

二〇一九年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛试卷

参考答案及评分标准

一、填空题（共 10 小题，每小题 7 分，满分 70 分。请直接将答案写在题中的横线上）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	$\left[\frac{1}{2}, 3\right]$	$\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$	$a < c < b$	$\frac{1}{2}$	3	$\left[\frac{1}{4}, 1\right]$	$3-2\ln 2$	$\frac{9}{16}\pi$	$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

二、解答题（共 6 小题，满分 80 分。要求写出解题过程）

11、（13 分）已知向量 $\vec{m} = (\cos \frac{x}{2}, -1)$, $\vec{n} = (\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2})$, 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + 1$.

(1) 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{11}{10}$, 求 $\cos x$ 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $2b \cos A \leq 2c - \sqrt{3}a$, 求 $f(B)$ 的取值范围.

$$\text{解: (1) } f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1 + \cos x}{2} + 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$$

$$\because f(x) = \frac{11}{10}, \therefore \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}; \text{ 又 } \because x \in [0, \frac{\pi}{2}], \therefore x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}], \text{ 即 } \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos x = \cos[(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \cos(x - \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6} - \sin(x - \frac{\pi}{6}) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } 2b \cos A \leq 2c - \sqrt{3}a \text{ 得: } 2 \sin B \cos A \leq 2 \sin C - \sqrt{3} \sin A$$

$$\Rightarrow 2 \sin B \cos A \leq 2 \sin(A + B) - \sqrt{3} \sin A$$

$$\Rightarrow 2 \sin B \cos A \leq 2[\sin A \cos B + \sin B \cos A] - \sqrt{3} \sin A$$

$$\Rightarrow 2 \sin A \cos B \geq \sqrt{3} \sin A \Rightarrow \cos B \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\therefore \sin(B - \frac{\pi}{6}) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \text{ 即 } f(B) = \sin(B - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \Rightarrow f(B) \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

12、（13 分）2019 年数学奥林匹克竞赛试行改革：某市在高二一年中举行 5 次联合竞赛，学生如果其中 2 次成绩达到该市前 20 名即可进入省队培训，不用参加其余的竞赛，而每个学生最多也只能参加 5 次竞赛，规

定：若前 4 次竞赛成绩都没有达全市前 20 名，则第 5 次不能参加竞赛。假设某学生每次成绩达全市前 20 名的概率都是 $\frac{1}{4}$ ，每次竞赛成绩达全市前 20 名与否互相独立。

(1) 求该学生进入省队的概率。

(2) 如果该学生进入省队或参加完 5 次竞赛就结束，记该学生参加竞赛的次数为 ξ ，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望。

解：(1) 记“该生进入省队”的事件为事件 A ，其对立事件为 $\bar{A}$ ，

$$\text{则 } P(\bar{A}) = C_4^1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{128}.$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{81}{128} = \frac{47}{128}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 该生参加竞赛次数 ξ 的可能取值为 2, 3, 4, 5. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$P(\xi=2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad P(\xi=3) = C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32},$$

$$P(\xi=4) = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{256} + \frac{81}{256} = \frac{27}{64}.$$

$$P(\xi=5) = C_4^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

故 ξ 的分布列为：

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$E(\xi) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{3}{32} + 4 \times \frac{27}{64} + 5 \times \frac{27}{64} = \frac{269}{64}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$P(\xi=4) = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{256} + \frac{81}{256} = \frac{27}{64}.$$

$$P(\xi=5) = C_4^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

故 ξ 的分布列为:

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$E(\xi) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{3}{32} + 4 \times \frac{27}{64} + 5 \times \frac{27}{64} = \frac{269}{64}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

13、(13 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=\frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1}=\frac{(n-1)a_n}{n-a_n}$ ($n=2,3,4,\dots$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: 对一切 $n \in N^*$, 有 $\sum_{k=1}^n a_k^2 < \frac{7}{6}$.

解: (1) 由已知, 对 $n \geq 2$ 有 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n-a_n}{(n-1)a_n} = \frac{n}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n-1},$

两边同除以 n , 得 $\frac{1}{na_{n+1}} = \frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{n(n-1)},$

即 $\frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{(n-1)a_n} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$

于是, $\sum_{k=2}^{n-1} \left[\frac{1}{ka_{k+1}} - \frac{1}{(k-1)a_k} \right] = -\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right),$

即 $\frac{1}{(n-1)a_n} - \frac{1}{a_2} = -\left(1 - \frac{1}{n-1}\right), n \geq 2,$

所以 $\frac{1}{(n-1)a_n} = \frac{1}{a_2} - \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{3n-2}{n-1}, a_n = \frac{1}{3n-2}, n \geq 2.$

又 $n=1$ 时也成立, 故 $a_n = \frac{1}{3n-2}, n \in N^*, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 当 $k \geq 2$, 有

$$a_k^2 = \frac{1}{(3k-2)^2} < \frac{1}{(3k-4)(3k-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-4} - \frac{1}{3k-1} \right),$$

所以 $n \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 &= 1 + \sum_{k=2}^n a_k^2 < 1 + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1} \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-1} \right) < 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{又 } n=1 \text{ 时, } a_1^2 = 1 < \frac{7}{6}.$$

故对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\sum_{k=1}^n a_k^2 < \frac{7}{6}$ 13 分

解: (I) 设 AC 的中点为 O , 连接 BO , PO .

由题意, 得 $PA=PB=PC=2\sqrt{2}$, $PO=2$,

$$AO=BO=CO=2.$$

$\because$ 在 $\triangle PAC$ 中, $PA=PC$, O 为 AC 的中点,

$\therefore PO \perp AC$,

$\because$ 在 $\triangle POB$ 中, $PO=2$, $OB=2$, $PB=2\sqrt{2}$,

$$PO^2 + OB^2 = PB^2, \therefore PO \perp OB.$$

$\because AC \cap OB = O$, $AC, OB \subset$ 平面 ABC , $\therefore PO \perp$ 平面 ABC ,

$\because PO \subset$ 平面 PAC , $\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC 6 分

(II) 由 $PO \perp$ 平面 ABC , $OB \perp AC$, $\therefore PO \perp OB$, $PO \perp OC$,

于是以 OC , OB , OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图示空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0)$, $C(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A(-2,0,0)$, $P(0,0,2)$, $M\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$,

$$\overrightarrow{BC} = (2, -2, 0), \overrightarrow{PC} = (2, 0, -2), \overrightarrow{MC} = \left(\frac{8}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right).$$

设平面 MBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ 2x_1 - z_1 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 得 } y_1 = 1, z_1 = 2,$$

即 $\mathbf{m} = (1, 1, 2)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} x_2 - y_2 = 0 \\ x_2 - z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_2 = 1, \text{ 得 } y_2 = 1, z_2 = 1, \text{ 即 } \mathbf{n} = (1, 1, 1).$$

$$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ 由图可知, 二面角 } P-BC-M \text{ 的余弦值为 } \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ 13 分}$$

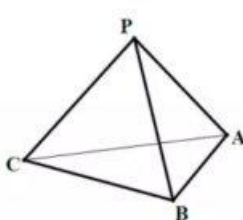


图1

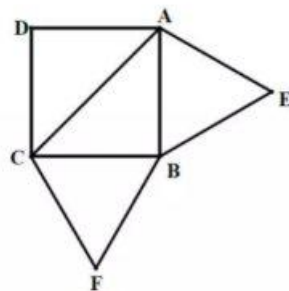
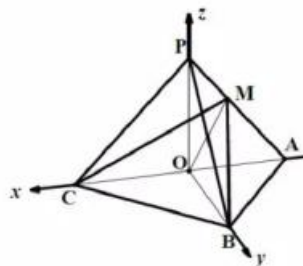


图2



FN 的斜率为 k_1 , k_2 , 试判断 $k_1 + k_2$ 是否为定值, 若是定值, 求出该定值; 若不是定值, 请说明理由.

解: (1) 由题意可知: $2b = 4$, $b = 2$, $\frac{n}{m} = 1$, 双曲线的离心率

$$e_2 = \sqrt{1 + \frac{n}{m}} = \sqrt{2},$$

则椭圆的离心率为 $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 椭圆的离心率 $e_1 = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $a = 2\sqrt{2}$.

∴ 椭圆的标准方程: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分

(2) 设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 4) (k \neq 0)$, $\begin{cases} y = k(x - 4) \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases}$,

消去 y 整理得: $(1 + 2k^2)x^2 - 16k^2x + 32k^2 - 8 = 0$.

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{32k^2 - 8}{2k^2 + 1}$,

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{k(x_1 - 4)}{x_1 - 2} + \frac{k(x_2 - 4)}{x_2 - 2} \\ &= k \cdot \frac{(x_1 - 4)(x_2 - 2) + (x_2 - 4)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = k \cdot \frac{2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 16}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}, \end{aligned}$$

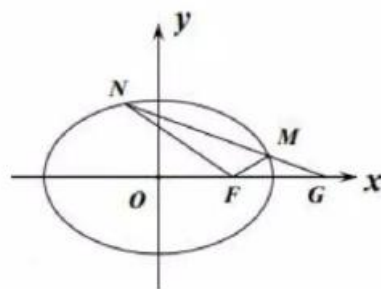
将 $x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{32k^2 - 8}{2k^2 + 1}$,

代入上式得 $2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 16 = 0$, 即 $k_1 + k_2 = 0$ 9 分

16、(14 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$.

(1) 若 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$ 在 $x = x_1$, $x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$;

(2) 若对于任意 $k \in (-\infty, 1)$, 直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 都有唯一公共点, 求实数 b 的取值范围.





解: (1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, 令 $f'(x_1) = f'(x_2) = m$, 得 $\begin{cases} \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1 - m = 0 \\ \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} + 1 - m = 0 \end{cases}$,

由韦达定理得 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$, 即 $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}$, 得 $x_1 \cdot x_2 > 4$,

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) = (x_1 + x_2) - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - (\ln x_1 + \ln x_2) = x_1 x_2 - \ln(x_1 x_2) - 1,$$

令 $t = x_1 \cdot x_2 > 4$, 则 $x_1 x_2 - \ln(x_1 x_2) - 1 = t - \ln t - 1$, 令 $g(t) = t - \ln t - 1 (t > 4)$,

则 $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0 (t > 4)$, 得 $g(t) > g(4) = 3 - 2\ln 2$ 7 分

(2) 由 $f(x) = kx + b$, 得 $k = \frac{x - \frac{1}{x} - \ln x - b}{x}$,

令 $h(x) = \frac{x - \frac{1}{x} - \ln x - b}{x}$, 则 $x \rightarrow 0^+$, $h(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $h(x) \rightarrow 1$,

下面先证明 $h(x) < 1$ 恒成立.

若存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h(x_0) \geq 1$, $\forall x \rightarrow 0^+$, $h(x) \rightarrow -\infty$, 且当自变量 x 充分大时,

$$h(x) = \frac{x - \frac{1}{x} - \ln x - b}{x} < 1, \text{ 所以存在 } x_1 \in (0, x_0), x_2 \in (x_0, +\infty), \text{ 使得 } h(x_1) < 1, h(x_2) < 1,$$

取 $k = \max\{h(x_1), h(x_2)\} < 1$, 则 $y = k$ 与 $y = h(x)$ 至少有两个交点, 矛盾.

由对任意 $k \in (-\infty, 1)$, $h(x) = k$ 只有一个解, 得 $h(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的递增函数, $\therefore h'(x) = \frac{\frac{2}{x} + \ln x + b - 1}{x^2} \geq 0$

$$\text{得 } b \geq -\frac{2}{x} - \ln x + 1, \text{ 令 } m(x) = -\frac{2}{x} - \ln x + 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } m'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2-x}{x^2}, \text{ 得 } b \geq m(x)_{\max} = m(2) = -\ln 2. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。



微信扫一扫，快速关注