

第九届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

第二天 (2018年7月26日, 18:00-21:00)

5. 已知锐角 $\triangle ABC$ 满足 $AB > AC$, 内心为 I , $\angle A$ 内的旁心为 I_1 , BC 的中点为 L , 直线 LI 与边 AC 交于点 M , 直线 I_1L 与边 AB 交于点 N . 证明:

$$\frac{S_{\triangle LMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a(c-b)}{(a+c-b)^2}, \text{ 其中, } BC=a, CA=b, AB=c.$$

证明 先证明一个引理.

引理 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 与边 BC 切于点 D , $\angle A$ 内的旁切圆 $\odot I_1$ 与边 BC 切于点 E , L 为边 BC 的中点, 则 $AE \parallel IL$, $AD \parallel I_1L$.

证明 如图1, 设 DD_1 为 $\odot I$ 的直径, 过点 D_1 作 BC 的平行线, 与边 AB 、 AC 分别交于点 B_1 、 C_1 .

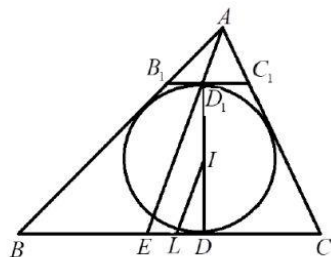


图1

则 B_1C_1 与 $\odot I$ 切于点 D_1 .

因此, $\triangle AB_1C_1$ 中 $\angle A$ 内的旁切圆为 $\odot I$.

因为 A 为 $\triangle AB_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心, D_1 、 E 为对应点, 所以, A 、 D_1 、 E 三点共线.

$$\text{由 } BE = \frac{AB+BC+CA}{2} - AB = \frac{BC+CA-AB}{2} = CD,$$

知 L 为线段 ED 的中点.

因此, IL 为 $\triangle D_1ED$ 的中位线, 即 $IL \parallel D_1E$, 则 $AE \parallel IL$.

类似地，如图 2，设 EE_1 为 $\odot I_1$ 的直径，则 LI_1 为 $\triangle DEE_1$ 的中位线，即 $LI_1 \parallel DE_1$.

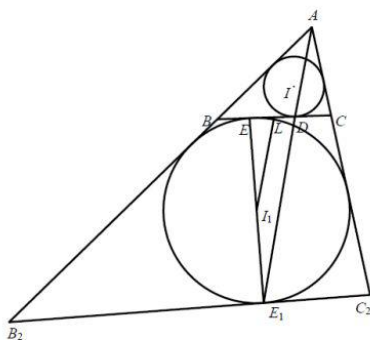


图 2

过点 E_1 作 $\odot I_1$ 的切线，与 AB 、 AC 的延长线分别交于点 B_2 、 C_2 .

则 A 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB_2C_2$ 的位似中心，且 $\odot I_1$ 为 $\triangle AB_2C_2$ 的内切圆，即 D 、 E_1 为对应点.

因此， A 、 D 、 E_1 三点共线，从而， $I_1L \parallel AD$.

引理证毕.

如图 3，设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 与边 BC 切于点 D ， $\angle A$ 内的旁切圆 $\odot I_1$ 与边 BC 切于点 E .

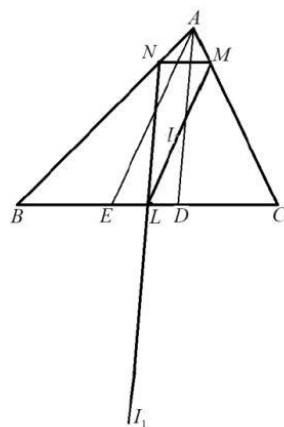


图 3

由引理可得 $AE \parallel ML$ ， $AD \parallel NL$.

$$\text{由 } \frac{CM}{CA} = \frac{CL}{CE} \Rightarrow CM = b \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a+c-b}{2}} = \frac{ab}{a+c-b}$$

$$\Rightarrow AM = AC - CM = \frac{b(c-b)}{a+c-b}.$$

$$\text{类似地, } BN = \frac{ac}{a+c-b}, \quad AN = \frac{c(c-b)}{a+c-b}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{S_{\triangle LMN}}{S_{\triangle ABC}} &= 1 - \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle BLN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle CLM}}{S_{\triangle ABC}} \\ &= 1 - \frac{(c-b)^2}{(a+c-b)^2} - \frac{a}{2(a+c-b)} - \frac{a}{2(a+c-b)} \\ &= \frac{a(c-b)}{(a+c-b)^2}. \end{aligned}$$

[注] $S_{\triangle BLN} = S_{\triangle CLM}$, 因此, $MN \parallel BC$.

6. 已知函数 $f: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$, 满足对任意的 $x \in \mathbf{Z}_+$, 有

$$f(x) + f(x+2) \leq 2f(x+1).$$

证明: 存在一个无穷正整数集合 M , 使得对任意的 $i, j, k \in M$, 有

$$(i-j)f(k) + (j-k)f(i) + (k-i)f(j) = 0.$$

证明 考虑点列 $A_n = (n, f(n)) (n \in \mathbf{Z}_+)$.

注意到, 题目中条件等价于 $f(x+1) - f(x) \geq f(x+2) - f(x+1)$.

$$\text{则 } k_{A_n A_{n+1}} = f(n+1) - f(n) \geq f(n+2) - f(n+1) = k_{A_{n+1} A_{n+2}}.$$

故折线 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$ 的各段斜率 $\{k_{A_n A_{n+1}}\}$ 为不升的整数列.

且 $\{k_{A_n A_{n+1}}\}$ 中不出现负数项, 否则, 该项后面均为负数项. 则折线 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$

必与 x 轴相交, 这与 $f(n) > 0$ 矛盾.

从而, $\{k_{A_n A_{n+1}}\}$ 为不升的非负整数列.

故存在 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时, $k_{A_n A_{n+1}}$ 为常数.

进而, 当 $n \geq n_0$ 时, 所有 A_n 在同一条直线上.

取 $M = \mathbf{Z} \cap [n_0, +\infty)$.

对任意的 $i, j, k \in M$, 由 A_i, A_j, A_k 共线, 设该直线为 $y = ux + v$, 其中 u 为非负整数, v 为整数.

则 $f(i) = ui + v, f(j) = uj + v, f(k) = uk + v$. 故

$$\begin{aligned} & (i-j)f(k) + (j-k)f(i) + (k-i)f(j) \\ &= (i-j)(uk+v) + (j-k)(ui+v) + (k-i)(uj+v) = 0. \end{aligned}$$

综上, 原命题成立.

7. 若 n 为完全平方数或 n 到距离其最近的完全平方数的距离为完全立方数, 则称 n 为“好数”. 例如, $|45^2 - 2017| = 2^3$, 即 2017 为好数. 对于正整数 N , 令 $S(N)$ 为集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 中好数的个数.

(1) 求 $S(2018)$;

(2) 是否存在正实数 α, β 满足 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{S(N)}{N^\alpha} = \beta$?

解 (1) 对于正整数 n , n^2 左侧的完全平方数为 $n^2 - 2n + 1$, n^2 右侧的完全平方数为 $n^2 + 2n + 1$.

因此, 距离 $[n^2 - n + 1, n^2 + n]$ 内整数最近的完全平方数均为 n^2 .

故 $[n^2 - n + 1, n^2 + n]$ 内的好数的个数为 $1 + \left[\sqrt[3]{n-1} \right] + \left[\sqrt[3]{n} \right]$.

(设 $s = \left[\sqrt[3]{n-1} \right]$, $t = \left[\sqrt[3]{n} \right]$. 则 $[n^2 - n + 1, n^2 + n]$ 内的好数依次为 $n^2, n^2 - 1^3, n^2 - 2^3, \dots, n^2 - s^3, n^2 + 1^3, \dots, n^2 + t^3$.)

注意到, $44^2 < 2018 = 45^2 - 7 < 45^2$.

$$\begin{aligned} \text{则 } S(2018) &= \sum_{n=1}^{44} (1 + \left[\sqrt[3]{n-1} \right] + \left[\sqrt[3]{n} \right]) + (\left[\sqrt[3]{44} \right] - 1) \\ &= 44 + 2 \sum_{n=1}^{44} \left[\sqrt[3]{n} \right] - 1 = 43 + 2(1 \times 7 + 2 \times 19 + 3 \times 18) = 241. \end{aligned}$$

(2) 存在正实数 α, β 满足 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{S(N)}{N^\alpha} = \beta$, 其中, $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{3}{2}$.

对于充分大的正整数 N ,

$$\sum_{k=1}^{\left[\sqrt{N} \right] - 1} (1 + \left[\sqrt[3]{k-1} \right] + \left[\sqrt[3]{k} \right]) < S(N) < \sum_{k=1}^{\left[\sqrt{N} \right] + 1} (1 + \left[\sqrt[3]{k-1} \right] + \left[\sqrt[3]{k} \right]),$$

$$2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \left[\sqrt[3]{k} \right] - 3 \left[\sqrt[3]{N} \right] < S(N) < 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} \sqrt[3]{k},$$

$$2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \sqrt[3]{k} - 5\sqrt{N} < S(N) < 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} \sqrt[3]{k}.$$

注意到, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 $[0, +\infty)$ 上的严格单调递增的正函数, 因此,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} \sqrt[3]{k} &< \int_0^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 2} \sqrt[3]{x} dx < \int_0^{\sqrt{N} + 2} \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{N} + 2} \\ &= \frac{3}{4} (\sqrt{N} + 2)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} N^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \sqrt[3]{k} &> \int_0^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \sqrt[3]{x} dx > \int_0^{\sqrt{N} - 1} \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{N} - 1} = \frac{3}{4} (\sqrt{N} - 1)^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{3}{4} N^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}}, \end{aligned}$$

$$\text{故} \frac{3}{2} N^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}} - 5\sqrt{N} < S(N) < \frac{3}{2} N^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}},$$

$$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}} - 5N^{-\frac{1}{6}} < S(N) \div N^{\frac{2}{3}} < \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

因此, 存在正实数 α 、 β 满足 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{S(N)}{N^\alpha} = \beta$, 其中, $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{3}{2}$.

8. 设正整数 $n \geq 2$. 圆周上放置了 n 种颜色的 $2n$ 个点, 其中每种颜色各两个点. 若某段圆弧 L 含的色点个数属于 $[1, 2n-1]$, 则存在某种颜色使得 L 上该颜色的点恰为一个. 证明: 可以去掉某种颜色的两个点, 使得上述性质仍保留.

证明 为方便起见, 称满足题目条件的 $2n$ 个点的放置方案为“好的”. 本题中涉及到的弧均为逆时针方向.

设 $A_i, B_i (1 \leq i \leq n)$ 为圆周上的 $2n$ 个色点, 其中 A_i, B_i 的颜色均为 i . 根据题意可知, 任给 $1 \leq i \leq n$, 色点 A_i, B_i 在圆周上不相邻 (否则只包含此两个色点的弧不满足题意), 色点 A_i, B_i 将圆周分为两个弧 $\widehat{A_i B_i}$ 和 $\widehat{B_i A_i}$ (逆时针走向). 根据题意可知, 存在 $j (1 \leq j \leq n)$ 且 $j \neq i$ 使得闭弧 $\widehat{A_i B_i}$ 上恰存在一个颜色为 j 的点, 另一个颜色为 j 的点在闭弧 $\widehat{B_i A_i}$ 上, 即弦 $A_i B_i$ 与弦 $A_j B_j$ 相交.

考虑无序两点组 $C_i = (A_i, B_i)$ 为顶点的 n 阶图 G : 顶点 C_i 与 C_j 之间连边当且仅当弦 $A_i B_i$ 与弦 $A_j B_j$ 相交. 根据前面推理可得任给 $1 \leq i \leq n$, 存在 $j (1 \leq j \leq n)$ 且 $j \neq i$ 使得顶点 C_i 与 C_j 之间连边.

当 $n=2$ 时, 满足题意的圆周上的 4 个色点的颜色只能依次为 1, 2, 1, 2, 等价于图 G 为连通图.

下面证明一个引理.

引理 设 $n \geq 3$, 一种放置方案为“好的”等价于对应的图 G 为连通图.

证明 若一种放置方案不是好的, 则存在一段弧 L , 弧 L 含的色点数属于 $[1, 2n-1]$, 且不存在某种颜色使得 L 上该颜色的点恰为一个. 设 L 含有 k 种色点, 不妨设此 k 种颜色为 1, 2, $\dots$, k , 则 L 上的色点恰为 $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_k, B_k$, 其中, $1 \leq k \leq n-1$. 弧 L 的两个端点的连线将圆盘剖分成两个区域: 弧 L 所在的包含连线的闭区域 D_1 和不包含连线的另一个区域 D_2 . 则任给 $1 \leq i \leq k$, 弦 $A_i B_i$ 在区域 D_1 上, 任给 $k+1 \leq j \leq n$, 弦 $A_j B_j$ 在区域 D_2 上. 因此, 弦 $A_i B_i$ 与弦 $A_j B_j$ 不

相交，即顶点 C_i 与顶点 C_j 之间不连边，即对应的图 G 为非连通图。

若方案为好的，显然图 G 当中存在边。假设 G 不是连通图，则存在 G 的最大连通子图 G^* ， G^* 涉及 G 的 l 个点，其中， $2 \leq l \leq n-1$ ，不妨设此 l 个顶点为 $C_1, C_2, \dots, C_l$ 。设 $2l$ 个色点 $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_l, B_l$ 将圆周分成 $2l$ 个弧段，其中必有一个弧段含有其它色点，设该弧段为闭弧 $\widehat{PQ}$ （逆时针走向），其中， $P, Q \in \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_l, B_l\}$ ，考虑闭弧 $\widehat{QP}$ （逆时针走向），显然闭弧 $\widehat{QP}$ 上的色点数属于 $[2l, 2n-1]$ 。因为方案是好的，所以，存在颜色 $j \in \{l+1, l+2, \dots, l+n\}$ 使得闭弧 $\widehat{QP}$ 恰含一个颜色为 j 的点 A_j ，另一个颜色为 j 的点 B_j 必在开弧 $\widehat{PQ}$ 上。

不妨设 $1 \leq i \leq l$ 时，从 Q 点沿闭弧 $\widehat{QP}$ 逆时针行走到 P 点过程中首次遇到颜色为 i 的点为 A_i ，第二次遇到颜色为 i 的点为 B_i 。因为 $C_1, C_2, \dots, C_l$ 对应的子图 G^* 为连通图，所以，闭弧 $\widehat{QP} = \widehat{A_1 B_1} \cup \widehat{A_2 B_2} \cup \dots \cup \widehat{A_l B_l}$ （否则，存在点 $R \in \widehat{QP}$ ，且任给 $1 \leq i \leq l$ ，使得 $R \notin \widehat{A_i B_i}$ ，即色点 A_i, B_i 同在 $\widehat{QR}$ 或同在 $\widehat{RP}$ 上。不妨设 $1 \leq i \leq m$ 时，色点 A_i, B_i 均在 $\widehat{QR}$ 上， $m+1 \leq j \leq l$ 时，色点 A_j, B_j 均在 $\widehat{RP}$ 上，即 $1 \leq i \leq m < m+1 \leq j \leq l$ 时，弦 $A_i B_i$ 与弦 $A_j B_j$ 不相交，即顶点 C_i 与顶点 C_j 之间不连边，与图 G^* 为连通图矛盾），因为 A_j 属于闭弧 $\widehat{QP}$ ，所以存在 $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ 使得 $A_j \in \widehat{A_i B_i}$ ，显然 $B_j \notin \widehat{A_i B_i}$ ，因此弦 $A_i B_i$ 必与弦 $A_j B_j$ 相交，即顶点 C_i 与 C_j 之间有边，即 G 必与最大连通子图 G^* 的某个顶点之间有边，与最大性矛盾，即对应的图 G 为连通图。

综上，引理得证。

因为原方案为好的，所以，对应的图 G 为连通图，可以去掉 G 的一些边，得到 G 的生成树 $\tilde{G}$ ，树 $\tilde{G}$ 中存在度为 1 的顶点。不妨设顶点 C_n 在 $\tilde{G}$ 中的度为 1，树 $\tilde{G}$ 中去掉顶点 C_n 后仍为树，于是，连通图 G 去掉顶点 C_n 及其关联的边后仍为连通图，即去掉颜色为 n 的色点 A_n, B_n 后方案仍为好的，原命题得证。

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注