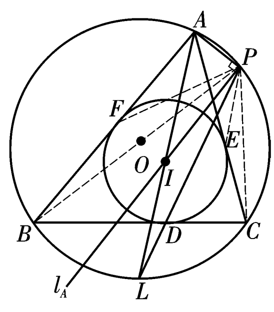

图 2

因为 PD 是$\angle BPC$ 的平分线,所以,

$\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CE}$.

又$\angle FBP=\angle ECP$,则

$\triangle FBP \backsim \triangle ECP$.

故$\angle FPB=\angle EPC$

$\Rightarrow \angle FPE=\angle BPC=\angle BAC$.

因此,P、A、F、E四点共圆.

注意到,A、E、I、F四点共圆,且AI为直径,则$\angle API=90^{\circ}$,即l_A过$\triangle ABC$的内心I.

类似地,l_B、l_C也过$\triangle ABC$的内心I.

6. 证法1 由$(a-1)^2(a+1)\geqslant 0$,得

$a^3+2\geqslant a^2+a+1$.

类似地,$b^3+2\geqslant b^2+b+1$,

$c^3+2\geqslant c^2+c+1$.

故$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}$

$\geqslant \frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}$.

由柯西不等式得

$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}$

$\geqslant \frac{9}{(a^3+2)+(b^3+2)+(c^3+2)}$

$=\frac{9}{a^3+b^3+c^3+6}=\frac{9}{3+6}=1$.

故$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geqslant 1$.

证法2 由柯西不等式得

$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}$

$\geqslant \frac{9}{(a^2+a+1)+(b^2+b+1)+(c^2+c+1)}$

$=\frac{9}{(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)+3}$.

又由幂平均不等式得

$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=1$,

即 $a^2+b^2+c^2\leqslant 3$.

类似地,由$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=1$,得$a+b+c\leqslant 3$. 则

$\frac{9}{(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)+3}$

$\geqslant \frac{9}{3+3+3}=1$.

故$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geqslant 1$.

证法3 设$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}(x>0)$. 则

$f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$,

$f''(x)=\frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}>0$.

因此,$f(x)$为凸函数.

由琴生不等式得

$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}$

$\geqslant \frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1}$.

再由幂平均不等式得

$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=1$.

则$\frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1}$

$\geqslant \frac{3}{1+1+1}=1$.

故$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geqslant 1$.

7. 不妨设$a\leqslant b$.

由$a^2+b^2>b^2-a^2=(b-a)(b+a)$,得

$q\geqslant b-a$.

又由$a^2+b^2\geqslant a^2+ab=a(a+b)$,得

$q\geqslant a$.

又由带余除法的性质有

$0\leqslant r<a+b$.

故$0\leqslant r<a+b=a+a+(b-a)\leqslant 3q$.

由$q^2+r=2\,010$,得

$q^2\leqslant 2\,010<q^2+3q$.

Shiing - Shen Chern Mathematics Week

此不等式的正整数解只有 $q=44$，此时，$r=74$.

则 $a^2+b^2=44(a+b)+74$，

$(a-22)^2+(b-22)^2=74+2\times22^2=1\,042$.

记 $x=\min\{|a-22|,|b-22|\}$，

$y=\max\{|a-22|,|b-22|\}$.

则 $x^2+y^2=1\,042\equiv2\pmod 8$.

故 x、y 均为正奇数.

由 $x^2\leqslant y^2$，得

$y^2\leqslant x^2+y^2=1\,042\leqslant2y^2$，

即 $23\leqslant y\leqslant32$.

于是，y 的可能值只有 23、25、27、29、31，共五个.

当 $y=23,25,27,29$ 时，$x^2=513,417,313,201$，均无正整数解.

当 $y=31$ 时，$x^2=81\Rightarrow x=9$.

于是，$\begin{cases}|a-22|=31,\\|b-22|=9\end{cases}$ 无解；

$\begin{cases}|a-22|=9,\\|b-22|=31\end{cases}$ 的正整数解为

$(a,b)=(13,53),(31,53)$.

经检验，当 $(a,b)=(13,53)$ 时，与 $74=r<a+b=66$ 矛盾；

当 $(a,b)=(31,53)$ 时，

$a^2+b^2=3\,770=44\times84+74$，

满足条件.

综上，只有一组解

$(a,b,q,r)=(31,53,44,74)$.

此时，$ab=31\times53=1\,643$.

8. (1) 时间轨道共有 2 009 个站台，且不超过 2 009 的 2 的正整数次幂为

2、4、8、16、32、64、128、256、512、1 024.

由规则知

(i) ① $5k+1(k=1,2,3)$

$\xrightarrow{3-k\text{次}}16\rightarrow14=5\times2+4$；

② $5k+1(k=4,5,\cdots,51)$

$\xrightarrow{51-k\text{次}}256\rightarrow254=5\times50+4$；

③ $5k+1(k=52,53,\cdots,401)$

$\xrightarrow{401-k\text{次}}2\,006\rightarrow2$.

(ii) ① $2\rightarrow2\,009\rightarrow5$；

② $5k+2(k=1,2,\cdots,6)$

$\xrightarrow{6-k\text{次}}32\rightarrow30=5\times6$；

③ $5k+2(k=7,8,\cdots,102)$

$\xrightarrow{102-k\text{次}}512\rightarrow510=5\times102$；

④ $5k+2(k=103,104,\cdots,401)$

$\xrightarrow{401-k\text{次}}2\,007\rightarrow3$.

(iii) ① $3\rightarrow8\rightarrow6=5+1$；

② $5k+3(k=1,2,\cdots,25)$

$\xrightarrow{25-k\text{次}}128\rightarrow126=5\times25+1$；

③ $5k+3(k=26,27,\cdots,401)$

$\xrightarrow{401-k\text{次}}2\,008\rightarrow4$.

(iv) ① $4\rightarrow2\rightarrow2\,009\rightarrow5$；

② $5k+4(k=1,2,\cdots,12)$

$\xrightarrow{12-k\text{次}}64\rightarrow62=5\times12+2$；

③ $5k+4(k=13,14,\cdots,204)$

$\xrightarrow{204-k\text{次}}1\,024\rightarrow1\,022=5\times204+2$；

④ $5k+4(k=205,206,\cdots,401)$

$\xrightarrow{401-k\text{次}}2\,009\rightarrow5$.

(v) $5k(k=1,2,\cdots,401)$

$\xrightarrow{401-k\text{次}}2\,005\rightarrow1$.

设乘客指定站台号为 $a(1<a\leqslant2\,009)$.

由 (i) ~ (v)，知无论 a 为何数，均能使机器回到现在.

(2) 记第 2 009 站台到第 1 站台这段轨道为 A.

设机器经过 A 的次数为 s，共停靠 t 站，其中，停靠在 2 的正整数次幂号的站台有 v 次，其余站台为 u 次. 则

$2\,009s+1=a+5(u-1)-2v$

$=a+5t-5-7v$.

故 $t=\dfrac{2\,009s+7v-a+6}{5}$.

Shing - Shen Chern Mathematics Week

下面证明:机器不会在同一站台停靠两次.

否则,机器所停靠的站台序列构成循环.其结果是永远不能在第一站台停靠(与(1)矛盾),或在第一个循环段就已停靠过第一站台,从而停止,不会构成循环,矛盾.

所以,$v\leqslant 10$.

考虑机器每次经过 A 后最先停靠的站台号,其包含在$\{1,2,3,4,5\}$中.

注意到,

$$3\to 8\to 6\xrightarrow{2\text{ 次}}16\to 14\xrightarrow{10\text{ 次}}64\to 62\xrightarrow{90\text{ 次}}512\to 510\xrightarrow{299\text{ 次}}2\,005\to 1,$$

$$4\to 2\to 2\,009\to 5\xrightarrow{400\text{ 次}}2\,005\to 1.$$

故甲在第 3 站台停靠过,或在第 4、2、5 站台停靠过,二者不能均停靠过.

从而,$s\leqslant 2$.

若 $s=1$,则 $t\leqslant\dfrac{2\,009+70-0+6}{5}=417$.

若 $s=2$,则第二圈为

$3\xrightarrow{407\text{ 次}}1$,或 $2\xrightarrow{403\text{ 次}}1$,或 $4\xrightarrow{404\text{ 次}}1$.

下面利用(1)中(i)~(v)将第一圈从 3 或 2、4 逆推回去:

$$3\leftarrow 2\,007\xleftarrow{197\text{ 次}}1\,022\leftarrow 1\,024\xleftarrow{154\text{ 次}}254\leftarrow 256\xleftarrow{26\text{ 次}}126\leftarrow 128\xleftarrow{23\text{ 次}}13,$$

$$2\leftarrow 2\,006\xleftarrow{349\text{ 次}}261,$$

$$4\leftarrow 2\,008\xleftarrow{375\text{ 次}}133.$$

综上,若 $a=13$,则 $v=7$,$t=812$;

若 $a=261$,则 $v=1$,$t=754$;

若 $a=133$,则 $v=2$,$a=781$.

所以,机器最多能停靠 812 个站台.