2012CGMO 试题

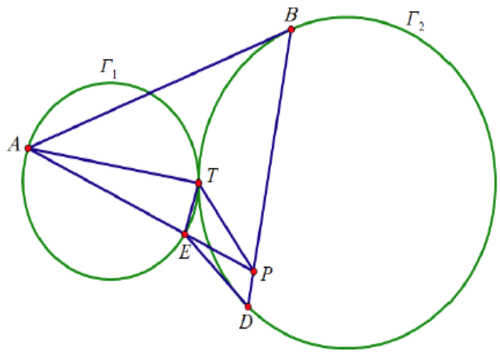
第一天

1．设 n 是正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数．求证：

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\le 1$$

2．如图所示,圆 Γ_1,Γ_2 外切于点 T，点 A，E 在圆 Γ_1 上，直线 AB，DE 分别与圆 Γ_2 相切于点 B，D，直线 AE 与 BD 相交于点 P．求证：

（1）$\frac{AB}{AT}=\frac{ED}{ET}$；（2）$\angle ATP+\angle ETP=180^\circ$



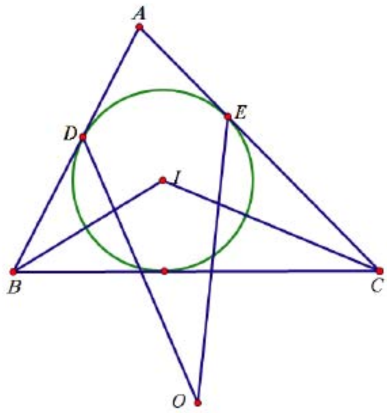
3．求满足如下条件的所有整数对 (a,b)：存在大于 1 的整数 d，使得对任意的正整数 n，a^n+b^n+1 都是 d 的倍数．

4．一个正 13 边形的每个顶点处都放有一枚黑子或一枚白子．定义一次操作为交换两个顶点处的棋子．证明：无论棋子如何摆放，总可以经过至多一次操作，使得这些棋子的颜色关于正 13 边形的某条对称轴对称．

2012CGMO 试题

第二天

5. 如图，$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 与边 AB,AC 分别相切于点 D,E，$\triangle BCI$ 的外心为 O．证明：$\angle ODB=\angle OEC$．



6．一个国家有 n（$n\geq 3$）个城市和两家航空公司，每两个城市之间均恰有一条双向航线，该双向航线由某家航空公司独家运营．一位女数学家想从某个城市出发，经过至少 2 个其它城市（每个途经城市仅经过一次），最后回到出发城市．她发现，无论如何选择出发城市与途经城市，她均无法仅乘坐一家航空公司的航班．求 n 的最大值．

7．设 $a_1\leq a_2\leq\cdots$ 是无穷项正整数序列，且存在正整数 k 和 r 使得 $\frac{r}{a_r}=k+1$．证明：存在正整数 s 使得 $\frac{s}{a_s}=k$．

8．集合 $\{0,1,2,\cdots,2012\}$ 中共有多少个元素 k 使得组合数 C_{2012}^{k} 是 2012 的倍数?