2017 年第 16 届女子数学奥林匹克试题及答案

1. (1)求所有正整数 n,使得对任意的奇数 a,均有 $4|(a^n-1)$;

(2)求所有正整数 n,使得对任意的奇数 a,均有 $2^{2017}|(a^n-1)$.

2. 如图 1,在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD+2\angle BCD=180°$,$\angle BAD$ 的平分线与线段 BD 交于点 E,线段 AE 的中垂线分别与直线 CB、CD 交于点 X、Y. 证明:A、X、C、Y 四点共圆.

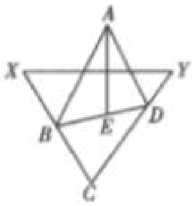

图 1

3. 设 $a_i\geq 0, x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$. 证明:

$$\left(\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\cos x_i\right)^2+\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\sin x_i\right)^2\right)^2\geq 4\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^3.$$

4. 将 16 个数 $\frac{1}{2\,002},\frac{1}{2\,003},\cdots,\frac{1}{2\,017}$ 分成两组,每组八个数. 记其中一组的八个数之和为 A,另一组的八个数之和为 B. 请给出一种分组方案,使得 $|A-B|$ 最小,并说明理由.

5. 求最大的实数 C,使得对任意的正整数 n 和满足 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$ 的数列 $\{x_k\}$,均有

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2(x_k-x_{k-1})>C.$$

6. 设 n 为正整数,X 为有限集合,映射 $f:X\rightarrow X$ 满足对任意的 $x\in X$,有 $f^{(n)}(x)=x$,其中,

$f^{(1)}(x)=f(x)$,

$f^{(i)}(x)=f(f^{(i-1)}(x))(i\geq 2)$.

记 m_j 为集合 $\{x\in X|f^{(j)}(x)=x\}$ 的元素个数. 对于任意的整数 k,证明:

(1)$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}m_j\sin\frac{2jk\pi}{n}=0$;

(2)$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}m_j\cos\frac{2jk\pi}{n}$ 为非负整数.

7. 如图 2,圆 Γ_1 为四边形 $ABCD$ 的外接圆,直线 AC 与 BD 交于点 E,直线 AD 与 BC 交于点 F. 圆 Γ_2 分别与线段 EB、EC 切于点 M、N,且与圆 Γ_1 交于点 Q、R,直线 BC、AD 分别与直线 MN 交于点 S、T. 证明:Q、R、S、T 四点共圆.

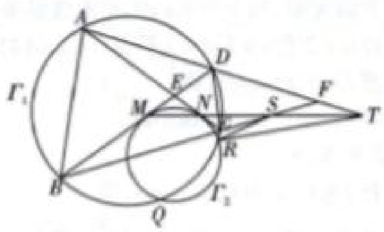

图 2

8. 给定正整数 $n\geq 2$,设方格表

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

满足 $\{a_{ij}|1\leq i、j\leq n\}=\{b_{ij}|1\leq i、j\leq n\}$ $=\{1,2,\cdots,n^2\}$.

对 A 可以进行如下操作:选取位于同一

行或同一列的两个数，交换它们的位置，其余 n^2-2 个数保持不动. 这种操作称为一次对换. 求最小正整数 m，使得对任意的 A、B，可以经过不超过 m 次对换，把 A 变成 B.

参考答案

1. (1) 当 n 为偶数时，$a^n\equiv1\pmod 4$；

当 n 为奇数时，

$a^n-1\equiv(-1)^n-1\pmod 4$.

因此，所求的 n 为所有正偶数.

(2) 先证明：当 $2^{2015}\mid n$ 时，n 满足条件.

设 $n=2^{2015}n_0$，$b=a^{n_0}$. 则

$$a^n-1=b^{2^{2015}}-1$$

$$=(b^2-1)\left(\prod_{k=1}^{2014}(b^{2^k}+1)\right).$$

其中，第一个乘数为 8 的倍数，其余 2 014 个乘数均为偶数.

故 $2^{2017}\mid(a^n-1)$，n 满足条件.

下面证明：当 $2^{2015}\nmid n$ 时，n 不满足条件.

设 $n=2^t(2s+1)(t、s\in\mathbf{N}, t\leqslant2014)$.

若 $t=0$，取 $a=3$，则

$a^n-1\equiv3-1\equiv2\pmod 4$，

n 不满足条件.

若 $1\leqslant t\leqslant2014$，取 $a=3$，则

$$a^n-1=3^n-1=(3^{2^t}-1)\left(\sum_{k=0}^{2s}3^{2^tk}\right)$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{t-1}(3^{2^k}+1)\right)(3^2-1)\left(\sum_{k=0}^{2s}3^{2^tk}\right).$$

前 $t-1$ 个乘数各有一个 2 的因子，3^2-1 有三个 2 的因子，最后一个乘数为奇数. 故 a^n-1 仅有 $t+2\leqslant2016$ 个 2 的因子，n 不满足条件.

2. 设 L、M、N 分别为点 A 到直线 XY、BC、CD 的垂足，U、V 分别为点 A 关于直线 BC、CD 的对称点.

要证明 A、X、C、Y 四点共圆，由西姆松定理的逆定理，知只需证明 L、M、N 三点共线.

显然，L、M、N 分别为线段 AE、AU、AV 的中点. 故只需证明 E、U、V 三点共线.

由 $\dfrac{BU}{BE}=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{DV}{DE}$，

$\angle UBX+\angle XBD+\angle BDY+\angle YDV$

$=\angle ABX+180^\circ+\angle BCD+\angle ADY$

$=540^\circ+\angle BCD-\angle ABC-\angle ADC$

$=180^\circ+\angle BAD+2\angle BCD=360^\circ$，

则点 U、V 在直线 BD 的两侧，且

$\angle UBE=\angle VDE$.

故 $\triangle UBE\backsim\triangle VDE\Rightarrow\angle BEU=\angle DEV$.

结合点 U、V 在直线 BD 的两侧，知 E、U、V 三点共线.

3. 若 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant0$，则命题成立.

若 $1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\geqslant0$，则

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\sin x_i\right)^2$$

$$\geqslant\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\sin^2x_i\right),$$

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\cos x_i\right)^2$$

$$\geqslant\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\cos^2x_i\right).$$

故 $\left(\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cos x_i\right)^2+\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sin x_i\right)^2\right)^2$

$$\geqslant\left(\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(2-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\right)^2$$

$$\geqslant4\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^3.$$

4. 换个描述方式：记 $M=2\,002$，把集合 $T=\{0,1,\cdots,15\}$ 分成两个互补的八元子集 A、B. 记

$$A'=\sum_{t\in A}\frac{1}{t+M},\ B'=\sum_{t\in B}\frac{1}{t+M},$$

目的是将 $|A'-B'|$ 最小化.

对非负整数 m，记集合 A、B 的元素的 m 次方之和分别为

$$A_m=\sum_{t\in A}t^m,\ B_m=\sum_{t\in B}t^m,$$

其中，$A_0=B_0=8$ 为元素个数.

注意到，

$$A_1+B_1=\sum_{t=0}^{15} t=120,$$

$$A_2+B_2=\sum_{t=0}^{15} t^2=1\,240,$$

$$A_3+B_3=\sum_{t=0}^{15} t^3=14\,400.$$

于是,$|A'-B'|$的大小与

$$|A_0-B_0|,|A_1-B_1|,\cdots,|A_m-B_m|,\cdots$$

的大小有关,且存在唯一的正整数k,使得

$$A_0=B_0,A_1=B_1,\cdots,A_{k-1}=B_{k-1},$$

但$A_k\neq B_k$.

若找到一个$k+1$次首一多项式

$$G_k(t)=t^{k+1}+\sum_{i=0}^{k} g_{k,i}t^i$$

满足对每个$t\in T$,均有

$$C_k^-\leqslant G_k(t)\leqslant C_k^+,$$

其中,下界$C_k^-\leqslant 0$,上界$C_k^+\geqslant 0$,且上下界之差$C_k=C_k^+-C_k^-$不是很大,就可以对$|A'-B'|$做如下估计.

下面考虑多项式$G_k(t)$除以一次多项式$t+M$的结果,应该得到余式为常数多项式$R_k=G_k(-M)$,以及商式为k次首一多项式

$$\frac{G_k(t)-G_k(-M)}{t+M}=t^k+\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}t^i,$$

其中,$c_{k,k-1},\cdots,c_{k,0}$为固定的系数. 此时,

$$\frac{G_k(t)}{t+M}=\frac{G_k(t)-G_k(-M)}{t+M}+\frac{G_k(-M)}{t+M}$$

$$=t^k+\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}t^i+\frac{R_k}{t+M}\in\left[\frac{C_k^-}{M},\frac{C_k^+}{M}\right].$$

上式分别对于集合A、B中的八个元素求和得

$$8\times\frac{C_k^-}{M}\leqslant A_k+\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}A_i+R_kA'\leqslant 8\times\frac{C_k^+}{M},$$

$$8\times\frac{C_k^-}{M}\leqslant B_k+\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}B_i+R_kB'\leqslant 8\times\frac{C_k^+}{M}.$$

以上两式相减,并由已知$A_i=B_i(i=0,1,\cdots,k-1)$,得

$$-8\times\frac{C_k}{M}\leqslant(A_k-B_k)+R_k(A'-B')$$

$$\leqslant 8\times\frac{C_k}{M}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{|R_k|}\left(|A_k-B_k|+\frac{8C_k}{M}\right)\geqslant|A'-B'|$$

$$\geqslant\frac{1}{|R_k|}\left(|A_k-B_k|-\frac{8C_k}{M}\right).$$

若$k=1$,$A_1\neq B_1$,由奇偶性知$|A_1-B_1|$至少为2. 取多项式$G_1(t)=t(t-15)$满足对任意的$t\in T$,有$-56\leqslant G_1(t)\leqslant 0$,其上下界之差$C_1=56$.

余数$R_1=M(M+15)=2\,002\times 2\,017$.

则$|A'-B'|\geqslant\frac{1}{|R_1|}\left(|A_1-B_1|-\frac{8C_1}{M}\right)$

$$\geqslant\frac{2-\frac{1}{4}}{R_1}>\frac{2}{5}\times 10^{-6},$$

差比较大.

若$k=2$,$A_2\neq B_2$,由奇偶性知$|A_2-B_2|$至少为2. 取多项式$G_2(t)=t(t-11)^2$满足对任意的$t\in T$,有$0\leqslant G_2(t)\leqslant 240$,其上下界之差$C_2=240$.

余数$R_2=-M(M+11)^2$

$=-2\,002\times 2\,013^2$.

则$|A'-B'|\geqslant\frac{1}{|R_2|}\left(|A_2-B_2|-\frac{8C_2}{M}\right)$

$$\geqslant\frac{2-1}{R_2}>\frac{3}{25}\times 10^{-9},$$

差也比较大.

若$k=3$,$A_3\neq B_3$,注意到,

$$6\mid(t^3-t)\Rightarrow 6\mid(t-1)t(t+1).$$

于是,$\frac{A_3-A_1}{6}$、$\frac{B_3-B_1}{6}$均为整数. 而两者之和为偶数,故两者之差也为偶数.

又$A_1=B_1$,从而,A_3-B_3必为12的倍数,$|A_3-B_3|$至少为12. 取多项式

$$G_3(t)=t(t-7)(t-8)(t-15)$$

满足对任意的$t\in T$,有$-28^2\leqslant G_3(t)\leqslant 0$,其上下界之差$C_3=784$,

余数$R_3=M(M+7)(M+8)(M+15)$

$=2\,002\times 2\,009\times 2\,010\times 2\,017$.

则$|A'-B'|\geqslant\frac{1}{|R_3|}\left(|A_3-B_3|-\frac{8C_3}{M}\right)$

$$\geqslant\frac{12-8\times\frac{2}{5}}{R_3}>\frac{1}{2}\times10^{-12},$$

差还是比较大.

由前知只有 $A_1=B_1,A_2=B_2,A_3=B_3$,才可能使差 $|A'-B'|$ 变得更小.

考虑 $0,1,\cdots,15$ 的二进制表示中含奇数个1还是偶数个1来给出一个分组:

$A=\{0,3,5,6,9,10,12,15\}$,

$B=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$; ①

这个分组满足 $A_1=B_1,A_2=B_2,A_3=B_3$,同时,$A_4-B_4=1\,536$.

取多项式

$G_4(t)=t(t-5)^2(t-13)(t-14)$

满足对任意的 $t\in T$,有 $0\leqslant G_4(t)\leqslant3\,000$,其上下界之差 $C_4=3\,000$,

余数 $R_4=-M(M+5)^2(M+13)(M+14)$

$=-2\,002\times2\,007^2\times2\,015\times2\,016$.

则 $|A'-B'|\leqslant\frac{1}{R_4}\left(|A_4-B_4|+\frac{8C_4}{M}\right)$

$$<\frac{1\,536+8\times\frac{3}{2}}{R_4}<50\times10^{-15},$$

差比较小了.

最后证明:当分组满足 $A_1=B_1,A_2=B_2,A_3=B_3$ 时,分组①是唯一的方式.

观察立方数模9的余数的特点,即当 t 模3余0、1、2时,t^3 模9的余数分别为0、1、-1,$(t+1)^3$ 模9的余数分别为1、-1、0.

由 $\sum\limits_{t=0}^{15}t^3\equiv0\pmod 9$,知

$\sum\limits_{t\in A}t^3=\sum\limits_{t\in B}t^3\equiv0\pmod 9$;

由 $\sum\limits_{t=0}^{15}(t+1)^3\equiv1\pmod 9$,知

$\sum\limits_{t\in A}(t+1)^3=\sum\limits_{t\in B}(t+1)^3\equiv5\pmod 9$.

设 A 组中模3余0、1、2的元素个数分别为 a_0、a_1、a_2,B 组中模3余0、1、2的元素个数分别为 b_0、b_1、b_2.则

$a_1-a_2\equiv0\pmod 9$,$a_0-a_1\equiv5\pmod 9$,

$b_1-b_2\equiv0\pmod 9$,$b_0-b_1\equiv5\pmod 9$.

由于 a_0、a_1、a_2、b_0、b_1、b_2 均为0至6的整数,于是,$a_1=a_2$,$b_1=b_2$,且 a_0-a_1 与 b_0-b_1 只能为5或 -4.

又 $(a_0-a_1)+(b_0-b_1)=1$,则 a_0-a_1、b_0-b_1 恰有一个为5、一个为 -4.

不妨设 $a_0-a_1=5$.

从而,$a_0=6$,$a_1=a_2=1$,即集合 A 包含了集合 T 中的六个3的倍数 $\{0,3,6,9,12,15\}$.此时,可算得集合 A 中其他两个数之和为15,平方和为125,它们为 $\{5,10\}$.

故集合 $A=\{0,3,5,6,9,10,12,15\}$.

因此,满足 $A_1=B_1,A_2=B_2,A_3=B_3$ 的分组方式是唯一的(在两组可交换的意义下).

5. 首先证明:$C\geqslant\frac{1}{3}$.

由 $x_k\geqslant x_{k-1}\geqslant0$,得

$3\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2(x_k-x_{k-1})$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k^2+x_k^2+x_k^2)(x_k-x_{k-1})$

$>\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2)(x_k-x_{k-1})$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k^3-x_{k-1}^3)=x_n^3-x_0^3=1-0=1$.

再证明:若 $C>\frac{1}{3}$,则存在

$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$,

使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2(x_k-x_{k-1})<C$.

设 $x_k=\frac{k}{n}(k=0,1,\cdots,n)$.

当 $n>3$ 且 $\frac{1}{n}<C-\frac{1}{3}$ 时,

$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{3}{n}\right)$

$<\frac{1}{3}+\frac{1}{n}<C$.

因此,$C=\frac{1}{3}$.

6. 以集合 X 中的元素为顶点，按如下方式构造有向图 G：对于 $x、y\in X$，当且仅当 $f(x)=y$ 时，连一条从 x 指向 y 的有向边.

注意到，对于 f 的不动点 x，图 G 中有一条从 x 指向自身的环边，称其是长度为 1 的轨道.

由条件，知对任意的 $x\in X$，有

$f^{(n)}(x)=x$.

则 f 为双射.

故删去 f 的所有不动点及对应的环边之后，剩下的图中每个点的出度和入度均为 1.

由图论中熟知的结论，知剩下的图可以分拆成若干个不相交的有向圈的并. 可将每个这样的有向圈称为一个轨道. 对于一个长度为 l 的轨道 L，对轨道上的任何顶点 x，易知，$f^{(j)}(x)=x$ 的充分必要条件是 $l\mid j$. 特别地，l 为 n 的约数，且轨道 L 中的顶点为 $f^{(j)}$ 的不动点的充分必要条件为 $l\mid j$.

设图 G 中共有 p 个轨道（包括长度为 1 的轨道），长度分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_p$. 由前述，对正整数 j，有

$$m_j=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ l_i\mid j}}l_i.$$

$$\text{故}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}m_je^{\frac{2kj\pi i}{n}}=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{2kj\pi i}{n}}\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ l_i\mid j}}l_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}l_i\right)\left(\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ l_i\mid j}}e^{\frac{2kj\pi i}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}l_i\right)\left(\sum_{q=1}^{\frac{n}{l_i}}e^{s}\right)\left(s=\frac{2kq\pi i}{\frac{n}{l_i}}\right)\quad ①$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{(n,k)}\mid l_i}l_i\right)\frac{n}{l_i}=\sum_{\frac{n}{(n,k)}\mid l_i}1,$$

其中，倒数第二个等式用到了熟知的结果

$$\sum_{q=1}^{\frac{n}{l_i}}e^{s}=\begin{cases}\dfrac{n}{l_i}, & \dfrac{n}{(n,k)}\Big| l_i;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

分别考虑式①的虚部、实部，即得到原题中所要证明的两个结论.

7. 注意到，

$\angle FTS=\angle DTM=\angle ENM-\angle NAT$

$=\angle EMN-\angle MBS=\angle CSN=\angle FST.$

于是，$FS=FT$.

由正弦定理知

$$\frac{AT}{AN}=\frac{\sin\angle ANT}{\sin\angle ATN},\frac{BS}{BM}=\frac{\sin\angle BMS}{\sin\angle BSM},$$

$$\frac{CS}{CN}=\frac{\sin\angle CNS}{\sin\angle CSN},\frac{DT}{DM}=\frac{\sin\angle DMT}{\sin\angle DTM}.\quad ①$$

由 $\angle ATN=\angle DTM=\angle CSN=\angle BSM$，

$180^\circ-\angle BMS=\angle DMT=\angle ANM$

$=\angle CNS=180^\circ-\angle ANT$，

则结论①中的每个等式右边的分子和分母均相同.

故 $\dfrac{AT}{AN}=\dfrac{BS}{BM}=\dfrac{CS}{CN}=\dfrac{DT}{DM}\triangleq k$.

由 $FS=FT$，知存在圆 Γ_3 与 $FS、FT$ 分别切于点 $S、T$.

设圆 $\Gamma_1、\Gamma_2、\Gamma_3$ 的圆心分别为 $O_1、O_2、O_3$，半径分别为 $r_1、r_2、r_3$.

对平面上任意一点 P，定义

$f(P)=(k^2-1)(PO_1^2-r_1^2)-$

$k^2(PO_2^2-r_2^2)+(PO_3^2-r_3^2)$.

则 $f(A)=(k^2-1)0-k^2AN^2+AT^2=0$.

类似地，$f(B)=f(C)=f(D)=0$.

建立平面直角坐标系，设点

$O_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$.

则 $f(x,y)$

$=(k^2-1)((x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2)-$

$k^2((x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2^2)+$

$((x-x_3)^2+(y-y_3)^2-r_3^2)$

$=ax+by+c$（$a、b、c$ 为常数）.

若 $a、b、c$ 不全为零，则满足 $f(x,y)=0$ 的点 (x,y)（若存在）的轨迹是一条直线，但此直线须过 $A、B、C、D$ 四个点，矛盾.

因此，$a=b=c=0$，即 $f\equiv0$.

由 $RO_1^2=r_1^2$，$RO_2^2=r_2^2$ 及 $f(R)=0$，知 $RO_3^2=r_3^2$，即点 R 在圆 Γ_3 上.

类似地，点 Q 在圆 Γ_3 上.

因此，$Q、R、S、T$ 四点共圆于圆 Γ_3.

8. 对任意的 x、y，不妨设

$b_{ij}=(i-1)n+j$.

首先证明两个引理.

引理 1　$(1,2,\cdots,n)$ 的任意排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 可以经过至多 $n-1$ 次对换，变成 $(1,2,\cdots,n)$.

引理 1 的证明　将 $i=1,2,\cdots,n-1$ 依次换到位置 i.

引理 2　把排列 $(2,3,\cdots,n,1)$ 变成排列 $(1,2,\cdots,n)$，需要经过至少 $n-1$ 次对换.

引理 2 的证明　对 n 应用数学归纳法.

$n=2$ 时，结论显然成立.

假设可以经过 $m(m<n-1)$ 次对换将 $(2,3,\cdots,n,1)$ 变成 $(1,2,\cdots,n)$. 则存在 $k\in\{2,3,\cdots,n\}$ 仅经历了 1 次对换，即从位置 $k-1$ 变到位置 k. 从而，可以经过 $m-1$ 次对换将 $(2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n,1)$ 变成 $(1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$，矛盾.

引理 1，2 得证.

再证明：任意二维排列 A 可以经过至多 $2n-1$ 次对换，将第一行变成 $(1,2,\cdots,n)$.

若 $1,2,\cdots,n$ 所在的列各不相同，则可以经过至多 n 次对换，将它们换至 A 的第一行，再经过至多 $n-1$ 次对换，将 A 的第一行变成 $(1,2,\cdots,n)$.

若 $1,2,\cdots,n$ 中有两个数在同一列，则存在某列（设为第 k 列）不含任何 $1,2,\cdots,n$. 将 k 对换至第 k 列，再对换至第 1 行，不会改变 $1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$ 的位置.

重复上述两类操作，至多 $2n-1$ 次对换，可以将 A 的第一行变成 $(1,2,\cdots,n)$.

类似地，至多 $2n-1$ 次对换，可以将 A 的第 $i(i=2,3,\cdots,n-1)$ 行变成

$((i-1)n+1,(i-1)n+2,\cdots,in)$.

从而，至多 $n-1$ 次对换，可以将 A 的第 n 行变成

$((n-1)n+1,(n-1)n+2,\cdots,n^2)$.

共计至多 $2n(n-1)$ 次对换.

最后证明：$m=2n(n-1)$ 为所求.

$$设A=\begin{pmatrix} n+2 & n+3 & \cdots & 2n & n+1 \\ 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n & 2n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 & (n-1)n+1 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到，A 的第 i 列中的 n 个数均位于 B 的第 $i+1$ 列.

据引理 2，将 A 变成 B 需至少 $n(n-1)$ 次水平方向的对换.

类似地，A 的第 i 行中的 n 个数均位于 B 的第 $i+1$ 行，将 A 变成 B 需至少 $n(n-1)$ 次竖直方向的对换.

（李胜宏　提供）