2005 年女子数学奥林匹克

第一天

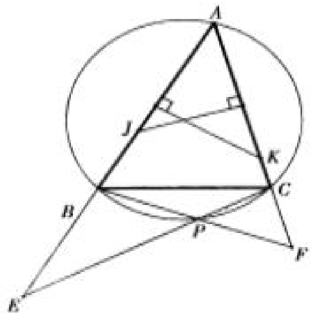
2005 年 8 月 12 日上午 8：00~12：00　长春

我们进行数学竞赛的目的，不仅仅是为了数学而数学，其着眼点还是因为它是一切科学的得力助手，因而提高数学，也为学好其他科学打好基础

——华罗庚

1. 如图，设点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 CP 和 AC 相交于点 E，直线 BP 和 AC 相交于点 F，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 J，边 AB 的垂直平分线交边 AC 于点 K，求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}.$$



2. 求方程 $\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$ 组的所有实数解.

3. 是否存在这样的凸多面体，它共有 8 个顶点，12 条棱和 6 个面，并且其中有 4 个面，每两个面都有公共棱？

4. 求出所有的正实数 a，使得存在正整数 n 及 n 个互不相交的无限集合 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\mathbf{Z}$，而且对于每个 A_i 中的任意两数 $b>c$，都有 $b-c\geqslant a^i$.

第二天

2005年8月13日上午8：00～12：00　长春

数学竞赛，它对牢固基础知识、发展智力，培养拔尖人才，是一件具有战略意义的活动。

——华罗庚

5. 设正实数 x，y 满足 x^3+y^3=x-y，求证：

$$x^2+4y^2<1.$$

6. 设正整数 $n\geqslant 3$，如果在平面上有 n 个格点 P_1，P_2，…，P_n 满足：当 $|P_iP_j|$ 为有理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为无理数；当 $|P_iP_j|$ 为无理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为有理数，那么称 n 是“好数”.

(1) 求最小的好数；

(2) 问：2005 是否为好数？

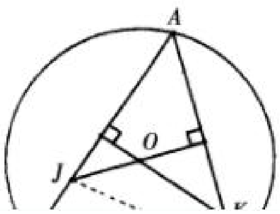
7. 设 m，n 是整数，$m>n\geqslant 2$，$S=\{1,2,\ldots,m\}$，$T=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 是 S 的一个子集．已知 T 中的任两个数都不能同时整除 S 中的任何一个数，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{m+n}{m}.$$

8. 给定实数 a，b，$a>b>0$，将长为 a 宽为 b 的矩形放入一个正方形内（包含边界），问正方形的边至少为多长？

【题 1】证： 如图，连接 BK，CJ.

$\angle B=\angle ABP-\angle BPE$，



而由 A，B，P，C 四点共圆，知 $\angle BPE=\angle A$，

故 $\angle E=ABP-\angle A$，

又由 $KA=KB$，知 $\angle A=\angle ABK$，

故 $\angle E=\angle ABP-\angle ABK=\angle KBP$. ①

同理 $\angle F=\angle JCE$. ②

由①，②得 $\triangle JEC\backsim\triangle KBF$.

由此，$\dfrac{CE}{BF}=\dfrac{JE}{KB}=\dfrac{JE}{AK}$， ③

$\dfrac{CE}{BF}=\dfrac{JC}{KF}=\dfrac{AJ}{KF}$. ④

将③，④两式的左端和右端分别相乘即得结论．

【题 2】解法一：

①式可化为 $\dfrac{x}{5(1+x^2)}=\dfrac{y}{12(1+y^2)}=\dfrac{z}{13(1+z^2)}$. ③

显然 x，y，z 同号．首先求正数解．

存在 α，β，$\gamma\in(0，\pi)$，使得 $x=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$y=\tan\dfrac{\beta}{2}$，$z=\tan\dfrac{\gamma}{2}$，则

$$\sin\alpha=\frac{2x}{1+x^2},\qquad \sin\beta=\frac{2y}{1+y^2},\qquad \sin\gamma=\frac{2z}{1+z^2},$$

③即

$$\frac{\sin\alpha}{5}=\frac{\sin\beta}{12}=\frac{\sin\gamma}{13}. \quad ④$$

②式可化为

$$\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy},$$

即

$$\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

注意 $z\neq0$, $xy\neq1$，因为 α，β，$\gamma\in(0，\pi)$，所以

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},$$

即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

从而 α，β，γ 是某个三角形 ABC 的三个内角．

由④和正弦定理知，α，β，γ 所对的边 a，b，c 的比是 5：12：13，所以，

$\sin\alpha=\dfrac{5}{13},\sin\beta=\dfrac{12}{13},\sin\gamma=1$.

从而 $x=\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{5}$ 或 5，$y=\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$，$z=\tan\dfrac{\gamma}{2}=1$.

将 $z=1$ 代入②式，易知 x 和 y 均小于 1. 所以 $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$ 是唯一正数解.

故原方程组有两组解：$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$和$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{3},-1\right)$.

解法二： 显然 x，y，z 同号.

由②得 $x=\dfrac{1-yz}{y+z}$，代入①得

$$12\left(\frac{y^2+1}{y}\right)=5\left(\frac{1-yz}{y+z}+\frac{y+z}{1-yz}\right)=5.\frac{(1-yz)^2+(y+z)^2}{(y+z)(1-yz)}=5\frac{(y^2+1)(z^2+1)}{(y+z)(1-yz)},$$

即 $5(z^2+1)y=12(y+z)(1-yz)$,

同理 $5(y^2+1)z=13(y+z)(1-yz)$.

整理得

$12y^2z+17yz^2=7y+12z$,

$18y^2z+13yz^2=13y+8z$,

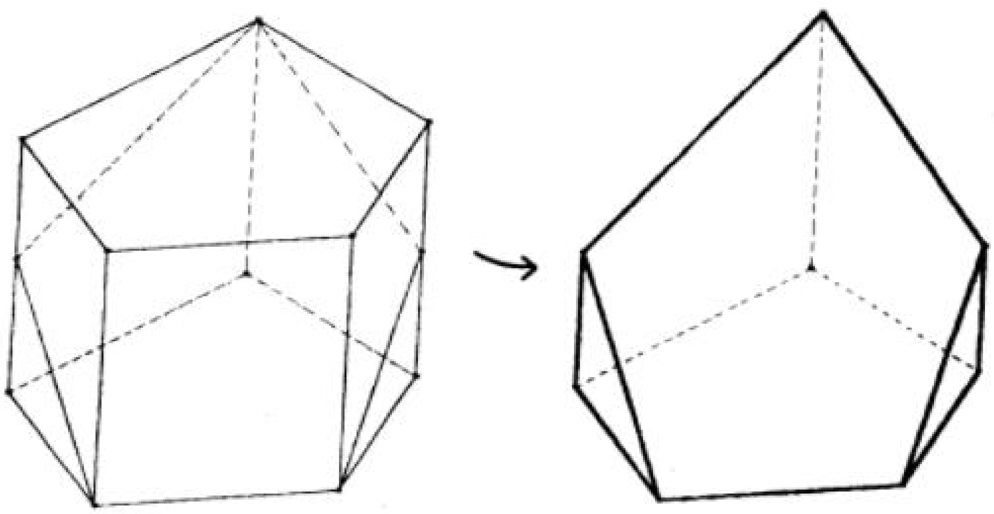
两式相加，得

$30yz(y+z)=20(y+z)$,

$\therefore\ yz=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3z}$，代入①解得 $z=\pm1$.

故原方程组有两组解：$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3},1\right)$和$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{3},-1\right)$.

【题 3】解： 存在，如下图所示。



【题 4】解： 若 $0<a<2$, n 充分大时，$2^{n-1}>a^n$，令

$A_i=\{2^{i-1}m|m为奇数\}, i=1,2,…,n-1,$

$A_n=\{2^{n-1}的倍数\}$，则该分拆满足要求。

若 $a\geqslant 2$, 设 $A_1, A_2,…A_n$ 满足要求，令 $M=\{1,2,…,2^n\}$，下证 $|A_i\cap M|\leqslant 2^{n-i}$. 设 $A_i\cap M$ $=\{x_1,x_2,…,x_m\}, x_1<x_2<…<x_m$. 则

$$2^n>x_m-x_1=(x_m-x_{m-1})+(x_{m-1}-x_{m-2})+…+(x_2-x_1)\geq(m-1)2^i.$$

∴ $m-1<2^{n-i}$, 即 $m<2^{n-i}+1$, 故 $m\leqslant 2^{n-i}$.

$A_i\cap M, i=1,2,…,n$ 为 M 的一个分拆，故

$$2^n=|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap M|\leq\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}=2^n-1, 矛盾.$$

∴ 所求的 a 为所有小于 2 的正实数.

【题 5】证： 由平均不等式

$$5y^3+x^2y\geq 2\sqrt{5x^2y^4}>4xy^2,$$

所以 $$(x^2+4y^2)(x-y)<x^3+y^3,$$

从而 $$x^2+4y^2<\frac{x^3+y^3}{x-y}=1.$$

【题 6】解： 我们断言最小的好数为 5，且 2005 是好数.

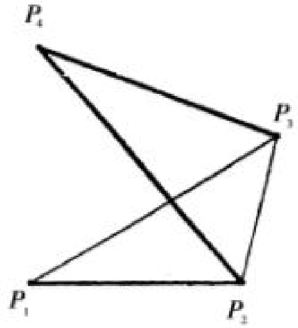
在三点组 (P_i,P_j,P_k) 中，若 $|P_iP_j|$ 为有理数(或无理数)，$|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 为无理数(或有理数)，我们称 (P_i,P_j,P_k) 为一个好组.

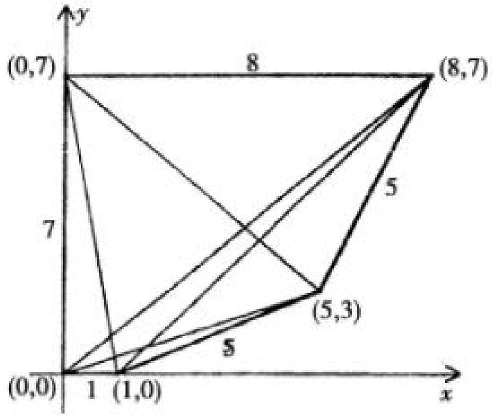
(1) $n=3$ 显然不是好数.

$n=4$ 也不是好数. 若不然，假设 P_1,P_2,P_3,P_4 满足条件，不妨设 $|P_1P_2|$ 为有理数及 (P_1,P_2,P_3) 为一好组，则 (P_2,P_3,P_4) 为一好组. 显然 (P_2,P_4,P_1) 和 (P_2,P_4,P_3) 均不是好组. 所以 P_1,P_2,P_3,P_4 不能满足条件. 矛盾!

$n=5$ 是好数. 以下五个格点满足条件：

$A_5=\{(0，0)，(1，0)，(5，3)，(8，7)，(0，7)\}$.





(2)设 $A=\{(1,0),(2,0),…,(669,0)\}$.

$B=\{(1,1),(2,1),…,(668,1)\}$.

$C=\{(1,2),(2,2),…,(668,2)\}$.

$$S_{2005}=A\cup B\cup C.$$

对任意正整数 n，易证 n^2+1 和 n^2+4 不是完全平方数.不难证明，对于集合 S_{2005} 中任两点 P_i, P_j, $|P_iP_j|$ 为有理数当且仅当 P_iP_j 与某一坐标轴平行.所以，2005 是好数.

注：当 $n=6$ 时，

$$A_6=A_5\cup\{(-240)\};$$

当 $n=7$ 时，

$$A_7=A_6\cup\{(-247)\}.$$

则可验证 $n=6$ 和 7 均为好数.

当 $n\geqslant 8$ 时，可像 $n=2005$ 那样排成三行，表明 $n\geqslant 8$ 时，所有的 n 都是好数.

【题 7】证： 构造 $T_i=\{b\in S|a_i|b\}, i=1,2…, n$. 则

$$|T_i|=\left[\frac{m}{a_i}\right],$$

由于 T 中任意两个数都不能同时整除 S 中的一个数，所以当 $i\neq j$ 时，

$$T_i\cap T_j=\varnothing.$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}|T_i|=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]\leqslant m$$

又因为
$$\frac{m}{a_i}<\left[\frac{m}{a_i}\right]+1,$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{m}{a_i}\right]+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}1\le m+n,$$

即 $$m\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<m+n,$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{m+n}{m}.$$

【题 8】解： 设长方形为 $ABCD$，$AB=a$，$BC=b$，中心为 O.

以 O 为原点，建立直角坐标系，x 轴、y 轴分别与正方形的边平形.

情形 1： 线段 BC 与坐标轴不相交.不妨设 BC 在第一象限内，$\angle BOX\leqslant\frac{1}{2}(90°-\angle BOC)$ (图 1).此时正方形的边长 $\geqslant BD\cos\angle BOX\geqslant BD\cos\frac{90°-\angle BOC}{2}$

$=BD\cos45°\cos\frac{1}{2}\angle BOC+BD\sin45°\sin\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

所以此时所在正方形边长至少为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

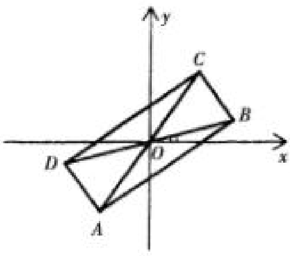


图 1

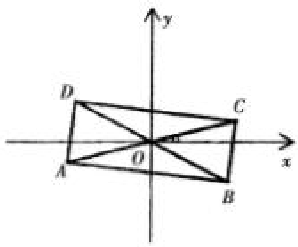


图 2

情形 2： 线段 BC 与坐标轴相交.不妨设 BC 与 x 轴相交，不妨设 $\angle COX\leqslant\frac{1}{2}\angle COB$ (图 2).

此时正方形的边长 $\geqslant AC\cos\angle COX\geqslant AC\cos\frac{\angle COB}{2}=a$.

所以此时所在正方形边长至少为 a.

比较情形 1，2 中结论知：

若 $a<(\sqrt{2}+1)b$，则正方形的边长至少为 a.

若 $a\geqslant(\sqrt{2}+1)b$，则正方形的边长至少为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.