第八届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 已知凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 P，边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H，$\triangle PHE$、$\triangle PEF$、$\triangle PFG$、$\triangle PGH$ 的外心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4. 证明：O_1、O_2、O_3、O_4 四点共圆的充分必要条件为 A、B、C、D 四点共圆.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，证明：

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3.$$

3. 用不交于内点的对角线将多边形分为一系列三角形，必要时可以在形内取若干个点作为所分出的三角形的顶点，这些顶点称为“辅助顶点”. 辅助顶点之间的连线、辅助顶点与顶点之间的连线均称为对角线. 任何两条对角线均不得交于内点. 这种将多边形划分为一系列三角形的方法称为多边形的“三角形剖分”.

设 n 为不小于 5 的正整数. 为了将一个正 n 边形剖分为一系列的钝角三角形，试求所分成的三角形个数 m 的最小可能值.

4. 正实数 α、β、γ、δ，对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，满足

$$[\alpha n][\beta n]=[\gamma n][\delta n], \qquad ①$$

且 $\{\alpha,\beta\}\neq\{\gamma,\delta\}$. 证明：$\alpha\beta=\gamma\delta$，且 α、β、γ、δ 为正整数.

5. 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，O' 为 $\triangle BHC$ 的外心，N 为线段 AO' 的中点，D 为 N 关于边 BC 的对称点. 证明：A、B、D、C 四点共圆的充分必要条件为 $b^2+c^2-a^2=3R^2$，其中，$a=BC$，$b=CA$，$c=AB$，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

6. 已知素数 $p\equiv 3\pmod 4$. 对于一个由 $\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm\frac{p-1}{2}$ 组成的长度不大于 $p-1$ 的整数数列，若其包含正项与负项各一半，则称此整数数列为“平衡的”. 令 M_p 表示平衡数列的个数. 证明：M_p 不为完全平方数.

7. 设 $n\geqslant 3$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant 1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$. 证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^5<\frac{n}{3}$.

8. 在 $4\,030\times 4\,030$ 方格表中任意选取 2 017 条水平格线和 2 017 条竖直格线，并将这些格线的交点染为红色. 证明：存在六个两两不同的红点 A、B、C、D、E、F，使得 $\triangle ABC$ 的重心、$\triangle DEF$ 的重心均为方格表的中心点.

——答案请参考《中等数学》2017 年第 9 期