第八届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 如图 1.

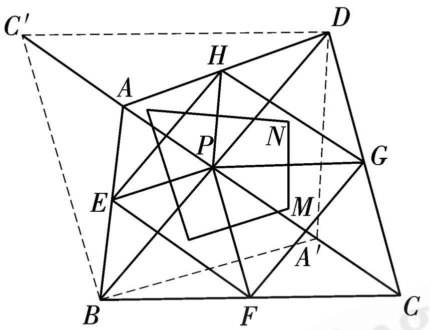

图 1

由 O_1、O_2、O_3、O_4 分别为$\triangle PHE$、$\triangle PEF$、$\triangle PFG$、$\triangle PGH$ 的外心,则

$O_1O_2 \perp PE, O_2O_3 \perp PF,$

$O_3O_4 \perp PG, O_4O_1 \perp PH.$

从而,$\angle O_4O_1O_2+\angle HPE=\pi,$

$\angle O_2O_3O_4+\angle FPG=\pi.$

故 O_1、O_2、O_3、O_4 四点共圆

$\Leftrightarrow \angle O_4O_1O_2+\angle O_2O_3O_4=\pi$

$\Leftrightarrow \angle HPE+\angle FPG=\pi.$ ①

设 A、C 关于点 P 的对称点分别为 A'、C'. 联结 BC'、DC'、BA'、DA'.

注意到,在$\triangle BCC'$中,

$FP /\!/ BC', \angle FPC=\angle BC'C;$

在$\triangle DCC'$中,

$GP /\!/ DC', \angle CPG=\angle CC'D.$

则$\angle FPG=\angle FPC+\angle CPG$

$=\angle BC'C+\angle CC'D=\angle BC'D.$

类似地,$\angle EPH=\angle BA'D.$

故式① $\Leftrightarrow \angle BC'D+\angle BA'D=\pi$

$\Leftrightarrow B$、C'、D、A'四点共圆

$\Leftrightarrow C'P\cdot A'P=BP\cdot DP$

$\Leftrightarrow CP\cdot AP=BP\cdot DP$

$\Rightarrow A$、B、C、D 四点共圆.

2. 记“$\sum$”表示轮换对称和.

先证左端不等式成立.

设 $b+c-a=2x, c+a-b=2y,$

$a+b-c=2z.$

于是,x、y、$z\in \mathbf{R}_+$,且

$a=y+z, b=z+x, c=x+y.$

则左端不等式

$$\Leftrightarrow \sum\frac{y+z}{2x}\geqslant\sum\frac{2x}{y+z}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{y+z}{x}\geqslant\sum\frac{4x}{y+z}.$$

由柯西不等式得

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)\geqslant 4.$$

因此,$\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}\geqslant\dfrac{4}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}}=\dfrac{4x}{y+z}.$

类似地,$\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{z}\geqslant\dfrac{4y}{x+z}, \dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\geqslant\dfrac{4z}{x+y}.$

三式相加得

$$\sum\frac{y+z}{x}\geqslant\sum\frac{4x}{y+z}.$$

再证右端不等式成立.

注意到,$\dfrac{b+c-a}{a}=\dfrac{b+c+a}{a}-2,$

$\dfrac{c+a-b}{b}=\dfrac{c+a+b}{b}-2,$

$\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a+b+c}{c}-2.$

故$\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{c+a-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}$

$=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-6$

$\geqslant(1+1+1)^2-6=3.$

综上,原命题成立.

3. m 的最小可能值为 n.

若不添加辅助顶点,则所有分出的三角形的所有顶点均在正 n 边形的 n 个顶点上. 故正 n 边形的外接圆为所有这些三角形的公共的外接圆. 于是,它们共有一个外心,必落在某个所分出的三角形的内部或边上. 从而,该三角形为锐角三角形或直角三角形.

这表明,若想所分出的三角形均为钝角三角形,则必须添加辅助顶点.

当所添加的辅助顶点的数目为 k 时,所分成的三角形的所有内角和为

$$(n-2)\pi+2k\pi=(n+2k-2)\pi,$$

于是,所分出的三角形共有 $n+2k-2$ 个. 这表明,欲分成的三角形均为钝角三角形,则所分出三角形个数 $m\geqslant n$(因为 $k\geqslant 1$),欲等号成立,即欲 m 达到最小可能值,就只能仅添加一个辅助顶点.

下面说明只需添加一个辅助顶点即可达到目的.

先用不在形内相交的对角线把正 n 边形分为 $n-2$ 个三角形. 注意,在 n 为偶数时不采用主对角线. 此时,所分出的 $n-2$ 个三角形中有 $n-3$ 个钝角三角形和 1 个锐角三角形.

再将那个锐角三角形的内心作为辅助顶点,将其分别与该锐角三角形的三个顶点相连,即可把该锐角三角形分为 3 个钝角三角形,共得 n 个钝角三角形.

当 n 为偶数时,设 $n=2l(l\geqslant 3)$. 对正偶数边形 $A_1A_2\cdots A_{2l}$,可具体操作如下:联结 $A_1A_3,A_1A_4,\cdots,A_1A_{2l-1}$,擦去其中的主对角线 A_1A_{l+1},改连 A_lA_{l+2},即得 $n-2$ 个三角形. 因为 $l\geqslant 3$,所以,A_lA_{l+2}不是主对角线. 此时,公共外心必落在$\triangle A_1A_lA_{l+2}$中,故只有其为锐角三角形,其余 $n-3$ 个均为钝角三角形. 再把$\triangle A_1A_lA_{l+2}$的内心取作辅助顶点,将它分别与 A_1、A_l、A_{l+2}相连,即得 n 个钝角三角形.

4. 注意到,$\alpha n-1<[\alpha n]\leqslant\alpha n$.

上式除以 n 得

$$\alpha-\frac{1}{n}<\frac{[\alpha n]}{n}\leqslant\alpha\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{[\alpha n]}{n}=\alpha.$$

类似地,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[\beta n]}{n}=\beta$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[\gamma n]}{n}=\gamma$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[\delta n]}{n}=\delta$.

式①两边同时除以 n^2 得

$$\frac{[\alpha n]}{n}\cdot\frac{[\beta n]}{n}=\frac{[\gamma n]}{n}\cdot\frac{[\delta n]}{n}.$$

当 $n\to+\infty$ 时,$\alpha\beta=\gamma\delta$.

不妨假设 $\alpha\geqslant\beta,\gamma\geqslant\delta,\alpha\geqslant\gamma$.

则 $\alpha\geqslant\gamma\geqslant\delta\geqslant\beta$.

因为$\{\alpha,\beta\}\neq\{\gamma,\delta\}$,所以,

$\alpha>\gamma\geqslant\delta>\beta$.

于是,存在正整数 N 满足

(1)$(\alpha-\gamma)N>1$;

(2)$(\delta-\beta)N>1$;

(3)$\beta N>1$.

对任意的 $m>N$,上述三个条件均成立. 此时,

$[\alpha m]-[\gamma m]\geqslant 1,[\delta m]-[\beta m]\geqslant 1$,

$[\beta m]\geqslant 1$.

先证明一个引理.

引理　当 $m>N$ 时,在上述条件下,αm、βm、γm、δm 均为正整数.

证明　固定 $m>N$. 设$[\alpha m]=A$,$\{\alpha m\}=a$,a 的二进制表示为 $a=(0.a_1a_2\cdots)_2$;

类似地,可定义$[\beta m]=B$,$\{\beta m\}=b$,

b 的二进制表示为 $b=(0.b_1b_2\cdots)_2$;

$[\gamma m]=C$,$\{\gamma m\}=c$,

c 的二进制表示为 $c=(0.c_1c_2\cdots)_2$;

$[\delta m]=D$,$\{\delta m\}=d$,

d 的二进制表示为 $d=(0.d_1d_2\cdots)_2$.

据题目条件知

$[\alpha m][\beta m]=[\gamma m][\delta m]$.

则 $AB=CD$,且 $A>C\geqslant D>B\geqslant 1$.

取 $n=2m$,则

$[2\alpha m]=2A+a_1,[2\beta m]=2B+b_1$,

$[2\gamma m]=2C+c_1,[2\delta m]=2D+d_1$.

由 $[2\alpha m][2\beta m]=[2\gamma m][2\delta m]$，知

$$(2A+a_1)(2B+b_1)=(2C+c_1)(2D+d_1)$$
$$\Rightarrow 2Ab_1+2Ba_1+a_1b_1=2Cd_1+2Dc_1+c_1d_1. \quad ②$$

(1)当 $a_1=1, b_1=1$ 时，由于式②左边为奇数，故右边为奇数. 因此，$c_1=1, d_1=1$. 由式②可得 $A+B=C+D$，再结合 $AB=CD$，得 $\{A,B\}=\{C,D\}$ 与 $A>C\geqslant D>B\geqslant 1$ 矛盾.

(2)当 $a_1=1, b_1=0$ 时，由于式②左边为偶数，故右边为偶数. 因此，$c_1d_1=0$. 式②变为 $B=d_1C+c_1D\in\{0,C,D\}$. 矛盾.

(3)当 $a_1=0, b_1=1$ 时，由于式②左边为偶数，故右边为偶数. 因此，$c_1d_1=0$. 式②变为 $A=d_1C+c_1D\in\{0,C,D\}$. 矛盾.

(4)当 $a_1=0, b_1=0$ 时，由式②得

$c_1=d_1=0$.

从而，$a_1=b_1=c_1=d_1=0$.

取 $n=4m$，则

$[4\alpha m]=4A+a_2$，$[4\beta m]=4B+b_2$，

$[4\gamma m]=4C+c_2$，$[4\delta m]=4D+d_2$.

由 $[4\alpha m][4\beta m]=[4\gamma m][4\delta m]$，知

$$(4A+a_2)(4B+b_2)=(4C+c_2)(4D+d_2)$$
$$\Rightarrow 4Ab_2+4Ba_2+a_2b_2=4Cd_2+4Dc_2+c_2d_2.$$

类似于之前的讨论知

$a_2=b_2=c_2=d_2=0$.

利用数学归纳法可以证明对于任意的 $k\in\mathbf{N}_+$，$a_k=b_k=c_k=d_k=0$.

故 $a=b=c=d=0$，αm、βm、γm、δm 均为正整数.

引理得证.

据引理知 $(m+1)\alpha$、$(m+1)\beta$、$(m+1)\gamma$、$(m+1)\delta$ 均为正整数.

因此，α、β、γ、δ 均为正整数.

5. 如图 2，设 $\triangle BHC$ 的外接圆半径为 R'，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$\triangle ABC$ 的三个内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，AH 的延长线与 BC 交于点 E，BH 的延长线与 AC 交于点 S，CH 的延长线与 BA 交于点 T，联结 OO'，并与 BC 交于点 M.

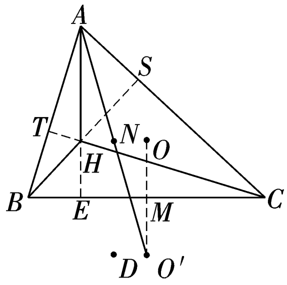

图 2

显然，A、T、H、S 四点共圆.

从而，$\angle THS=\pi-\angle A$.

在 $\triangle BHC$ 中，

$\angle BHC=\angle THS=\pi-\angle A$.

由正弦定理得

$$2R\sin A=BC=2R'\sin\angle BHC=2R'\sin(\pi-A)=2R'\sin A$$
$$\Rightarrow R=R'$$
$$\Rightarrow OB=OC=R=R'=O'B=O'C$$

$\Rightarrow$ 四边形 $OBO'C$ 为菱形，OO' 垂直平分 BC.

由 O 与 O'、N 与 D 分别关于 BC 对称知

$$OD=O'N=\frac{1}{2}O'A.$$

故 A、B、D、C 四点共圆的充分必要条件为点 D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，即

$$OD=R\Leftrightarrow O'A=2R.$$

因为 $\angle BOC=2\angle A$，即 $\angle BOM=\angle A$，所以，$BM=R\sin A$，$O'M=OM=R\cos A$.

又 $AE=AB\sin B$，$BE=AB\cos B$，

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$，

得
$$\begin{aligned}O'A^2&=(O'M+AE)^2+EM^2\\&=(R\cos A+AB\sin B)^2+(R\sin A-AB\cos B)^2\\&=AB^2+R^2+2AB\cdot R(\cos A\cdot\sin B-\sin A\cdot\cos B)\\&=c^2+R^2+4R^2\sin C\cdot\sin(B-A)\\&=c^2+R^2+4R^2\sin(B+A)\cdot\sin(B-A)\\&=c^2+R^2+2R^2(\cos 2A-\cos 2B)\\&=c^2+R^2+4R^2(\sin^2 B-\sin^2 A)\\&=b^2+c^2-a^2+R^2.\end{aligned}$$

综上，A、B、D、C 四点共圆的充分必要条

件为

$O'A=2R \Leftrightarrow O'A^2=4R^2$

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=3R^2.$

因此,原命题成立.

6. 对于$1\leqslant k\leqslant\frac{p-1}{2}$,项数为$2k$的平衡数列的个数为

$$\mathrm{C}_{2k}^{k}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{k}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{k}=\mathrm{C}_{2k}^{k}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k}.$$

故 $M_p=\sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{C}_{2k}^{k}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k)!}{(k!)(k!)}\cdot\frac{(p-1)^{2k}}{2^{2k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k)!}{((2k)!!)((2k)!!)}(p-1)^{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(p-1)^{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{((2k-1)!!)((2k+1)-2k)}{(2k)!!}(p-1)^{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}-\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}\right)(p-1)^{2k}$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}(p-1)^{2k}-\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}(p-1)^{2k-2}\right)$$

$$\equiv\frac{p!!}{(p-1)!!}(p-1)^{p-1}-1\equiv-1\pmod p$$

$\Rightarrow M_p\equiv-1\pmod p$.

因为$p\equiv3\pmod 4$,所以,-1不是模p的二次剩余.

从而,M_p不为完全平方数.

7. 设辅助函数$f(x)=x^5-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

先证明一个引理.

引理　当$x\in(-\infty,1]$时,函数$f(x)\leqslant0$.当且仅当$x=1$时,等号成立.

证明　易知,$f'(x)=5x^4-\frac{2}{3}$.

令$f'(x)=0$. 则$x_1=-\sqrt[4]{\frac{2}{15}}$,$x_2=\sqrt[4]{\frac{2}{15}}$.

当$x\in(-\infty,x_1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$严格单调递增;

当$x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$严格单调递减;

当$x\in(x_2,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$严格单调递增.

又$f(1)=0$,故只需证$f(x_1)<0$,即

$$f(x_1)=x_1^5-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}=x_1x_1^4-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{15}x_1-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}=-\frac{8}{15}x_1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{8}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2}{15}}\right)-\frac{1}{3}<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{15}<\left(\frac{5}{8}\right)^4=\frac{5^4}{2^{12}}\Leftrightarrow2^{13}<5^5\times3$$

$\Leftrightarrow 8\ 192\times9\ 375.$

显然成立.

引理得证.

当$x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant1$时,$x_i^5-\frac{2}{3}x_i-\frac{1}{3}\leqslant0.$

故$x_i^5\leqslant\frac{2}{3}x_i+\frac{1}{3}$,当且仅当$x_i=1$时,等号成立.

因此,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^5\leqslant\frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{3}$,当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$时,等号成立.

由于$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$,于是,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^5\leqslant\frac{n}{3}$.

此时,$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$,显然不成立.

故$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^5<\frac{n}{3}$.

8. 先证明一个引理.

引理　设$m\in\mathbf{N}_+$. 在

$$M_m=\{n\in\mathbf{Z}\mid-(2m-1)\leqslant n\leqslant2m-1\}$$

中任意选取$2m+1$个不同的数,则其中必存

在三个数，其和为零.

证明 利用数学归纳法证明.

当 $m=1$ 时，结论显然成立.

假设 $m=k-1(k\geqslant 2)$ 时，结论成立.

当 $m=k$ 时，若在集合 M_k 所取的 $2k+1$ 个不同的数组成的集合 A 中，存在 $2k-1$ 个元素属于 M_{k-1}，则由归纳假设知结论成立.

否则，在集合 A 中至少有三个元素属于集合

$$M_k-M_{k-1}$$
$$=\{-(2k-1),-(2k-2),2k-2,2k-1\}.$$

(1) $\{2k-1,-(2k-1)\}\subset A$.

若 $0\in A$，则 0、$-(2k-1)$、$2k-1$ 之和为 0；

若 $0\notin A$，则如下 $2k-2$ 个数对

$\{i,2k-1-i\}(i=1,2,\cdots,k-1)$，

$\{-i,-(2k-1-i)\}(i=1,2,\cdots,k-1)$

中有 $A-\{2k-1,-(2k-1)\}$ 中 $2k-1$ 个数，至少有一对数在集合 A 中，使得结论成立.

(2) $\{2k-1,-(2k-1)\}\not\subset A$.

则 $\{2k-2,-(2k-2)\}\subset A$，且由对称性（将整数 a 变为 $-a$），不妨设 $2k-1\in A$，$-(2k-1)\notin A$. 于是，

$\{k-1\}$，$\{i,2k-2-i\}(i=0,1,\cdots,k-2)$，

$\{-i,-(2k-1-i)\}(i=1,2,\cdots,k-1)$，

这 $2k-1$ 组中包含 $A-\{2k-1,-(2k-1)\}$ 中 $2k$ 个数，至少有一对同组的数在集合 A 中，使得结论成立.

引理得证.

将方格表放入平面直角坐标系中，使得其边界为：

$x=-2\ 015$，$x=2\ 015$，

$y=-2\ 015$，$y=2\ 015$.

此时，表格的中心点即为坐标原点.

由引理，知存在三条水平格线（依次记为 l_1、l_2、l_3），使得其在 y 轴上的截距之和为零；同样存在三条竖直格线（依次记为 L_1、L_2、L_3），使得其在 x 轴上的截距之和为零.

记 L_i 与 l_j 的交点为 $P_{ij}(i、j\in\{1,2,3\})$，作出图 3.

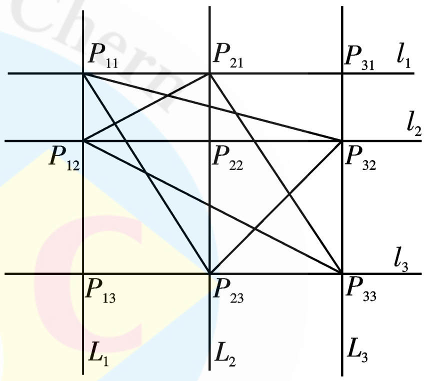

图 3

显然，$P_{ij}(i、j\in\{1,2,3\})$ 均为红点，$\triangle P_{21}P_{12}P_{33}$ 的重心、$\triangle P_{11}P_{32}P_{23}$ 的重心均为坐标原点，且六个顶点各不相同，原命题得证.