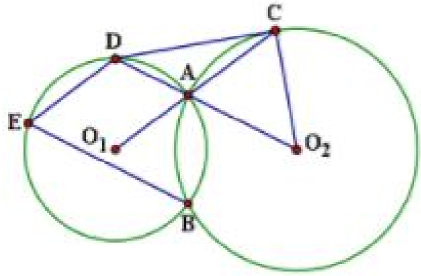
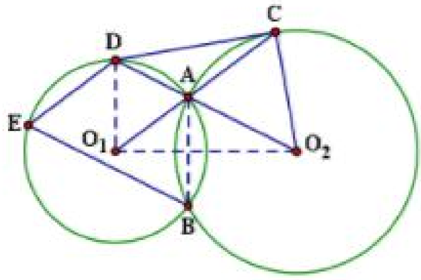
2014 年第 13 届中国女子数学奥赛真题及参考答案

一、如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$交于 A、B 两点，延长O_1A交$\odot O_2$于 C，延长O_2A交$\odot O_1$于 D，过 B 作 BE∥O_2A交$\odot O_1$于另一点 E，若 DE∥O_1A，求证：DC⊥CO_2。



证明：如图，连结 AB、O_1O_2，则 AB⊥O_1O_2。因为$\angle O_1DA=\angle O_1AD=\angle O_2AC=\angle O_2CA$，故C、D、$O_1$、$O_2$四点共圆。又因为 BE∥$O_2A$，DE∥$O_1A$，所以$\angle O_1DA=\angle O_1AD=\angle BED=\angle BAO_2$，所以$O_1D$∥AB，所以$O_1D\perp O_1O_2$，所以 DC⊥$CO_2$。



二、设x_1、x_2、…、$x_n\in R$，且$[x_1]$、$[x_2]$、…、$[x_n]$是1、2、…、n的一个排列，其中$n\geq 2$是给定整数，求$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]$的最大值与最小值。

解答：因为

$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]\leq\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=x_n-x_1<n+1-1=n$

且$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]$为整数，所以$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]\leq n-1$。当$x_i=i$（$i=1$、2、…、n）时，即有$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]=n-1$。

另一方面，因为

$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]>\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i-1)$

$=(x_n-x_1)-(n-1)>1-(n+1)-(n-1)=1-2n$

且$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]$为整数，所以$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]\geq 2-2n$。当$x_i=n+1-i+\frac{1}{i+1}$（$i=1$、2、…、n）时，即有$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]=2-2n$。

综上所述，$\sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}-x_i]$的最大值为$n-1$，最小值为$2-2n$。

三、在n名学生中，每名学生恰好认识d名男生和d名女生（认识是相互的）。求所有可能的正整数对(n,d)。

解答：设有p名男生，q名女生，用平面上P个点A_1、A_2、…、A_p表示p名男生，用q个点B_1、B_2、…、B_q表示q名女生。若一个男生和一个女生认识，则在相应两点之间连一条红线；若两个男生认识，则在相应两点之间连一条黄线；若两个女生认识，则在相应两点之间连一条蓝线。这样便得到一个三染色图G。

根据条件，从每个点A_i（$i=1$、2、…、p）引出d条红线，故图G中有pd条红边；又根据条件从每个点B_i（$i=1$、2、…、q）引出d条红线，故图G中有qd条红边。所以$pd=qd$，即得$p=q$，从而$n=2p$。

又根据条件，从点A_i（$i=1$、2、…、p）中每点引出d条黄线，且每条黄线被统计了两次，故图G中恰有$\frac{pd}{2}$条黄边。而图G中最多只可能有$\frac{p(p-1)}{2}$条黄边，所以$d\le p-1$。

于是知$\frac{n}{2}=p\in N^+$，$\frac{nd}{4}=\frac{pd}{2}\in N^+$，$n=2p\ge 2d+2$。

下面我们证明，当$\frac{n}{2}\in N^+$，$\frac{nd}{4}\in N^+$，$n\ge 2d+2$时，都存在满足条件的图G。

设$\frac{n}{2}=p$，则$d\le p-1$。事实上，当且仅当$i<j$，且$i-j\in 1$，2，…，$d(\mathrm{mod}\ m)$时，将A_iB_j连红线，将A_iA_j连黄线，将B_iB_j连蓝线，这样得到的三染色图G即满足条件。

四、对整数$m\ge 4$，定义T_m为满足下列条件的数列a_1、a_2、…、a_m的个数：

（1）对每个$i=1$、2、…、m，$a_i\in\{1,2,3,4\}$；

（2）$a_1=a_m=1$，$a_2\ne 1$。

（3）对每个$i=3$、4、…、m，$a_i\ne a_{i-1}$，$a_i\ne a_{i-2}$。

求证：存在各项均为正数的等比数列$\{g_n\}$，使得对任意整数$n\ge 4$，都有$g_n-2\sqrt{g_n}<T_n<g_n+2\sqrt{g_n}$。

证明： 易知$T_4=T_5=6$。对于$n\ge 6$，考虑所有满足下面条件的数列a_1、a_2、…、a_{n-1}的个数：

（1）对每个$i=1$、2、…、$n-1$，$a_i\in\{1,2,3,4\}$

（2）$a_1=1$，$a_2\ne 1$。

（3）对每个$i=3$、4、…、$n-1$，$a_i\ne a_{i-1}$，$a_i\ne a_{i-2}$。

一方面，顺次构造a_2、a_3、…、a_{n-1}，其中a_2有3种选择，a_3、a_4、…、a_{n-1}各有两种选择，故这样的数列有$3\cdot 2^{n-3}$个。

另一方面，这样的数列分为三类：第一类是满足$a_{n-2}=1$的数列；第二类是满足$a_{n-1}=1$的数列；第三类是满足$a_{n-1}\ne 1$，$a_{n-2}\ne 1$的数列。第一类数列中的子数列a_1、a_2、…、a_{n-2}共有T_{n-2}个，再加上一项与a_{n-2}、a_{n-3}都不同的项a_{n-1}，故这一类数列共有$2T_{n-2}$个；第二类数列a_1、a_2、…、a_{n-1}共有T_{n-1}个；第三类数列a_1、a_2、…、a_{n-1}可以在后面添加一项$a_n=1$，从而与T_n个满足题设条件的数列a_1、a_2、…、a_n构成一一对应，故此类数列共有T_n个。于是知：

$$T_n+T_{n-1}+2T_{n-2}=3\cdot 2^{n-3}$$

令$U_n=T_n-3\cdot 2^{n-4}$，则有

$$U_n+U_{n-1}+2U_{n-2}=0$$

注意到$U_4=0$，$U_5=0$，根据特征方程法知$U_n=\frac{6\sqrt{7}i}{7}\left[\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}-\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}\right]$。于是知：

$$T_n=3\cdot 2^{n-4}+\frac{6\sqrt{7}i}{7}\left[\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}-\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}\right]$$

又因为

$$|T_n-3\cdot 2^{n-4}|=|U_n|=\left|\frac{6\sqrt{7}i}{7}\left[\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}-\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}\right]\right|$$

$$\le\frac{6\sqrt{7}}{7}\left[\left|\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}\right|+\left|\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-5}\right|\right]$$

$$=\frac{6\sqrt{7}}{7}\left[\left(\sqrt{2}\right)^{n-5}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-5}\right]$$

$$=2\sqrt{\frac{18}{7}\cdot 2^{n-4}}<2\sqrt{3\cdot 2^{n-4}}$$

于是取$g_n=3\cdot 2^{n-4}$，即满足条件。

五、设正整数a不是完全平方数，r是关于x的方程$x^3-2ax+1=0$的一个实根，求证：$r+\sqrt{a}$是无理数。

证明： 若$r+\sqrt{a}$为有理数，设$r+\sqrt{a}=k$，则$r=k-\sqrt{a}$，代入原方程知：

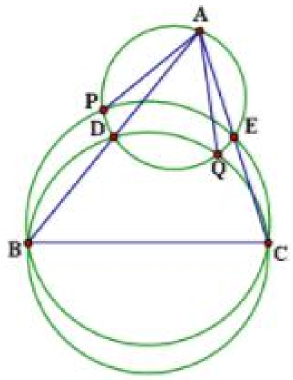
$$\left(k-\sqrt{a}\right)^3-2a\left(k-\sqrt{a}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow\left(k^3+ak+1\right)-\left(3k^2-a\right)\sqrt{a}=0$$

于是知$\begin{cases}k^3+ak+1=0\\3k^2-a=0\end{cases}$。从而有$a=3k^2$，进而知$k^3+3k^3+1=0$，即$4k^3=-1$。这与k为有理数矛盾。

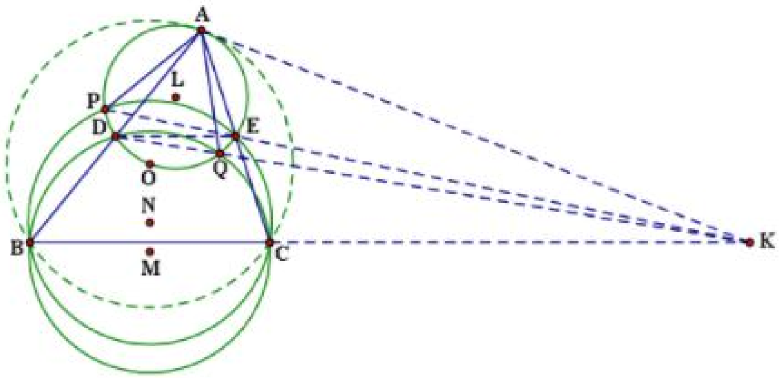
综上所述，$r+\sqrt{a}$是无理数。

六、如图，在锐角△ABC中，AB＞AC，D、E分别为AB、AC中点，△ADE的外接圆与△BCE的外接圆交于点P，△ADE的外接圆与△BCD的外接圆交于点Q，求证：AP＝AQ。



证明： 如图，设△ADE外接圆为⊙L，△BCD外接圆为⊙M，△BCE外接圆为⊙N，考虑⊙L、⊙M、⊙N两两之间的根轴，根据蒙日定理知PE、DQ、BC交于一点，设为K。作△ABC的外接圆⊙O，因为DE平行BC，故⊙L、⊙O的根轴为两圆在点A处的公切线。考虑⊙L、⊙M、⊙O两两之间的根轴，根据蒙日定理知KA为⊙L、⊙O在点A处的公切线。

因为$KC\cdot KB=KA^2$，所以△KAB∽△KCA。又注意到D、E分别为AB、AC中点，故△KAD∽△KCE。于是知∠ADQ＝∠CEK＝∠AEP，所以AP＝AQ，命题得证。



七、对有限非空实数集X，记X的元素个数为$|X|$，$f(X)=\frac{1}{|X|}\left(\sum_{a\in X}a\right)$。集合对$(A,B)$满足$A\cup B=\{1,2,\ldots,100\}$，$A\cap B=\Phi$，且$1\le|X|\le98$。任取$p\in B$，令$A_p=A\cup\{p\}$，$B_p=\{x|x\in B,x\ne p\}$。

对所有满足上述条件的(A,B)与$p\in B$，求$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)$的最大值。

解答： 设$A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$，$B=\{p, b_1, b_2, \dots, b_n\}$，则$m+n=99$，$1\le m\le 98$，且$\{a_1, a_2, \dots, a_m\}\cup\{p, b_1, b_2, \dots, b_n\}=\{1, 2, \dots, 100\}$。此时

$$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)$$
$$=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m+p}{m+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n+p}{(n+1)}\right)$$
$$=\frac{mp-(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m(m+1)}\cdot\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)-(n+1)p}{n(n+1)}$$
$$=\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-p\right]\cdot\frac{1}{(m+1)n}\qquad(1)$$

另一方面，有

$$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)$$
$$=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m+p}{m+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n+p}{(n+1)}\right)$$
$$=\frac{(m+1)p-(a_1+a_2+\cdots+a_m+p)}{m(m+1)}\cdot\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)-np}{n(n+1)}$$
$$=\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m+p)}{m+1}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n}-p\right]\cdot\frac{1}{m(n+1)}\qquad(2)$$

又因为

$$4\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-p\right]$$
$$\le\left\{\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]+\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-p\right]\right\}^2$$
$$=\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]^2$$
$$=\left[\frac{(\sum_{i=1}^{100}i)-(\sum_{i=1}^{m}a_m)}{100-m}-\frac{\sum_{i=1}^{m}a_m}{m}\right]^2$$
$$=\left[\frac{m\cdot(\sum_{i=1}^{100}i)-100(\sum_{i=1}^{m}a_m)}{(100-m)m}\right]^2$$
$$=\left[\frac{m\cdot 5050-100(\sum_{i=1}^{m}a_m)}{(100-m)m}\right]^2$$
$$\le\max\left\{\left[\frac{m\cdot 5050-100(\sum_{i=1}^{m}i)}{(100-m)m}\right]^2,\ \left[\frac{m\cdot 5050-100(\sum_{i=101-m}^{100}i)}{(100-m)m}\right]^2\right\}$$
$$=50^2$$

所以

$$\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-p\right]\le 625\qquad(3)$$

同理可知

$$\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m+p)}{m+1}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n}-p\right]\le 625\qquad(4)$$

当$1\le m\le 97$时，$(m+1)n\ge 2\times 98=196$，结合（1）、（3）知

$$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)$$
$$=\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{m}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n+p)}{(n+1)}-p\right]\cdot\frac{1}{(m+1)n}$$
$$\le\frac{625}{(m+1)n}\le\frac{625}{196}$$

当$m=98$时，$m\cdot(n+1)=196$，结合（2）、（4）知

$$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)$$
$$=\left[p-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m+p)}{m+1}\right]\cdot\left[\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n}-p\right]\cdot\frac{1}{m(n+1)}$$
$$\le\frac{625}{m(n+1)}=\frac{625}{196}$$

于是知$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)\le\frac{625}{196}$，当$A=\{1\}$，$B=\{2, 3, \dots, 100\}$，$p=26$时，等号即有$\left(f(A_p)-f(A)\right)\cdot\left(f(B_p)-f(B)\right)=\frac{625}{196}$。

八、设n是正整数，S是$\{1,2,\dots,n\}$中所有与n互素的数构成的集合。记$S_1=S\cap\left(0,\frac{n}{3}\right]$，$S_2=S\cap\left(\frac{n}{3},\frac{2n}{3}\right]$，$S_3=S\cap\left(\frac{2n}{3},n\right]$，如果S的元素个数是3的倍数，求证：集合$S_1$、$S_2$、$S_3$的元素个数相等。

证明方法一：用$|X|$表示有限集合X的元素个数。对每个正整数n，定义$A(n)$是所有与n互素的整数构成的集合，并对每个整数k，定义$A_k(n)=A(n)\cap\left(\frac{(k-1)n}{3},\frac{kn}{3}\right]$。

对任意整数x，$(x,n)=1\Leftrightarrow(x+n,n)=1$，这即是说$x\in A_k(n)\Leftrightarrow x+n\in A_{k+3}(n)$，从而知$|A_k(n)|=|A_{k+3}(n)|$。

如果正整数n满足题设条件，即$|A_1(n)|=|A_2(n)|=|A_3(n)|$，这等价于对所有的整数k，$|A_k(n)|$都相等，我们把满足这一性质的正整数n称为“平衡的”。

首先我们证明一个**引理：**如果n是“平衡的”，则对任意素数p，pn也是“平衡的”。

引理的证明：由定义可知，对所有的整数k，$|A_k(n)|$都相等，令其为m。我们分两种情形讨论。

情形一：如果$p|n$，则$(x,pn)=1\Leftrightarrow(x,n)=1$，即$A(pn)=A(n)$。此时

$A_1(pn)=A(pn)\cap\left(0,\frac{pn}{3}\right]=A(n)\cap\left(0,\frac{pn}{3}\right]=A_1(n)\cup A_2(n)\cup\dots\cup A_p(n)$

$A_2(pn)=A(pn)\cap\left(\frac{pn}{3},\frac{2pn}{3}\right]=A(n)\cap\left(\frac{pn}{3},\frac{2pn}{3}\right]=A_{p+1}(n)\cup A_{p+2}(n)\cup\dots\cup A_{2p}(n)$

$A_3(pn)=A(pn)\cap\left(\frac{2pn}{3},pn\right]=A(n)\cap\left(\frac{2pn}{3},pn\right]=A_{2p+1}(n)\cup A_{2p+2}(n)\cup\dots\cup A_{3p}(n)$

于是知$|A_1(pn)|=|A_2(pn)|=|A_3(pn)|$。这即是说pn是“平衡的”。

情形二：如果$p\nmid n$，则$(x,pn)=1\Leftrightarrow(x,n)=1$，且$(x,p)=1$。此时则有

$A(pn)=A(n)-B(n)$

这里$B(n)=\{x|p|x,\ x\in A(n)\}=\{x|x=py,\ y\in A(n)\}$。

由情形一的讨论可知，$A(n)$在区间$\left(0,\frac{pn}{3}\right]$、$\left(\frac{pn}{3},\frac{2pn}{3}\right]$、$\left(\frac{2pn}{3},pn\right]$中各有pm个元素。集合$B(n)$中的元素$x=py\in\left(0,\frac{pn}{3}\right]$对应$A(n)$中的元素$y\in\left(0,\frac{n}{3}\right]$，这样的数有$|A_1(n)|=m$个于是知$B(n)$在区间$\left(0,\frac{pn}{3}\right]$中有m个元素。同理可知，$B(n)$在区间$\left(\frac{pn}{3},\frac{2pn}{3}\right]$、$\left(\frac{2pn}{3},pn\right]$中也各有m个元素。从而知$|A_1(pn)|=|A_2(pn)|=|A_3(pn)|=pm-m$，这即是说pn是“平衡的”

综上所述，引理得证。

根据引理易知，对于任意正整数n，若n有一个因子是“平衡的”，则n也是“平衡的”。

下面回答原题。

设n的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$，则

$|S|=\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k-1}\cdot(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdot\dots\cdot(p_k-1)$

因为$3||S|$，故n是9的倍数，或n含有一个$3k+1$型素因子p。容易验证9和$3k+1$型素数p均为“平衡的”，所以n为“平衡的”。命题得证。

证明方法二：首先我们证明一个**引理：**设m的标准分解式为$m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$，m至少含有一个$3k+1$型素因子，且$3\nmid m$，则

$\left\{\frac{m}{3}\right\}-\left(\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{m}{3p_i}\right\}\right)+\left(\sum_{1\le i<j\le k}\left\{\frac{m}{3p_ip_j}\right\}\right)+\dots+(-1)^k\left\{\frac{m}{3p_1p_2\cdots p_k}\right\}=0$

引理的证明：事实上，$\left\{\frac{m}{3p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}}\equiv 1(\bmod 3)\\ \frac{2}{3}, & \frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}}\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$。不妨设$p_1$、$p_2$、…、$p_k$中有x个素数模3余1，有y个素数模3余2，$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$模3余$r\in\{1,2\}$，则$x\ge1$，$x+y=k$。此时

$\left\{\frac{m}{3}\right\}-\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{m}{3p_i}\right\}++\left(\sum_{1\le i<j\le k}\left\{\frac{m}{3p_ip_j}\right\}\right)\dots+(-1)^k\left\{\frac{m}{3p_1p_2\cdots p_k}\right\}$

$=C_x^0C_y^0\cdot\left\{\frac{r}{3}\right\}-\left(C_x^1C_y^0\cdot\left\{\frac{r}{3}\right\}+C_x^0C_y^1\cdot\left\{\frac{2r}{3}\right\}\right)+\left[\left(C_x^2C_y^0\right)\cdot\left\{\frac{r}{3}\right\}+C_x^1C_y^1\cdot\left\{\frac{2r}{3}\right\}+C_x^0C_y^2\cdot\left\{\frac{2^2r}{3}\right\}\right]+\dots+(-1)^k\cdot C_x^x\cdot C_y^y\cdot\left\{\frac{2^yr}{3}\right\}$