第七届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 如图 1,设点 A 在 GF 上的投影为 R,AR 与 BC 交于点 M.

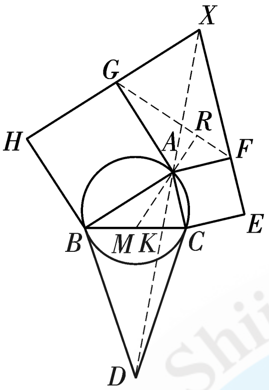

图 1

由面积法知

$$\frac{BM}{CM}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AM\sin\angle BAM}{\frac{1}{2}AC\cdot AM\sin\angle CAM}$$

$$=\frac{AB\cos\angle RAG}{AC\cos\angle RAF}=\frac{AG\cos\angle RAG}{AF\cos\angle RAF}=1.$$

故 M 为边 BC 的中点.

设 XA 与 BC 交于点 K. 则由 G、A、F、X 四点共圆得

$$\angle CAK=90^\circ-\angle FAX=90^\circ-\angle FGX$$

$$=\angle AGF=90^\circ-\angle GAR=\angle BAM,$$

即 AX 在 AM 的共轭中线上.

另一方面,在边 BC 上作一点 M',使得

$$\angle CAD=\angle BAM'.$$

由面积法知

$$\frac{BM'}{M'C}=\frac{S_{\triangle ABM'}}{S_{\triangle ACM'}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AM'\sin\angle BAM'}{\frac{1}{2}AC\cdot AM'\sin\angle CAM'}$$

$$=\frac{AB\sin\angle CAD}{AC\sin\angle BAD}=\frac{AB\cdot\frac{CD\sin\angle ACD}{AD}}{AC\cdot\frac{BD\sin\angle ABD}{AD}}$$

$$=\frac{AB\sin\angle ACD}{AC\sin\angle ABD}=\frac{AB\sin\angle ABC}{AC\sin\angle ACB}=1.$$

故点 M' 与 M 重合.

因此,AD 也在 AM 的共轭中线上.

综上,X、A、D 三点共线.

2. 设原式为 S,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}\sin^2(a_i-a_j)=x.$$

则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}\cos^2(a_i-a_j)$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}(1-\sin^2(a_i-a_j))=\mathrm{C}_{2\,016}^2-x.$$

于是,$S=\dfrac{7+23x}{7+24(\mathrm{C}_{2\,016}^2-x)}$.

显然,此函数连续,且单调递增.

易知,当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2\,016}$ 时,S 取得最小值 $\dfrac{7}{7+24\mathrm{C}_{2\,016}^2}=\dfrac{7}{48\,746\,887}=\dfrac{1}{6\,963\,841}$.

注意到,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}\sin^2(a_i-a_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}(1-\cos(2a_i-2a_j))$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{C}_{2\,016}^2-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}(\cos 2a_i\cdot\cos 2a_j+\sin 2a_i\cdot\sin 2a_j)$$

$$=\frac{2\,016\times 2\,015}{4}-\frac{1}{4}\left(\left(\sum_{i=1}^{2\,016}\cos 2a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2\,016}\sin 2a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{2\,016}\cos^2 2a_i+\sum_{i=1}^{2\,016}\sin^2 2a_i\right)\right)$$

$$=\frac{2\,016\times 2\,015}{4}-\frac{1}{4}\left(\left(\sum_{i=1}^{2\,016}\cos 2a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2\,016}\sin 2a_i\right)^2-2\,016\right)$$

$$=\frac{2016^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\left(\sum_{i=1}^{2016}\cos 2a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2016}\sin 2a_i\right)^2\right)$$

$$\leqslant\frac{2016^2}{4}=1016064.$$

则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2016}\cos^2(a_i-a_j)$

$$=\mathrm{C}_{2016}^{2}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2016}\sin^2(a_i-a_j)$$

$$\geqslant\frac{2016\times 2015}{2}-1016064$$

$$=1015056.$$

故 $S\leqslant\frac{7+23\times 1016064}{7+24\times 1015056}=\frac{3338497}{3480193}$，

当 $a_i=\frac{i\pi}{2016}(i=1,2,\cdots,2016)$ 时，上式等号成立.

因此，S 的最大值为 $\frac{3338497}{3480193}$.

综上，S 的取值范围是

$$\left[\frac{1}{6963841},\frac{3338497}{3480193}\right].$$

3. 设 $f(0)=a\in\mathbf{Z}$，令 $n=0$，则

$$f(f(m))=f(m)+f(0)=f(m)+a. \quad ①$$

在式①中取 $m=x+y(x、y\in\mathbf{Z})$，则

$$f(f(x+y))=f(x+y)+a.$$

结合原题条件得

$$f(x)+f(y)=f(x+y)+a. \quad ②$$

令 $g(x)=f(x)-a$. 由式②得

$$g(x+y)=f(x+y)-a$$

$$=f(x)+f(y)-2a$$

$$=g(x)+g(y). \quad ③$$

设 $g(1)=b\in\mathbf{Z}$.

在式③中，令 $x=y=1$，则

$$g(2)=g(1)+g(1)=2b;$$

在式③中，令 $x=2,y=1$，则

$$g(3)=g(2)+g(1)=3b.$$

由数学归纳法易证，对于任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$，有

$$g(n)=nb. \quad ④$$

在式③中，令 $x=y=0$，则

$$g(0)=2g(0)\Rightarrow g(0)=0. \quad ⑤$$

在式③中，令 $x=n,y=-n$，则

$$g(0)=g(n)+g(-n)=0$$

$$\Rightarrow g(-n)=-g(n)=-nb. \quad ⑥$$

综合式④、⑤、⑥，知对任意的 $n\in\mathbf{Z}$，有 $g(n)=nb$.

故 $f(n)=g(n)+a=nb+a. \quad ⑦$

将式⑦代入式①得

$$b(bm+a)+a=f(bm+a)$$

$$=f(m)+a=bm+2a$$

$$\Rightarrow (bm+a)(b-1)=0$$

$$\Rightarrow b=1 \text{ 或 } bm+a=0.$$

当 $b=1$ 时，$f(n)=n+a$；

而 $bm+a=0$ 对于任意的 $m\in\mathbf{Z}$ 均成立等价于 $a=b=0$，此时，$f(n)=0$.

故 $f(n)=n+a$ 或 $f(n)=0$.

经验证，这两种情形均满足题意.

综上，$f(n)=n+a(a\in\mathbf{Z})$ 或 $f(n)=0$.

4. 设分成的 32 个组为 $A_1,A_2,\cdots,A_{32}$，每组中的各数之和均为 63，称这种组为 A 类组；而分成的 63 个组为 $B_1,B_2,\cdots,B_{63}$，每组中的各数之和均为 32，称这种组为 B 类组.

显然，每个项 x_k 恰属于一个 A 类组和一个 B 类组，即同类组之间没有公共项；若两个组 A_i、B_j 中有两个公共项 x_r、x_t，则可将这两个数合并为一项 x_r+x_t，使 n 值减少，故不妨设每对 A_i、B_j 至多有一个公共项.

构造图论模型：用点 $u_1,u_2,\cdots,u_{32}$ 分别表示 $A_1,A_2,\cdots,A_{32}$，而点 $v_1,v_2,\cdots,v_{63}$ 表示组 $B_1,B_2,\cdots,B_{63}$，若组 A_i、B_j 有公共项，则在相应的点 u_i、v_j 之间连一条边. 于是，得到二部图 G，它恰有 n 条边和 95 个顶点.

下面证明：G 为连通图.

若图 G 的最大连通分支为 G'，其顶点数少于 95，设在连通分支 G' 中，有 a 个 A 类顶点 $u_{k_1},u_{k_2},\cdots,u_{k_a}$ 和 b 个 B 类顶点 $v_{s_1},v_{s_2},\cdots,v_{s_b}$，其中，$a+b<95$. 则在相应的 A 类组 A_{k_1}，

$A_{k_2},\cdots,A_{k_a}$和 B 类组 $B_{s_1},B_{s_2},\cdots,B_{s_b}$中,$A$ 类组 A_{r_i}中的任意一个数 x_i 均在某个 B 类组 B_{s_j}中出现;而 B 类组 B_{s_i}中的任意一个数 x_i 也均在某个 A 类组 A_{r_j}中出现(否则,将有边与分支外的顶点连接,矛盾).

于是,a 个 A 类组 $A_{k_1},A_{k_2},\cdots,A_{k_a}$中各数的和应等于 b 个 B 类组 $B_{s_1},B_{s_2},\cdots,B_{s_b}$中各数的和,即有 $63a=32b$.

从而,$32\mid a,63\mid b$.

所以,$a+b\geqslant32+63=95$,矛盾.

故 G 为连通图,图 G 至少有 $95-1=94$ 条边,即 $n\geqslant94$.

另一方面,可实际构造一个具有 94 项的数列 $x_1,x_2,\cdots,x_{94}$满足本题条件. 例如,取

$x_1=x_2=\cdots=x_{32}=32$,

$x_{33}=x_{34}=\cdots=x_{63}=31$,

$x_{64}=x_{65}=\cdots=x_{94}=1$.

于是,每个 A 类组可由一个 32 和一个 31,或者由一个 32 和 31 个 1 组成,这样共得 32 个 A 类组,每组各数的和均为 63.

为了获得和为 32 的 63 个 B 类组,可使 $x_1,x_2,\cdots,x_{32}$各成一组,其余的数可以拼成 31 个 B 类组$\{1,31\}$.

综上,n 的最小值为 94.

5. (1)设$\angle CAL=\alpha_1,\angle BAL=\alpha_2$,

$\angle ABM=\beta_1,\angle CBM=\beta_2$,

$\angle BCN=\gamma_1,\angle ACN=\gamma_2$.

由分角线定理知

$$1=\frac{EL}{LF}=\frac{AE\sin\alpha_1}{AF\sin\alpha_2},$$

$$1=\frac{FM}{MD}=\frac{BF\sin\beta_1}{BD\sin\beta_2},$$

$$1=\frac{DN}{NE}=\frac{CD\sin\gamma_1}{CE\sin\gamma_2}.$$

三式相乘得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{CD}$$

$$=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}. \qquad ①$$

由塞瓦定理,知 AD、BE、CF 三线共点的充分必要条件是

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

又由角元塞瓦定理,知 AL、BM、CN 三线共点的充分必要条件是

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

因此,由式①知

AL、BM、CN 三线共点

$\Leftrightarrow$ AD、BE、CF 三线共点.

(2)先证明一个引理.

引理　设$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 与边 BC 切于点 D,$\angle A$ 内的旁切圆为$\odot I_1$,M 为边 BC 的中点,则 $AD\parallel MI_1$.

证明　如图 2,设$\odot I_1$ 与边 BC 切于点 E,EE_1 为$\odot I_1$ 的直径,过点 E_1 作 BC 的平行线,与直线 AB、AC 分别交于点 B_1、C_1. 则 B_1C_1 与$\odot I_1$ 切于点 E_1.

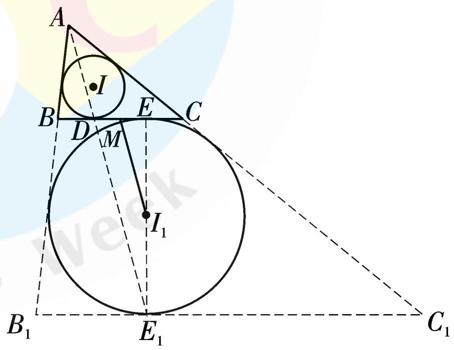

图 2

因为 A 是$\triangle ABC$ 与$\triangle AB_1C_1$ 的位似中心,D、E_1 为对应点,所以,A、D、E_1 三点共线.

由 $BD=CE$,知 M 为线段 DE 的中点.

于是,$DE_1\parallel MI_1$,即 $AD\parallel MI_1$.

引理得证.

因为 B、C、E、F 四点共圆,所以,

$\angle AEF=\angle B$.

类似地,$\angle CED=\angle B$.

因此,EA 为$\angle DEF$ 的外角平分线,且

$\angle DEF=180^\circ-2\angle B$.

类似地，FA 为$\angle EFD$ 的外角平分线.

从而，A 为$\triangle DEF$ 中$\angle D$ 内的旁心.

又 $DX\parallel AL, EY\parallel BM, FZ\parallel CN$，由引理知 X 为$\triangle DEF$ 的内切圆（圆心为$\triangle ABC$ 的垂心 H）与边 EF 的切点.

类似地，Y、Z 为$\triangle DEF$ 的内切圆分别与边 FD、DE 的切点.

从而，$\triangle XYZ$ 的外接圆就是$\triangle DEF$ 的内切圆.

设$\triangle DEF$ 的外接圆半径为 R_1.

因为$\triangle DEF$ 的外接圆是$\triangle ABC$ 的九点圆，所以，$R=2R_1$.

由于$\angle DEF=180°-2\angle B$，类似得

$\angle FDE=180°-2\angle A$，

$\angle EFD=180°-2\angle C$.

故 $r=4R_1\sin\frac{\angle FDE}{2}\cdot\sin\frac{\angle DEF}{2}\cdot\sin\frac{\angle EFD}{2}$

$=2R\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

6. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2\,015}\}$ 满足题目条件.

则 $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,015}$除以 2 016 的余数两两不同，且余数均不为 0.

类似地，$a_2, a_2+a_1, a_2+a_1+a_3, \cdots, a_2+a_1+a_3+\cdots+a_{2\,015}$除以 2 016 的余数两两不同，且余数均不为 0.

故 $a_1\equiv a_2 \pmod{2\,016}$.

类似地，

$a_1\equiv a_2 \pmod{2\,016}\equiv\cdots$

$\equiv a_{2\,015} \pmod{2\,016}\equiv k \pmod{2\,016}$.

由 A 的任意非空子集的元素和不是 2 016 的倍数，可得$(k,2\,016)=1$.

注意到，$2\,016=32\times9\times7$，

$5\times10^6=2\,016\times2\,480+320$，

欧拉函数 $\varphi(2\,016)=16\times6\times6=576$.

利用容斥原理，知$\{1,2,\cdots,320\}$中与 2 016 互素的元素个数为

$$320-\left(\left[\frac{320}{2}\right]+\left[\frac{320}{3}\right]+\left[\frac{320}{7}\right]\right)+\left(\left[\frac{320}{2\times3}\right]+\left[\frac{320}{3\times7}\right]+\left[\frac{320}{2\times7}\right]\right)-\left[\frac{320}{2\times3\times7}\right]$$

$=92$，

其中，$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

因此，满足题目条件的子集个数为

$92\mathrm{C}_{2\,481}^{2\,015}+484\mathrm{C}_{2\,480}^{2\,015}$.

7. 显然，$f(x)$不存在负整数根.

假设$f(x)$存在负整数根，不妨设 x_0 为 $f(x)$的最小负整数根.

则$f(x)=(x-x_0)F(x)$，其中，$F(x)$为整系数多项式.

显然，存在充分大的素数 p，使得

$F(p+x_0)\neq0, p+x_0>0$.

取 $n=p+x_0$ 充分大，则

$f(n)=pF(n)\Rightarrow p\mid f(n)\Rightarrow p\mid n!$.

而 $0<n=p+x_0<p$，矛盾. 故 $f(x)$不存在负整数根.

若$f(x)$存在非负整数根，设 $0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$ 是$f(x)$的所有非负整数根，记

$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_m)^{k_m}g(x)$，

其中，$g(x)$为整系数多项式且不存在非负整数根.

若存在 $k_i\geqslant2$，则取 $n=p+a_i$（p 为大于 a_i 的充分大的素数），得

$p^2\mid f(n)\Rightarrow p^2\mid n!$.

而 $n=p+a_i<2p$，矛盾.

故所有 $k_i=1(i=1,2,\cdots,m)$.

下面证明一个引理.

引理　设 $g(x)$为非常值整系数多项式. 则在 $g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots$中的非零项的算术分解式中包含无穷多种素因子.

证明　设

$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(n\geqslant1)$.

若 $a_0=0$，则任给素数 p，$g(p)$为 p 的倍数.

故 $g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots$的算术分解式中包含所有素数，引理成立.

以下不妨设 $a_0\neq0$.

假设 $g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots$的算术分解

式中只含有有限种素因子 $p_1<p_2<\cdots<p_l$.

考虑 $g(p_1p_2\cdots p_la_0y)$,此式中所有系数均为 a_0 的倍数,令 $g(p_1p_2\cdots p_la_0y)=a_0h(y)$,其中,

$$h(y)=A_ny^n+A_{n-1}y^{n-1}+\cdots+A_1y+1$$

为整系数多项式,且 $p_1p_2\cdots p_l$ 整除 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.

显然,存在 $y_0\in\mathbf{Z}$,使得

$$\operatorname{sgn}(y_0)=\operatorname{sgn}(a_0),\text{且 } h(y_0)\notin\{0,\pm1\},$$

其中,$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

则 $h(y_0)$ 存在异于 $p_1,p_2,\cdots,p_l$ 的新的素因子 q,即 $g(p_1p_2\cdots p_la_0y)$ 存在异于 $p_1,p_2,\cdots,p_l$ 的新的素因子 q,矛盾. 故 $g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots$ 的算术分解式中包含无穷多种素因子.

引理得证.

若 $g(x)$ 不是常值整系数多项式,据引理,知存在无穷多个素数 $p_1<p_2<\cdots$,满足对于任意的 p_i,存在 $n_i\in\mathbf{Z}_+$,使得

$$p_i\mid g(n_i),\text{且 } g(n_i)\neq0.$$

令 $n_i\equiv r_i\pmod{p_i}$ $(0\leqslant r_i<p_i-1)$. 则

$$p_i\mid g(r_i).$$

结合 $g(r_i)\neq0$,得 $|g(r_i)|\geqslant p_i$.

当 $i\to+\infty$ 时,$|g(r_i)|\to+\infty$,即

$$r_i\to+\infty.$$

所以,当 i 充分大时,

$$p_i\mid g(r_i)\Rightarrow p_i\mid f(r_i),$$

与 $f(r_i)\mid r_i!$ 矛盾.

因此,$g(x)$ 为常值函数.

不妨设 $g(x)=c\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. 则

$$f(x)=c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m),$$

其中,$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$ 为非负整数.

若 $f(x)$ 不存在非负整数根,类似地,

$$f(x)=c.$$

易验证 $f(x)=c$ 或

$$f(x)=c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m),$$

其中,c 为非零整数,$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$ 为非负整数,满足题意.

综上,满足题意的整系数多项式为

$$f(x)=c$$

或 $f(x)=c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$,

其中,c 为非零整数,$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$ 为非负整数.

8. (1)答案:7.

将所考虑的四面体记作 $ABCD$.

若四个顶点均在平面 α 的一侧,则这四个顶点必位于一个与平面 α 平行的平面内,不符合条件.

只考虑以下两种情形.

(i)平面 α 的一侧有三个顶点、另一侧有一个顶点.

不妨设点 A、B、C 在平面 α 的一侧、点 D 在另一侧. 则 A、B、C 三点所确定的平面必平行于平面 α.

由点 D 作平面 ABC 的垂线 DD_1,D_1 为垂足. 则中位面 α 必为经过 DD_1 的中点且与 DD_1 垂直的平面(存在且唯一),该中位面平行于平面 ABC.

类似可得分别平行于四面体其他三个面的中位面.

这种类型的中位面共有 4 个.

(ii)平面 α 的两侧各有两个顶点,不妨设点 A、B 在平面 α 的一侧,点 C、D 在另一侧. 显然,$AB\parallel\alpha$,$CD\parallel\alpha$.

易知,AB 与 CD 为异面直线,中位面 α 必为经过它们公垂线中点且平行于它们的平面(存在且唯一). 由于四面体的 6 条棱可按异面关系分为 3 组,于是,这种类型的中位面共有 3 个.

综上,一个四面体有 7 个互不相同的中位面.

(2)答案:3.

由于平行六面体任意五个顶点不共面,于是,平行六面体的八个顶点分布在平面 α 两侧的情形:8—0、7—1、6—2、5—3 均不符

合条件.

只考虑八个顶点在平面 α 两侧各四点的情形. 此时,平面 α 一侧的 4 个顶点必位于一个与平面 α 平行的平面上.

将所考虑的平行六面体记作 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

由于面 $ABCD$ // 面 $A_1B_1C_1D_1$,则经过这两个面的任意一条公垂线中点且与这两个面平行的平面,到这两个面的距离相等. 从而,该平面即为平行六面体的一个中位面(存在且唯一). 类似可得其余两个中位面.

(3)答案:29.

由(2)知每个平行六面体均有三个中位面,它们分别平行于平行六面体的三组相对面. 对于每个平行六面体,它的三个中位面是唯一确定的,且交于一点(中心 O). 反之,一旦给定了三个交于一点的中位面,则平行六面体的三组相对面的方向便完全确定了. 再结合所给定的至少四个顶点,平行六面体便可唯一确定下来.

由(1)知对于所给出的空间四点,共可确定七个互不相同的中位面. 从中任取三个的取法有 C_7^3 种,但并不是所有这些“中位面三元组”均能确定出平行六面体. 事实上,能够作出平行六面体的三个中位面的平面必须交于同一点,因此,必须排除那些不交于同一点的三元组.

易知,凡是平行于同一条直线的三个平面均不可能交于同一点. 事实上,它们形成三棱柱的三个侧面.

容易看出,在四面体 $ABCD$ 的七个中位面中,平行于棱 AB 的恰有三个:与异面直线 AB 和 CD 平行的中位面、平行于平面 ABC 的中位面、平行于平面 ABD 的中位面. 由此,知与四面体 $ABCD$ 的六条棱中的每条棱平行的中位面均各有三个,这六组中位面三元组不能确定平行六面体. 除此之外的其余三元组中的三个中位面均能交于同一点.

综上,一共可以确定出 $C_7^3-6=29$ 个互不相同的平行六面体.