# 2010女子数学奥林匹克

中图分类号: G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005－6416(2010)11－0026－05

## 第一天

**1.** 给定整数 $n(n\geqslant3)$, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两两不同的非空子集, 记 $A_{2n+1}=A_1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{|A_i\cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}$$

的最大值.　　(梁应德　供题)

**2.** 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $D$ 是边 $BC$ 的中点, $E$ 是 $\triangle ABC$ 外一点, 满足 $CE\perp AB$, $BE=BD$. 过线段 $BE$ 的中点 $M$ 作直线 $MF\perp BE$, 交 $\triangle ABD$ 的外接圆的劣弧 $\overparen{AD}$ 于点 $F$. 求证: $ED\perp DF$.　　(郑　焕　供题)

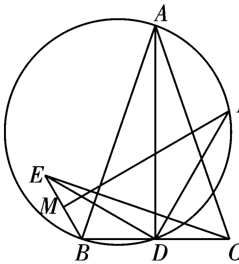

图 1

**3.** 求证: 对于每个正整数 $n$, 都存在满足下面三个条件的质数 $p$ 和整数 $m$:

(1) $p\equiv5\pmod 6$;

(2) $p\nmid n$;

(3) $n\equiv m^3\pmod p$.　　(付云皓　供题)

**4.** 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ $(n\geqslant2)$. 求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{n}ix_i^2}\right)^2\frac{x_k^2}{k}\leqslant\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k},$$

并确定等号成立的条件.　　(李胜宏　供题)

## 第二天

**5.** 已知 $f(x)$、$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上递增的一次函数, $f(x)$ 为整数当且仅当 $g(x)$ 为整数. 证明: 对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)-g(x)$ 为整数.　　(刘诗雄　供题)

**6.** 如图 2, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $M$ 为边 $BC$ 的中点, $\angle BAC$ 的外角平分线交直线 $BC$ 于点 $P$. 点 $K$、$F$ 在直线 $PA$ 上, 使得 $MF\perp BC$, $MK\perp PA$. 求证: $BC^2=4PF\cdot AK$.　　(边红平　供题)

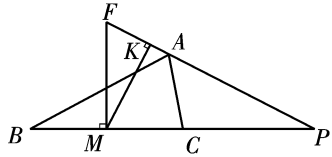

图 2

**7.** 给定正整数 $n(n\geqslant3)$. 对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列 $P=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 若 $i<j<k$, 则称 $x_j$ 介于 $x_i$ 和 $x_k$ 之间 (如在排列 $(1, 3, 2, 4)$ 中, 3 介于 1 和 4 之间, 4 不介于 1 和 2 之间). 设集合 $S=\{P_1, P_2, \cdots, P_m\}$ 的每个元素 $P_i$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 已知 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意三个不同数中都有一个数, 它在每个 $P_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 中都不介于另外两个数之间. 求 $m$ 的最大值.

(冯祖鸣　供题)

**8.** 试求满足下列条件的大于 5 的最小奇数 $a$: 存在正整数 $m_1$、$n_1$、$m_2$、$n_2$, 使得

$$a=m_1^2+n_1^2,\ a^2=m_2^2+n_2^2,$$

且　$m_1-n_1=m_2-n_2$.

(朱华伟　供题)

# 参 考 答 案

## 第 一 天

**1.** 对任意的 $i$, 若 $|A_i\cap A_{i+1}|=0$, 则

$$\frac{|A_i\cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}=0.$$

以下假设 $|A_i\cap A_{i+1}|\geqslant 1$.

因 $A_i\cap A_{i+1}\subseteq A_i$ 及 $A_i\cap A_{i+1}\subseteq A_{i+1}$, 所以,

$|A_i\cap A_{i+1}|\leqslant\min(|A_i|, |A_{i+1}|)$.

又 $A_i\neq A_{i+1}$ 及 $|A_i\cap A_{i+1}|\geqslant 1$, 则

$\max(|A_i|, |A_{i+1}|)\geqslant 2$.

故 $$\sum_{i=1}^{2n}\frac{|A_i\cap A_{i+1}|}{|A_i|\cdot|A_{i+1}|}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\max(|A_i|, |A_{i+1}|)}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2}=n.$$

上式的等号是可以取到的, 例如:

$A_1=\{1\}, A_2=\{1, 2\}, \cdots\cdots A_{2i-1}=\{i\}$,

$A_{2i}=\{i, i+1\}, \cdots\cdots A_{2n-1}=\{n\}$,

$A_{2n}=\{n, 1\}$.

**2.** 如图 3, 易知 $AD\perp BC$. 由此可知 $\triangle ABD$ 的外接圆的圆心为线段 $AB$ 的中点 $O$.

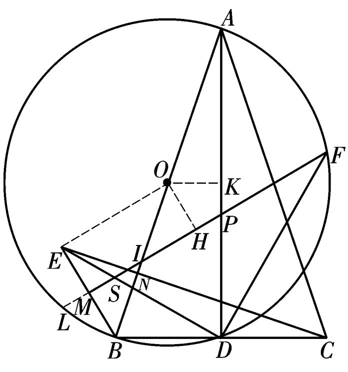


图 3

延长 $FM$ 交$\odot O$ 于点 $L$, 联结 $OE$, 过点 $O$ 作 $OH\perp FL$, $OK\perp AD$, 分别交 $FL$、$AD$ 于点 $H$、$K$. 设直线 $FM$ 分别与直线 $ED$、$AB$、$AD$ 交于点 $S$、$I$、$P$, 直线 $CE$ 与 $AB$ 交于点 $N$.

由条件知 $CN\perp AB$.

所以, $A$、$N$、$D$、$C$ 四点共圆.

故 $BD\cdot BC=BN\cdot AB$.

因为 $BC=2BE$, $AB=2BO$, 所以,

$BE^2=BN\cdot BO$.

由射影定理得 $OE\perp BE$.

从而, 四边形 $OEMH$ 是矩形.

则 $OH=EM=\frac{1}{2}BE$.

因为 $O$ 是 $AB$ 的中点, 且 $OK\parallel BD$, 所以,

$OK=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BE=OH$.

于是, $\overset{\frown}{FL}=\overset{\frown}{AD}$.

从而, $LD=AF\Rightarrow\angle PFD=\angle PDF$.

因为 $MF\perp BE$, 所以,

$\angle BED+\angle MSE=90°$.

而 $\angle PDS+\angle BDE=90°$, 且

$\angle BED=\angle BDE$,

于是, $\angle PDS=\angle MSE=\angle DSP$.

因此, $\angle FDS=90°$, 即 $ED\perp FD$.

**3.** 证法 **1** 先证明: 模 6余 5的质数有无穷多个.

若不然, 则模 6余 5的质数只有有限多个, 设它们从小到大依次为 $p_1, p_2, \cdots, p_r$.

考虑数 $6p_1p_2\cdots p_r-1$.

因其模 6余 5, 所以, 它的质因子模 6余 1或 5. 特别地, 它有一个质因子 $q$ 模 6余 5. 但由 $p_s\nmid(6p_1p_2\cdots p_r-1)$ $(s=1, 2, \cdots, r)$, 得 $q\notin\{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$, 矛盾.

其次, 由于模 6余 5的质数有无穷多个, 其中必有不整除 $n$ 的质数, 设其中一个为 $p=6k+5$, 则条件 (1)、(2)成立.

取 $m=n^{4k+3}$, 由费马小定理得

$m^3=(n^{4k+3})^3=(n^{6k+4})^2n\equiv n\pmod p$,

这样的 $p$ 和 $m$ 即满足题目条件.

证法 **2** 当 $n=1$时, 取 $p=5, m=1$;

当 $n=2$时, 取 $p=5, m=3$.

易验证 $p$ 和 $m$ 满足题目条件.

下面假设 $n\geqslant 3$.

由 $(n-1)^3-n>0$ 及

$(n-1)^3-n\equiv(n-1)-n\equiv 5\pmod 6$,

知 $(n-1)^3-n$ 必有一个模 6余 5的质因子.

取 $p$ 为这个质因子, 并取 $m=n-1$.

下证这样的 $p$ 和 $m$ 满足条件.

由 $p$、$m$ 的取法知条件 (1)、(3)成立.

由 $(m^3-n, n)=(m^3, n)$

$=((n-1)^3, n)=(1, n)=1$,

知 $p\nmid n$, 即条件 (2)成立.

因此, 存在满足题目条件的 $p$ 和 $m$.

**4.** 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}\left(1-\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2x_k^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{kx_k^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2\right)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}-\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2\right)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} kx_k^2}.$$

于是, 要证原不等式只需证

$$1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n} kx_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}\leqslant\frac{(n+1)^2}{4n}.$$

事实上,

$$\sum_{k=1}^{n} kx_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k^2\right)\left(n\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k^2+n\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{n}{k}\right)x_k^2\right]^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4n}\left[\sum_{k=1}^{n}(n+1)x_k^2\right]^2$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4n}.$$

若要等号成立, 首先, 必有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{n}{k}\right)x_k^2=\sum_{k=1}^{n}(n+1)x_k^2.$$

而当 $k=2, 3, \cdots, n-1$ 时, 有

$$k+\frac{n}{k}<n+1.$$

因此, $x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$.

其次, 要 $\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k^2=n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k}$, 即

$x_1^2+nx_n^2=nx_1^2+x_n^2$.

故 $x_1^2=x_n^2$.

由 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1$ 和 $x_2^2=x_3^2=\cdots=x_{n-1}^2=0$, 得 $x_1^2=x_n^2=\frac{1}{2}$, 而这也是等号成立的充分条件.

因此, 等号成立的充要条件为

$$x_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0, x_n=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## 第 二 天

**5.** 若不然, 由对称性不妨设 $a>c$.

由 $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, 知 $g\left(-\frac{b}{a}\right)$ 是整数;

由 $f\left(-\frac{b-1}{a}\right)=1$, 知 $g\left(-\frac{b-1}{a}\right)$ 是整数.

故 $g\left(-\frac{b}{a}\right)-g\left(-\frac{b-1}{a}\right)$

$=\left[c\left(-\frac{b}{a}\right)+d\right]-\left[c\left(-\frac{b-1}{a}\right)+d\right]$

$=-\frac{c}{a}$

是一个整数, 但这与 $a>c>0$ 矛盾.

所以, $a=c$.

又 $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, 故 $g\left(-\frac{b}{a}\right)=d-b$ 是整数.

因此, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$,

$f(x)-g(x)=b-d$

是整数.

**6.** 如图 4, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 交直线 $FM$ 于点 $D$, $AD$ 交 $BC$ 于点 $E$.

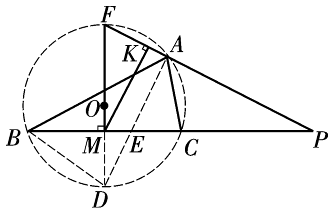


图 4

易知 $AD$ 平分$\angle BAC$.

所以, $AD\perp AP$, $AD\parallel MK$.

故$\frac{MD}{FM}=\frac{AK}{FK}$.

因为$\angle FMC=\angle FAD=90^{\circ}$, 所以, $F$、$M$、$E$、$A$ 四点共圆, 有

$$\angle AFD=\angle AEC=\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC.$$

又$\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD$

$=\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC=\angle AFD$,

则 $A$、$F$、$B$、$D$ 四点共圆.

故 $A$、$F$、$B$、$D$、$C$ 五点共圆.

根据圆幂定理得

$PA\cdot PF=PC\cdot PB$

$=(PM-MC)(PM+BM)$

$=PM^2-BM^2$. ①

对 Rt$\triangle FMP$ 利用射影定理得

$PM^2=PK\cdot PF$. ②

②$-$①得

$BM^2=PK\cdot PF-PA\cdot PF$

$=PF(PK-PA)=PF\cdot AK$.

因为$BM^2=\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{BC^2}{4}$, 所以, 结论成立.

**7.** 首先, 用数学归纳法证明: $m\leqslant 2^{n-1}$.

当 $n=3$时, 由条件知在 1、2、3中必然存在一个数(不妨设为 1), 它在每个 $P_i$中都不介于另外两个数之间.

因此, 排列$(2,1,3)$与排列$(3,1,2)$都不能出现.

于是, 可能出现的排列至多有 $3!-2=4$个, 结论成立.

假设$m\leqslant 2^{n-1}$对 $n=k-1$成立, 考虑 $n=k$的情况.

对 $m$ 个 $1,2,\cdots,k$的排列中的每一个, 把 $k$从排列中去掉, 得到一个 $1,2,\cdots,k-1$的排列. 这样的排列必然满足原题在 $n=k-1$时的条件, 由归纳假设知这样的排列最多只有 $2^{k-2}$个.

下面只需证明: 最多只有两个 $1,2,\cdots,k$的排列可能对应同一个 $1,2,\cdots,k-1$的排列. 从而, 所有排列至多有 $2^{k-2}\times 2=2^{k-1}$个.

假设不然, 则存在三个 $1,2,\cdots,k$的排列对应同一个 $1,2,\cdots,k-1$的排列.

由对称性不妨设这个 $1,2,\cdots,k-1$的排列就是 $1,2,\cdots,k-1$, 而在三个 $1,2,\cdots,k$的排列 $P_1$、$P_2$、$P_3$中, $k$分别在第 $a$、$b$、$c(1\leqslant a<b<c\leqslant n)$位.

考虑 $a$、$b$、$k$三个数.

在排列

$P_1=\{1,2,\cdots,a-1,k,a,a+1,\cdots,k-1\}$

中, 这三个数的顺序为 $k$、$a$、$b$, $a$介于其他两个数之间;

在排列

$P_2=\{1,2,\cdots,b-1,k,b,b+1,\cdots,k-1\}$

中, 这三个数的顺序为 $a$、$k$、$b$, $k$介于其他两个数之间;

在排列

$P_3=\{1,2,\cdots,c-1,k,c,c+1,\cdots,k-1\}$

中, 这三个数的顺序为 $a$、$b$、$k$, $b$介于其他两个数之间.

于是, 这三个数中的每个数都曾经介于其他两个数之间, 与题目条件矛盾.

因此, 假设不成立, 即当 $n=k$时, 也有$m\leqslant 2^{n-1}$成立.

至此证明了 $m\leqslant 2^{n-1}$.

其次, 给出一个 $m=2^{n-1}$的例子.

用如下方法构造 $1,2,\cdots,n$的排列:

先放置 1, 当 $1,2,\cdots,r\ (1\leqslant r\leqslant n-1)$都放置好后, 将 $r+1$放置在前 $r$个数的最左侧或者最右侧, 这样, 2到 $n$中的每个正整数都有两个可选择的位置. 由乘法原理知, 这样的排列共有 $2^{n-1}$个.

对于 $1, 2, \cdots, n$ 中任意三个数 $a<b<c$，由构造知在每个排列中，$c$ 或者在 $a$ 和 $b$ 的左侧，或者在 $a$ 和 $b$ 的右侧，永远不会介于 $a$ 和 $b$ 之间.

故这样的 $2^{n-1}$ 个排列满足题目条件.

综上，$m$ 的最大值为 $2^{n-1}$.

**8** 由 $261=15^2+6^2$，$261^2=189^2+180^2$，

$$15-6=189-180,$$

知 261 具有题目所述性质.

下证：261 就是大于 5 且具有题目所述性质的最小奇数，即 5 和 261 之间不存在这样的奇数.

若不然，则存在介于 5 和 261 之间的奇数 $a$ 及正整数 $m_1$、$n_1$、$m_2$、$n_2$，满足

$$a=m_1^2+n_1^2,\ a^2=m_2^2+n_2^2,\ m_1-n_1=m_2-n_2.$$

设 $m_1-n_1=l$，由对称性不妨设 $l\geqslant 0$.

由 $a$ 是奇数，知 $m_1$、$n_1$ 的奇偶性不同.

所以，$l$ 是一个奇数.

又由 $m_1<\sqrt{261}<17$，知 $l\leqslant 15$.

因此，$l$ 为 1、3、5、7、9、11、13、15 之一.

若 $l=1$，则 $m_2-n_2=1$.

结合 $a^2=m_2^2+n_2^2$，得

$$(2n_2+1)^2-2a^2=-1,$$

即 $(2n_2+1, a)$ 是佩尔方程 $x^2-2y^2=-1$ 的一组解.

易知，此方程解的 $y$ 值由小到大依次为

$$1, 5, 29, 169, 985, \cdots,$$

其中，满足 $5<a<261$ 的只有

$$a=29 \text{ 或 } a=169.$$

但这两个数均无法表示成 $m_1^2+n_1^2(m_1-n_1=1)$ 的形式，矛盾.

若 $3\mid l$，则 $a^2\equiv 2n_2^2 \pmod 3$.

由 2 不是 3 的平方剩余知 $3\mid a$.

所以，$3\mid m_1$，$3\mid n_1$.

于是，$9\mid a$.

故 $81\mid(m_2^2+n_2^2)$，即 $9\left|\left[\left(\frac{m_2}{3}\right)^2+\left(\frac{n_2}{3}\right)^2\right]\right.$.

由 $-1$ 不是 3 的平方剩余知

$$3\left|\frac{m_2}{3},\ 3\right|\frac{n_2}{3}.$$

因此，$9\mid m_2$，$9\mid n_2$.

故 $9\mid l$，即 $l=9$.

由于 $a<261=15^2+6^2$，故 $n_1<6$，只能有

$$n_1=3,\ a=12^2+3^2=153.$$

但由 $153^2=(n_2+9)^2+n_2^2$，得

$$(2n_2+9)^2=9^2\times 577,$$

矛盾.

若 $l=11$ 或 $l=13$，则

$$a^2\equiv 2n_2^2 \pmod l.$$

由 2 不是 $l$ 的平方剩余知 $l\mid a$.

又由 $0\equiv a\equiv 2n_1^2 \pmod l$，知 $l\mid n_1$.

所以，$n_1\geqslant l$，即 $m_1\geqslant 2l$.

故 $a\geqslant 5l^2>500>261$，矛盾.

若 $l=5$，则 $a^2\equiv 2n_2^2 \pmod 5$.

由 2 不是 5 的平方剩余知 $5\mid a$.

又由 $0\equiv a\equiv 2n_1^2 \pmod 5$，知 $5\mid n_1$.

若 $n_1\geqslant 10$，则 $m_1\geqslant 15$.

故 $a\geqslant 15^2+10^2=325>261$，矛盾；

若 $n_1=5$，则

$$m_1=10,\ a=10^2+5^2=125.$$

但由 $125^2=(n_2+5)^2+n_2^2$，得

$$(2n_2+5)^2=5^2\times 1\,249,$$

矛盾.

若 $l=7$，则由 $a<261<16^2+9^2$ 知 $n_1\leqslant 8$.

对 $n_1$ 穷举知 $a$ 只能为

$$65, 85, 109, 137, 169, 205, 245$$

之一.

由 $a^2=(n_2+7)^2+n_2^2$，得

$$(2n_2+7)^2=2a^2-49.$$

因此，$2a^2-49$ 必须是一个完全平方数.

但对 $a=65, 85, 109, 137, 169, 205, 245$ 逐一验证，知这些 $a$ 值均不满足条件.

综上，大于 5 的具有题目所述性质的最小奇数 $a$ 为 261.

(朱华伟　提供)