第九届陈省身杯浙江赛区预赛答案

2018 年 1 月 7 日

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）

1.若正实数x,y满足$x^3+y^3+3xy=1$，则$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(y+\frac{1}{y}\right)^3$的最小值为__________。

答 $\frac{125}{4}$。

由于$0=x^3+y^3-1+3xy=(x+y-1)\left((x-y)^2+xy+x+y+1\right)$，且

$(x-y)^2+xy+x+y+1>0$，则$x+y-1=0$，即$x+y=1$。

设$f(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3(t>0)$，则$f'(t)=3\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$，

$f''(t)=3\left(2\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2+\frac{2}{t^3}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\right)>0$，因此函数$f(t)$为凸函数，由琴生不等式可得$f(x)+f(y)\geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{125}{4}$。当$x=y=\frac{1}{2}$时等号成立，因此

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(y+\frac{1}{y}\right)^3$的最小值为$\frac{125}{4}$。

2.已知单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AB,A_1D_1,A_1B_1,BC的中点分别为L,M,N,K，则四面体$LMNK$的内切球的半径为____________。

答 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$。

设四面体$LMNK$的内切球的半径为r，因为$\angle NLK=\angle LNM=90°$，所以

$S_{\Delta LMN}=S_{\Delta LNK}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

又因为$\angle MLK=\angle MNK=90°$，所以$S_{\Delta LMK}=S_{\Delta MNK}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$。因此四面体$LMNK$的表面积$S=2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$。由于$KL$垂直于底面$LMN$，则

$V_{LMNK}=\frac{1}{3}KL\times S_{\Delta LMN}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{12}$。另一方面，由$V_{LMNK}=\frac{1}{3}rS$可知

$r=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$。

3.已知点P为双曲线$\Gamma:\dfrac{x^2}{463^2}-\dfrac{y^2}{389^2}=1$上一点，过点$P$做直线$l$与双曲线$\Gamma$的两条渐近线分别交于点$A,B$，若$P$为线段$AB$的中点，$O$为坐标原点，则$S_{\Delta OAB}=$________________。

答 180107。

设双曲线Γ的两条渐近线分别为$l_1:y=\dfrac{389}{463}x$，$l_2:y=-\dfrac{389}{463}x$，l与l_1,l_2分别交于点A,B。设$P(x_0,y_0),A\left(x_1,\dfrac{389}{463}x_1\right),B\left(x_2,-\dfrac{389}{463}x_2\right)$，则

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2},y_0=\dfrac{389}{463}\times\dfrac{x_1-x_2}{2}$。

由于$1=\dfrac{{x_0}^2}{463^2}-\dfrac{{y_0}^2}{389^2}=\dfrac{x_1x_2}{463^2}$，则

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|x_1\left(-\frac{389}{463}x_2\right)-x_2\left(\frac{389}{463}x_1\right)\right|=\frac{389}{463}\left|x_1x_2\right|=389\times463=180107。$$

4.对于任意正实数x,y，则$\dfrac{(xy+x+y)(x+y+1)}{(x+y)(x+1)(y+1)}$的取值范围为________________。

答 $\left(1,\dfrac{9}{8}\right]$。

设$f(x,y)=\dfrac{(xy+x+y)(x+y+1)}{(x+y)(x+1)(y+1)}$，则$f(x,y)=1+\dfrac{xy}{(x+y)(x+1)(y+1)}>1$。

当固定y，且$x\to0$时，$f(x,y)\to1$；

由均值不等式，可得$x+y\ge2\sqrt{xy},x+1\ge2\sqrt{x},y+1\ge2\sqrt{y}$，则

$f(x,y)\le1+\dfrac{xy}{2\sqrt{xy}\cdot2\sqrt{x}\cdot2\sqrt{y}}=\dfrac{9}{8}$，且当$x=y=1$时，等号成立，因此$f(x,y)$的取值范围为$\left(1,\dfrac{9}{8}\right]$。

5.在平面直角坐标系中，已知$A(13,43)$，$B\left(-36,19\sqrt{2}\right)$，$C\left(18,-11\sqrt{14}\right)$，则$\Delta ABC$的垂心$H$的坐标为________。

答 $\left(-5,43+19\sqrt{2}-11\sqrt{14}\right)$。

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，因为$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=2018$，所以$\Delta ABC$的外心为坐标原点$O$，因此$H(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$，于是$H$的坐标为$\left(-5,43+19\sqrt{2}-11\sqrt{14}\right)$。

6.设函数$f(x)=\dfrac{x(1-x)}{x^3-x+1}\ (0<x<1)$，若$f(x)$的最大值为$f(x_0)$，则$x_0=$________。

答 $\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$。

令$f'(x)=\dfrac{x^4-2x^3+x^2-2x+1}{\left(x^3-x+1\right)^2}=\dfrac{\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1\right)\left(x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1\right)}{\left(x^3-x+1\right)^2}=0$，则$\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1\right)\left(x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1\right)=0$。

由于$x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1=0$的判别式小于$0$，则该方程无实根。

对于$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0$，由于$\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}>1$，则该方程有唯一实根$x_0=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\in(0,1)$。

当$0<x<x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$严格单调递增；当$x_0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$严格单调递减，则当$x=x_0$时，$f(x)$取得最大值，因此$x_0=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$。

7.若对于任意正整数$n\geq 3$，均有$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}+\dfrac{5}{12}\log_a(a-1)>\dfrac{1}{5}$，则实数$a$的取值范围是________。

答 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$。

设 $f(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\left(n\in Z,n\geq 3\right)$，则

$$f(n+1)-f(n)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0,$$

即 $f(n)$ 严格递增，于是对于任意正整数 $n\geq 3$，均有 $f(n)\geq f(3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$，因此实数 a 的取值范围就是满足 $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}\log_a(a-1)>\frac{1}{5}$ 的实数 a 的取值范围，即 $\log_a(a-1)>-1$。由于 $a>1$，则由 $\log_a(a-1)>-1$ 可得 $\frac{1}{a-1}<a$，即 $a^2-a-1>0$，于是 $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

综上可得实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$。

8.已知正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2018}$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_{2018}$，对于 $i=1,2,\cdots,2018$，b_i 为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2018}$ 中不超过 i 的正整数的个数，则 $\frac{\sum_{k=1}^{2018}a_k+\sum_{k=1}^{a_{2018}}b_k}{a_{2018}+1}=$______。

答 2018。

因为，当 $k<a_1$ 时，$b_k=0$；对于 $j=1,2,\cdots,2017$，当 $a_j\leq k<a_{j+1}$ 时，$b_k=j$；当 $k=a_{2018}$ 时，$b_k=2018$，所以

$$\sum_{k=1}^{a_{2018}}b_k=0\times(a_1-1)+1\times(a_2-a_1)+2\times(a_3-a_2)+\cdots+2017\times(a_{2018}-a_{2017})+2018$$

$$=-\sum_{k=1}^{2018}a_k+2018(a_{2018}+1),$$

因此 $\frac{\sum_{k=1}^{2018}a_k+\sum_{k=1}^{a_{2018}}b_k}{a_{2018}+1}=2018$。

二、解答题（共 56 分）

9.(16 分)已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的长轴的左、右端点分别为 A,B，左、右焦点分别为 F_1,F_2，若存在椭圆 Γ 上的点 P，使得 PF_1,PF_2 三等分 $\angle APB$，在所有满足

上述条件的椭圆Γ中，试求不同的离心率e的个数。

解　由$S_{\Delta PAF_1}=S_{\Delta PBF_2}$可得，$PA\cdot PF_1=PB\cdot PF_2$，因此$P$一定是短轴的端点，不妨假设点$P$的坐标为$(0,b)$。因为$PA,PF_1$的斜率分别为$\frac{b}{a},\frac{b}{c}$，所以

$$\tan\angle APF_1=\frac{\frac{b}{c}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}}=\frac{b(a-c)}{ac+b^2}。\qquad(4分)$$

设O为坐标原点，因为$\tan\angle OPF_1=\frac{c}{b}$，所以

$$\tan\angle F_1PF_2=\tan 2\angle OPF_1=\frac{2\frac{c}{b}}{1-\left(\frac{c}{b}\right)^2}=\frac{2bc}{b^2-c^2}。\qquad(8分)$$

由于$\angle APF_1=\angle F_1PF_2$，则有$\frac{b(a-c)}{ac+b^2}=\frac{2bc}{b^2-c^2}$。将$b^2=a^2-c^2$代入可得

$(a-c)(a^2-2c^2)=2c(ac+a^2-c^2)$。

因为$e=\frac{c}{a}\in(0,1)$，所以可得$4e^3-4e^2-3e+1=0$。

设$f(t)=4t^3-4t^2-3t+1\ (t\in R)$，则$f'(t)=12t^2-8t-3$。令$f'(t)=0$，可得两个实根$t_1=\frac{2-\sqrt{13}}{6}\in(-1,0)$，$t_2=\frac{2+\sqrt{13}}{6}\in(0,1)$。由$f(t_1)>0$，$f(t_2)<0$，可知方程$4t^3-4t^2-3t+1=0$有三个实根。因为$f(0)>0,f(1)<0$，所以方程$4t^3-4t^2-3t+1=0$在区间$(0,1)$内恰有一个实根，因此满足条件的不同的离心率$e$的个数为1。

10.　(20分)求所有可能的正整数$n\geq 3$，使得存在互不相等的正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，可将所有的$a_ia_j\ (1\leq i<j\leq n)$按递增的次序重新排列后得到一个等比数列。

解　$n=3$时，选取$a_1=1,a_2=2,a_3=4$，则$a_1a_2=2,a_1a_3=4,a_2a_3=8$为等比数列。

$n=4$时，选取$a_1=1,a_2=4,a_3=8,a_4=16$，则

$a_1a_2=4,a_1a_3=8,a_1a_4=16,a_2a_3=32,a_2a_4=64,a_3a_4=128$为等比数列。　(10分)

$n\ge 5$时，不妨假设$a_1<a_2<\cdots<a_n$，且等比数列$S:\{a_ia_j\}\ (1\le i<j\le n)$的公比为$q$，则$q>1$。由于等比数列$S$的前两项为$a_1a_2,a_1a_3$，末两项为$a_{n-2}a_n,a_{n-1}a_n$，则$\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_1a_3}{a_1a_2}=q=\frac{a_{n-1}a_n}{a_{n-2}a_n}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$。

若$n\ge 6$，则$a_3a_{n-2}=a_2a_{n-1}$，这与a_3a_{n-2},a_2a_{n-1}为等比数列S中不同的两项矛盾。

(15 分)

若$n=5$，则$\frac{a_3}{a_2}=q=\frac{a_4}{a_3}$。因为$\frac{a_1a_4}{a_1a_3}=q,\frac{a_3a_5}{a_2a_5}=q$，所以等比数列$S$的前三项为$a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4$，末三项为$a_2a_5,a_3a_5,a_4a_5$。又因为$\frac{a_2a_4}{a_2a_3}=q,\frac{a_3a_4}{a_2a_4}=q$，所以$a_2a_3,a_2a_4,a_3a_4$为等比数列$S$的相邻三项。若$a_1a_5$为等比数列$S$的第四项，则$\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_1a_5}{a_1a_4}=q=\frac{a_3}{a_2}$，于是$a_2a_5=a_3a_4$，这与$a_2a_5,a_3a_4$为等比数列$S$中不同的两项矛盾；若$a_1a_5$为等比数列$S$的第七项，则$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2a_5}{a_1a_5}=q=\frac{a_4}{a_3}$，于是$a_2a_3=a_1a_4$，这与$a_2a_3,a_1a_4$为等比数列$S$中不同的两项矛盾。

(20 分)

11. (20 分)对于任意实数$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in[0,1]$，求$\prod\limits_{1\le i<j\le 5}|a_i-a_j|$的最大值。

解　设$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\prod\limits_{1\le i<j\le 5}|a_i-a_j|$，由于$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$的最大值一定在$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$互不相等时取到，因此不妨假设$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$。要使$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$取最大值，一定有$a_1=1,a_5=0$，于是

$f(1,a_2,a_3,a_4,0)=(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)a_2(a_3-a_4)a_3a_4$。 (5 分)

设$a_2-a_4=x$，则$x\in(0,1)$。

由均值不等式可得

$$f(1,a_2,a_3,a_4,0)=(1-a_2)a_4(1-a_3)a_3(1-a_4)a_2(a_2-a_3)(a_3-a_4)(a_2-a_4)$$

$$\le\left(\frac{1-a_2+a_4}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-a_4+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_2-a_4}{2}\right)^2(a_2-a_4)$$

$$=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1+x}{2}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right)^2 x=\frac{1}{2^8}\left(x^7-2x^5+x^3\right)\triangleq g(x),$$

其中等号成立的条件为$a_2+a_4=1,a_3=\frac{1}{2}$。 (15分)

令$g'(x)=\frac{1}{2^8}\left(7x^6-10x^4+3x^2\right)=\frac{1}{2^8}x^2\left(7x^2-3\right)\left(x^2-1\right)=0$，则在区间$(0,1)$内有唯一的解$x_0=\frac{\sqrt{21}}{7}$。当$0<x<x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$严格单调递增；当$x_0<x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$严格单调递减，则$g(x)$的最大值为$g(x_0)=\frac{3\sqrt{21}}{2^4\cdot 7^4}=\frac{3\sqrt{21}}{38416}$。

由$a_2-a_4=\frac{\sqrt{21}}{7}$，可知当$a_1=1,a_2=\frac{7+\sqrt{21}}{14},a_3=\frac{1}{2},a_4=\frac{7-\sqrt{21}}{14},a_5=0$时，$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$取得最大值，且最大值为$\frac{3\sqrt{21}}{38416}$。 (20分)