第 3 届女子数学奥林匹克试题

第 3 届女子数学奥林匹克于 2004 年 8 月 11 日至 15 日在江西省南昌市举行，共有 45 个代表队的 179 名选手参加了此次竞赛，他们分别来自北京，上海等数十个城市以及美国，俄罗斯，菲律宾，香港，澳门等国家和地区。竞赛共安排两天考试，每天四个小时，各考四道题。通过竞赛，有 18 名选手获得金牌，39 名选手获得银牌，58 名选手获得铜牌。

试 题

1．如果存在 1,2,……n 的一个排列 a（1）,a（2）……a（n），使得 k+a_k（k=1,2,……n）都是完全平方数，就称 n 为好数。试问：在集合{11，13，15，17，19}中哪些为好数，那些不是，说明理由。

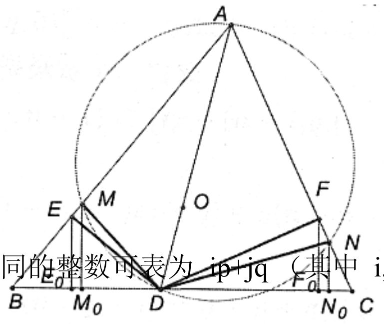
2．设为 a,b,c 正实数，求 $\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}$ 最小值。

3．已知钝角三角形 ABC 的外接圆半径为 1，证明：存在一个斜边为 $\sqrt{2}+1$ 的等腰直角三角形覆盖三角形 ABC

4．一副 3 色牌，共有 32 张，其中红黄蓝各 10 张，编号为 1，2，，，10；另有大小王各 1 张。从中任取几张，然后按如下规则算分：每张编号为 K 的牌记 2^k 分。大小王编号为 0。若分值之和为 2004，就称这些牌为一个好牌组。求好牌组的组数。

5．设为 u，v，w 正实数，满足条件 $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geq 1$，试求 $u+v+w$ 的最小值.

6．给定锐角三角形 ABC，O 为外心，直线 AO 交边 BC 于 D，动点 E，F 在 AB，AC 上，使得 A，E，D，F 四点共圆。求证：线段 EF 在 BC 上的投影长度为定值。



7．设 n∈N,且正整数 p,q 满足（p,q）=1．问有多少个不同的整数可表为 ip+jq（其中 i,j∈N, i+j≤n）？

8．记"十字型"为一个 3×3 的方格去掉 4 个角上的 1×1 方格所形成的图形．问 10×11 的方格中至多能放入多少个互不重叠的十字形.

解：答案：15 个

首先证明最多可放 15 个“十字形”。用反证法，假设可放 16 个“十字形”。对每个“十字形”，我们称其中心的方格为“心”（记为*）。将 10×11 的棋盘去掉周围一圈方格，得到一个 8×9 的方格表，显然，每个“十字形”的“心”都只能出现在这个 8×9 的方格表中。

×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×										×
×										×
×										×
×										×
×										×
×										×
×										×
×										×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

注意在每一个 3×3 的方格表中最多可放两个“心”：

	1			
1	*	1	2	
	1	2	*	2
			2	

⟹

*		
		*

	1			
1	*	1		
	1		2	
		2	*	2
			2	

⟹

*		
		*

我们来讨论如何在一个 8×3 的方格表中放入尽可能多的“心”。将 8×3 的方格表自上至下分为 3×3，2×3 和 3×3 的三个方格表。如果在中部的 2×3 的方格表中之多放一个“心”，那么由于在每个 3×3 的方格表中的最多可放两个“心”，所以最多一共可以放入 5 个“心”。而如果在中部的 2×3 的方格表中放入两个“心”，那么第三行和第六行都必须空着，通过穷举，知只能有如下图所示的两种放置 6 个“心”的办法；

*		
		*
×	×	×
*		
		*
×	×	×
*		

		*
*		
×	×	×
		*
*		
×	×	×
		*

现在，我们将 8×9 的方格表分为三个 8×3 的方格表，自左至右依次称它们为表（a），表（b）和表（c）。由于 8×9 的方格表中共有 16 个“心”，所有必有一个 8×3 的方格表中有 6 个“心”

如果在表（b）中有 6 个“心”，由于 8×3 的方格表中只有两种相互对称的放置 6 个“心”的办法，故可不妨设 6 个“心”分布如下方左图：

		×	*			×		
		×			*	×		
		×				×		
		×	*			×		
		×			*	×		
		×				×		
		×	*			×		
		×			*	×		

*			×					
		*	×					
			×					
*			×					
		*	×					
			×					
*			×					
		*	×					

易知，此时第 3 列和第 7 列中不能放“心”。欲使不难看出，在表（a）和表（c）中最多只能各放 4 个“心”，从而一共放 4+6+4=14 个“心”，导致矛盾。

如果在表（a）和表（c）中各有 6 个“心”，则第 4 列和第 6 列中都不能放“心”，从而（b）中只有中间一列可以放“心”，不难看出，此时表（b）中最多只能放 3 个“心”，从而一共放 6+3+6=15 个“心”，亦导致矛盾。

如果在（a）和表（c）之中放有 6 个“心”，不妨设在（a）中放有 6 个“心”，且可设它们放置如上方右图。此时第 4 列中不能放“心”，从而表（b）中最多可放 4 个“心”，一共放 6+4+5=15 个“心”，亦导致矛盾。

综合上述，知 8×9 的方格表中最多只能放置 15 个“心”。

最后，我们来给出例子，说明确实可以放置 15 个“心”：

*				*			*	
		*						
					*			*
*			*					
						*		
	*			*				*
*			*			*		

或

*					*			
			*					*
	*					*		
				*				
		*					*	
*					*			
			*					*
	*					*		

答案

1 解：答案：除了 11 之外都是“好数”

（1）不难知道，11 只能与 5 相加得到 4^2，而 4 也只能与 5 相加得到 3^2，因此不存在满足条件的排列，所以 11 不是“好数”。

（2）13 是“好数”，因为如下数表中，$k+a_k(k=1,2,\cdots,13)$ 都是完全平方数。

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_k:	8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

（3）15 是“好数”，因为如下数表中，$k+a_k\ (k=1,2,\cdots,15)$ 都是完全平方数：

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k:	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

（4）17 是“好数”，因为如下数表中，$(k=1,2,\cdots,17)$ 都是完全平方数：

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_k:	3	7	6	5	4	10	2	17	16	15	14	13	12	11	1	9	8

其中用到了轮换（1，3，6，10，15）。

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_k:	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	19	18	17

。

2 解：答案：最小值为 $-12+12\sqrt{2}$

令 $\begin{cases} x=a+2b+c \\ y=a+b+2c \\ z=z+b+3c \end{cases}$，则有 $x-y=b, z-y=c$，

由此可得 $\begin{cases} a+3c=2y-x \\ b=z+x-2y \\ c=z-y \end{cases}$

从而 $\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}=\dfrac{2y-x}{x}+\dfrac{4(z+x-2y)}{y}-\dfrac{8(z-y)}{z}$

$$=-17+2\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}+4\frac{z}{y}+8\frac{y}{z}\geq -17+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=-17+12\sqrt{2}.$$

上式中的等号可以成立。事实上，由上述推导过程指，等号成立，当且仅当平均不等式中的等号成立，而这等价于

$\begin{cases}2_x^y=4_y^x\\4_y^z=8_z^y\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y^2=2x^2\\z^2=2y^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=\sqrt{2}x\\z=2x\end{cases}$，

亦即 $\begin{cases}a+b+2c=\sqrt{2}(a+2b+c)\\a+b+3c=2(a+2b+c)\end{cases}$

解该不定方程，得到 $\begin{cases}b=(1+\sqrt{2})a\\c=(4+3\sqrt{2})a\end{cases}$

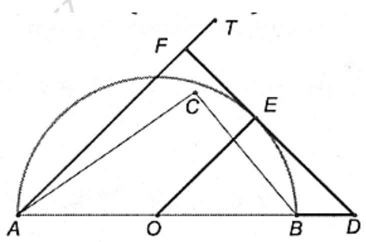
不难算出，对任何正实数 a, 只要 $b=(1+\sqrt{2})a, c=(4+3\sqrt{2})a$，就都有

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}=17+12\sqrt{2},$$

所以所求的最小值为 $17+12\sqrt{2}$。

3 证：不妨设∠C＞90°，于是 min{∠A，∠B}＜45°，不妨设∠A＜45°。

以 AB 为直径，在顶点 C 的同侧作半圆 O，则 C 位于半圆 O 内。作射线 AT 使得∠BAT=45°，如图所示，再作射线 OE，使得∠BOE=45°，且与半圆相交于点 E。过点 E 作半圆的切线，分别交 AB 的延长线和 AT 于点 D 和 F。则等腰直角三角形，则等腰直角三角形 ADF 覆盖△ABC，



并且 $AD=AO+OD=\frac{1}{2}AB+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}AB$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})AB<\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot 2R=1+\sqrt{2}$.

4 解法一：称原题为“两王问题”，若增加一张王牌（称为“中王”），编号也为 0，再考虑同样的问题，则称为“三王问题”。

先考虑“三王问题”。将大中小三张王牌分别称为红王，黄王和蓝王，于是每种颜色的牌都是 11 张，编号则都分别是 0，1，2⋯，10.将分值之和为 n 的牌组数目记作 u_n，每一个牌组都可能由红组，黄组合蓝组组成。将其中红组，黄组合蓝组的分值之和分别记为 x， y 和 z，则有 $x+y+z=n$.由于任一非负整数的二进制表示方法唯一，所以一旦 x,y,z 的值确定之后，红组，黄组合蓝组的构成情况便唯一确定。我们知道方程 $x+y+z=n$ 的非负整数解的组数等于 C_{n+2}^2，所以 $u_n=C_{n+2}^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ （1）现考虑原题中的“二王问题”。对于 $n\in\{1,2,\cdots,2004\}$，用 a_n 表示分值之和为 n 的牌组数目。

当 $n=2k\le 2004$ 时，对于分值之和为 $2k$ 的任一牌组，我们有：（i）若组内无王牌，则该牌组就是“三王问题”中的一个分值之和为 $2k$ 的无王牌的牌组。如果将其中每张牌的分值都除以 2，就得到“三王问题”中的一个分值之和为 k 的且允许包括有王牌的牌组。易见，这种对应是一一的，所以这种牌组的数目为 u_k。（ii）若组内有王牌，则组内必有 2 张王牌（大小王牌都在组内）。去掉王牌后，就化归成为分值之和为 $2k-2$

的无王牌的牌组，从而这种牌组的数目为u_{k-1}。所以

$$a_{2k}=u_k+u_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}=(k+1)^2,k=1,2,\cdots,1002.$$

特别地，所求的“好”牌组的个数为$a_{2004}=1003^2=1006009.$

解法 2（母函数方法）：对于$n\in\{1,2,\cdots,2004\}$，用a_n表示分值之和为n的牌组数目，

则a_n等于函数 $f(x)=(1+x^{2^0})^2\cdot(1+x^{2^1})^3\cdots(1+x^{2^{10}})^3$

的展开式中x^n的系数（约定$|x|<1$）。由于

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\{(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^{10}})\}^3$$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}(1-x^{11})^3=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}(1-x^{2^{11}})^3,$$

而$n\leqslant 2004<2^{11}$，所以a_n等于$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}$的展开式中x^n的系数。

由于$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^2}$

$$=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots+(2k+1)x^{2k}+\cdots),$$

故知x^{2k}的系数为$a_{2k}=1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2,k=1,2,\cdots.$

从而，所求的“好”牌组的个数为$a_{2004}=1003^2=1006009.$

5 解：答案：$\sqrt{3}$.

由均值不等式和题中条件，知

$$u\frac{v+w}{2}+v\frac{w+u}{2}+w\frac{u+v}{2}\ge u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\ge 1,$$

即有$uv+vw+wu\ge 1$.

因此$(u+v+w)^2+u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2wu$

$$=\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{v^2+w^2}{2}+\frac{w^2+u^2}{2}+2uv+2vw+2wu\ge 3uv+3vw+3wu\ge 3,$$

即$u+v+w\ge\sqrt{3}$.

另一方面，显然$u=v=w=\frac{\sqrt{3}}{3}$满足题中条件，此时$u+v+w=\sqrt{3}$.

综合上述两方面，即知$u+v+w$的最小值为$\sqrt{3}$.

6 证：设 EF 在边 BC 上的投影为E_0F_0，

如图。过点 D 分别作 DM⊥AB 于 M，
DN⊥AC 于 N。过点 M，N 分别作
MM_0⊥BC 于 M_0，，NN_0⊥BC 于 N_0.
由∠AMD=∠AND=90°，知∠MDN
=180°-∠BAC，又∠EDF=180°-∠BAC，
所以∠MDE=∠NDF。故 Rt△DME~Rt△DNF

所以$\frac{EM}{FN}=\frac{DM}{DN}=\frac{AD\cdot\sin\angle DAM}{AD\cdot\sin\angle DAN}=\frac{\sin\angle DAM}{\sin\angle DAN}$.

又∠OAB=$\frac{1}{2}$（180°-2∠C）=90°-∠C，∠OAC=$\frac{1}{2}$（180°-2∠B）=90°-∠B，

故$\frac{EM}{FN}=\frac{\cos C}{\cos B}$（1）

由平行线所截线段成比例的性质知$\frac{E_0M_0}{EM}=\frac{BM_0}{BM}=\cos B,\frac{F_0N_0}{FN}=\frac{CN_0}{CN}=\cos C,$

故又知$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{E_0M_0}{F_0N_0}\cdot\frac{FN}{EM}$.（2）

由（1），（2）得$E_0M_0=F_0N_0\Rightarrow E_0F_0=M_0N_0$（定值）.

7 解：答案：如果记$A(p,q,n)=\begin{cases}\frac{(n+1)(n+2)}{2},若n<r,\\ \frac{r(2n-r+3)}{2},若n\ge r,\end{cases}$ （*）

其中$r=\max\{p,q\}$.

下证（*）式成立。不妨设$r=p$。由定义易知有

$|A(p,q,n)|=\{ip,jp\mid i,j\ge 0,i+j\le n\}$,

此时（*）式成立。下设$p>q$。根据定义，可知

$A(p,q,n)/A(p,q,n-1)\subset\{ip+(n-1)q\mid i=1,2,\cdots,n\}$.

注意到$ip+(n-i)q=p(i+q)+q(n-p-i)$,

并且$(i+q)+(n-p-i)=n-p+q\le n-1$,

并且 $ip+(n-i)q \in A(p,q,n-1) \Leftrightarrow n-p-i \geq 0.$

所以 $A(p,q,n)/A(p,q,n-1)=$

$$\begin{cases}\{ip+(n-i)q \mid i=n-p+1,n-p+2,\cdots,n\}, & 若n \geq p;\\ \{ip+(n-i)q \mid i=0,1,2,\cdots,n\} & 若n < p.\end{cases}$$

令 $a_n=|A(p,q,n)|$ 我们有

$$a_n-a_{n-1}=\begin{cases}p, & 若n \geq p;\\ n+1, & 若n < p.\end{cases}$$

注意到 $a_0=1$，故对 $n<p$，有

$$a_n=a_0(a_1-a_0)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

故 n≥p，有

$$a_n=a_{p-1}+(a_p-a_{p-1})+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_{p-1}+(n-p+1)p=\frac{p(2n-p+3)}{2}.$$