2006 年女子数学奥林匹克

第一天

2006 年 8 月 8 日 下午 15：00～19：00 乌鲁木齐

1．设 $a>0$，函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足 $f(a)=1$．如果对任意正实数 x，y 有

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{a}{x}\right)f\left(\frac{a}{y}\right)=2f(xy),$$

求证：$f(x)$ 为常数．

2．设凸四边形 $ABCD$ 对角线交于 O 点．$\triangle OAD$，$\triangle OBC$ 的外接圆交于 O，M 两点，直线 OM 分别交 $\triangle OAB$，$\triangle OCD$ 的外接圆于 T，S 两点．求证：M 是线段 TS 的中点．

3．求证：对 $i=1$，2，3，均有无穷多个正整数 n，使得 n，$n+2$，$n+28$ 中恰有 i 个可表示为三个正整数的立方和．

4．8 个人参加一次聚会．

(1)如果其中任何 5 个人中都有 3 个人两两认识．求证：可以从中找出 4 个人两两认识；

(2)试问，如果其中任何 6 个人中都有 3 个人两两认识，那么是否一定可以找出 4 个人两两认识？

5．平面上整点集 $S=\{(a, b)\mid 1\leqslant a, b\leqslant 5, a, b\in \mathbb{Z}\}$，$T$ 为平面上一整点集，对 S 中任一点 P，总存在 T 中不同于 P 的一点 Q，使得线段 PQ 上除点 P,Q 外无其他的整点．问 T 的元素个数最少要多少？

6．设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 19\}$，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\subseteq M$．求最小的 k，使得对任意 $b\in M$，存在 a_i，$a_j\in A$，满足 $b=a_i$，或 $b=a_i\pm a_j$（a_i，a_j 可以相同）．

7．已知 $x_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$，$k\geqslant 1$．求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{1+x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^k}.$$

8．设 p 为大于 3 的质数，求证：存在若干个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ 满足条件

$$-\frac{p}{2}<a_1<a_2<\cdots<a_t<\frac{p}{2},$$

使得乘积

$$\frac{p-a_1}{|a_1|}\cdot\frac{p-a_2}{|a_2|}\cdots\frac{p-a_t}{|a_t|}$$

是 3 的某个正整数次幂．