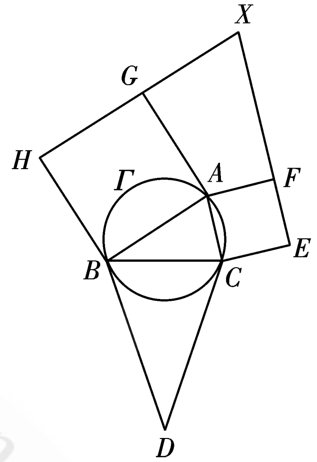
第七届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 如图，$\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，在点 B、C 处分别作圆 Γ 的切线，两条切线交于点 D. 由 $\triangle ABC$ 的边 AB、CA 分别向形外作正方形 $BAGH$、正方形 $ACEF$，设 EF 与 HG 交于点 X. 证明：X、A、D 三点共线.



图

2. 对于任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2\,016}$，试求

$$\frac{7+23\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}\sin^2(a_i-a_j)}{7+24\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,016}\cos^2(a_i-a_j)}$$

的取值范围.

3. 求所有的映射 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，使得对于任意的 m、$n\in\mathbf{Z}$，均有

$$f(f(m+n))=f(m)+f(n).$$

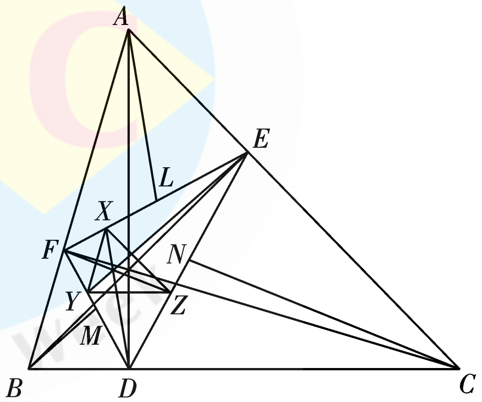
4. 已知 n 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的和为2 016. 若这 n 个数既可分为和相等的32 个组，又可分为和相等的 63 个组，求 n 的最小值.

5. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别为边 BC、CA、AB 上的点，L、M、N 分别为线段 EF、FD、DE 的中点. 证明：

(1) AL、BM、CN 三线共点的充分必要条件是 AD、BE、CF 三线共点；

(2) 若 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高线，X、Y、Z 分别为线段 EF、FD、DE 上的点，且满足 $DX/\!/AL$，$EY/\!/BM$，$FZ/\!/CN$，设 $\triangle ABC$、$\triangle XYZ$ 的外接圆半径分别为 R、r，则

$$r=2R\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\ (A、B、C\text{ 为}\triangle ABC\text{ 的内角}).$$



图

6. 集合 $X=\{1,2,3,\cdots,5\times10^6\}$ 有多少个满足下面条件的 2 015 元子集 A：A 的任意非空子集的元素之和不是 2 016 的倍数？

7. 求所有整系数多项式 $f(x)$，使得对于任意充分大的正整数 n，均有 $f(n)\mid n!$.

8. 对于平面 α，若多面体的各个顶点到平面 α 的距离均相等，则称平面 α 为多面体的“中位面”.

(1) 四面体有多少个互不相同的中位面？

(2) 平行六面体有多少个互不相同的中位面？

(3) 给定三维空间内不共面的四个点，以这四点作为平行六面体的顶点（中的四个），共可得到多少个互不相同的平行六面体？

请给出以上各小问的答案，并说明理由.

——答案请参考《中等数学》2016 年第 9 期